

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 24 年度

修士論文

ダイポール磁場中の純電子プラズマ平衡状態の
運動論的計算と実験的検証

2013 年 2 月 1 日 (金) 提出
指導教員 吉田 善章 教授

47116086 笠岡 紀和

目次

第1章 本研究の背景と目的	4
1. 1 非中性プラズマの研究	4
1. 2 ポイントダイポール磁場中の平衡	5
1. 3 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置RT-1での純電子閉じ込め実験	6
1. 4 RT-1磁場中の純電子プラズマの電位平衡計算	7
1. 5 本研究の目的と概要	7
第2章 ダイポール磁場中の運動論的平衡モデルと数値解析	8
2. 1 原理	8
2. 1. 1 ポイントダイポール磁場	8
2. 1. 2 運動論的平衡モデル	10
2. 2 軌道計算の方法と精度	14
2. 2. 1 運動方程式を解く軌道計算	14
2. 2. 2 磁力線を追跡する軌道計算	30
2. 3 軌断熱不変量を用いた密度プロファイルの計算方法	34
2. 4 計算結果と解析解との比較	40
2. 4. 1 ケミカルポテンシャルの範囲	40
2. 4. 2 熱運動のみを拘束条件に加える場合	44
2. 4. 3 熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加える場合	46
2. 4. 4 熱運動とサイクロトロン運動とバウンス運動を拘束条件に加える場合	49
2. 5 まとめと考察	56
第3章 RT-1磁気圏型非中性プラズマの運動論的平衡	57
3. 1 磁場のみを考慮した場合	57
3. 1. 1 RT-1磁気圏型磁場配位	57
3. 1. 2 軌道計算の方法と精度	61
3. 1. 3 計算結果	73
3. 1. 3. 1 ケミカルポテンシャルの範囲	73
3. 1. 3. 2 熱運動のみを拘束条件に加える場合	78
3. 1. 3. 3 熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加える場合	80
3. 1. 3. 4 熱運動とサイクロトロン運動とバウンス運動を拘束条件に	82
3. 1. 4 まとめ	84
3. 2 RT-1磁場配位で電場を考慮した平衡	85
3. 2. 1 原理	85
3. 2. 2 計算の概要	86
3. 2. 3 計算結果	91
3. 2. 3. 1 ケミカルポテンシャル依存性	91
3. 2. 4 まとめと考察	103

第4章 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置RT-1での純電子プラズマ実験.....	104
4.1 実験の目的と概要.....	104
4.2 原理.....	104
4.2.1 エミッシブプローブ法.....	104
4.3 実験装置.....	105
4.3.1 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1.....	105
4.3.2 電子銃.....	106
4.3.3 測定プローブ.....	107
4.3.4 測定器配置図.....	108
4.3.5 測定用回路.....	111
4.4 実験方法と結果.....	115
4.4.1 浮遊電位測定.....	115
4.4.2 IV特性.....	119
4.4.3 電子銃入射中の揺動計測.....	125
4.5 実験のまとめと考察.....	129
第5章 結論.....	130
5.1 本研究の目的に対する成果.....	130
5.2 今後の検討事項.....	131
APPENDIX.....	132
参考文献.....	150
本研究の業績.....	150
謝辞.....	150

第 1 章 本研究の背景と目的

1. 1 非中性プラズマの研究

非中性プラズマとは、主として 1 成分の荷電粒子で構成され、電氣的に中性ではない荷電多粒子系を言う。通常の中性プラズマ（正と負の電荷を持つ荷電粒子で構成され、平均して電荷が 0 であるようなプラズマ）では縮退していた自己電場の効果が表れ、それが集団の運動や構造を支配する。磁場が無ければ粒子間の斥力により散逸していくが、上手く磁場や電場を与えることにより粒子にかかる力とプラズマの流れがバランスし熱平衡状態を作る。これは外力を受けた粒子群が自ら安定した状態へ移行（緩和）する非平衡過程であり、統計力学的に言えば系のエントロピーが最大となる。これは非線形科学の主要テーマである自己組織化の 1 テーマである。

非中性プラズマの研究は 20 世紀初頭から始まり、様々な閉じ込め装置が開発されてきた。これにより原子の構造の解明や、基底状態における超微細準位遷移を利用した原子時計の開発など [1]、多くの成果を出しており、将来は反物質閉じ込めへの応用が考えられる [2]。また、銀河などの集団現象の解明とも類似性があり [1]、理学・工学の幅広い分野での活躍が期待される。ここでは本研究の背景として、主な 2 種類の閉じ込め装置を紹介する。直線型の磁力線で閉じ込める Penning (Malmberg) トラップと閉じたトーラス状の磁力線に閉じ込める方法である。

Penning トラップでは一方向に長い円柱容器の両端にコイルを配置し直線状の一様磁場をかけ、さらに両端からポテンシャル井戸を容器内に与えることで荷電粒子を閉じ込める。すると、磁力線周りの早い時間スケールでの回転と、閉じ込め領域中心周りのゆっくりした回転が起こる。後者の回転を熱平衡状態での剛体回転とモデル化すれば、回転座標系で Boltzmann 分布をするハミルトニアンと Poisson 方程式との self-consistent な解を求めることで密度が一様の平衡解が得られる [1]。これを Penning 平衡と呼ぶ。また、剛体回転の周波数をダイオコトロン周波数と呼び、低密度での剛体回転の速度は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度で近似できる。この詳しい定量的説明は APPENDIX A-1 に示す。この様な密度の剛体回転は、緩和状態の簡単な一例である。

Penning トラップは開放端であるため、高エネルギー粒子はポテンシャル井戸の外に出てしまい長時間閉じ込めには向かない。そこで磁力線が閉じたトーラス型の閉じ込め装置が考案された。当研究室では Proto-RT 実験装置 (Prototype Ring Trap) が開発され、装置内部のトーラス状の導体リングによりダイポール磁場が作られる。リングはロッドで支えられリング表面と真空容器表面の電位が 0 となるため、外部電場が無いとプラズマ中で電場の向きが逆転する。そのため $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの向きの違いからシャー流となる。しかし、リングに適当なポテンシャルを与えることで 0.1(s) 程度の閉じ込めに成功した [3]。さらに当研究室では近年、RT-1 (Ring Trap) 実験装置が開発された [4]。装置内部のコイルは超電導製で磁気浮上が可能で、コイル表面の電位はコイル周りの非中性プラズマの電位と self-consistent に決まる。そのため、外部から電場を与えなくても自発的に非中性プラズマの剛体回転が生成される。さらにこの緩和状態は Penning Trap と異なり密度が非一様で構造を持つ。RT-1 に関しては 1.3 で述べる。

1. 2 ポイントダイポール磁場中の平衡

長谷川は[5]で、ダイポール磁場中のプラズマが平衡状態となると、速度分布関数は磁気面関数 ψ (第3断熱不変量) に直接依存せず、flux tube (APPENDIX A-2 参照) 体積内の粒子数は一定となることを述べている。磁場は r^3 に、flux tube 体積は r^4 に、密度は r^{-4} に比例することから、密度は中心に向かって急な勾配を持つ分布となる。そこで、プラズマ源をダイポール磁場の外側に配置し、RF を印加して第3断熱不変量である ψ の保存を壊し、平衡状態に向かう内向き輸送を利用して中心部にプラズマを閉じ込める核融合炉を提案している。

長谷川はこの議論を精密化するために、[6]でポイントダイポール磁場中での荷電粒子の運動に関して、次のことを述べている。電子は磁力線周りのサイクロトロン運動、ミラー効果によるバウンス運動、トロイダル方向へのドリフト運動という3つの周期運動に分け、ハミルトニアンを3つの作用 (μ, J_2, ψ) とそれらの角変数で表すことができる。運動は可積分で、作用は運動の定数となる。位相空間上でこれらを変数とする分布関数を積分すれば全粒子数 N が得られる。この式は[6]式(31)より

$$N = \iiint f(\mu, J_2, \psi) d\mu dJ_2 d\psi \quad (1.1)$$

で表さる。このヤコビアン $d\mu dJ_2$ を直交座標系での速度空間で表すとおよそ r^4 に比例するので、やはり密度は r^{-4} に比例し、中心に向かって急な勾配を持つ分布となる。このように、ポイントダイポール磁場中の荷電粒子は作用と角変数を運動の変数と選んでも、ハミルトニアンや分布関数が書き表せる。

吉田は[7]で、長谷川のモデルがエネルギーに関して無制限になっていることを批判し、断熱不変量をもつ力学系の不変測度を構成して、エントロピー原理から熱平衡分布を導いている。その結果は、全エネルギー、全粒子数を一定にする拘束条件のほかに、荷電粒子が拘束される周期運動の全断熱不変量 (作用) を拘束条件に付け加え、統計的エントロピーを最大にする変分計算を行うことで次のように与えられる。中性を仮定した場合の分布関数は[7]式(8)より

$$f_{\alpha, \gamma} = Z^{-1} e^{-(\beta H_c + \alpha \mu + \gamma J_{||})} \quad (1.2)$$

ただし、 Z は規格化定数、 β は温度の逆数、 $\alpha \cdot \gamma$ はラグランジュ未定乗数、 $\mu \cdot J_{||}$ はそれぞれ第1断熱不変量 (磁気モーメント) ・第2断熱不変量 (バウンス作用) である。長谷川のモデルと比べると、エネルギー H_c が含まれる。つまり、長谷川のモデルは温度無限大 ($\beta=0$) の極限に相当することが分かる。この式は周期運動に捕捉されるという現象が運動の定数の形で分布関数の中に具体的に導入され、実際に分布関数を数値計算すれば密度の分布を求めることができるという点で有効である。ただし、計算の際にヤコビアン $d\mu dJ_{||}$ を直交座標系での速度空間で表す必要がある。 μ は磁場強度の関数となり、磁場配位が与えられれば解析的に式が求まる。 $J_{||}$ のヤコビアンを求めるとはバウンス運動の軌道の長さが必要となるが、解析的に式を得ることができない。[7]ではバウンス運動の軌道上の磁場強度を調和振動と近似 (磁場強度を2次まで展開している) し、 $J_{||}$ のヤコビアンを計算している。その結果、直交座標空間において密度は中心に向かって急峻となる非一様な分布となる。これは Penning トラップのように一様磁場では縮退していた断熱不変量が、ダイポール磁場という非一様な磁場では周期運動の時間スケールの違いが顕著となり運動の階層

化が起こるため、構造形成の要因となる。また、流体モデル (APPENDIX A-3) では等電位面と磁気面が一致する結果となるが、この計算で完全に一致しないことが示される。さらに、 J_{\parallel} の評価を近似ではなく、荷電粒子の運動方程式からバウンス軌道を計算することで行えば、式(2)の精度が上がり、軌道計算に電場を反映させれば中性から非中性の計算へ発展させることが可能である。本研究の運動論的計算ではこれを行う。

1. 3 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1 での純電子閉じ込め実験

磁気圏型磁場でのプラズマ閉じ込めのアイデアはボイジャー2号の木星磁気圏の観測に遡る。[8]によれば、木星の中心からその半径の30倍の距離より内側に多種の高温プラズマが存在し、イオンのエネルギースペクトルから10(keV)単位の温度、100(km/s)単位の速度でプラズマ流があることが示される。その後、長谷川は[5]でダイポール磁場を用いた核融合炉を提案し、従来のトカマクやステラレータ装置の問題点として核融合生成物の中性子の壁負荷を挙げている。これは真空容器内でリチウムブランケットをプラズマとトロイダル方向のコイルの間に配置することから生じている。ダイポール磁場を用いる利点として、リチウムブランケットをプラズマから離れた場所に置くためにこれらの問題を避けることができる。さらに長谷川は[9]で、D-T燃料が持つ中性子の放出や壁への負荷・放射化、トリチウムの扱い方、高コスト性を指摘し、D-³Heを燃料としたダイポール磁場による核融合炉を提案している。

これらの経緯から近年、磁気圏型磁場プラズマ閉じ込め装置 RT-1 が創られた[4]。RT-1 は真空容器中に超電導コイルを浮上させて磁気圏型磁場を作る。中性プラズマの電子加熱実験では局所 β 値が70(%)、閉じ込め時間が0.5(s)の高性能プラズマが生成された。

次に、本研究に関連する純電子を用いた非中性プラズマの実験について[10]に即して述べる。電子銃から電子を入射する間は揺動が起こり、電子銃の位置よりも内側に密度のピークがあることが接触プローブによって確認された。電子密度は $10^{11}(\text{m}^{-3})$ のオーダーである。電子銃入射後はプラズマに接触しない wall プローブにより鏡像電荷が測定され、10(kHz)程度の周波数で300(s)もの長い時間、プラズマがコイル付近に大きな密度を保ったまま剛体回転していることが明らかにされた。

この一連の測定は、電子銃入射中の揺動がプラズマを内向きに拡散させ剛体回転の平衡状態に至ることを示しており、第3断熱不変量である ψ の保存が壊れ内側に密度のピークを持つ平衡状態になるまで内向き拡散する長谷川の予言に合致する。さらに、密度のピーキングは内側で抑制されていることが示され、これは吉田の理論が指摘するように有限なエネルギー(温度)の制限があるためと考えられる。Penning Trap や Proto-RT の純電子実験では外部電場をかけることで剛体回転の平衡状態を作っていたが、RT-1 では電子が自発的に揺動を起こし構造を作るという点でより自然な緩和現象といえる。

電子銃入射中の測定は、接触プローブが電子の障害物となり完全な剛体回転状態を実現することはできないが、プローブによって測定された電位分布が剛体回転を仮定して求めた電位分布と近いことから準剛体回転をしていると言える。RT-1 にはコイル電流中心 $R=0.25(\text{m})$ の位置で Z

方向を測定できるポートがあるが、電子銃実験にはまだ使われていない。そこで電子銃入射中にこの区間の空間電位、密度、揺動分布が分かれば、電子銃入射中の準剛体回転状態の理解がさらに深まる。本研究の実験的検証ではこの測定を行う。

1. 4 RT-1 磁場中の純電子プラズマの電位平衡計算

1.3 の RT-1 実験で示された剛体回転する純電子プラズマの密度分布をある関数形で表し、Poisson 方程式を解いて電位の平衡解を求める計算コードが古川准教授（現鳥取大工学部）により作られた。例えばコイル中心付近で最大となるような密度分布の関数を与えると、真空容器表面とコイル表面に与えた境界条件を満たすように電位が平衡計算され、R 方向の外側に向かって密度が増加する結果となる (APPENDIX A-4)。この計算は電子のサイクロトロン運動やバウンス運動の磁場による拘束の効果が入っておらず、点電荷が剛体回転時に境界条件を満たすために、どのように配置されるかの計算を行っている。本研究ではこの計算に 1.2 の断熱不変量を用いた運動論的計算を加えることで、周期運動の束縛が考慮された純電子プラズマの平衡状態を求める。この計算により、密度と電位が self-consistent な解が得られ RT-1 での純電子プラズマ実験への理解が深まる。

1. 5 本研究の目的と概要

ダイポール磁場中の純電子プラズマの平衡状態は前節までに述べた通り、理論では運動の階層構造を基にした統計力学的な平衡状態で記述され、断熱不変量を用いた運動論的な計算法が提案されている。実験では剛体回転の平衡状態が実証されており、さらに準剛体回転での計測に余地が残されている。そこで本研究ではダイポール磁場中の純電子プラズマの平衡状態を運動論的計算と実験の両方面から検証を行い、理論のパラメータと実験のパラメータ両方で横断的に理解する。

運動論的計算では、まず式(1.2)で近似されていた J_{\parallel} を電子の運動方程式を数値計算することで求め断熱不変量を用いた計算を行い、ポイントダイポール磁場の平衡計算の精度を上げる。そして RT-1 磁場に計算を拡張し、最終的には 1.3 の非中性プラズマ実験を模擬するため、1.4 の Poisson 方程式の平衡計算に運動論的計算を加え、密度と電位の self-consistent な平衡解を求める。この一連の計算は、自己組織化する緩和状態を運動の断熱不変量を用いて解くという新しい試みである。

実験では剛体回転中のプラズマの密度や電位分布の測定は困難であるが、電子銃入射中の準剛体回転状態では接触プローブを用いて調べることができる。まだ行われていないためコイル真上の Z 方向の測定を行う。また本研究では平衡状態を対象としているが、不安定性（第 3 断熱不変量の破壊）から平衡状態へ至る過程の研究に関連した電子銃入射中の揺動測定も行う。

第2章 ダイポール磁場中の運動論的平衡モデルと数値解析

この章では 1.2 での先行研究のモデルを引用し、数値解析を行う。

2. 1 原理

2. 1. 1 ポイントダイポール磁場

この節では磁気双極子が遠方に作る磁場、ポイントダイポール磁場での電子の運動を考える。円柱座標系でのベクトルポテンシャル、磁場強度は次式となる（導出は APPENDIX B-1 と B-2 で述べる）。ただし、磁気モーメントを計算するパラメータは、3章で実験装置 RT-1 磁場中での電子の運動も考えることから、次の RT-1 の磁気モーメントの値を用いる。 $I = 2.5 \times 10^5(A)$, $a = 0.25(m)$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ である。

$$\begin{aligned} A_R = A_Z = 0 \\ A_\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

この等高線を次の図 2.1.1 に示す。式(2.1)より磁気面値は原点で無限大となり、図 2.1.1 より全ての等高線は原点付近を通る。次に磁場強度を求める式を示す。

$$\begin{aligned} B_R = (\nabla \times \mathbf{A})_R &= \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \frac{RZ}{(R^2 + Z^2)^{5/2}} \\ B_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi &= 0 \\ B_Z = (\nabla \times \mathbf{A})_Z &= \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} - \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

この等高線を図 2.1.2 に示す。式(2.2)より原点で値が無限大となる。

以上より、原点では磁場強度が無限大となり、原点付近には全ての磁気面の等高線が集まる。よって原点付近の取り扱いが難しいことが予想される。サイクロトロン運動の周波数 ω_c と周期 T は

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2.3)$$

と磁場強度の関数となる。図 2.1.3 に周波数と周期の等高線図を示す。

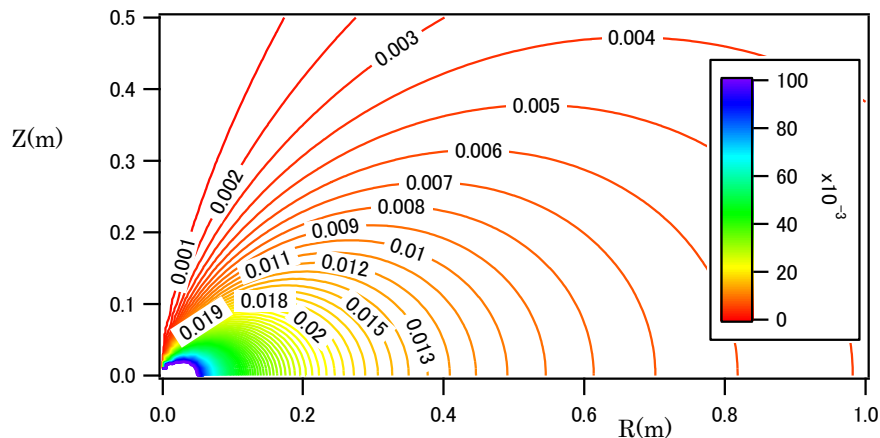


図 2.1.1 ポイントダイポール磁場の磁気面値

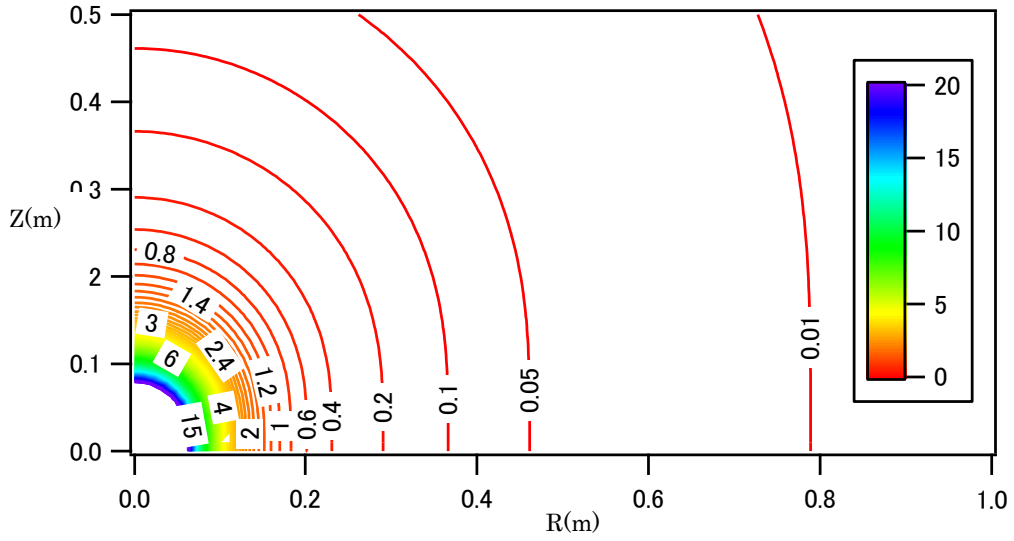


図 2.1.2 ポイントダイポール磁場強度

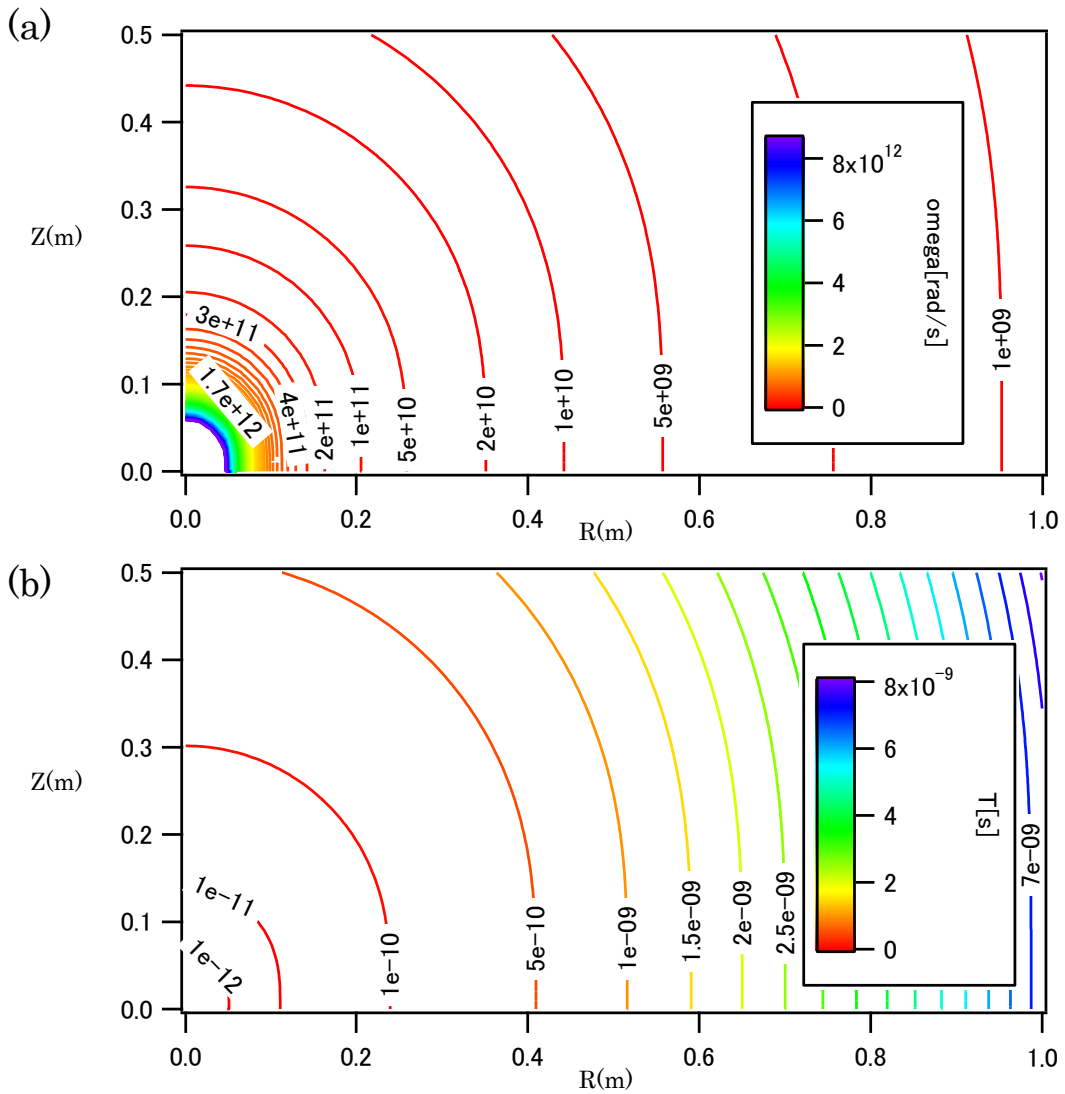


図 2.1.3 (a)サイクロトロン運動周波数 (b)サイクロトロン運動周期

2. 1. 2 運動論的平衡モデル

ダイポール磁場中の荷電粒子はマイクロなスケールから順番に、サイクロトロン運動、バウンス運動、ドリフト運動の3種類の周期運動を行う（それぞれの解説は APPENDIX B-3 に示す）。

長谷川は[6]で、ポイントダイポール磁場中の運動を作用と角変数で表せると述べている。

サイクロトロン運動の場合、[6]式(26)より

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint mv dx = \frac{1}{2\pi} \oint mv^2 dt = \frac{1}{2} \frac{mv_0^2}{\omega_c} \left(= \frac{w_{\perp}}{\omega_c} \right)$$

バウンス運動の場合、[6]式(27)より

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint v_{\parallel} ds \quad \text{となるが本研究では} \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint mv_{\parallel} ds \quad \text{の定義を用いる。}$$

トロイダル方向の運動の場合、その周波数がサイクロトロン周波数より十分小さいとすれば[6]中の式(28)より

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint P_{\phi} d\phi \cong \frac{1}{2\pi} \oint eA_{\phi} r \sin\theta d\phi = \frac{e}{2\pi} \psi$$

となり、ハミルトニアンはこれらの作用と周波数で表せる。[6]中の式(29)より

$$H = J_1\omega_c + J_2\omega_b + J_3\omega_d$$

となる。本研究ではこれらの作用 $J_1 \sim J_3$ を断熱不変量と呼び、上式で定義する。RT-1 実験装置での運動の周波数のオーダーは、サイクロトロン運動が GHz、バウンス運動が MHz、ドリフト運動が KHz となり時間スケールの階層を成している。さらに、実験座標空間で非一様なダイポール磁場中では運動の保存量が空間非一様となり、この階層が密度非一様な構造として出現する。周期運動は、運動と同程度の周波数の擾乱を受けると保存量が壊れる。これら3つのうちドリフト運動の保存量が最も壊れやすく、サイクロトロン運動のが最も壊れにくい。そのため電子の最も基本となる運動がサイクロトロン運動で、それにバウンス運動、ドリフト運動が順に拘束に加わっていくと考える。先に結論を述べると、サイクロトロン運動の拘束により密度は磁場強度の強い所に集まり、バウンス運動を加えると跳ね返りの効果により $Z=0(\text{m})$ の赤道面上に密度が集まる (APPENDIX B-3)。このようにして階層が構造として出現することになる。

定式化を行おう。直交座標系でのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + q\phi$$

である。ここでは電場の影響を考えないとし $\phi = 0$ とする (ϕ が有限な場合は 3.2 節で扱う。直交座標系の原点は任意に選べるので、サイクロトロン運動の旋回中心に選ぶ。これらの位置関係をを図 2.1.4 に示す。ドリフト運動を Y 軸に、磁力線の向きを Z 軸に一致させる。

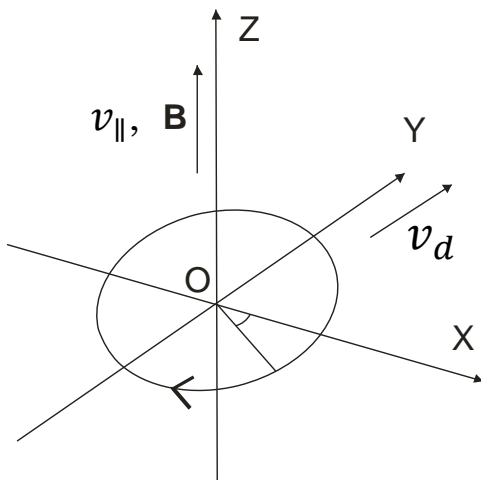


図 2.1.4 旋回中心を原点とする直交座標系

サイクロトロン運動の速度を \mathbf{v}_c 、バウンス運動の速度を \mathbf{v}_\parallel 、ドリフト運動の速度を \mathbf{v}_d とすればそれらの向きは図 2.1.4 となる。 \mathbf{v}_c を XY 方向に分解すると

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{cx} + \mathbf{v}_{cy}$$

となりハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}mv_{cx}^2 + \frac{1}{2}m(v_{cy} + v_d)^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2$$

である。ここで、サイクロトロン運動とバウンス運動のミクロなスケールで考えると、スケールが大きい v_d を無視して考えることができる。すると

$$H = \frac{1}{2}mv_{cx}^2 + \frac{1}{2}mv_{cy}^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2$$

となる。

まず、磁場が無い熱平衡状態を考える。電子は周期運動の拘束が無いブラウン運動をすると仮定すれば、位相空間上の全ての点での状態の確率は等しく、速度分布は温度で指定された Gibbs 分布に従う。この分布は空間一様なので、これを速度空間で積分した密度は空間一様となる。これを定式化する。ある速度ベクトルの原点を図 2.1.4 の座標系の原点にとり、XYZ 成分に分解すればそれぞれ v_{cx} 、 v_{cy} 、 v_\parallel と表せる。このとき流れはないので $\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ である。ある位置(X,Y,Z)での速度空間上での分布関数 f を求める。統計的エントロピーは

$$S = - \int f \ln f d^3v$$

で表せる。全粒子数 $N = \int f d^3v$ 、全エネルギー $\bar{H} = \int f H d^3v$ が一定で温度が β で与えられるカノニカルアンサンブルでの Gibbs 分布（熱平衡状態）では S が最大となる。 N と H が一定という拘束条件のもと、 S を最大とする変分問題（ラグランジュ未定乗数法）

$$\delta(S - \beta\bar{H} - \lambda N) = 0$$

を解けば

$$\frac{\partial}{\partial f} f(\ln f + \beta H + \lambda) = 0$$

$$f(v_{cx}, v_{cy}, v_\parallel) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H), \quad (Z = \exp(-\lambda - 1))$$

となり、これを積分した値。

$$\begin{aligned} \rho(X, Y, Z) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f dv_{cx} dv_{cy} dv_\parallel \\ &= \frac{1}{Z} \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_{cx}^2 + \frac{1}{2}mv_{cy}^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2\right)\right\} dv_{cx} dv_{cy} dv_\parallel \quad (2.4) \\ &= \frac{1}{Z} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

がその位置での密度となり、場所によらない一定値を表す。

次に、磁場がある場合を考える。サイクロトロン運動、バウンス運動により運動が拘束され、XYZ 座標を用いた位相空間では分布関数が Gibbs 分布でなくなる。簡単のためまずはサイクロト

ロン運動による拘束を考える。準備として次の計算を行う。図 2.1.4 の XY 平面上の速度積分を v_c を用いて極座標上で積分を行う。すなわち

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dv_{cx} dv_{cy} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} v_c dv_c d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} v_c dv_c \quad (2.5)$$

ここで、第 1 断熱不変量 μ を用いれば

$$\mu = \frac{m^2 v_c^2}{2qB} = \frac{m v_c^2}{2\omega_c}$$

$$d\mu = \frac{m}{\omega_c} v_c dv_c, \quad v_c dv_c = \frac{\omega_c}{m} d\mu$$

となり、式(2.5)は

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dv_{cx} dv_{cy} = \frac{2\pi\omega_c}{m} \int_0^{\infty} d\mu \quad (2.6)$$

と変形できる。

サイクロトロン運動は周期運動なので、エネルギーを周波数と作用（断熱不変量）を用いて次のように量子化できる。 μ を第 1 断熱不変量、 ω_c はサイクロトロン周波数、 θ_c は位相とすれば

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (v_{cx}^2 + v_{cy}^2) = \mu \omega_c, \quad \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B q}, \quad \theta_c = \omega_c t$$

この変数変換により、考える位置での位相空間が (X, P_X, Y, P_Y, Z, P_Z) から (θ_c, μ, Z, P_Z) を変数とする位相空間に正準変換され、ハミルトニアンは

$$H = \mu \omega_c + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$$

となる。拘束条件を加えなければ、密度は

$$\begin{aligned} \rho(X, Y, Z) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f dv_{cx} dv_{cy} dv_{\parallel} \\ &= \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta\left(\mu\omega_c + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2\right)\right\} \frac{2\pi\omega_c}{m} d\mu dv_{\parallel} \\ &= \frac{1}{Z} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

となり、式(2.4)と同じ結果となる。変数変換を行っても、密度は変わらないというごく当たり前の結果である。ここで全磁気モーメント $M_c = \int f \mu d^3 v$ が保存するという拘束条件を課し、同様にエントロピーを最大にする変分問題を解けば

$$f = \frac{1}{Z} \exp\{-\beta H - \alpha \mu\}$$

となり、密度は

$$\begin{aligned} \rho(X, Y, Z) &= \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta\left(\mu\omega_c + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2\right) - \alpha \mu\right\} \frac{2\pi\omega_c}{m} d\mu dv_{\parallel} \\ &= \frac{2\pi}{mZ} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{1/2} \frac{\omega_c}{\beta\omega_c + \alpha} \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。XYZ 座標系での密度がサイクロトロン周波数（磁場強度の関数）に依存する、つまり XYZ 空間に依存することが分かる。

さらにバウンス運動の拘束を加えることを考える。バウンス運動の場合、 J_{\parallel} を第 2 断熱不変量、 ω_b はバウンス周波数、 θ_b は位相とすれば

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = J_{\parallel}\omega_b, \quad J_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint mv_{\parallel} ds, \quad \theta_b = \omega_b t$$

と量子化でき、この変数変換により、位相空間が (θ_c, μ, Z, P_Z) から $(\theta_c, \mu, \theta_b, J_{\parallel})$ を変数とする位相空間に変換される。変数変換の際のヤコビアンは

$$dv_{\parallel} = \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}}, \quad (L_{\parallel} \text{は位相空間上でのバウンス軌道長})$$

である。全バウンスモーメント $M_b = \int f J_{\parallel} d^3v$ が保存するという拘束条件を課し、同様にエントロピーを最大にする変分問題を解けば

$$f = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H - \alpha \mu - \gamma J_{\parallel})$$

となり、密度は

$$\rho(X, Y, Z) = \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\beta(\mu\omega_c + J_{\parallel}\omega_b) - \alpha\mu - \gamma J_{\parallel}\} \frac{2\pi\omega_c}{m} d\mu \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} \quad (2.9)$$

である。このように運動の作用を変数とする XYZ 空間での密度分布が得られる。この系は統計力学で言うグランドカノニカルアンサンブルであり、 β は温度の逆数で、 α と γ はケミカルポテンシャルを表す。全磁気モーメントと全バウンスモーメントを先に与えることでケミカルポテンシャルの値を求めるのが常套であるが、本研究ではケミカルポテンシャルが既知として先に与え、全磁気モーメントと全バウンスモーメントを未知の量として扱う。そして、ケミカルポテンシャルをパラメータとし、実験に合う値を探す。

拘束条件を加える理由は、XYZ 空間上で、電子はサイクロトロン運動とバウンス運動の周期運動に補足されるからである。そのため XYZ の位相空間 (X, P_X, Y, P_Y, Z, P_Z) で確率分布が等分率にならず、分布関数の形が変わる。XYZ 空間上の 1 点の密度は、その点での速度空間上の分布関数を積分することで得られる。XYZ 空間により異なる分布関数を積分するのだから XYZ 空間では密度が非一様となる。しかし、作用と角変数 $(\theta_c, \mu, \theta_b, J_{\parallel})$ の位相空間上では全ての点が等分率で表せるので、Gibbs 分布に従い一様な分布となる。理論家にとっては位相空間で考える方が便利であるが、実験家には都合が悪い。本研究では位相空間から実験座標系へ座標変換することで、非一様な密度計算を行っている。

これまでは周期運動の拘束条件を加えることで分布関数に $\alpha\mu$ 、 γJ_{\parallel} が加わると考えてきた。見方を変えてハミルトニアンが

$$H_{\alpha, \gamma} = H + \frac{\alpha}{\beta} \mu + \frac{\gamma}{\beta} J_{\parallel} = H + \bar{\alpha} \mu + \bar{\gamma} J_{\parallel}$$

と変換されたと考え、ハミルトンの運動方程式に代入する。状態変数を \mathbf{z} とすれば μ と J_{\parallel} はそれによらない運動の定数なので

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = J\partial_z(H + \bar{\alpha}\mu + \bar{\gamma}J_{\parallel}) = J\partial_z H$$

となり運動は変化しない。このような関数をエネルギーカシミール関数とよび

$$H_{\alpha} = H - \alpha\mu$$

で表される。ここで μ はカシミール量と呼ばれる保存量で、運動の保存量はカシミール量である。

本研究では今後式(2.9)を計算するコードを作成する。そのためには後述するが、電子の運動方程式を解き、断熱不変量 μ と J_{\parallel} を計算しなければならない。

2. 2 軌道計算の方法と精度

軌道計算により断熱不変量 μ と J_{\parallel} を求めることを考える。具体的に以下の作業を行う必要がある。ポイントダイポール磁場中で、電子に初期位置と初期速度を与えた際の軌道の時間発展を計算し μ と J_{\parallel} を求めるプログラムの作成と、 μ と J_{\parallel} や運動エネルギーが保存されていることの確認である。さらに理論に基づいた別の計算方法も紹介し、両者の優劣を述べる。

2. 2. 1 運動方程式を解く軌道計算

電子の運動方程式を解いて軌道を求める方法について述べる。XYZ 座標系で電子の運動方程式を解く。磁場が与えられると電子は磁力線に巻きついて運動する。ポイントダイポール磁場は Z 軸に関して回転対称なので、図 2.2.1 のように XZ 平面上の磁力線上の運動を取り出して考える。

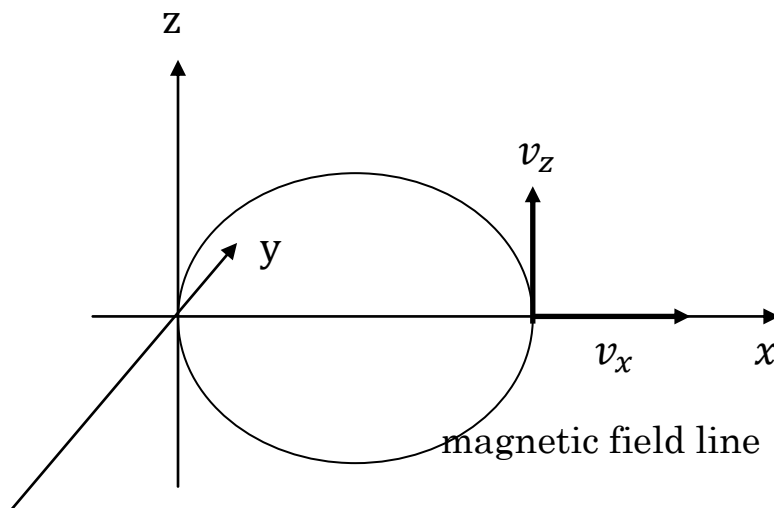


図 2.2.1 軌道計算の初期条件。磁力線に垂直方向の速度は x 方向のみ与える。

初期条件として X 軸上の点で X,Z 方向に任意の速度を与えた時の運動を考える。このとき Y 方向には速度を与えない。なぜなら X と Y 方向の速度は磁力線に垂直な方向の 1 速度成分に変換して考えるので、X 方向だけを与えて考えるようにすれば簡単だからである。図 2.2.1 に XZ 平面上の磁力線と、電子の初期位置、初期速度の向きを示す。今後、磁力線に垂直方向を下付きの \perp 、平行方向を下付きの \parallel で表す。

電子の運動方程式

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

を 4 次のルンゲクッタ法を用いて時間発展を計算し軌道を求める。電場は 3.1 節で考えるので、ここでは 0 とする。その際、相対論効果を考慮していない (γ の計算だけは行い相対論効果がほぼ無視できることを今後示す)。 μ と J_{\parallel} は次の式を用いて求める。

$$\mu = m^2 v_c^2 / 2qB$$

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint m v_{\parallel} ds$$

一様磁場中を運動する場合、 μ は定数で初期位置での値を保つ。しかし、ポイントダイポール磁場は非一様なため、電子はサイクロトロン運動を 1 周する間に、わずかに磁場強度の変化を受け、 μ は変動する。そのため μ をサイクロトロン運動 1 周期の平均値と定義する。つまり 1 周期分のデータ数を n とすれば

$$\mu = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m^2 v_c^2(\mathbf{x}_i)}{2qB(\mathbf{x}_i)} \right) / n$$

となる。 J_{\parallel} はバウンス軌道に沿っての周回積分となる。このバウンス軌道を以下の通り定義する。

- ・ 初期位置が赤道面上にある場合：初期位置 → 跳ね返り点 → 赤道面 → 跳ね返り点 → 赤道面
- ・ 初期位置が赤道面上にない場合：1 回目に赤道面を通過する点 → 跳ね返り点 → 赤道面 → 跳ね返り点 → 赤道面

軌道計算の流れ図を図 2.2.2 に示す。

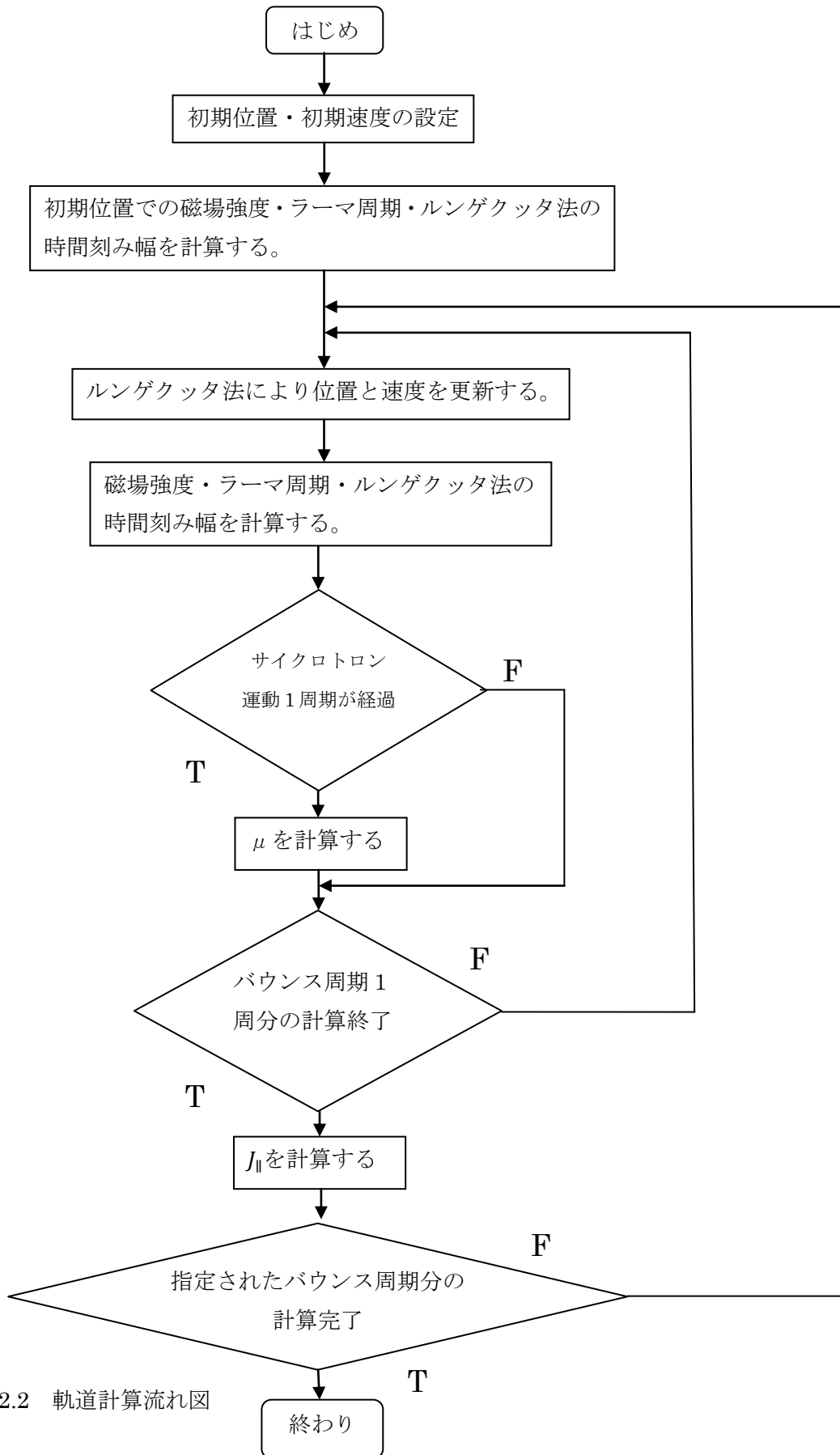


図 2.2.2 軌道計算流れ図

まずは計算の一例を示す。 $R=0.5(m)$ 、 $Z=0(m)$ の点で磁力線に垂直方向、平行方向にそれぞれ $50(eV)$ のエネルギーを持つ電子の軌道を考える。プログラムは XYZ の直交座標が使われているため、 R 軸と X 軸を一致させる。 Y 軸の値はとくに断りがなければ $Y=0(m)$ である。相対論効果を示す γ は 1.0002 となるので考慮しない。

計算条件

- ・初期位置： $R=0.5(m)$ 、 $Z=0(m)$ 、初期エネルギー： $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(eV)$
- ・計算回数：バウンス軌道 15 周期分
- ・ルンゲクッタ法の時間刻み：ラーマ周期の $1/64$ 、最小時間刻みは $1e-15(s)$
(時間刻みはこれが最適であると後に示されるので、ここでは天下一的的用いる)
- ・使用プログラム：ADINV_loop.for

E_{\perp} は図 2.2.1 の v_z 方向に、 E_{\parallel} は v_x 方向に与える。最小時間刻みとは、ルンゲクッタ法の時間刻みの最小値のことである。これを設定しておかないと式(2.3)より、軌道が磁場強度の強い所に行くほど、サイクロトロン周期が小さくなりルンゲクッタ法の 1 回の更新時間を小さくしなければならない。しかし小さすぎると、いくら計算回数を増やしても強磁場側で位置が微少にしか進まず軌道の計算ができない。この最小時間刻みを設定するために、設定値がサイクロトロン周期と同じオーダーになる位置ではサイクロトロン運動を正しく計算できず、間違った軌道計算をする可能性があり、運動方程式を解く手法の欠点である。

計算結果

- ・軌道

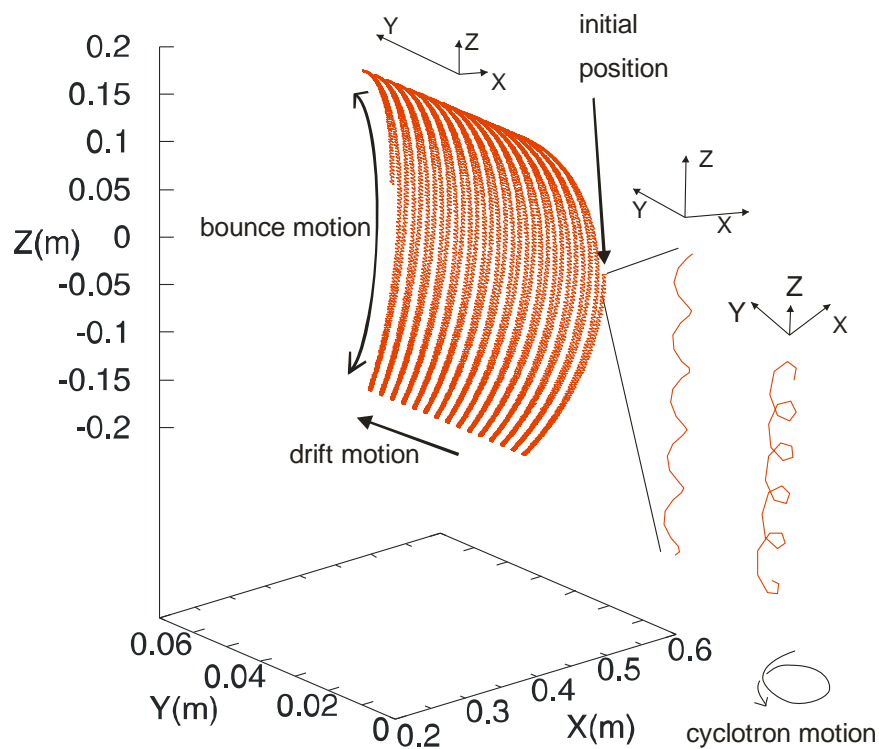


図 2.2.3 軌道図。サイクロトロン、バウンス、ドリフト運動をしていることが分かる。この時間刻みではサイクロトロン運動の軌道が荒くなっている（曲線にならない）。

・ μ と $J_{||}$ の時間変化

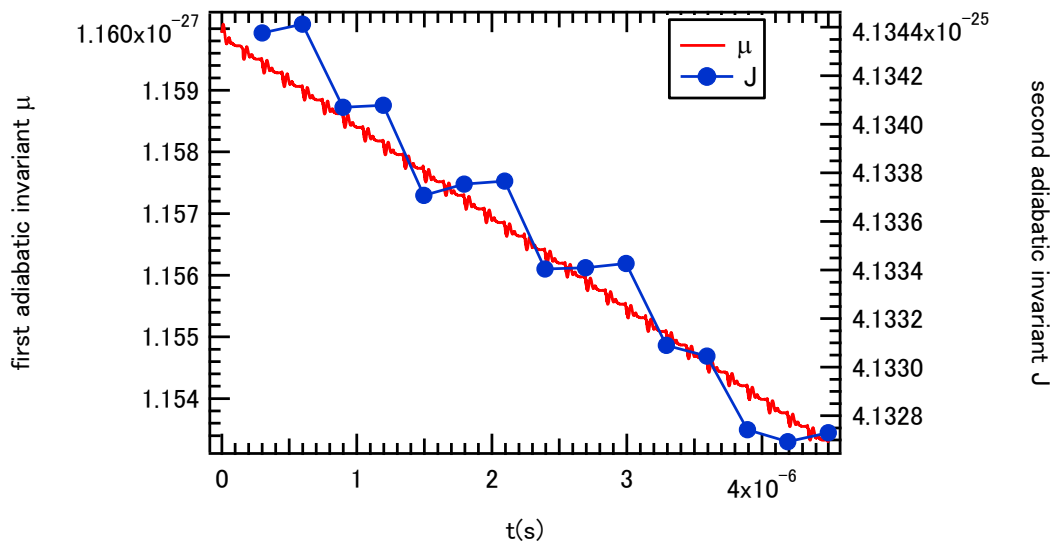


図 2.2.4 μ と $J_{||}$ の時間変化。ともに時間が経過すると減衰していく。時間刻みを小さくすれば減衰はこれより減ることは後で示す。

次に運動エネルギーの時間発展を次の図 2.2.5 で示す。

・ 運動エネルギーと速度

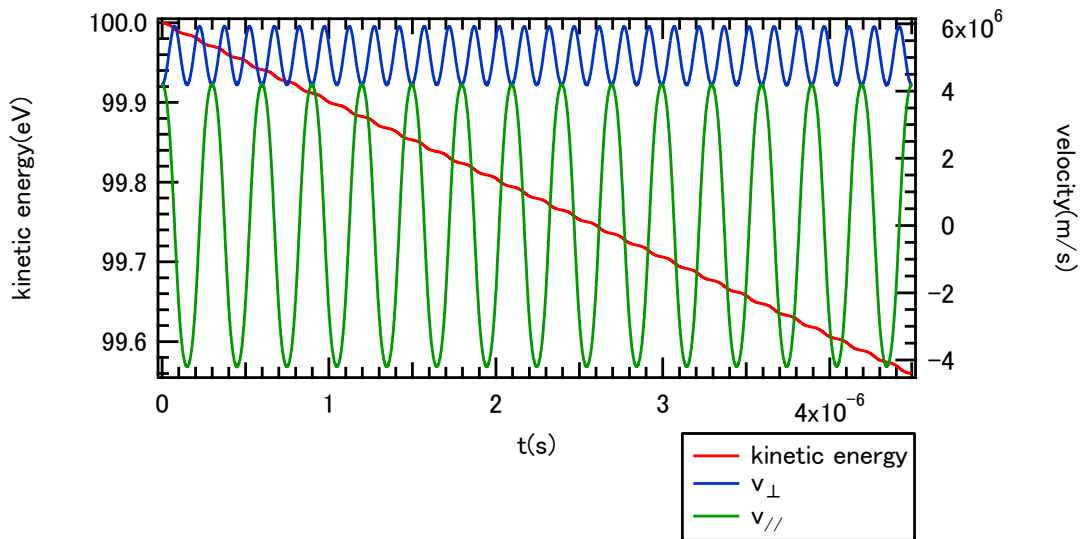


図 2.2.5 運動エネルギーと速度の時間変化。運動エネルギーはこの計算時間で 0.1(%) のオーダーで減衰している。速度の減衰はこの図からは確認できない。時間刻みを小さくし、精度を上げればエネルギーの減衰が減ることは後で示す。

・ 磁場強度と磁気面值

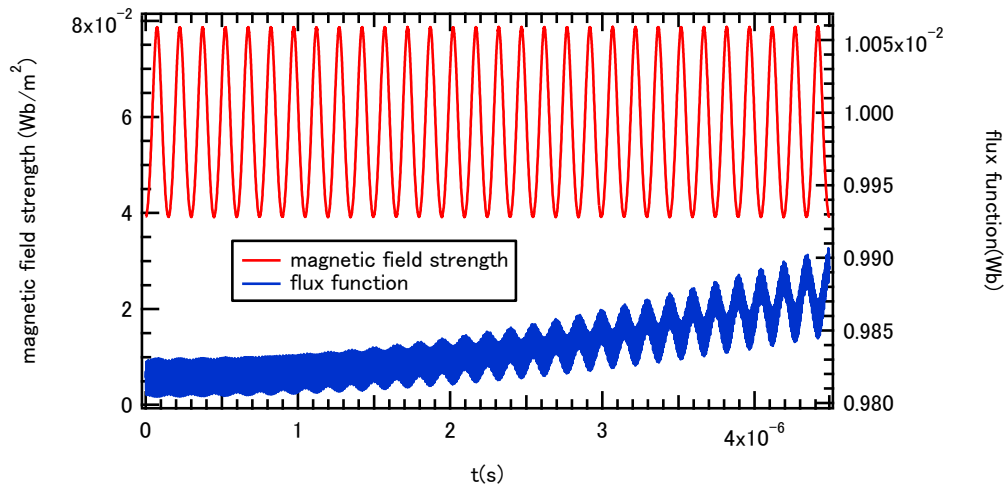


図 2.2.6 磁場強度と磁気面值の時間変化。磁気面值は増加し、運動が内側の磁気面へシフトすることを示す。その結果、磁場強度が若干大きくなり、 $v_{||}$ が減速され μ や $J_{||}$ が減衰すると考える。

この計算条件はピッチ角（初期速度の磁力線方向からの迎角）が 45° である。バウンス運動の軌道の形はピッチ角にのみ依存する（APPENDIX B-3）。そこで、ピッチ角が 24° ($E_{\perp}=10(\text{eV})$ 、 $E_{||}=50(\text{eV})$)、 18° ($E_{\perp}=5(\text{eV})$ 、 $E_{||}=50(\text{eV})$) の軌道を計算し、違いを確認する。

計算条件

- ・ 初期位置： $R=0.5(\text{m})$, $Z=0(\text{m})$
- ・ 初期エネルギー： ① $E_{\perp}=E_{||}=50(\text{eV})$ ② $E_{\perp}=10(\text{eV})$ 、 $E_{||}=50(\text{eV})$ ③ $E_{\perp}=5(\text{eV})$ 、 $E_{||}=50(\text{eV})$
- ・ 計算回数： バウンス軌道 1 周期分
- ・ ルンゲクッタ法の時間刻み： ラーマ周期の $1/64$ 、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
(時間刻みはこれが最適であると後に示されるので、ここでは天下りの用いる)
- ・ 使用プログラム： ADINV_loop.for

計算結果

各条件の軌道を次の図 2.2.7 のように XZ 平面上で表す。

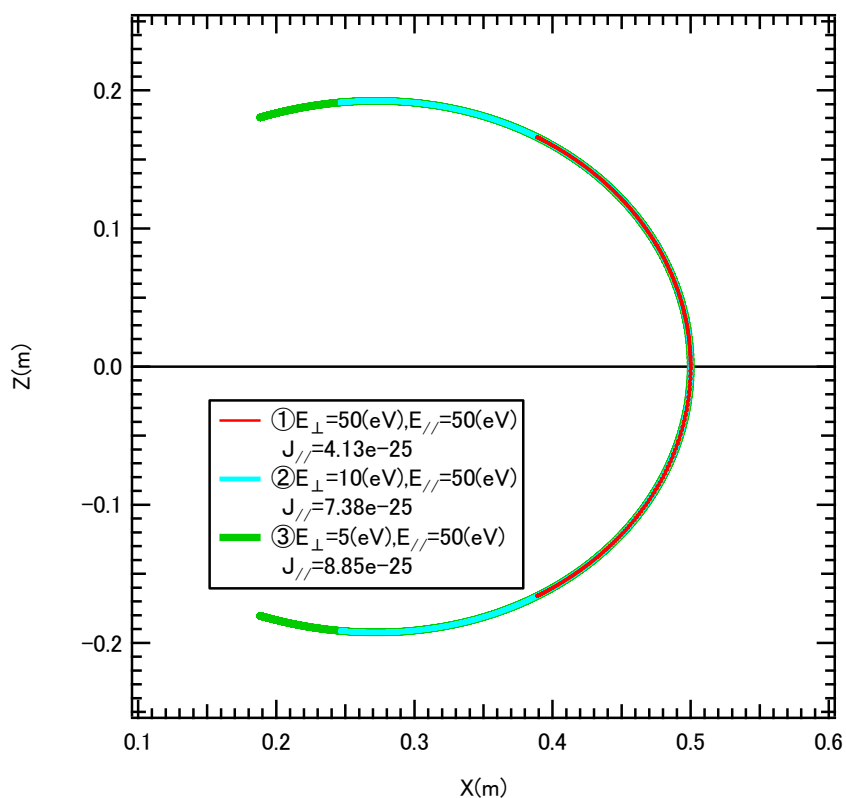


図 2.2.7 軌道のピッチ角依存性。ピッチ角が小さくなるほど軌道が長くなる。これに伴い J_{\parallel} の値も増加する。

さて、図 2.2.4 と 2.2.5 では μ 、 J_{\parallel} 運動エネルギーが減衰したが、次に時間刻みを $1e-12$ (s) と固定値とし精度を上げて同じ計算を行う。

計算条件

- ・ 初期位置 : $R=0.5$ (m), $Z=0$ (m)
- ・ 初期エネルギー $E_{\perp}=E_{\parallel}=50$ (eV)
- ・ 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ ルンゲクッタ法の時間刻み : $1e-12$ (s) (固定値)
- ・ 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

- μ と $J_{//}$ の時間変化

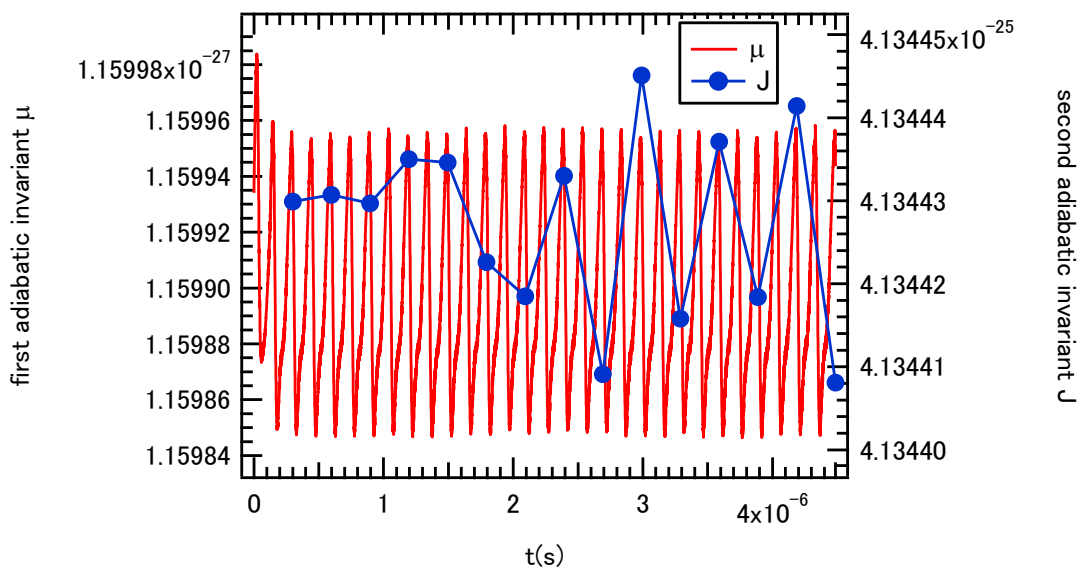


図 2.2.8 μ と $J_{//}$ の時間変化。 μ と $J_{//}$ は減衰せず、一定の割合で振動する。

このように、値が減衰するのでなくある一定の振幅を保つ変動であれば μ や $J_{//}$ は保存すると決める。

- 運動エネルギーと速度

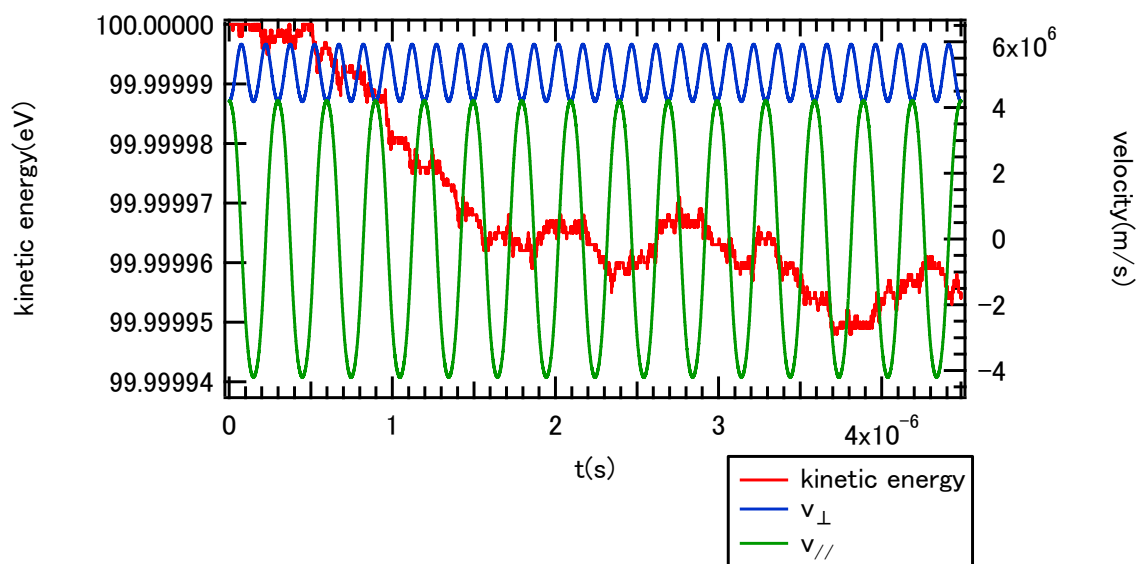


図 2.2.9 運動エネルギーと速度の時間変化。運動エネルギーの減衰はほぼ無視できる範囲である。

・ 磁場強度と磁気面值

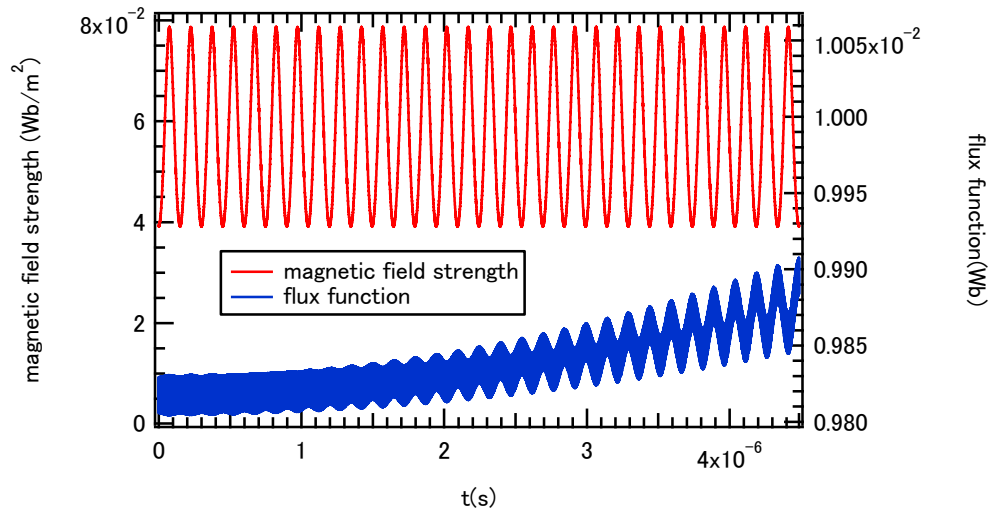


図 2.2.10 磁場強度と磁気面值の時間変化。各パラメータの中で磁気面值だけが一定とならず上昇し、図 2.2.6 と同じ程度である。図 2.2.4 での μ と $J_{||}$ の減衰は、図 2.2.8 より μ と $J_{||}$ は減衰しないので磁気面值が上昇し運動が内側の磁気面に入ることが原因ではない。唯一異なる条件の時間刻みによってこの違いが生じるので、時間刻みが荒いと μ と $J_{||}$ が減衰していく傾向と理解する。

さて、軌道計算によって知りたい量は断熱不変量の値であり、計算時間が短ければよい。図 2.2.4 と図 2.2.8 を見ると、両者は計算時間がバウンス 1 周期分であれば、 μ と $J_{||}$ はほぼ同じ値をとる。そこで、図 2.2.4 で計算をバウンス 1 周期分にとどめておき、 μ と $J_{||}$ の値を計算しても図 2.2.8 の保存した値となっている。よって軌道計算を大量に行うときはバウンス 1 周期分を計算し μ と $J_{||}$ を求めることを思いつく。さらなる計算時間短縮のため、バウンス軌道は $Z=0$ に関して対称であるとして、バウンス軌道が半周期分計算された後に計算をやめ、 $J_{||}$ はこの半周期分の値を 2 倍して求めることを考える。そのためには半周期分の計算でも μ と $J_{||}$ が保存されるような適切な時間刻みを検討する必要がある。 μ と $J_{||}$ の変動の関係を以下のように調べる。結果の表では μ と $J_{||}$ の変動を次のように評価している。 $J_{||0}$ とは $J_{||}$ の 1 周目の値、 $J_{||av}$ は全周分の $J_{||}$ の平均値、 $dJ_{||}$ は $J_{||0}$ と $J_{||av}$ の相対誤差で次の式から求める。

$$dJ_{||} = \frac{|J_{||0} - J_{||av}|}{J_{||0}} \times 100(\%)$$

同様に μ に関しても、 μ_0 を初期位置での値（ラーマ周期で平均せず、初期位置の磁場強度とエネルギーのみで求める）、 μ_{av} を最終周期目のバウンス軌道での平均値、 $d\mu$ は μ_0 と μ_{av} の相対誤差を表し次の式から求める。

$$d\mu = \frac{|\mu_0 - \mu_{av}|}{\mu_0} \times 100(\%)$$

計算条件

- ・初期位置 : $R=0.5(m), Z=0(m)$ 、初期エネルギー : $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(eV)$
- ・計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

表 2.2.1(a) J_{\parallel} の変動の評価

番号	時間刻み	$J_{\parallel 0}$	$J_{\parallel av}$	$dJ_{\parallel}(\%)$
1	ラーマ周期の 1/8	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。		
2	ラーマ周期の 1/16	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。		
3	ラーマ周期の 1/32	4.1330e-25	4.1035e-25	0.713%
4	ラーマ周期の 1/64	4.1344e-25	4.1335e-25	2.08e-2 %
5	ラーマ周期の 1/128	4.1345e-25	4.1344e-25	2.62e-3 %
6	固定値 1e-10	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。		
7	固定値 1e-11	4.1340e-25	4.1253e-25	0.209 %
8	固定値 1e-12	4.134430e-25	4.134428e-25	4.81e-5 %

表 2.2.1(b) μ の変動の評価

番号	時間刻み	μ_0	μ_{av}	$d\mu(\%)$	計算時間 (5 回平均)(s)
1	ラーマ周期の 1/8	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。			
2	ラーマ周期の 1/16	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。			
3	ラーマ周期の 1/32	1.1598e-27	9.6342e-27	16.9%	2.23
4	ラーマ周期の 1/64		1.1535e-27	0.548 %	4.17
5	ラーマ周期の 1/128		1.1597e-27	1.43e-2 %	8.29
6	固定値 1e-10	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。			
7	固定値 1e-11	1.1598e-27	1.1453e-27	1.25 %	4.61
8	固定値 1e-12		1.1599e-27	4.43e-3 %	45.5

表 2.2.1 より時間刻み幅を小さくすると μ と J_{\parallel} の変動は小さくなるが、計算時間は増大する。ある程度変動が小さく計算時間が短い条件として番号 3、4、7 を選び μ と J_{\parallel} の時間変化を次の図 2.2.11 に示す。

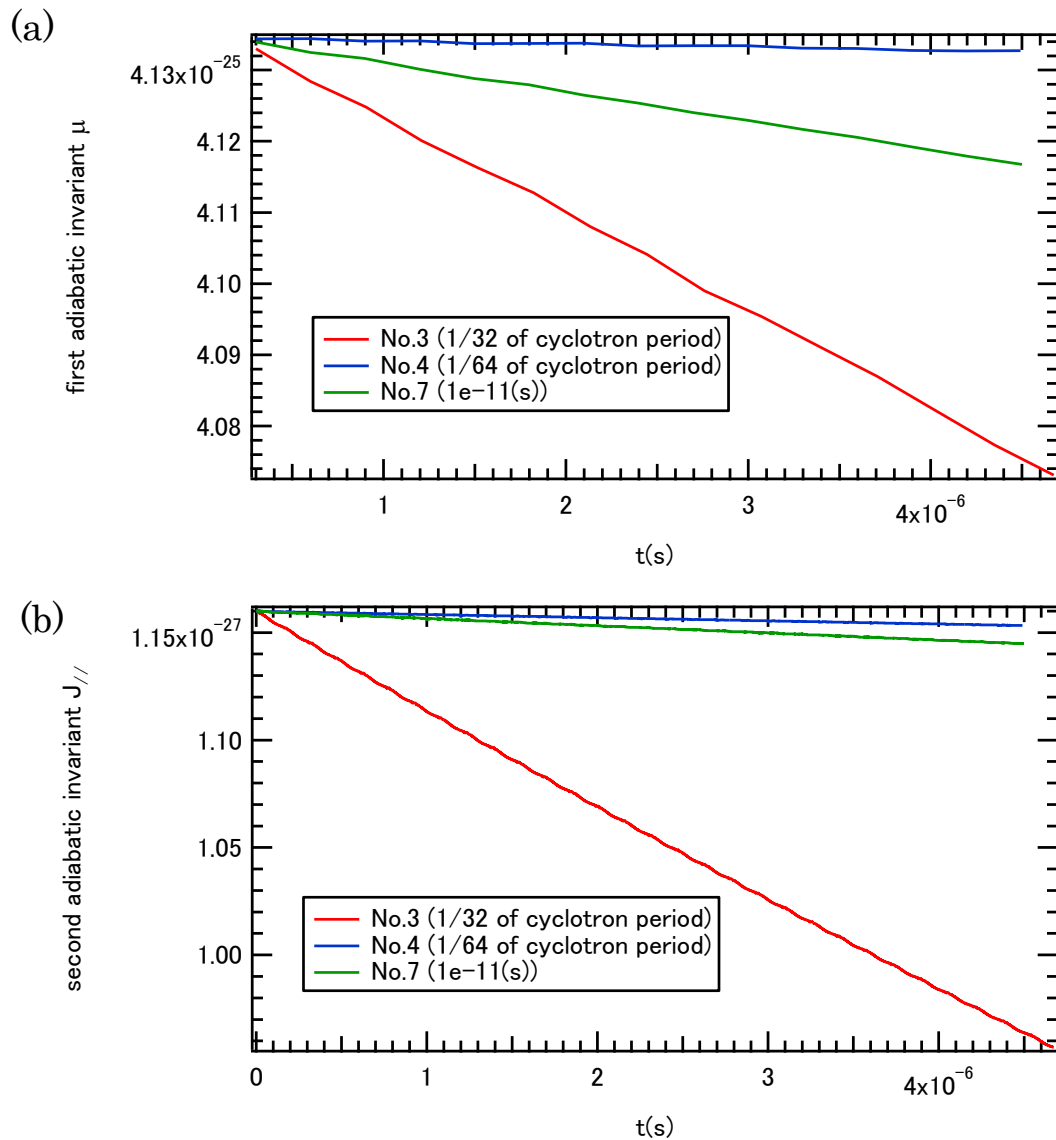


図 2.2.11 時間刻みの比較 (a) μ の時間変化 (b) $J_{||}$ の時間変化。 μ と $J_{||}$ の変動が少ない条件 4 (ラマ周期の 1/64) が最適である。

計算時間短縮のため、バウンス軌道が半周期分計算された後に計算をやめ、 $J_{||}$ は半周期分の値を 2 倍することを前に考えた。今後、大量の軌道計算を行う必要があるからである。

そこで、計算時間をバウンス軌道半周期分とした時の μ の変動を調べる。 μ_{av} は半周期分のバウンス軌道での平均値を示し、他の変数は従来通りの意味である。 $J_{||}$ の変動を調べることはできないが、表 2.2.1(a) から、考慮外とした条件以外のどの番号でも変動は小さく、保存するとみなす。

計算条件

- ・初期位置：R=0.5(m),Z=0(m)、初期エネルギー： $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- ・計算回数：バウンス軌道半周期分
- ・使用プログラム：ADINV_noloop.for

計算結果

表 2.2.2 μ の変動の評価

番号	時間刻み幅	μ_0	μ_{av}	$d\mu$ (%)	計算経過時間 (5回平均)(s)
1	ラーマ周期の 1/8	1.1598e-27	時間刻みが大きく、磁力線に沿った運動をしないため考慮外とする。		
2	ラーマ周期の 1/16		1.0494e-27	9.53	0.316
3	ラーマ周期の 1/32		1.1563e-27	0.302	0.572
4	ラーマ周期の 1/64		1.1598e-27	4.84e-3	1.11
5	ラーマ周期の 1/128		1.1599e-27	4.60e-3	2.19
6	固定値 1e-10		時間刻みが大きく、磁力線に沿った運動をしないため考慮外とする。		
7	固定値 1e-11		1.1597e-27	1.54e-2	1.08
8	固定値 1e-12		1.1599e-27	6.50e-3	10.6

表 2.2.2 よりここでも番号 4（ラーマ周期の 1/64）の条件が適切である。よって今後はラーマ周期の 1/64 の時間刻みを用いる。

こうして適切な時間刻みが得られ、保存された μ と J_{\parallel} の値を半周期分のバウンス軌道を計算することで求めることができるようになった。これまで、 $R=0.5(\text{m})$ 、 $Z=0(\text{m})$ 、初期エネルギー $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(\text{eV})$ と、決まった値で計算を行い、精度を議論してきた。次に μ と J_{\parallel} の変動の位置依存性や初期エネルギー依存性を調べたい。 μ と J_{\parallel} の変動が全ての場合で小さければ問題ないが、変動が大きい場合に μ と J_{\parallel} が保存量として扱えるかどうか問題となる。しかし、パラメータ $R(\text{m})$ 、 $E_{\perp}(\text{eV})$ 、 $E_{\parallel}(\text{eV})$ の依存性を全ての場合で調べるには手間がかかる。天下りではあるが、後に様々なパラメータで軌道計算していく中で、ピッチ角が小さくなり、初期位置が外側の磁気面になるほど $d\mu$ と dJ_{\parallel} が大きくなることが確認される。そこで、まず位置を $R=0.5(\text{m})$ で固定し、ピッチ角の依存性を調べ（計算①）、後にピッチ角を固定し位置の依存性を調べる（計算②）。ただし、ピッチ角は角度ではなくエネルギーの比で与える。

計算① 条件

- 初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=1(\text{eV}), E_{\parallel}=1\sim 1000(\text{eV})$ (運動エネルギーが増加しピッチ角が小さくなる)
 $E_{\perp}=0.02\sim 50(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ (運動エネルギーが一定でピッチ角が小さくなる)
- 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算① 結果

結果を次の図 2.2.12 で示す。

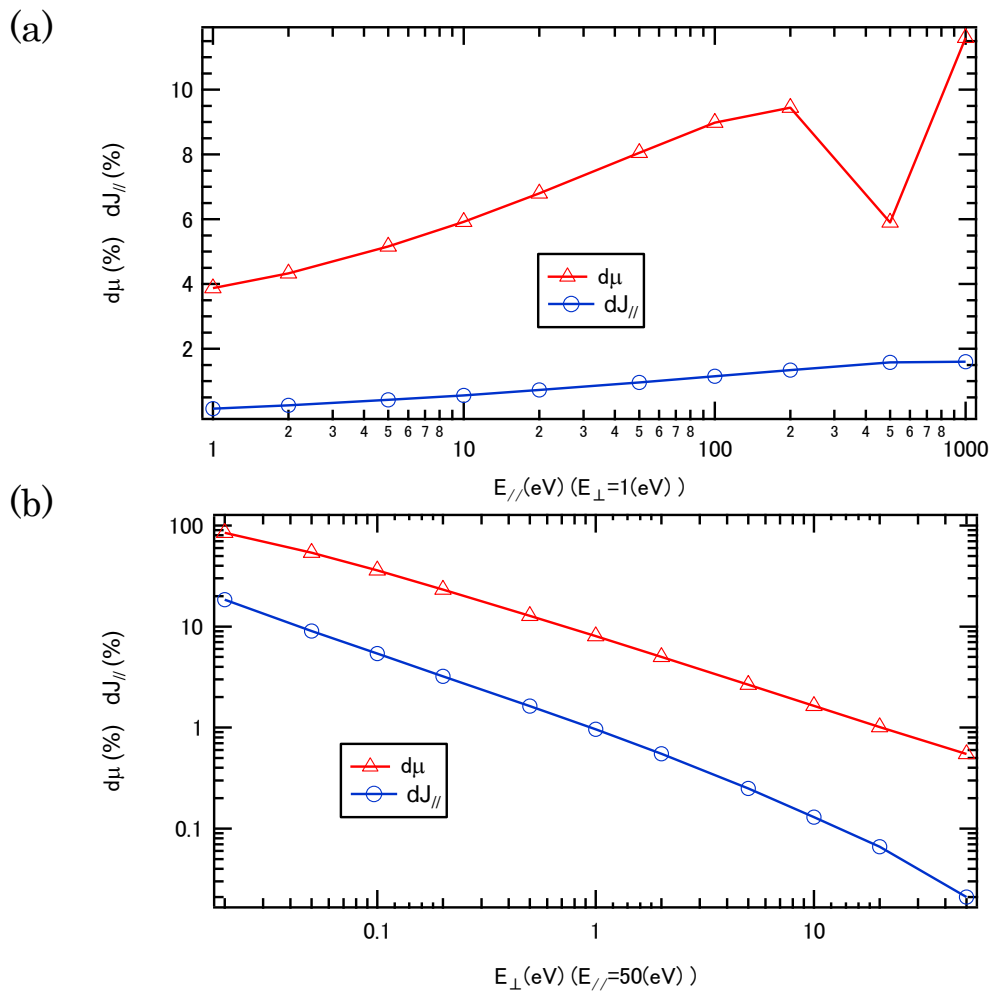


図 2.2.12 $d\mu$ と dJ_{\parallel} のピッチ角依存性 (a) $E_{\perp}=1(\text{eV}), E_{\parallel}=1\sim 1000(\text{eV})$

(b) $E_{\perp}=0.02\sim 50(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ 。

両場合ともピッチ角が大きくなるほど $d\mu$ と dJ_{\parallel} は大きくなるが、運動エネルギーがほぼ一定でピッチ角を小さくした(b)の方が値が大きい。

そこで $d\mu$ が最大となった $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ でエネルギーを固定して R 方向の依存性を計算する。ただし計算回数はバウンス軌道 1 周分も計算できない特例に合わせて 1 回分とする。

計算② 条件

- 初期位置 : $R=0.1\sim 3.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道 1 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算② 結果

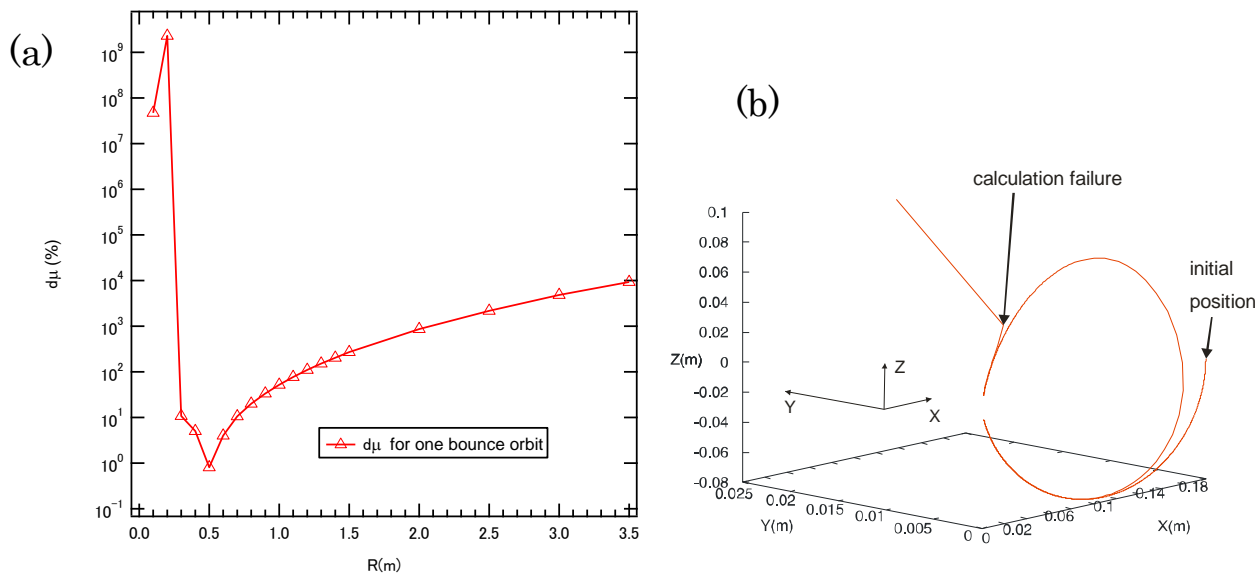


図 2.2.13 (a) $d\mu$ の位置依存性(1 周期分のバウンス軌道) (b) $R=0.2(\text{m})$ での軌道図。(a)より、 $R=0.1$ 、 $0.2(\text{m})$ で値がかなり大きい。 $R=0.2(\text{m})$ の軌道を図 2.2.13(b)に示す。図 2.2.13 (b)の図より 2 回目のバウンスの直後に軌道計算に失敗している。そのため μ の計算に失敗し、図 2.2.13(a)のような大きい値となる。この原因は、磁場強度の強い領域まで入り、ルンゲクッタ法の最小刻みの値がその位置でのサイクロトロン周期よりも大きいオーダーになり計算に失敗したためである。

では R が大きい時はどうなるか。図 2.2.14 に $R=3(\text{m})$ と $3.5(\text{m})$ の軌道図と μ と J_{\parallel} の時間変化を述べる。

計算② 条件

- 初期位置 : $R=0.3, 3.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算② 結果

R=3.0(m)の結果を図 2.2.14(a)(b)に、R=3.5(m)の結果を図 2.2.14(c)(d)に示す。

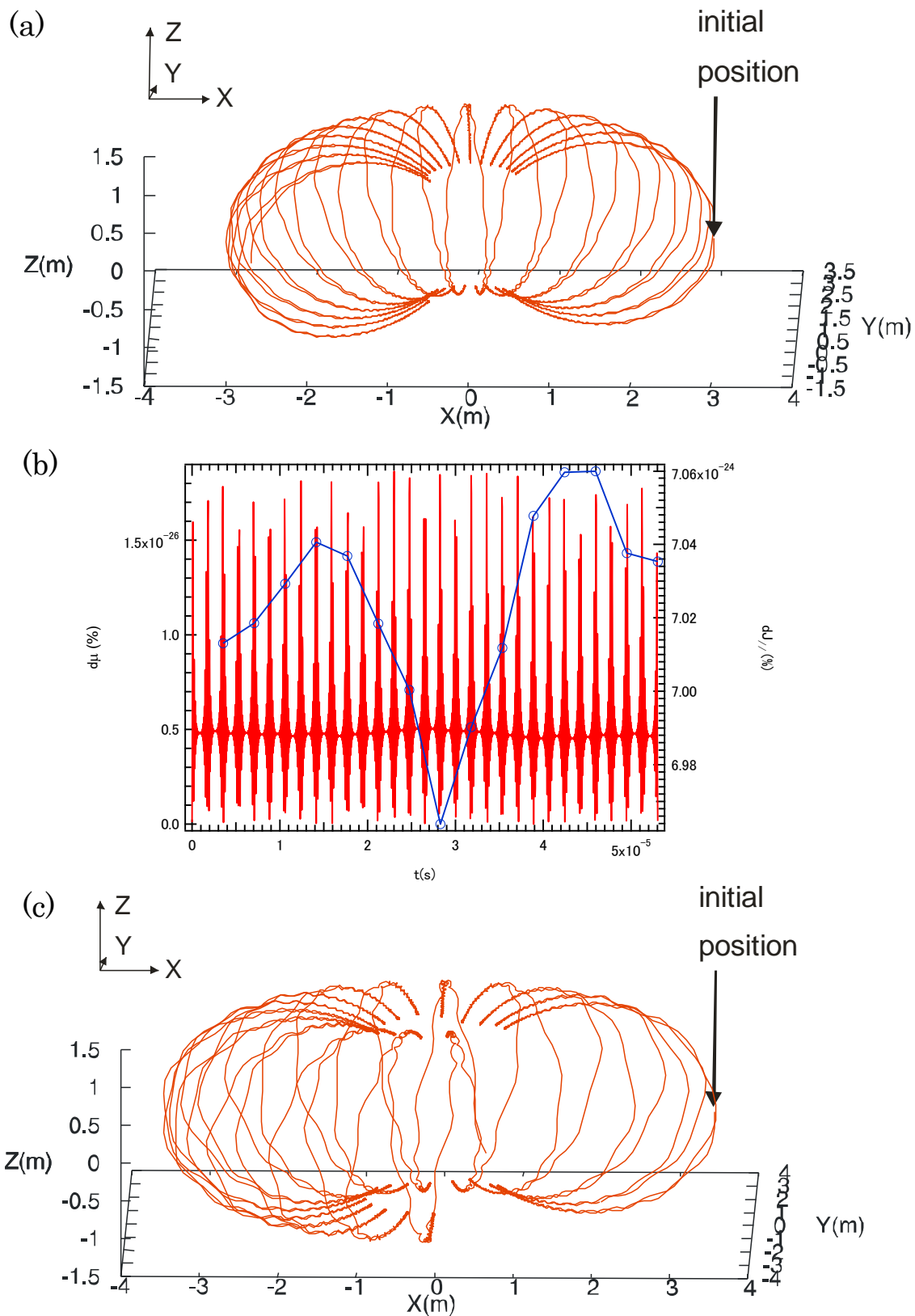


図 2.2.14 (a)R=3.0(m)の軌道図 (b) R=3.0(m)の μ と $J_{//}$ の時間依存
(c) R=3.5(m)の軌道図

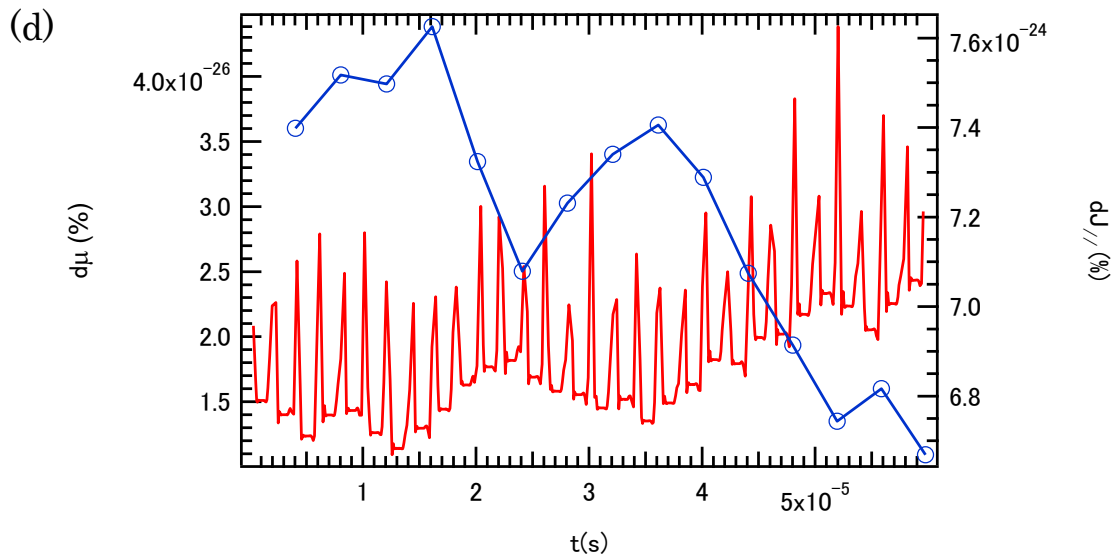


図 2.2.14 (d) $R=3.5(\text{m})$ の μ と $J_{//}$ の時間依存。(a),(c)より両者、サイクロトロン・バウンス・ドリフト運動をしている。図 2.2.14 (b),(d)より $R=3.0(\text{m})$ では μ は一定の幅で変動しているが、(d)では変動が時間変化する。

図 2.2.8 で述べた μ の保存の定義より、(c)は保存するが(d)は保存しないとみなす。 $J_{//}$ を見ると、(c)よりも(d)の方が変動の幅が大きい。ただ $J_{//}$ は規則的に変動しているわけではないので、保存しているかを見分けるのは難しいため、 μ が保存しなければ $J_{//}$ も保存しない、と定義する。

これまでの議論をまとめると、 μ と $J_{//}$ が保存しないときは、運動エネルギーとピッチ角が十分小さく、かつ初期位置が $R=0.2(\text{m})$ 以下と $R=3.0(\text{m})$ 以上であった。そこで、この保存しない条件以外の条件では μ と $J_{//}$ は保存すると考える。詳しくは、バウンス 1 周期で得られた $d\mu$ が $R=0.3(\text{m})$ の $d\mu$ の値 $4840(\%)$ 以下であれば保存するとみなす。

2. 2. 2 磁力線を追跡する軌道計算

μ が保存する場合、バウンスする位置はピッチ角 θ のみで決まる。つまりバウンスする位置での磁場強度を B_t 、初期位置での磁場強度を B_0 とすれば

$$\frac{B_t}{B_0} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

である。この原理を用いてバウンスする位置を計算し、 μ と $J_{||}$ を求めることができる。計算概要は、初期位置と初期エネルギーを決めピッチ角を求め、跳ね返る点での磁場強度を求める。磁力線に沿って位置を微小間隔で更新していき、その都度 μ と運動エネルギーの保存から、磁力線に平行な速度を次のように求める。

$$\mu = \frac{m^2 v_{\perp 0}^2}{2B_0 q}$$

は保存されるので、運動エネルギー保存より

$$v_{||} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{qB_0}{m} \mu \right)}$$

となる。 $J_{||}$ は軌道に沿って次式のように積分する。

$$J_{||} = \frac{1}{2\pi} \int m v_{||} ds$$

計算は、跳ね返る点での磁場強度の位置に至れば終了させる。ただし、 $J_{||}$ はバウンス軌道の 4 分の 1 までしか積分されていないので、4 倍にする。磁力線を追跡するので、磁力線追跡手法と称する。この手法では運動方程式を計算していないので、定義通り μ を求めたわけではない。この手法の前提は μ が保存することである。ただし、ピッチ角が十分小さく、跳ね返る点の磁場強度が無限大に近くなるような計算は扱いが難しい。

後に運動方程式を解いて求める方法との比較を行う。運動方程式を解く方法の欠点は、時間刻みの最小値を決めていることで、ピッチ角が 0 やそれに近い場合の運動が計算できないことである。ピッチ角が 0 に近づくほど跳ね返り点の磁場強度が大きくなるのが原因である。そのため、ピッチ角が 0 やそれに近い場合は μ が保存していない可能性がある。磁力線追跡手法はこの保存を前提としているので、この場合は扱えない。本研究ではポイントダイポール磁場中において、ピッチ角が 0 やそれに近い運動の μ と $J_{||}$ は計算しない。

次に、磁力線追跡手法の流れ図を図 2.2.15 で示す。

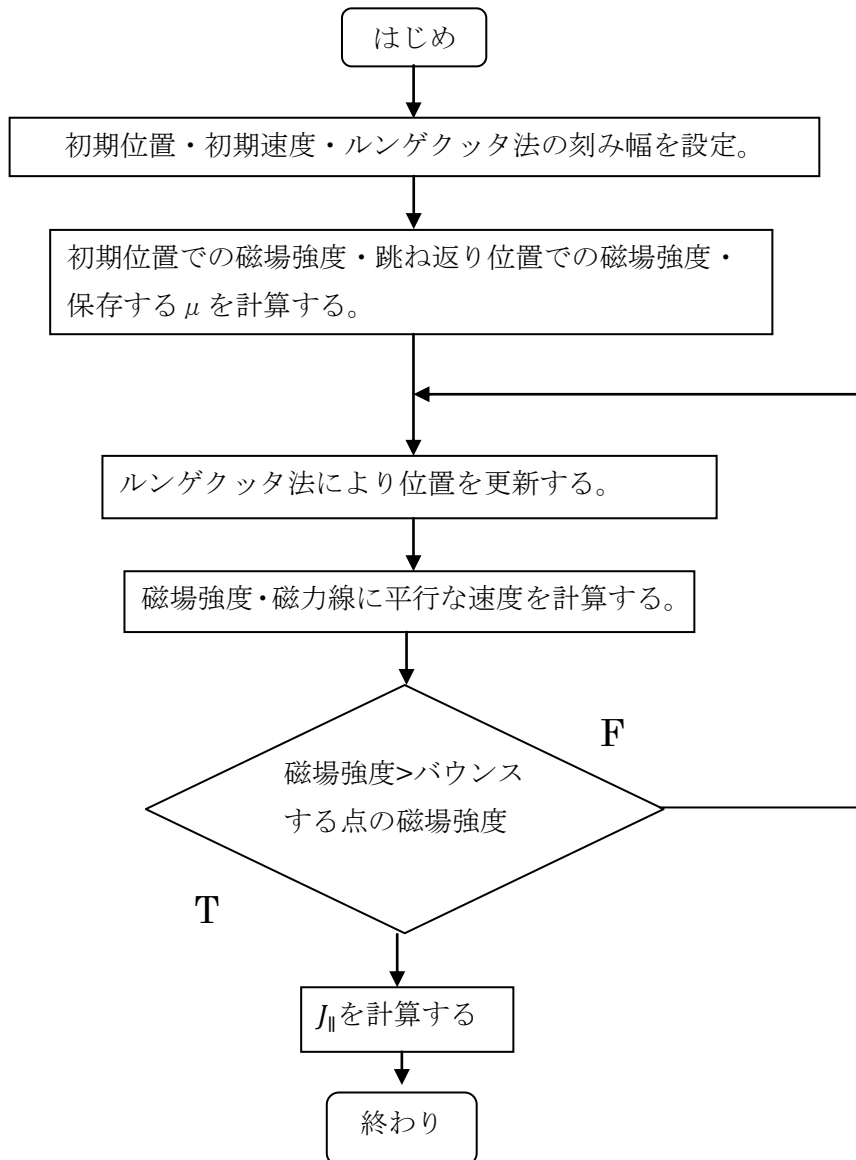


図 2.2.15 磁力線追跡手法の計算流れ図

注意として、磁力線の向きは XZ 平面では時計回りなので、軌道はそれに沿って進む。そのため、初期位置は Z が 0 以上でなければ正しく $J_{||}$ を求められない。 Z が 0 でない場合は、一旦軌道が赤道面上に達するときに $J_{||}$ を求める積分値をリセットして 0 に戻し、バウンス軌道 4 分の 1 の値が求められるようにする。次に計算の一例を示す。

計算条件

- ・ 初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- ・ 初期エネルギー : $E_{\perp}=50(\text{eV}), E_{||}=50(\text{eV})$
- ・ ルンゲクッタ法の刻み : $1e-3$
(刻みはこれが最適であると後に示されるので、ここでは天下り的に用いる)
- ・ 使用プログラム : `btrace.for`

計算結果

- ・軌道

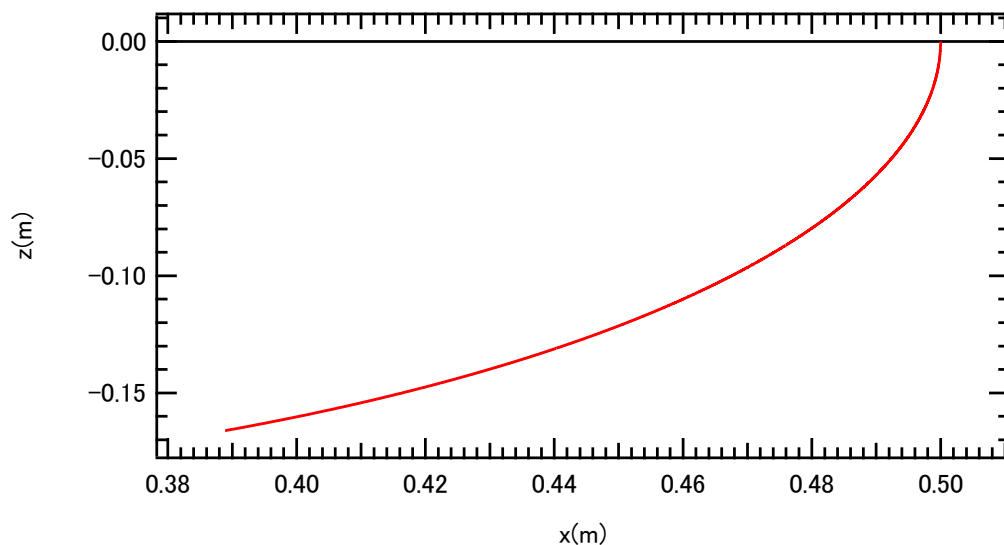


図 2.2.16 磁力線追跡手法で求めた軌道図。跳ね返る点で計算が止まる。 $J_{||}$ は $4.1337e-25$ 、 μ は $1.1598e-27$ と求まる。

次にルンゲクッタ法の刻み幅をパラメータとし、 μ 、 $J_{||}$ を計算する。

計算条件

- ・初期位置： $R=0.5(m), Z=0(m)$
- ・初期エネルギー： $E_{\perp}=50(eV), E_{||}=50(eV)$
- ・使用プログラム：`btrace.for`

計算結果

表 2.2.3 刻み依存性

刻み	μ	$J_{ }$	計算経過時間(5回平均)(s)
0.5	1.1598e-27	3.7657e-25	2.81e-2
0.1		4.0445e-25	3.13e-2
0.01		4.1264e-25	3.75e-2
1.0e-3		4.1337e-25	7.81e-2
1.0e-4		4.1345e-24	0.502
1.0e-5		4.1345e-25	4.77

表 2.2.3 より、 $J_{||}$ の値が一定に収束し計算時間が短い条件（刻み 0.001）が最適である。

さらに、この磁力線追跡手法と、2.2.1 で作った運動方程式を解く手法での比較を以下の計算条件で行う。

計算条件

- ・初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- ・初期エネルギー : $E_{\perp}=50(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- ・使用プログラム : 運動方程式を解く手法 : ADINV_noloop.for (時間刻み : ラーマ周期の 1/64)
磁力線追跡手法 : btrace.for (刻み : $1e-3$)

計算結果

- ・軌道の比較

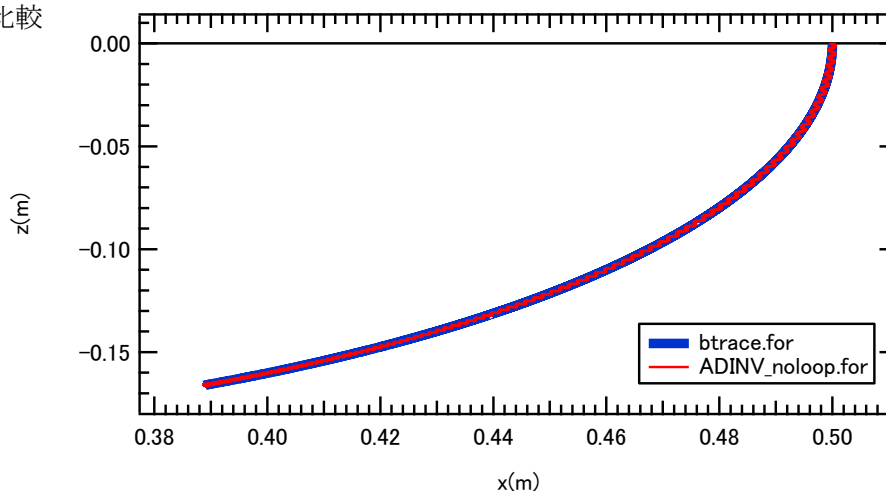


図 2.2.17 両手法の軌道の比較。軌道は両者一致する。

- ・ μ と J_{\parallel} の比較

表 2.2.4 運動方程式を解く手法と磁力線追跡手法の比較

計算手法	μ_0	μ_{av}	J_{\parallel}	計算経過時間(5回平均)(s)
運動方程式を解く	1.1598e-27	1.1598e-27	4.1353e-25	1.11
磁力線追跡		—	4.1337e-25	7.81e-2

表 2.2.4 より J_{\parallel} の値はほぼ一致する。計算時間は磁力線追跡手法の方が短い。

以上より、この条件では両者の軌道や μ 、 J_{\parallel} の値は一致する。そのため計算時間の短い磁力線追跡手法を採用することを考えるが以下の点で劣る。まず全ての運動で μ の保存が確認されていないので、運動方程式を解いて μ の変動を求める方が精密である。そして、運動方程式を解く手法では電場を反映した計算ができる。本研究では 3.2 節で電場を考慮に入れることから、運動方程式を解く手法を用いる。

ただし、この磁力線追跡手法が有効な点は、運動方程式を解いて μ の保存が確認された時、 J_{\parallel} の値を理論的に算出し、ベンチマークできる点である。

2. 3 軌断熱不変量を用いた密度プロファイルの計算方法

本研究では純電子プラズマの平衡状態の密度分布を求めたい。2章では電場効果のない場合について考えている。分布関数にサイクロトロン運動の断熱保存量 μ とバウンス運動の断熱保存量 J_{\parallel} を束縛条件として加えることで、空間非一様な密度分布が得られる。その保存量を軌道計算で求め、次の式を積分すればよい。

$$\rho(X, Y, Z) = \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\{-\beta(\mu\omega_c + J_{\parallel}\omega_b) - \alpha\mu - \gamma J_{\parallel}\} \frac{2\pi\omega_c}{m} d\mu \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}}$$

この式では積分変数に μ と J_{\parallel} が入っているが、 J_{\parallel} を積分変数にすることは難しい。初期条件を与えて軌道計算を行わないと求められない量だからである。そこで断熱保存量で表される項を、XYZ直交座標系の変数に戻すと

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi\omega_c(\mathbf{x})}{Zm} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2\right) - \alpha\mu(\mathbf{x}, v_{\perp}) - \gamma J_{\parallel}(\mathbf{x}, v_{\perp}, v_{\parallel})\right\} d\mu dv_{\parallel} \quad (2.10)$$

となる。ここで μ は場所 \mathbf{x} と v_{\perp} の関数、 J_{\parallel} は場所 \mathbf{x} と v_{\perp} 、 v_{\parallel} の関数である。式では積分変数は μ と v_{\parallel} であるが、 μ は場所 \mathbf{x} と v_{\perp} で決まるので、実際に用いる積分変数は v_{\perp} 、 v_{\parallel} である。

この計算を2つのプログラムADINV-data.forとADINV-dint.forに分けて行う。

・ADINV-data.forの概要

場所をまず与える。そして積分変数の積分範囲を平衡温度の幅で指定し、 $(v_{\perp}, v_{\parallel})$ を初期条件とした軌道計算を行い μ と J_{\parallel} を計算する。これを全ての積分変数の範囲で実行し、さらに全ての場所で行い、結果のデータをテキストファイルで書き出す。軌道計算はバウンス半周期分で行う。

・ADINV-dint.forの概要

ケミカルポテンシャル α と γ （ラグランジュ未定乗数）を与え、ADINV-data.forで書き出されたファイルを読み込み、式(2.10)の2重積分を実行する。

このように2つに分けて計算する理由は、もし1つにまとめてしまうとケミカルポテンシャルを変えるごとに繰り返し同じ条件で軌道計算を行う必要があるからである。ケミカルポテンシャルだけを変えるのであれば、同じ条件の軌道計算を繰り返すのは効率が悪い。

μ の変動 $d\mu$ が4840(%)を超えると μ と J_{\parallel} が保存しないと判断する。式(2.10)の被積分関数は μ と J_{\parallel} の保存を前提としており、保存していない量を用いることはできない。そのために軌道計算を行うごとにそれらが保存するかどうかを判別しなければならない。 $d\mu$ が最大値を超える場合以外にも μ と J_{\parallel} が求められない場合が3通りある。

1つは有限温度効果である。ピッチ角が0に近いときは跳ね返る点での磁場強度が無限大に近くなる。ポイントダイポール磁場配位では原点付近で磁場強度が無限大となるので、もし μ が保存されるならば原点付近でのサイクロトロン運動の速度成分が無限大となってしまう。そこで、与えた平衡温度よりサイクロトロン運動の最大値を決め、軌道計算の最中にそれを超える場合は、

そのような条件の軌道は存在しないとみなす。これを具体的に式で表す。初期位置での運動エネルギーを E_0 、保存量 μ を用いると跳ね返り点での磁場強度は

$$B_t = E_0 / (q\mu/m)$$

と表せる。サイクロトロン運動の最大速度成分を v_{max} 、その運動エネルギーを E_{vmax} とすれば、 E_{vmax} は平衡温度で与えられたサイクロトロン運動の最大運動エネルギーである。

同様にして跳ね返り点での磁場強度は

$$B_{vmax} = E_{vmax} / (q\mu/m)$$

となる。ここで

$$B_t < B_{vmax}$$

となればよく、この条件は

$$E_0 < E_{vmax}$$

の場合と等しい。つまり与えた平衡温度から決められたサイクロトロン運動の最大運動エネルギーよりも初期位置での運動エネルギーが小さくなればよく、逆の時は軌道計算を行わない。なお、平衡温度から最大速度成分を決める方法は後に述べる。

2つは、ピッチ角が 0 の時である。前述したようにこの計算は難しい。強磁場領域ではサイクロトロン周期が短くなりルンゲクッタ法の時間刻みも短くなる。さらに強磁場側に入れば入るほど時間刻みは短くなり、ステップ回数をどれだけ増やしても運動方向に微少にしか進まず、バウンス軌道を得ることができない。時間刻みの最小値を指定しても、時間刻みがサイクロトロン周期と同じオーダーとなる領域に入ったときに時間刻みが大きすぎてサイクロトロン運動が計算できず、急に軌道が磁力線に巻きつかずに直線運動をする運動となり、計算がうまくいかない。その例として、ピッチ角が 0 ではない条件ではあるが、図 2.2.13(b)と同じような軌道を描いてしまう。そのため、この場合も軌道計算を行わない。

3つは計算領域に関することである。式(2.10)を計算する際、計算領域を RT-1 の真空容器のサイズ($R=0\sim 1.0(m)$ 、 $Z=0\sim 0.5(m)$)を用いる。よって軌道が計算領域より外に至る場合、その時点で計算をやめ μ と $J_{||}$ の値は存在しないとする。

以上より、ID という整数型の変数を設定し、各場合を ID の数字で区別する。

- ・ ID=0 : μ と $J_{||}$ が保存され、この場合のみ式(2.10)に値を代入できる
- ・ ID=1 : 初期運動エネルギーが有限温度効果で定めた最大運動エネルギーを超える場合
- ・ ID=2 : バウンス軌道が長すぎて、計算ステップ回数が足りない場合
- ・ ID=3 : ピッチ角が 0 の場合
- ・ ID=4 : 軌道が計算領域の外に出る場合
- ・ ID=5 : 軌道が浮上コイル内にある場合(ポイントダイポール磁場配位では用いない)
- ・ ID=6 : $d\mu$ が 4840(%)を超え、 μ と $J_{||}$ が保存しない場合

軌道計算する度に ID を求め、ID=0 の時だけ式(2.10)に値を代入することにする。

次に、コード ADINV-data.for の流れ図を図 2.3.1 と書き込みファイルの書式を表 2.3.1 に示す。

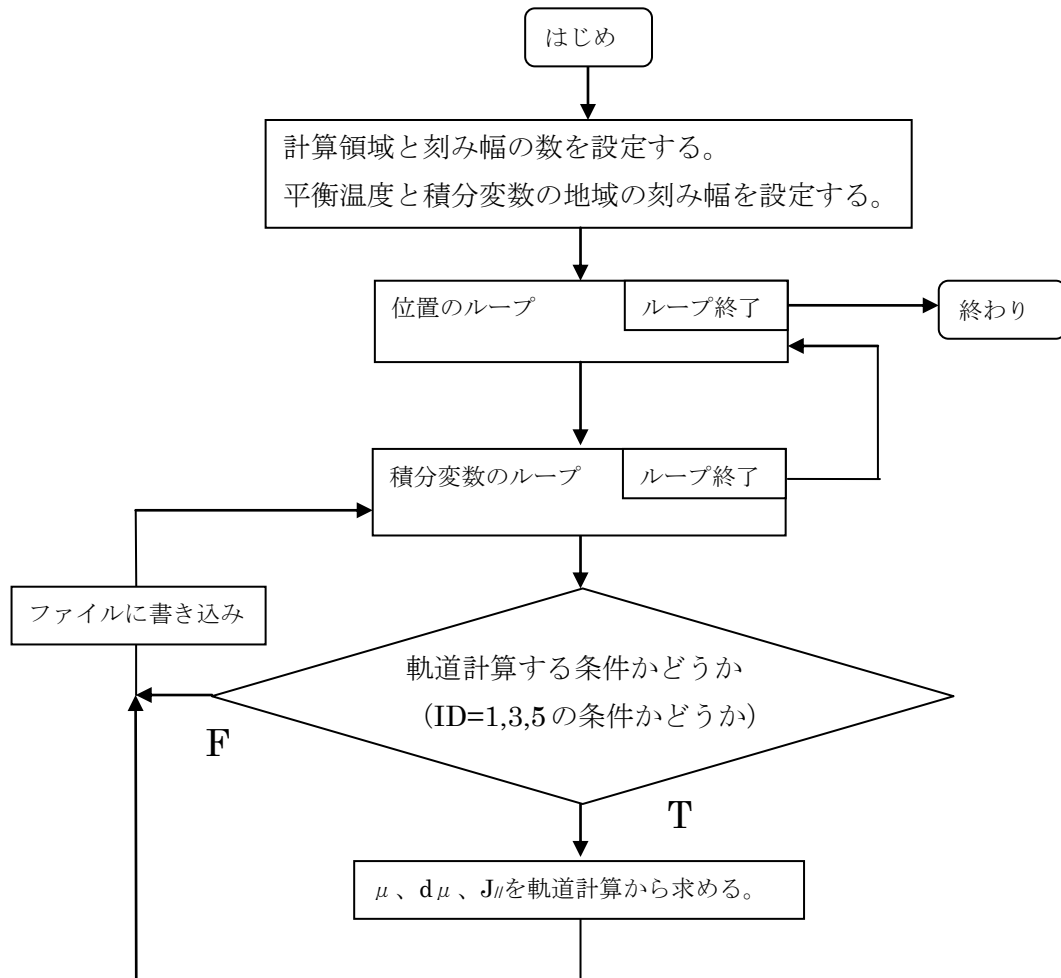


図 2.3.1 コード ADINV-data.for の流れ図

表 2.3.1 書き込みファイルの中身の書式 (部分から抜粋)

X (m)	Z (m)	B (T)	$E_{//}$ (eV)	E_{\perp} (eV)	$v_{//}$ (m/s)	v_{\perp} (m/s)	μ_0	μ_{av}	$d\mu$	$J_{//}$	周期 (s)	ID
0.1	0.0	0.49 e1	288.0	288.0	0.10 e8	0.10 e8	0.53 e-28	0.53 e-28	0.99 e-1	0.20 e-24	0.25 e-7	0
0.8	0.1	0.96 e-2	18.0	0.0	0.25 e7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3
0.3	0.3	0.10	450.0	450.0	0.13 e8	0.13 e8	0.40 e-26	0.40 e-26	0.18	0.75 e-23	0.23 e-6	1

次に、コード ADINV-dint.for の流れ図を図 2.3.2 に示す

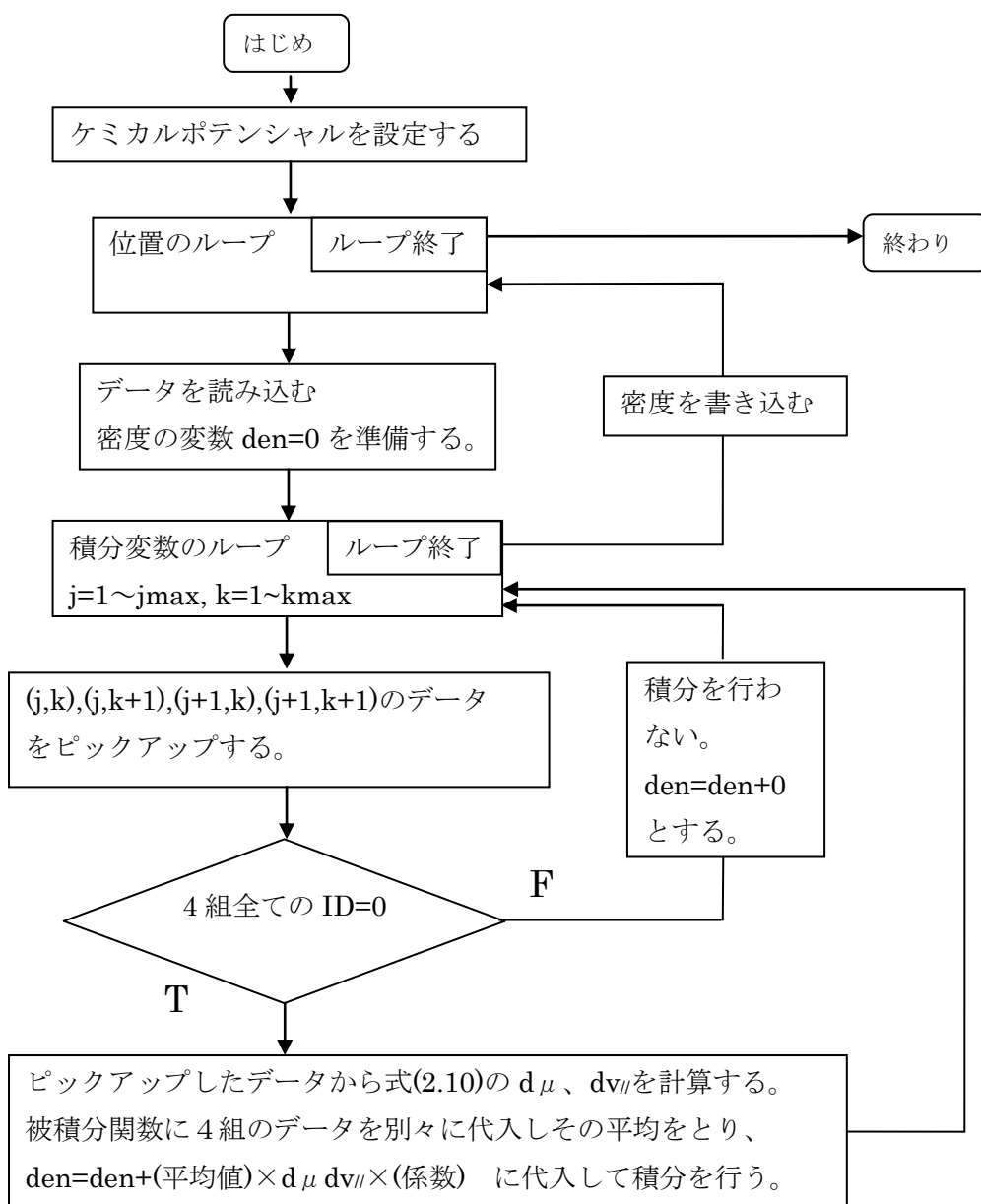


図 2.3.2 コード ADINV-dint.for の流れ図

ここで、平衡温度から積分変数の幅を求める方法と、図 2.3.2 に示した積分の方法を説明する。平衡温度を等方とすれば、サイクロトロン運動の速度と磁力線に平行方向の速度は同じマクスウェル分布に従う。一般に正規分布は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \mu: \text{平均}, \quad \sigma: \text{分散}$$

で与えられる。熱平衡状態にある 1 次元マクスウェル分布は

$$f(v_x) = n_e \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\beta v_x^2}{2}\right\}, \quad -\infty < v_x < \infty, \quad \beta = \frac{m_e}{kT_e}$$

で与えられ、平均と分散は

$$\mu = 0, \quad \sigma = \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}$$

である。よってこの分散 σ を用いれば幅を定めることができる。本研究では $-3\sigma \sim 3\sigma$ を積分の範囲とする。例えば平衡温度を $100(\text{eV})$ とすれば積分変数の範囲は v_{\perp} と v_{\parallel} とともに $-1.26e7 \sim 1.26e7$ (m/s) で決められる。

次に積分方法を述べる前に、与えられた積分変数の範囲をどのように分割して積分を行うかを考える。2通りの分割方法が考えられる。1つ目の方法は、図 2.3.3(a)のようにある速さの固定値を定め速度ベクトルを洗い出すと、大きさは一定だが向きが任意となるような速度ベクトルの集合となる。大きさを変数として動かすと図 2.3.3(b)のような速度ベクトルが考えられる。いま、速さの最大値が既知なので、速さの刻み数と向き（ピッチ角）を決めることで図 2.3.3(b)の矢印の速度のように分割できる。図 2.3.3(c)の例では、速さを 3 等分し、ピッチ角を磁力線に対して $0, 30, 60, 90^{\circ}$ と与えて、計 $3 \times 4 = 12$ 組の速度が得られる。ただし、 $90 \sim 360^{\circ}$ のピッチ角を与えても軌道の対称性から結局 $0 \sim 90^{\circ}$ で与えた軌道のどれかと重複するので考えなくてよい。

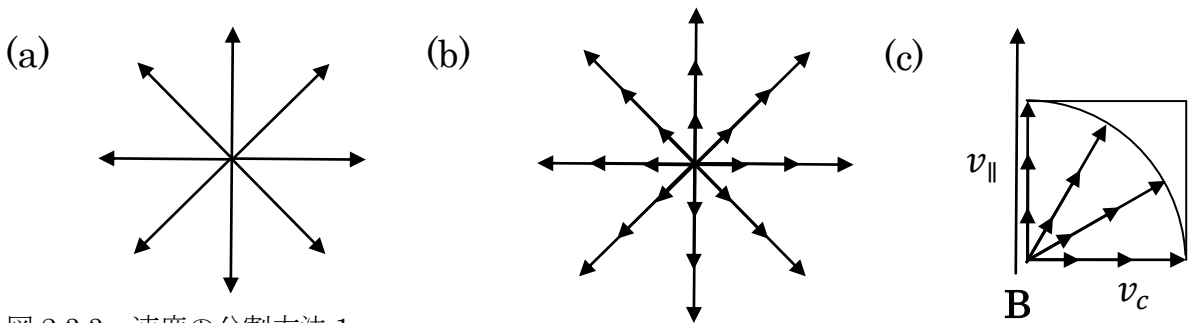


図 2.3.3 速度の分割方法 1

2つ目の方法は、ピッチ角を考えず、速さの分割数を与えるだけで積分変数の組み合わせを作る方法である。図 2.3.4(a)より電子は紙面の上を向く磁力線に対して反時計回りにサイクロトロン運動するので、電子の運動方向を正とすればサイクロトロン運動の速度は正の値しかとらない。さらに v_{\parallel} は絶対値が同じであれば正と負の場合も同じ軌道となる。図 2.3.4(b)の例では速さを 3 等分し、速度 0 を含めた $4 \times 4 = 16$ 種類の速度に分割できる。

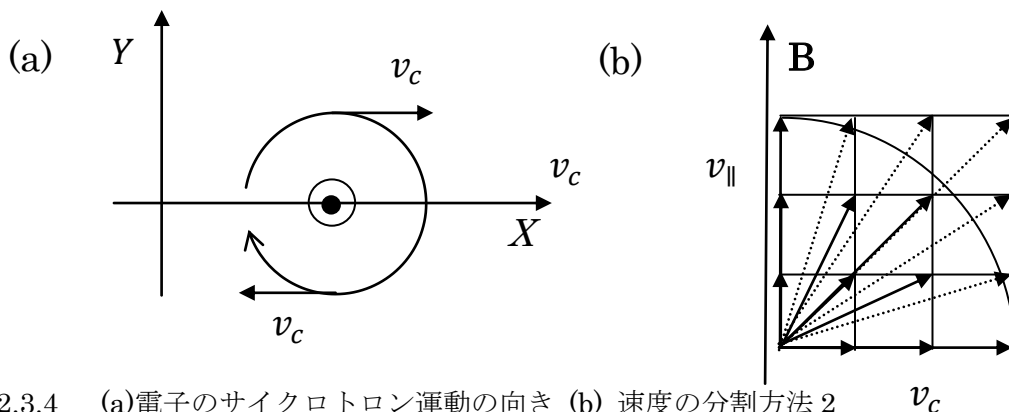


図 2.3.4 (a)電子のサイクロトロン運動の向き (b) 速度の分割方法 2

このように考えられた 2 つの分割手法のうち、後者を用いる。なぜなら積分変数 (v_{\perp}, v_{\parallel}) が格子状に区切られるために微少体積を求める際の底面積が容易に得られるからである。

次に積分の方法を述べる。図 2.3.5(a)のように積分範囲を平面上で表し、それらを微少な四角形に分ける。その 4 つの頂点での値を被積分関数に代入し値を得る。図 2.3.5(a)の 4 つの矢印の高さは各頂点での被積分関数の値である。これらの値を平均して微少四角形の面積をかければ、微少体積が求まる。これを全積分領域で足し合わせると 2 重積分が求まる。図 2.3.5(b)では 4 つの頂点を (j,k) , $(j,k+1)$, $(j+1,k)$, $(j+1,k+1)$ で表している。ただし全ての頂点の ID が 0 のときだけ微少体積を求め、1 つでも 0 でなければ求めない。

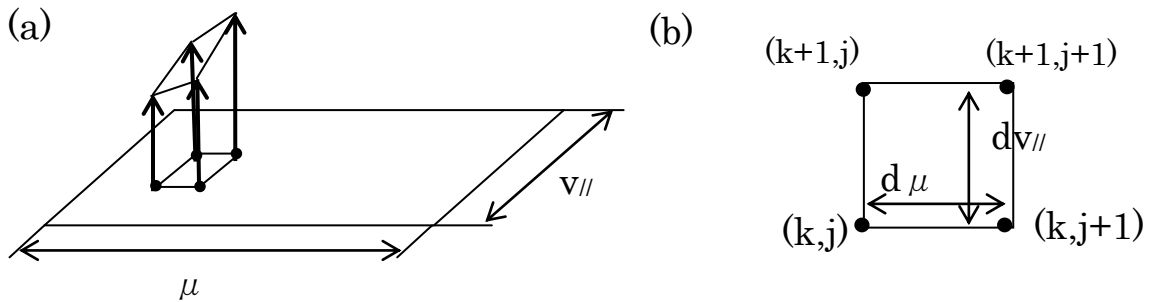


図 2.3.5 (a)積分領域。矢印は被積分関数の値を表す。 μ は積分変数 v_{\perp} から求める。

(b) 図 2.2.19 で表した 4 つのピックアップデータの積分領域上の位置。

(a)の 4 つの矢印の高さは各頂点での被積分関数の値である。これらの値を平均して微少四角形の面積をかければ、微少体積が求まる。これを全積分領域で足し合わせると 2 重積分が求まる。

平衡温度が 100(eV)の際、実際に軌道計算を行う積分変数の組を図 2.3.6 で表す。

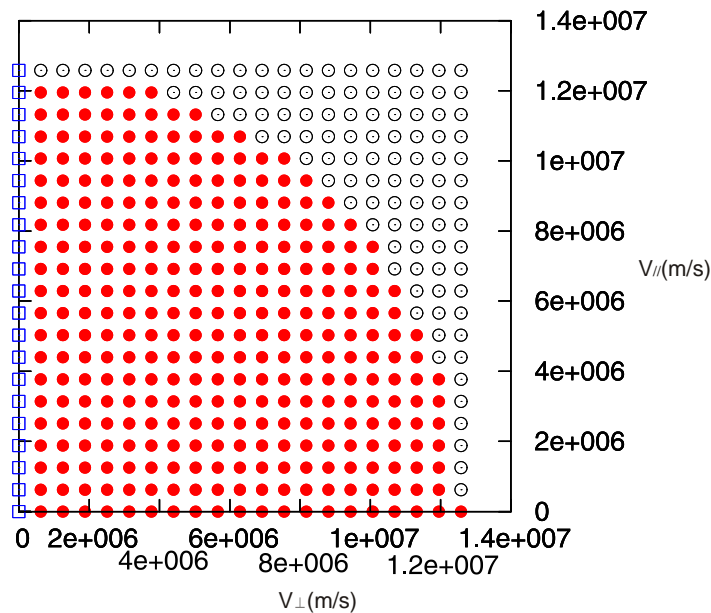


図 2.3.6 分割数 20 の積分変数の分類。軌道計算を行う積分変数の組を●(ID=0)、行わないものを○(ID=1)、ピッチ角が 0 で行わないものを□(ID=3)で示す。

2. 4 計算結果と解析解との比較

熱運動のみを考える場合の解析解は式(2.7)、熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束した場合の解析解は式(2.8)で与えられる。さらにバウンス運動の拘束を考える場合の解析解は、[7]の近似解を用いる。これらの解析解を用いて 2.3 で開発した計算方法をベンチマークする。ここでの平衡温度は 100(eV)と固定する。

2. 4. 1 ケミカルポテンシャルの範囲

ケミカルポテンシャル α と γ は入力パラメータである。しかし、式(2.10)の \exp 関数の引数であり、大きい値を代入すると \exp 関数を計算できなくなる。ここでは \exp 関数が計算できるような α と γ を与える範囲として決める。ただし、両者は β で規格化する。まずは α と γ が0の場合の $-\beta H$ を図 2.4.1 で示す。値が0の場合は軌道計算を行わない場合である。

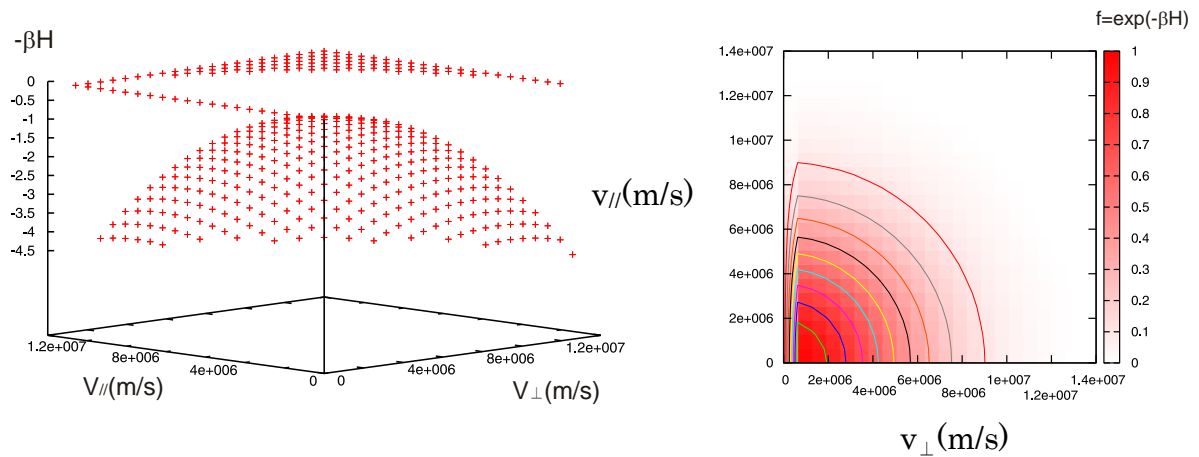


図 2.4.1 $-\beta H$ の値(左)と分布関数(右)。 $-\beta H$ の最小値は-4.5 付近となる。 β は温度の逆数である。分布関数はピッチ角が0 となる $v_{||}=0$ 以外では等方的な分布となり、熱平衡状態を示す。

次に $\alpha \neq 0$ 、 $\gamma = 0$ の場合を考える。 α の最大値を得るためには $ID=0$ となる μ の最大値を知る必要がある。そのため、まずは μ の積分変数の依存性を調べる。位置を(0.6(m), 0(m))と固定し、全ての積分変数($v_{\perp}, v_{||}$)の範囲で μ の分布を示す。

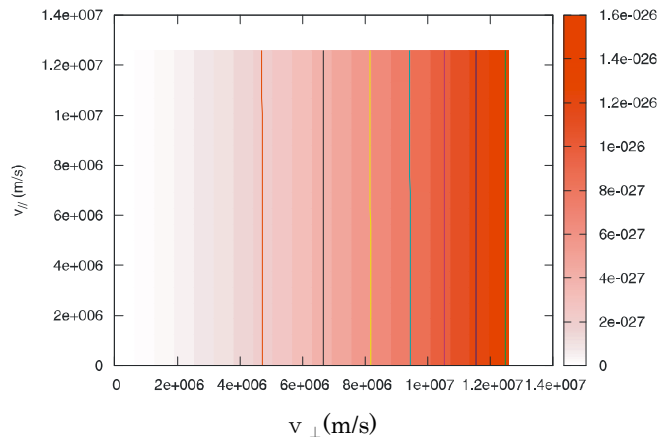


図 2.4.2 μ の速度依存性。磁場強度は一定なので、 μ は E_{\perp} にのみ依存する。

μ は E_{\perp} に比例するので、 $ID=0$ かつ μ が最大となるような運動エネルギーの組 $(E_{\perp}, E_{\parallel})=(450,0)$ での μ の位置分布を図 2.4.3 で示す。

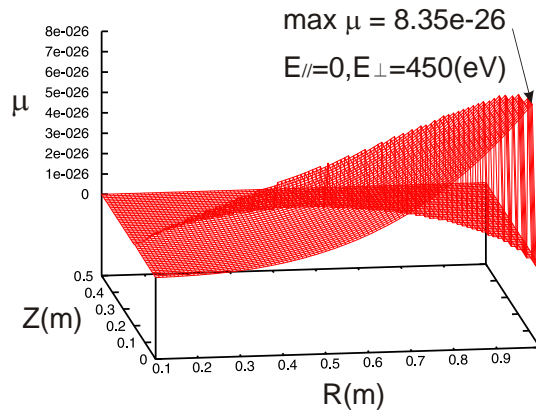


図 2.4.3 μ の 2 次元分布。 $ID=0$ の積分変数の組で μ が最大となる場所は $R=0.95(m)$ 、 $Z=0(m)$ 。

以上より $ID=0$ での μ の最大値 $8.35e-26$ を得た。 α の最大値を調べるため、 μ が最大となる場所における分布関数の等高線図を α をパラメータとして図 2.4.4 に示す。

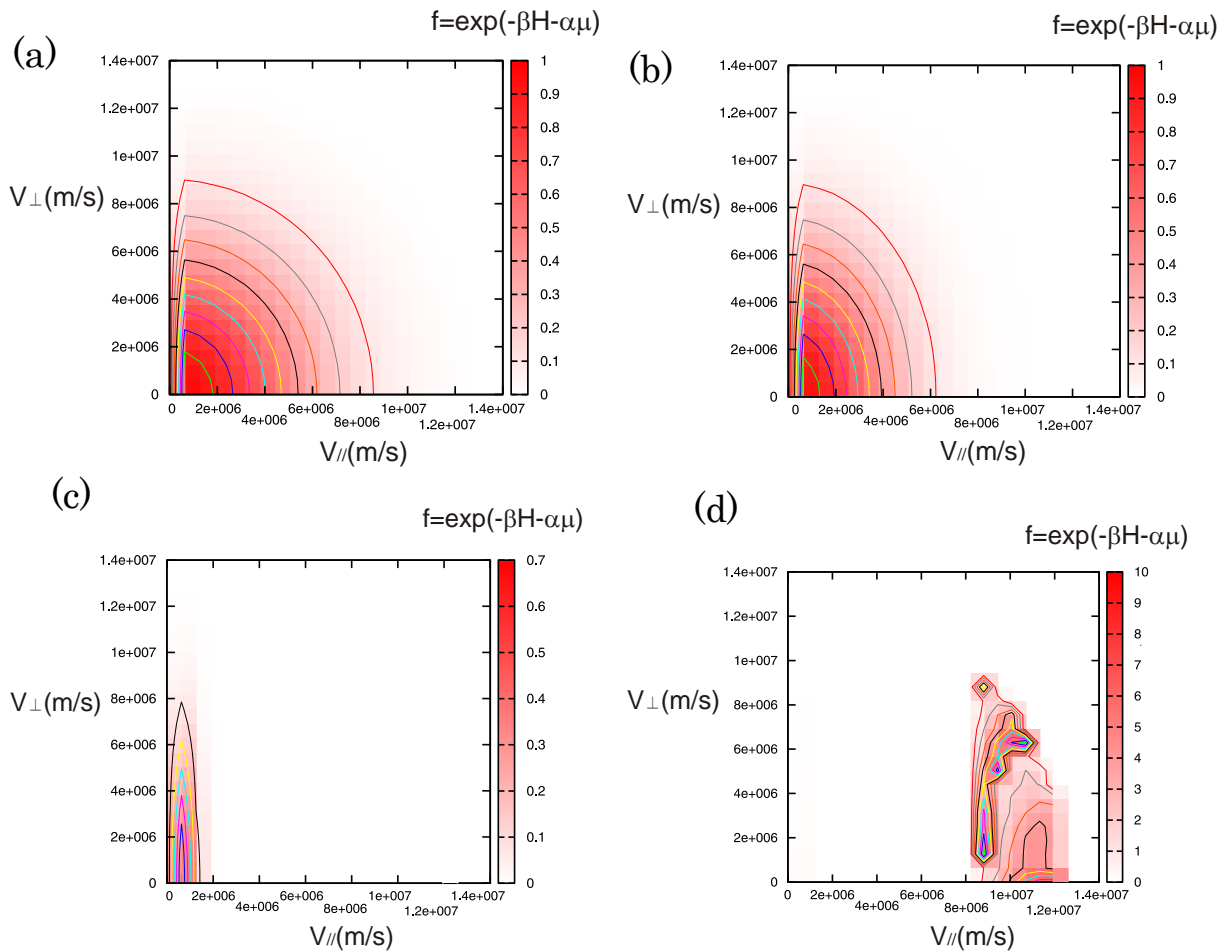


図 2.4.4 α をパラメータとした分布関数。(a) $\alpha=10^8$ (b) $\alpha=10^9$ (c) $\alpha=4 \times 10^{10}$ (d) $\alpha=10^{11}$

α を大きくすると分布関数が等方分布からずれる。 \exp 関数の計算は(c)までは可能だが、(d)では値が 1 を超えてしまい計算できない。

以上より α の上限値は 4×10^{10} である。参考のため計算できない条件 $\alpha = 10^{11}$ での $-\beta H - \alpha \mu$ の値を図 2.4.5 に示す。下限値は分布関数が等方分布からずれ始める 10^8 とする。 α が下限値より小さいと、 $-\beta H - \alpha \mu \approx -\beta H$ となり熱平衡分布と等しい。

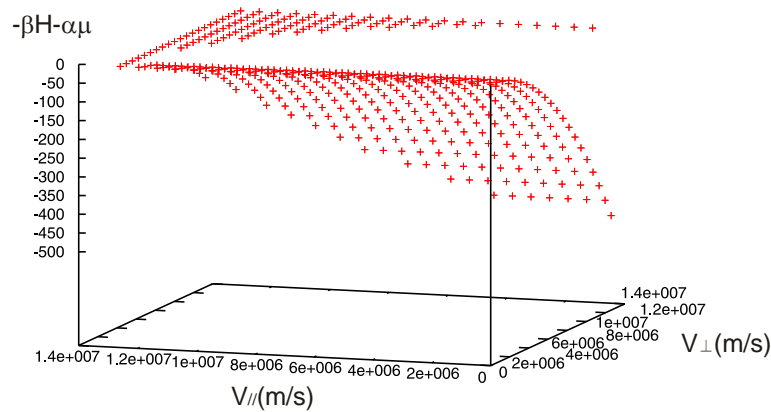


図 2.4.5 $-\beta H - \alpha \mu$ の値。図 2.4.1 に比べて値の桁が 2 つ異なる。値が -500 付近になると exp 関数の計算が出来なくなる。

$\alpha = 0, \gamma \neq 0$ の場合を示す。前の場合と同様に $ID=0$ での $J_{||}$ の最大値を知りたい。まず $J_{||}$ が最大となる積分変数の組み合わせを調べるために位置を $R=0.6(\text{m}), Z=0(\text{m})$ と固定し、全ての積分変数 $v_{\perp}, v_{||}$ の範囲で計算した $J_{||}$ の分布を図 2.4.6 に示す。

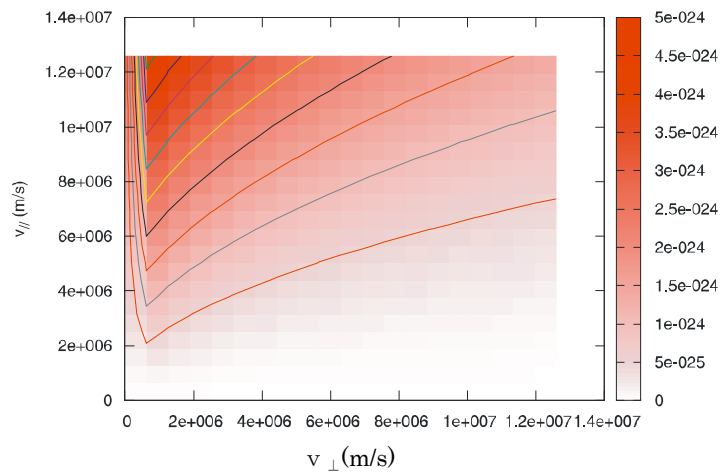


図 2.4.6 全ての積分変数 $v_{\perp}, v_{||}$ の範囲で計算した $J_{||}$ の分布

図 2.4.6 より $v_{||}$ が大きく、 v_{\perp} が小さいほど J が大きくなる。これは初期速度の磁力線に対するピッチ角が小さく、 $v_{||}$ が大きいほど $J_{||}$ が大きくなることを示す。これはピッチ角が小さくなれば跳ね返り点が原点に近くなり軌道距離が長くなるからである。 v_{\perp} が 0 のときは軌道計算ができないので $J_{||}=0$ としている。

図 2.4.6 より $ID=0$ かつ $J_{||}$ が最大となるような運動エネルギーの組 $(E_{\perp}, E_{||}) = (1.1, 406.1)$ での $J_{||}$ の位置依存性を図 2.4.7 で示す。

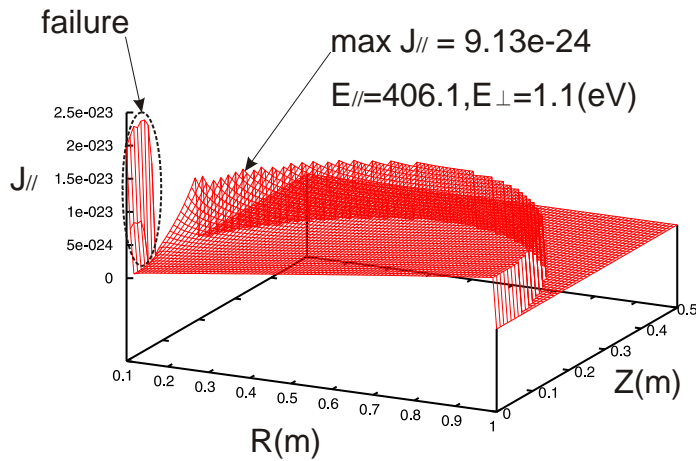


図 2.4.7 $J_{//}$ の 2 次元分布。 $R=0.1(\text{m})$ 付近では軌道長が $1(\text{m})$ 程度と計算されることから適切でない
と判断する。そのため $J_{//}$ の最大値は $R=0.163(\text{m})$ 、 $Z=0.25(\text{m})$ で得られる。

$J_{//}$ の最大値 $9.13\text{e-}24$ を得たので、次に γ の最大値を調べる。 $J_{//}$ が最大となる場所における分布関数の等高線図を図 2.4.8 に示す。

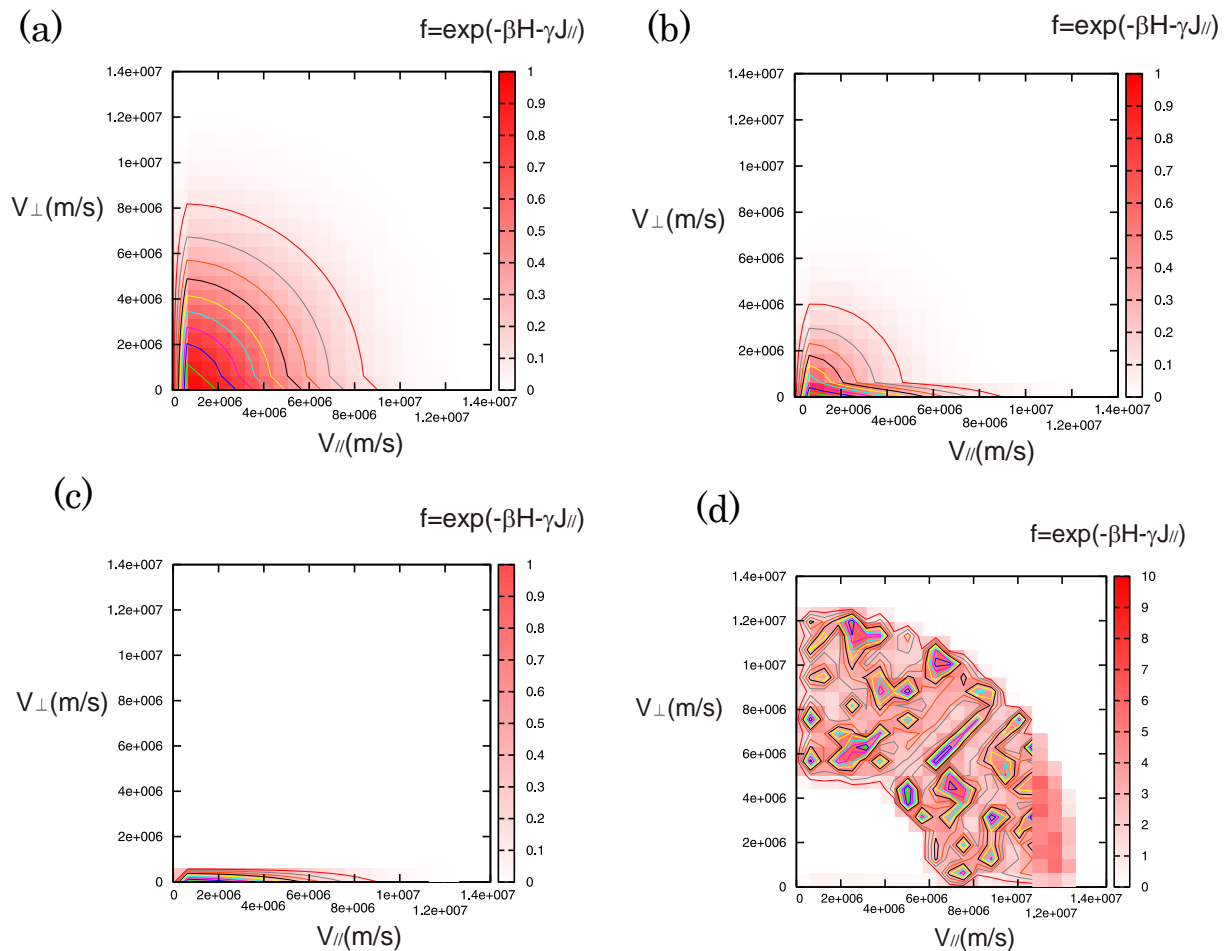


図 2.4.8 γ をパラメータとした分布関数。(a) $\gamma = 10^6$ (b) $\gamma = 10^7$ (c) $\gamma = 3 \times 10^8$ (d) $\gamma = 10^9$
(c) までは計算可能だが、(d) では値が 1 を超え \exp 関数が正しく計算できていない。

以上より γ の上限値は 3×10^8 である。参考のため計算できない条件 $\gamma = 10^9$ での $-\beta H - \gamma J_{\parallel}$ の値を図 2.4.9 に示す。下限値は分布関数が等方分布からずれ始める 10^6 とする。 γ が下限値より小さいと、 $-\beta H - \gamma J_{\parallel} \approx -\beta H$ となり熱平衡分布と等しい。

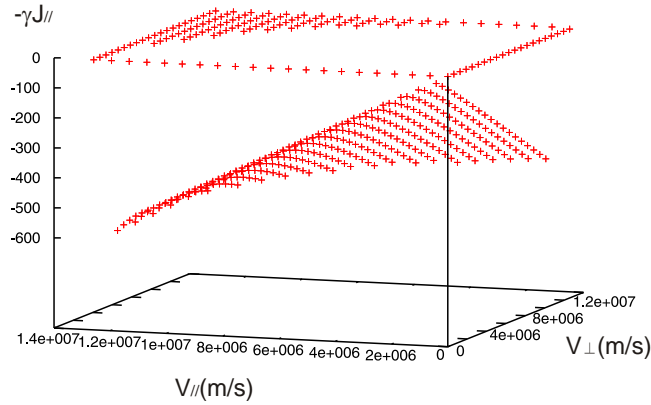


図 2.4.9 $-\beta H - \gamma J_{\parallel}$ の値。図 2.4.1 に比べて値の桁が 2 つ大きい。

以上よりケミカルポテンシャル α と γ の範囲を $\alpha : 10^8 \sim 10^{10}$ 、 $\gamma : 10^6 \sim 10^8$ とする。

2. 4. 2 熱運動のみを拘束条件に加える場合

式(2.10)で α 、 γ を 0 とおけば、

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi\omega_c(\mathbf{x})}{Zm} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2\right)\right\} d\mu dv_{\parallel}$$

となり熱運動のみを考慮した場合を計算できる。具体的にはプログラム ADINV-dint.for において、ケミカルポテンシャル α と γ を 0 として代入する。一方で、解析解は

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{3/2}$$

と定数になる。両者の比較をし、積分変数の刻み数を変化させて精度の議論をする。なお今後、計算領域は $\mathbf{X}=0.1\sim 1.0(\text{m})$ (磁場強度の大きい原点付近の計算を避ける)、 $\mathbf{Z}=0\sim 0.5(\text{m})$ とする。

以下の計算条件に対する結果を表 2.4.1 に示す。表 2.4.1 中の解析解に対する最大相対誤差とは、解析解の密度を ρ_{ani} 、数値計算で求めた密度を ρ_{cal} とすれば

$$\frac{|\rho_{\text{ani}}(\mathbf{x}) - \rho_{\text{cal}}(\mathbf{x})|}{\rho_{\text{ani}}(\mathbf{x})} \times 100(\%)$$

の最大値を指す。また、表中の積分に使用したデータ数とは、 $\text{ID}=0$ の積分変数の組数で、全データ数とは全積分変数の組数である。図 2.3.6 より $\text{ID}=1$ の場合が多いために使用したデータ数が少なくなる。

計算条件

- 平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16} (1/J)$
- 位置の刻み数 : X 方向 9 等分、 Z 方向 5 等分
- ケミカルポテンシャル : α 、 $\gamma = 0$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

表 2.4.1 最大相対誤差の刻み数依存性

積分変数 刻み数	解析解	積分値	解析解に対する 最大相対誤差(%)	計算時間	積分に使用したデータ数/ 全データ数
5	1.162e21	9.278e20	20.1	311(s)	780 / 2160
10		1.067e21	8.14	0.49(h)	2808 / 7260
20		1.107e21	4.72	2.6(h)	10608 / 26460
40		1.119e21	3.72	13(h)	41300 / 100860
80		1.122e21	3.45	65(h)	162764 / 393660

表 2.4.1 より最大相対誤差と計算時間を比べると、積分変数刻み数は 20 が最適である。ID=0 の数は全データの組のおよそ半分以下である。書き出しファイルをみると ID=1 の場合が多い。次に、積分変数刻み数を 20 にし、細かい密度分布が得られるよう位置の刻み数をさらに大きくして計算する。

計算条件

- 平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16} (1/J)$
- 位置の刻み数 : X 方向 99 等分、 Z 方向 50 等分
- 積分変数刻み数 : 20 等分
- ケミカルポテンシャル : α 、 $\gamma = 0$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

- 解析解との相対誤差

表 2.4.2 位置の刻み数を増やした時の最大相対誤差

積分変数 刻み数	解析解	積分値	解析解に対する 最大相対誤差(%)	計算時間	積分に使用したデータ数/ 全データ数
20	1.162e21	1.107e21	4.74	8.03(d)	102540 / 2249100

表 2.4.2 より最大相対誤差はほとんど変わらない。次に計算解の密度の等高線図を示す。なお密度は最大密度値で規格化してある。

・密度の等高線図

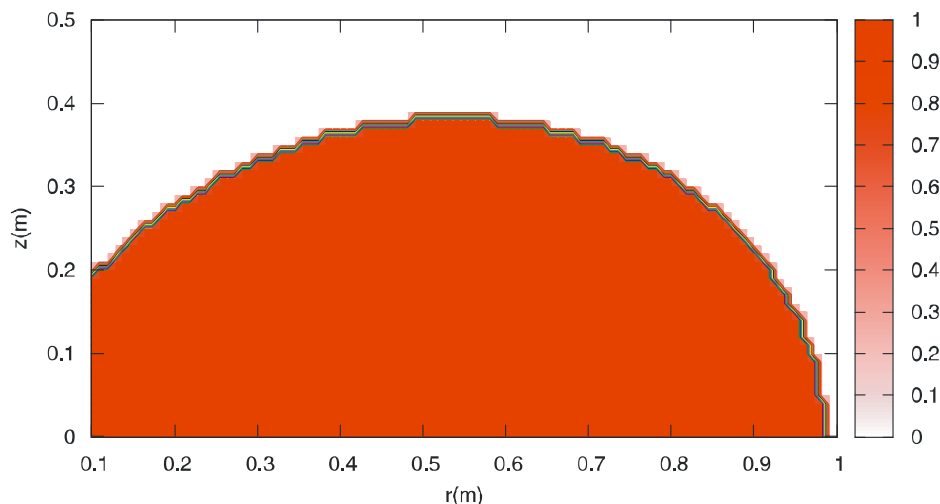


図 2.4.10 密度分布の等高線図。平坦な分布となり、密度が 0 の所は計算中に軌道が計算領域より外に出してしまうため全ての組で ID=4 となり、密度が得られない。密度の値が 1 と 0 の境界で直線的に変化しているのは位置の刻み数が見えるほど粗いためである。

2. 4. 3 熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加える場合

式(2.10)で γ を 0 とおけば、

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi\omega_c(\mathbf{x})}{Zm} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) - \alpha\mu\right\} d\mu dv_\parallel$$

となり熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加えた場合を計算できる。具体的にはプログラム ADINV-dint.for において、ケミカルポテンシャル γ を 0 で代入する。一方で、解析解は

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{mZ} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{1/2} \frac{\omega_c}{\beta\omega_c + \alpha}$$

である。以下の計算条件で解析解と計算解の比較を行い表 2.4.3 に示す。なお、2.4.1 節でデータの組は ADINV-data.for で予め求めているので、計算時間と、積分に使用したデータ数、全データ数は表 2.4.2 と変わらず、ここでは省く。またケミカルポテンシャルは β の値で規格化しており、今後示す値は β の規格値である。 α の単位は(N・s/m)である。

計算条件

- ・平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16} (1/J)$
- ・位置の刻み数 : X 方向 9 等分、 Z 方向 5 等分
- ・ケミカルポテンシャル : $\alpha = 1e10$ 、 $\gamma = 0$
- ・用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

表 2.4.3 熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件とした場合の最大相対誤差

積分変数刻み数	解析解に対する最大相対誤差(%)	最大誤差の場所 (X(m),Z(m))
5	53.8	(0.9,0.2)
10	22.0	(0.9,0.2)
20	7.1	(0.9,0)
40	3.54	(0.1,0.1)
80	3.28	(0.1,0.1)

表 2.4.3 より積分変数刻み数 40 で最大相対誤差が 3(%)付近に収束するが、計算時間を考えると、多少の誤差があっても刻み数が 20 の方が最適であると判断する。最大誤差の場所は、外側の磁気面、つまり軌道が長くなる場所という点で全部の場合で共通している。

次に、刻み数を 20 にし、細かい密度分布が得られるよう位置の刻み数をさらに大きくして計算する。

計算条件

- ・ 平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16} (1/J)$
- ・ 位置の刻み数 : X 方向 99 等分、Z 方向 50 等分
- ・ 積分変数刻み数 : 20 等分
- ・ ケミカルポテンシャル : $\alpha = 1e10$ 、 $\gamma = 0$
- ・ 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

- ・ 解析解との相対誤差

表 2.4.4 位置の刻み数を増やした時の最大相対誤差

積分変数刻み数	解析解に対する最大相対誤差(%)	最大誤差の場所 (X(m),Z(m))
20	8.79%	(0.982,0.000)

表 2.4.4 より最大相対誤差の位置は外側の磁気面の位置である。次に計算解から求めた密度の等高線図を示す。密度は最大密度値で規格化してある。

・計算解の等高線

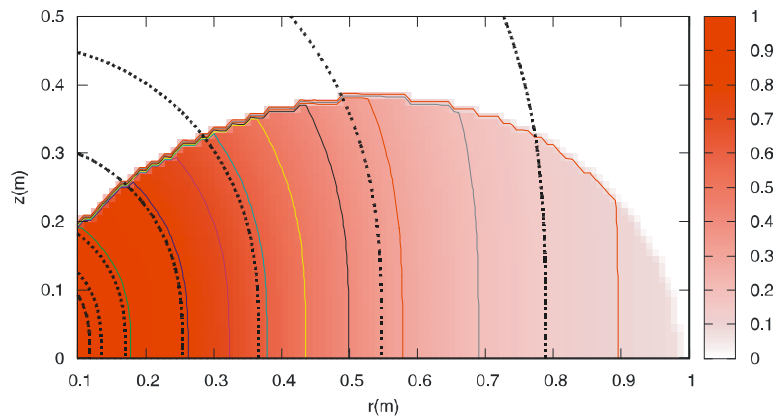


図 2.4.12 密度分布の等高線図。破線は磁場強度の等高線図を表す。ほぼ磁場強度の等高線に沿った分布となる。

μ は

$$\mu = m^2 v_c^2 / 2qB$$

なので μ の分布も磁場強度と同じであることを次の図 2.4.13 で示す。ただし、初期エネルギーは $E_{\perp} = E_{\parallel} = 112.5(\text{eV})$ と固定し、破線は磁場強度の分布を示す

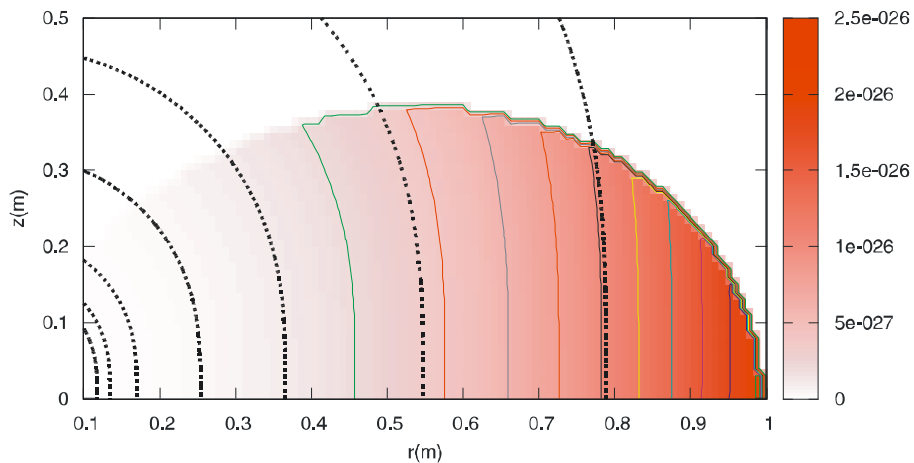


図 2.4.13 計算領域上の μ の分布。 μ は磁場強度に反比例するので、中心から外側に向かって値が大きくなる。式(2.7)の $\exp(-\alpha\mu)$ の項によって μ が大きい所で密度が小さくなる。この式の意味を物理的に述べる。電子はサイクロトロン運動により磁力線に沿って運動し、閉じた磁束管を周回運動する。磁場強度が大きいほど磁束管の断面積が小さく、密度が大きくなる。逆では密度が小さくなる。磁場強度が強いと μ は小さくなるので、 $\exp(-\alpha\mu)$ によって密度が大きくなる。図 2.4.12 と図 2.4.13 より、 μ の分布の大小を逆転させた分布が密度の分布に近い形をする。

これまではケミカルポテンシャル α の値を固定して考えたが、この依存性を次に調べる。

計算条件

- 平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16}(1/J)$
- 位置の刻み数 : X 方向 99 等分、 Z 方向 50 等分
- 積分変数刻み数 : 20 等分
- ケミカルポテンシャル : $\gamma = 0$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

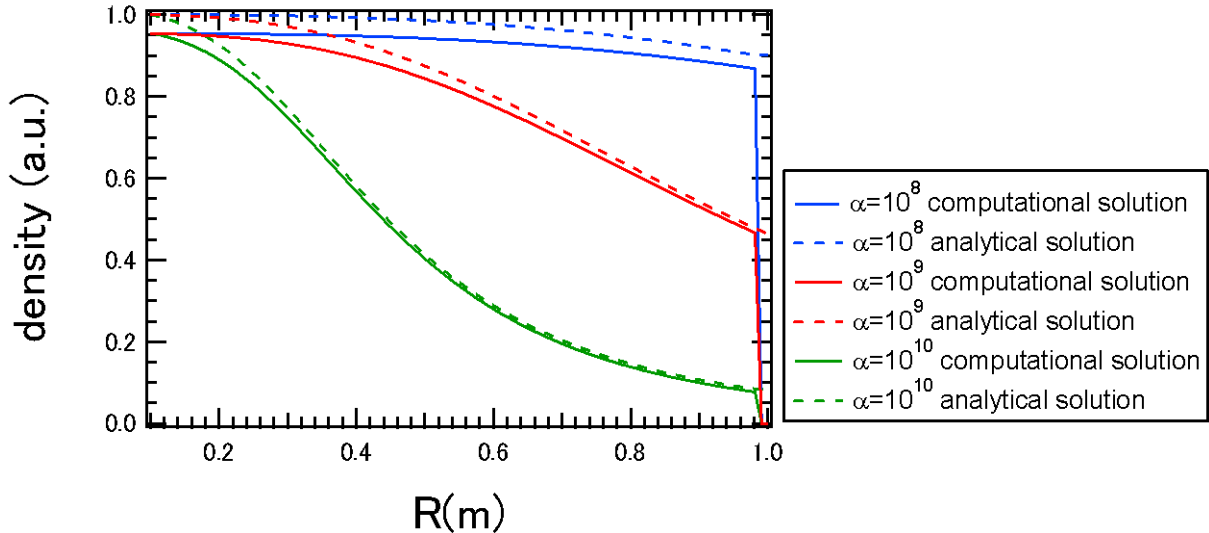


図 2.4.14 ケミカルポテンシャル α の依存性と解析解との比較。各 α の値で、解析解の最大値で規格化をしている。 $\alpha=10^8$ では図 2.4.14 のように平坦な分布からずれ始める。解析解との最大相対誤差は 4.74(%)である。 α を大きくすると磁場強度の強い領域に密度の割合が集まる。 $\alpha=10^{10}$ での解析解との最大相対誤差は 8.79(%)である。

2. 4. 4 熱運動とサイクロトロン運動とバウンス運動を拘束条件に加える場合

J_{\parallel} と v_{\parallel} のヤコビアン の 厳密な解析解は手計算では得られない。[7] のように赤道面付近のバウンス運動は調和振動で、赤道面上での速度を $v_{\parallel} \cong v_c$ と近似すれば、ヤコビアンを得ることができ、式 (2.9) の近似解を得る。この方法は APPENDIX B-4 で述べる。近似ではなく厳密な解析解は得られないので計算解の誤差を知ることはできない。ここでは傾向は比較する。

[7] によれば密度は以下の式で近似される。

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi\omega_c}{m^2 Z} \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\mu(\beta\omega_c + \alpha)\}}{\beta\sqrt{2\omega_c\mu/m + \gamma L_{\parallel}}} d\mu \quad (2.11)$$

この計算には広義積分を行うコードが必要となる。[11] から引用したコード intdei.for を用いる。

これは関数 $f(x)$ を开区間 (a, ∞) で積分できるコードである。ただし $f(x)$ は x の大きい所で単調に減少する関数である必要がある。まずは `intdei.for` が精度よく計算されるかを、を解析解が知られている次の式を用いて確かめる。

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

式(2.11)で α と γ を 0 にしたとき

$$\rho(x) \propto \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\mu(\beta\omega_c)\}}{\beta\sqrt{2\omega_c\mu/m}} d\mu \propto \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\mu(\beta\omega_c)\}}{\sqrt{\mu}} d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\beta\omega_c}}$$

となる。これを `intdei.for` で計算し、解析解と比較する。このとき計算を行う $R=0\sim 1.0(\text{m})$ の赤道面上において $\beta\omega_c$ のオーダーを評価する。

$$\omega_c = qB/m \cong 10^{-19} \times 10^{(0\sim -3)}/10^{-31} = 10^{12\sim 9}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T} = 10^{16}$$

となるので

$$\beta\omega_c = 10^{28\sim 25}$$

である。この範囲で解析解と `intdei.for` の計算解の比較を行い、結果を表 2.4.6 に示す。表中の相対誤差は次の式から求める。

$$\frac{|\text{解析解} - \text{コードの計算解}|}{\text{解析解}} \times 100 (\%)$$

表 2.4.6 解析解とコード `intdei.for` の計算結果の比較

$\beta\omega_c$	解析解 $\sqrt{\pi/\beta\omega_c}$	コード <code>intdei.for</code> の解	相対誤差(%)
10^{25}	5.604991×10^{-14}	5.604973×10^{-13}	0.000321
10^{26}	1.772453×10^{-13}	1.772449×10^{-13}	0.000226
10^{27}	5.604991×10^{-14}	5.604959×10^{-14}	0.000571
10^{28}	1.772453×10^{-14}	1.772425×10^{-14}	0.00158

表 2.4.6 より `intedei.for` のコードの精度は保証されている。

次に式(2.11)での $L_{||}$ を求める方法を述べる。 $L_{||}$ は位相空間上でのバウンス軌道長さである。現在、赤道面付近のバウンス運動は調和振動で、赤道面上での速度を $v_{||} \cong v_c$ で近似されている。その調和振動の振幅を $L_{||}$ で規格化することを考える。直交座標系におけるバウンス運動の振幅を $l_{||}$ とし、次の仮定を置くと

$$L_{||} \cong l_{||}$$

$J_{||}$ は

$$J_{||} = \frac{E_{||}}{\omega_b} = \frac{E_{||} l_{||}}{v_c} \quad (2.12)$$

と $J_{||}$ を見積もることができる。そこで実際に軌道計算から求める厳密な $J_{||}$ と式(2.12)で求める $J_{||}$ の比較をし、近似の精度を確認する。

計算条件

- 初期位置 : $R=0.1\sim 0.9(\text{m}), Z=0$ の赤道面上
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道の半周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の $1/64$
- 使用プログラム : ADINV_no-loop.for

計算結果

R 方向の J_{\parallel} の比較を図 2.4.6 に示す。

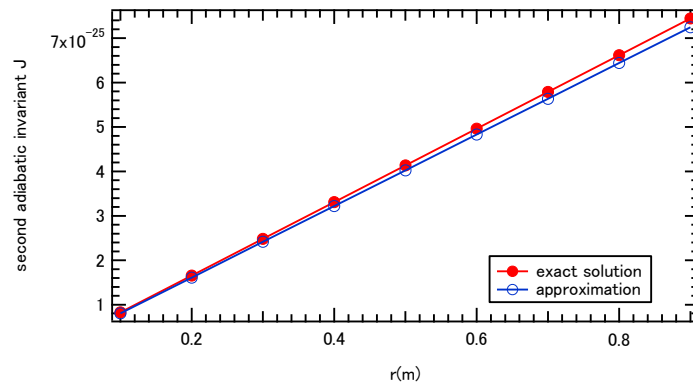


図 2.4.15 J_{\parallel} の近似解と軌道計算から求めた値の比較。厳密解と近似解はほぼ一致する。次に位置を固定して運動エネルギーを変化させる。

計算条件

- 初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=E_{\parallel}=10, 20, 50, 100, 200, 500(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道の半周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の $1/64$
- 使用プログラム : ADINV_no-loop.for

計算結果

$E(\text{eV})$ をパラメータとする際の J_{\parallel} の比較を図 2.4.16 に示す。

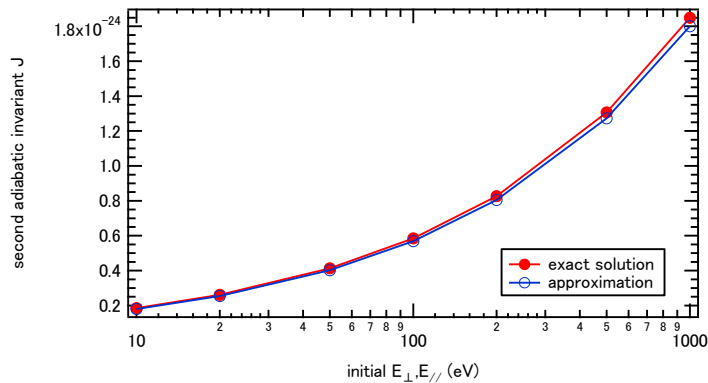


図 2.4.16 $E(\text{eV})$ をパラメータとした際の J_{\parallel} の比較。厳密解と近似解はほぼ一致する。。

以上より、 $J_{||}$ を定義通り求めた厳密解(exact solution)と $L_{||}$ を用いた近似解が一致した。これは $L_{||}$ を軌道の振幅と仮定したことが正しいことを示している。さらに軌道の振幅を $L_{||} \cong 1/\psi$ と仮定して、軌道計算により求めた軌道の振幅と比較し、計算結果を図 2.4.17 に示す。

計算条件

- 初期位置 : $R=0.1\sim 0.9(\text{m}), Z=0$ の赤道面上
- 初期エネルギー : $E_{\perp} = E_{||} = 50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道の半周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64
- 使用プログラム : ADINV_no-loop.for

計算結果

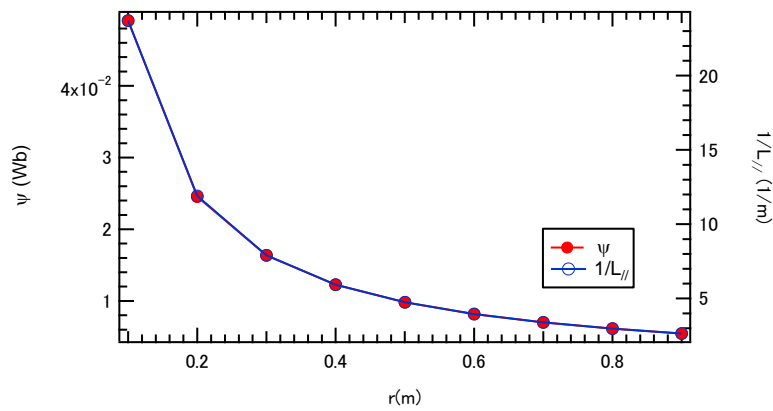


図 2.4.17 磁気面値の逆数と軌道計算で求めた軌道の振幅。絶対値は一致しないが、分布はほぼ一致する。

比例定数を求めれば

$$L_{||} \cong 0.00207/\psi$$

と近似できる。これより $L_{||}$ の近似式を得、式(2.11)は次の式となる。

$$\rho(x) = \frac{2\pi\omega_c}{m^2Z} \int_0^\infty \frac{\exp\{-\mu(\beta\omega_c + \alpha)\}}{\beta\sqrt{2\omega_c\mu/m + 0.00207\gamma/\psi}} d\mu \quad (2.13)$$

この式を比較する近似解として、断熱不変量を計算する方法と比較する。ただし、計算解 (ADINV-int.for から求める解)は、解析解で使われた近似を反映させなければならない。式(2.13)に $\alpha = \gamma = 0$ を代入すると解析的に解け

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{m\beta} \right)^{3/2}$$

となる。これは式(2.10)に $\alpha = \gamma = 0$ を代入した解の 1/2 である。よって、このときに限り、式(2.10)の値の半分を式(2.13)と比較する。

計算条件

- 平衡温度 : 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16}(1/J)$
- 位置の刻み数 : X 方向 90 等分、 Z 方向 50 等分
- 積分変数刻み数 : 20 等分
- ケミカルポテンシャル : $\alpha = 1e10$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

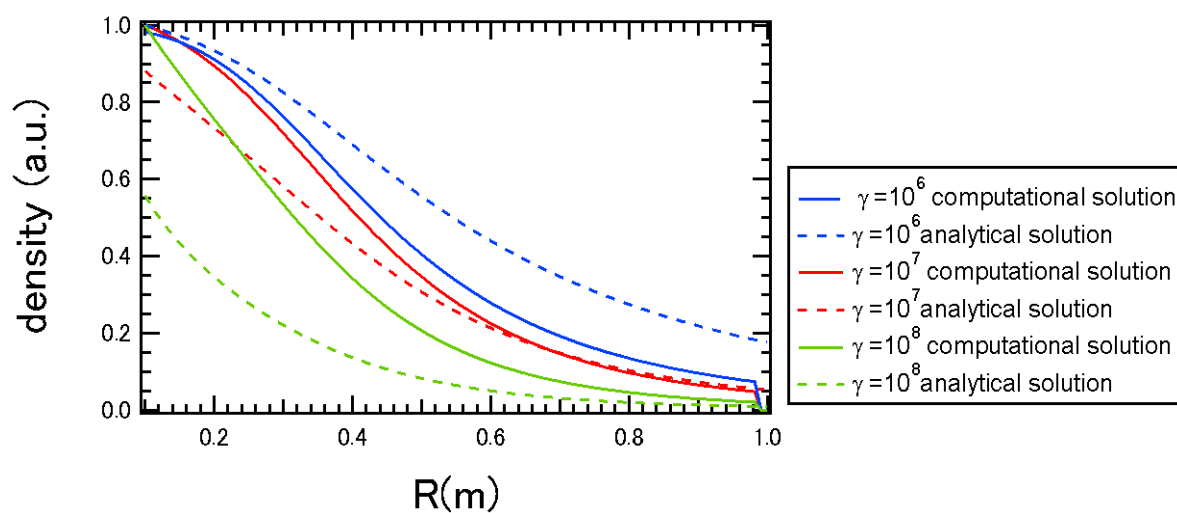


図 2.4.18 ケミカルポテンシャル γ の依存性と解析解との比較。各 γ での値は、計算解と解析解の最大値で規格化をしている。 γ が大きくなると R が小さい所に密度の割合が多くなり、全体的に解析解との差が大きくなる。 $\gamma=10^6$ では最大相対差が 60%、 $\gamma=10^7$ では最大相対差が 19%、 $\gamma=10^8$ では最大相対差が 6% である。ただし、この解析解が厳密解でなく近似解であるのでこれを誤差と呼べないが、 γ のパラメータ傾向が一致していることが言える。

今までは式(2.13)を近似解として、計算解と傾向の比較を行った。しかし、次は近似をしない計算を行う。計算領域を先ほど計算を行った $Z=0(m)$ の赤道面上から RZ 平面上に拡張する。

計算条件

- 平衡温度 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16}(1/J)$
- 位置の刻み数 : X 方向 99 等分、 Z 方向 50 等分
- 積分変数刻み数 : 20 等分
- ケミカルポテンシャル : $\alpha = 1e10$ 、 $\gamma = 1e8$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

・密度分布

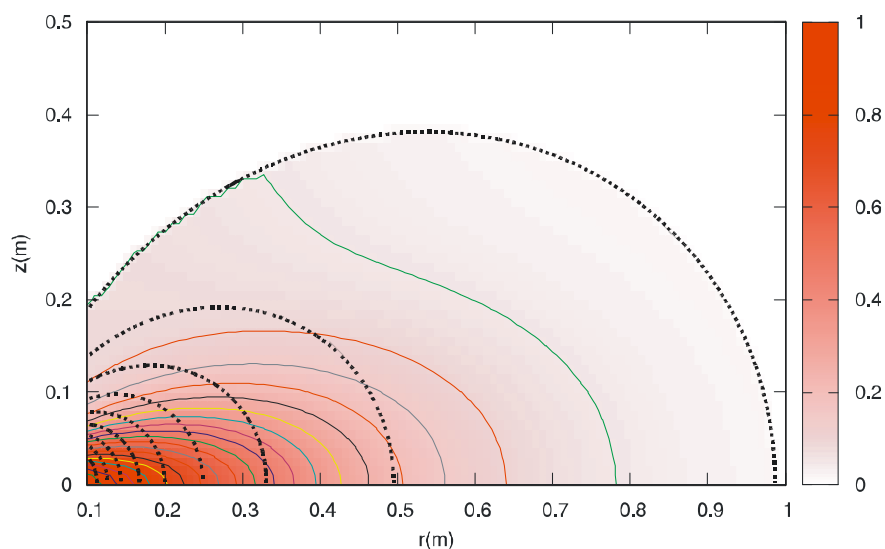


図 2.4.19 密度の等高線。Z=0(m)の赤道面に密度が大きくなるような分布が得られる。赤道面上でも R が小さい方が密度が大きい。破線は磁気面值の等高線分布を示し、磁気面とは一致しない分布となる。 $\gamma=0$ の場合の図 2.4.13 と比べて Z=0 側に密度が集まることが分かる。

図 2.2.7 の軌道のピッチ角依存性をみると、ピッチ角が 45 度の時にすでに Z=-0.15~0.15 の軌道範囲である。よって全体の半分程度がその範囲内に軌道があることになるために密度の割合が大きくなると考えられる。さらに原点付近ほど密度の割合が多い。これは原点に近いほど磁気面の周長が短くなってバウンス運動の軌道長が短くなり、運動の周波数が増加し、単位時間・単位微小体積内に存在する粒子の数が増えるためである。

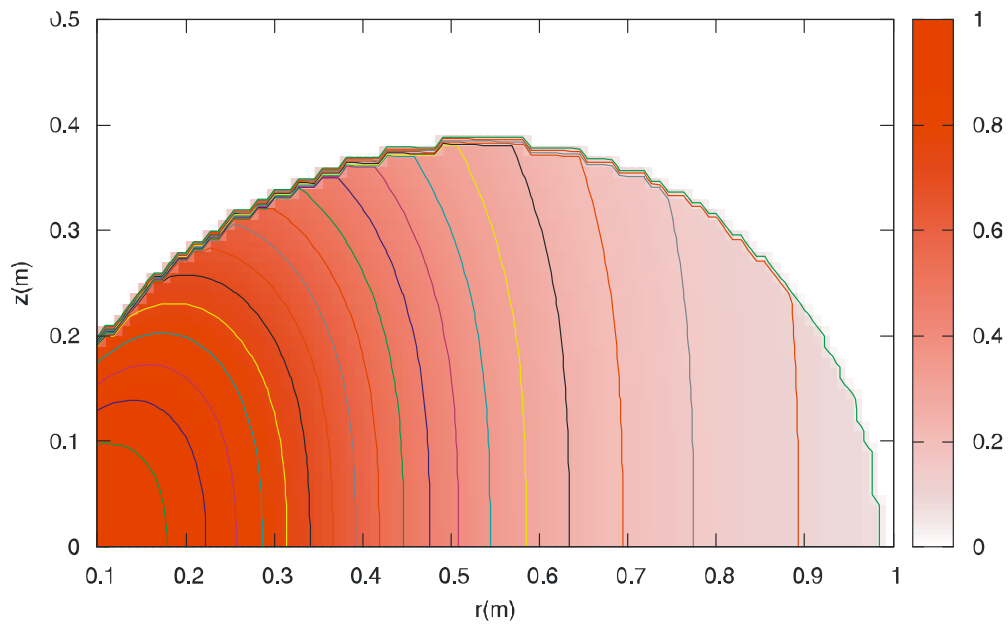
次に γ の依存性を調べる。ただし、赤道面上の比較は図 2.4.18 で示したので、等高線の比較を行う。

計算条件

- ・ 平衡温度 100(eV) $\beta = 1/k_B T = 6.24 \times 10^{16} (1/J)$
- ・ 位置の刻み数 : X 方向 99 等分、 Z 方向 50 等分
- ・ 積分変数刻み数 : 20 等分
- ・ ケミカルポテンシャル : $\alpha=1e10$ 、 $\gamma=1e6$ 、 $1e7$
- ・ 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

(a)



(b)

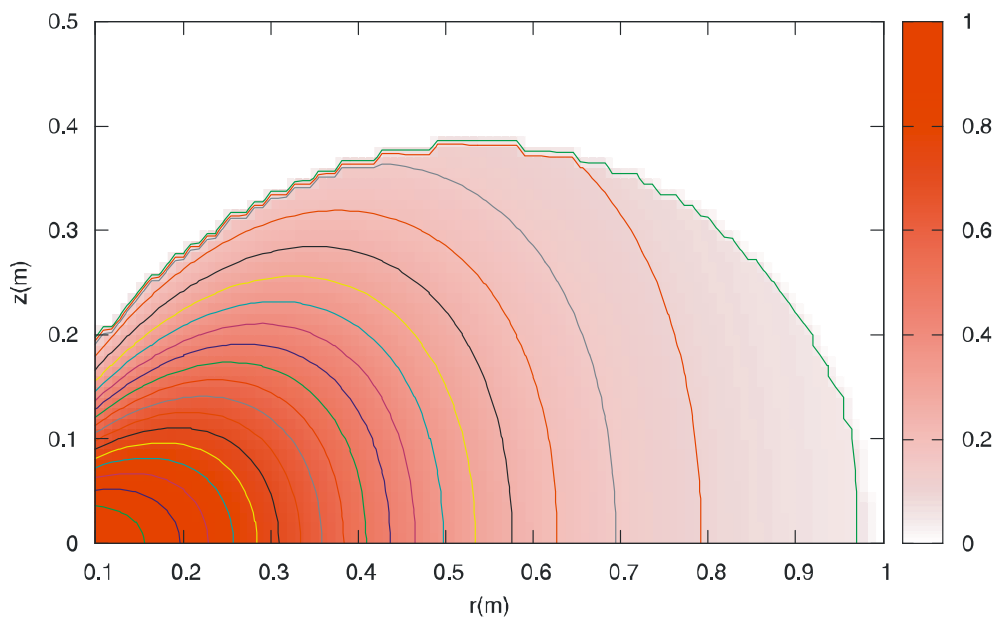


図 2.4.20 γ の依存性(a) $\gamma=10^6$ (b) $\gamma=10^7$ 。 $\gamma=10^6$ ではバウンス運動の効果よりもサイクロトロン運動の効果強いが、 $\gamma=10^7$ となると赤道面側に密度の割合が集まり始め、バウンス運動の効果表れる。 $\gamma=10^8$ の場合は図 2.4.19 に示している。

2. 5 まとめと考察

- ・運動方程式を解いて断熱不変量を求める際の、計算させるバウンス周期の回数やルンゲクッタ法の時間刻みの最適化を行った。その際、断熱不変量 μ と $J_{||}$ の保存を確認した。
- ・断熱不変量を求めるもう一つの方法として、磁力線追跡法を紹介した。計算時間が短いですが、電場の効果を反映できないため運動方程式を解く方法を選択した。
- ・ケミカルポテンシャルの範囲は $\alpha=10^8\sim 10^{10}$ 、 $\gamma=10^6\sim 10^8$ である。
- ・断熱不変量を用いた積分を行い解析解と比較を行った。その結果、熱運動とそれにサイクロトロン運動を拘束条件に加えた場合の解析解との相対誤差が数(%)程度に収まった。
- ・断熱不変量を用いた積分の結果、熱運動の場合は平坦な分布となった。
- ・サイクロトロン運動を拘束条件に加えた場合は磁場強度の大きい所に密度の割合が集まった。これは磁束管断面が小さい所の密度が大きいためである。
- ・バウンス運動を拘束条件に加えた場合は赤道面上の原点寄りに密度が多く集まる結果となった。これは赤道面付近でバウンスされる割合が高く、原点付近の周波数が高くなるからである。

第3章 RT-1 磁気圏型非中性プラズマの運動論的平衡

第2章でポインドダイポール磁場配位での運動論的平衡解析を行った。この章では磁場配位を発展させて、実験装置 RT-1 磁場配位を模した円環電流周りの磁場配位での運動を考える。そのため、軌道計算のパラメータの最適化から始め、電場を考慮しない場合、電場を考慮に入れた場合と順に運動論的解析を行う。

3. 1 磁場のみを考慮した場合

3. 1. 1 RT-1 磁気圏型磁場配位

RT-1 実験装置の磁場配位について述べる。Appendix C-1 の通り、RT-1 はトーラス状のコイルに流れる電流が作る磁場配位で、半径 0.25(m) に電流中心がある。Z 軸周りの対称性からベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ はトロイダル角 θ 成分のみをもち

$$A_{\theta} = \frac{\mu}{\pi k} I \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) K(k) - E(k) \right)$$

で表せる。詳しい導出は Appendix B-1 で述べる。ここで $K(k)$ 、 $E(k)$ はそれぞれ第1種完全楕円積分、第2種完全楕円積分である。磁場は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で求めることができ以下の式となる。

$$B_r = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{z}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right)$$
$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right)$$

円環の近くでは $k \approx 1$ となり次の楕円関数の近似を用いる。

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right) (1-k^2)$$

$$K(k) = \ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right) (1-k^2)$$

ここで、楕円関数の計算方法を述べる。軌道計算の際には軌道位置の更新のたびに磁場強度を求める必要がある。すると楕円関数を毎回計算することになり膨大な時間がかかる。そこで、事前に楕円関数の値を収めた1次元配列 $\mathbf{K}(k)$ 、 $\mathbf{E}(k)$ を用意する。この配列を使う際は楕円関数の変数 k を 10000 倍し、整数に変換された k と対応する $\mathbf{K}(k)$ 、 $\mathbf{E}(k)$ を読みだして用いる。具体的に、配列の k の範囲は 0~9999 (楕円関数の変数としての k の範囲は 0~0.9999) とし、それぞれに対応する楕円関数の値を保存する。この近似の精度を Linux マシン内に作ったプログラム `bfield-nnp.f90` を用いて行う。ここで述べた楕円関数の値を配列から引用する方法をサブルーチン `bvac2` に、場所を指定するごとに楕円関数を計算させる精度がよい方法をサブルーチン `bvac4` に書き、両者の結果を比較する。各 RZ 平面の位置で磁場強度の相対誤差を次のように定義すれば

$$\frac{|B_{\text{bvac}2} - B_{\text{bvac}4}|}{B_{\text{bvac}4}} \times 100(\%)$$

最大誤差は(R,Z)=(0.452,0.246)の位置で0.452(%)となり、配列から引用する方法でも高精度が維持されることが確かめられる。もちろん計算時間は配列から引用する方が短いので、今後楕円関数の値はこの手法を用いて求めることにする。

次に、RT-1 磁場配位を電流中心(R,Z)=(0.25,0)に全電流 250kA が流れるような円環電流周りの磁場配位と近似することを行う。実際は1つの円環に全電流が流れることはなく RT-1 装置では図 3.1.1 のように複数の円環に電流が分散するモデルと考えた方が正確である。このモデルと円環を1つとした時の磁場強度を比較する。

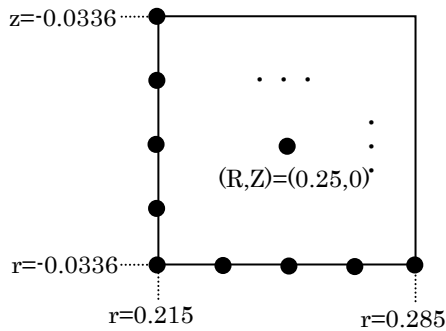


図 3.1.1 より R 方向に 5 点、Z 方向に 5 点、計 25 か所に電流中心、すなわち計 25 本の円環電流を設置する。(R,Z)=(0.25,0)は円環が存在する領域の中心にある。1本の円環には電流が 250/25=10(kA)流れるとする。この計算は Linux マシン内に作ったプログラム bfield-nnp.f90 を用いて行う。電流中心の数が 1 の場合はサブルーチン bvac3、25 の場合はサブルーチン bvac4 を用いる。結果を次の図 3.1.2 に示す。

図 3.1.1 円環電流の RZ 平面での分布

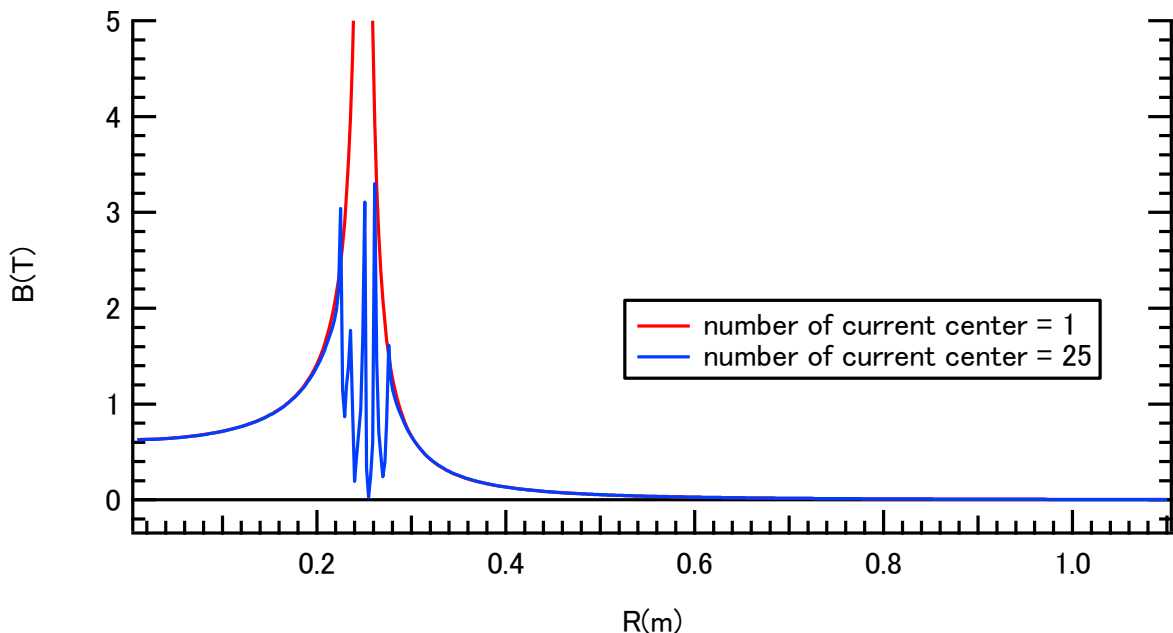


図 3.1.2 赤道面上の磁場強度（電流中心の数が 1 の場合と 25 の場合）。円環存在領域 R=0.215 ~ 0.285(m)以外ではほぼ等しい。

RZ 平面の各位置で磁場強度の誤差を次のように定義する。

$$\frac{B_{\text{電流中心の数}=1} - B_{\text{電流中心の数}=25}}{B_{\text{電流中心の数}=25}} \times 100(\%)$$

最大誤差は $(R,Z)=(0.439,0.246)$ で $3.52 \times 10^{-2}(\%)$ となり電流中心の数を1とする近似でも高精度さが示される。計算時間は電流中心の数が多ければ長くなるため、今後は電流中心の数を1つに近似して計算を行う。

最後に、円環電流周りの磁場とポイントダイポール磁場との比較を行う。図 3.1.3 に円環電流周りとポイントダイポールの磁場配位の等高線を示す。

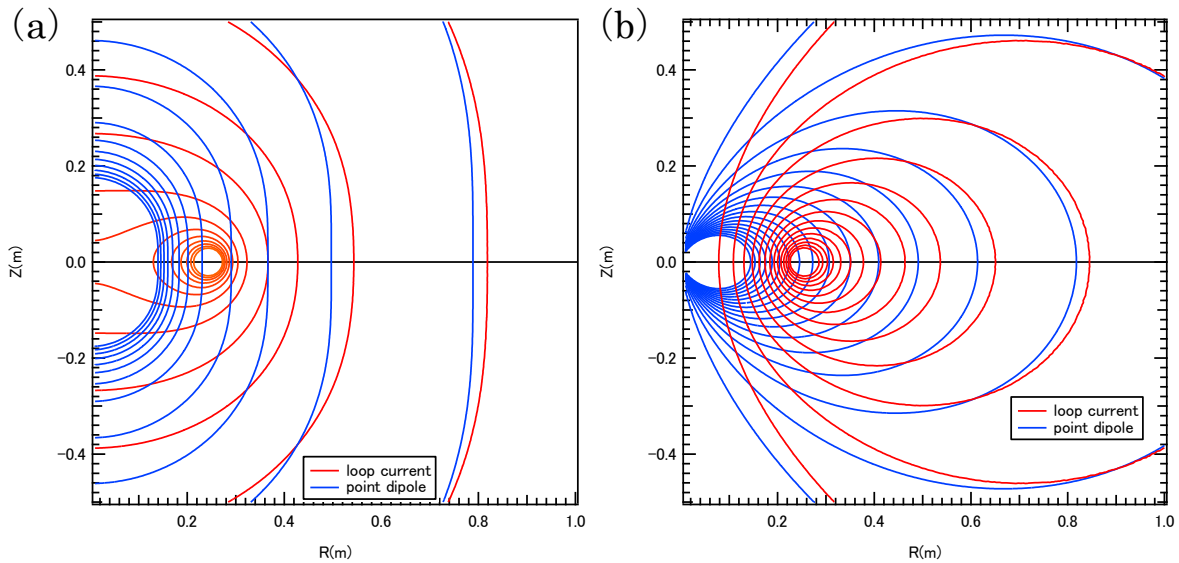


図 3.1.3 (a)円環電流周りとポイントダイポール磁場配位の磁場強度等高線（磁場強度の最大値を1.8(T)とする）(b)円環電流周りとポイントダイポール磁場配位の磁気面值等高線（磁気面值の最大値を0.28(Wb)とする）((a)(b)ともにプログラム CAL-DPBB.for で計算する)。ポイントダイポール磁場配位では原点での磁場勾配が大きいのにに対して、円環電流周りの磁場配位では、電流中心の周りの磁場勾配が大きい。(b)よりポイントダイポール磁場配位では全ての磁気面は原点付近を通る閉じた曲線となる。

2章で触れたように原点付近を通る電子の運動は扱いが難しいため本研究では考えない。ポイントダイポール磁場配位では全ての電子はバウンス運動をすることになる。それに対して円環電流周り磁場では図 3.1.3(b)のように電流中心の周りに閉じた磁力線となる。磁力線方向の速度成分が大きい場合、磁力線を周回する運動も考えられる。この運動については円環電流周り磁場配位特有の軌道として後述する。

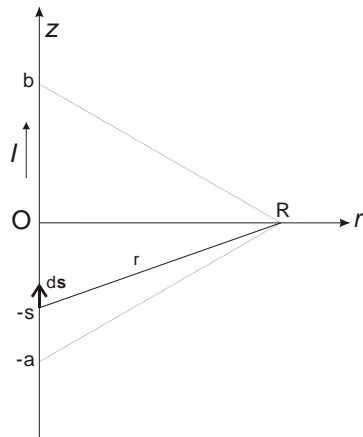


図 3.1.4 直線電流周りの磁場配位

次に $Z=0(m)$ 赤道面上での分布を示すと同時に、楕円関数を用いた円環電流周り磁場の計算を、赤道面上の解析解でベンチマークする。円環近傍の点では円環を直線と近似できる。図 3.1.4 で、 Z 方向に一樣な電流 I が流れている時、原点から R 離れた r 軸上の点での磁場強度とベクトルポテンシャルは

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$A(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_A^B \frac{ds}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^b \frac{ds}{\sqrt{s^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left(\frac{\sqrt{b^2 + R^2} + b}{\sqrt{a^2 + R^2} - a} \right)$$

となる。ここで円環電流を直線電流とみなす範囲 $-a \sim b$ を $-a=-0.01(m)$ 、 $b=0.01(m)$ として計算する。 a と b のオーダーがこれより大きいと磁気面值の値が大きくなり、逆だと小さくなる。電流中心の位置 $R=0.25(m)$ 、 $Z=0(m)$ は計算しない。この直線電流、円環電流、ポイントダイポールの磁気面值を図 3.1.5 で示す。

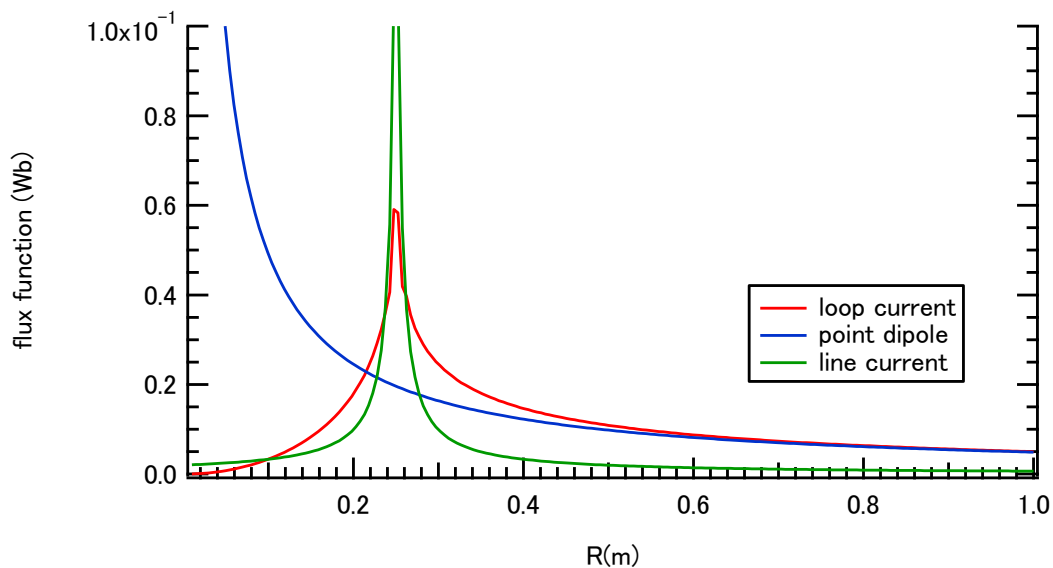


図 3.1.5 赤道面上での磁気面值分布 (使用プログラム : CAL-DPBB.for)。円環に近い領域では直線電流周り磁場の解析解と一致し、遠い領域ではポイントダイポール磁場の解析解と一致する。

次に磁場強度分布を示す。

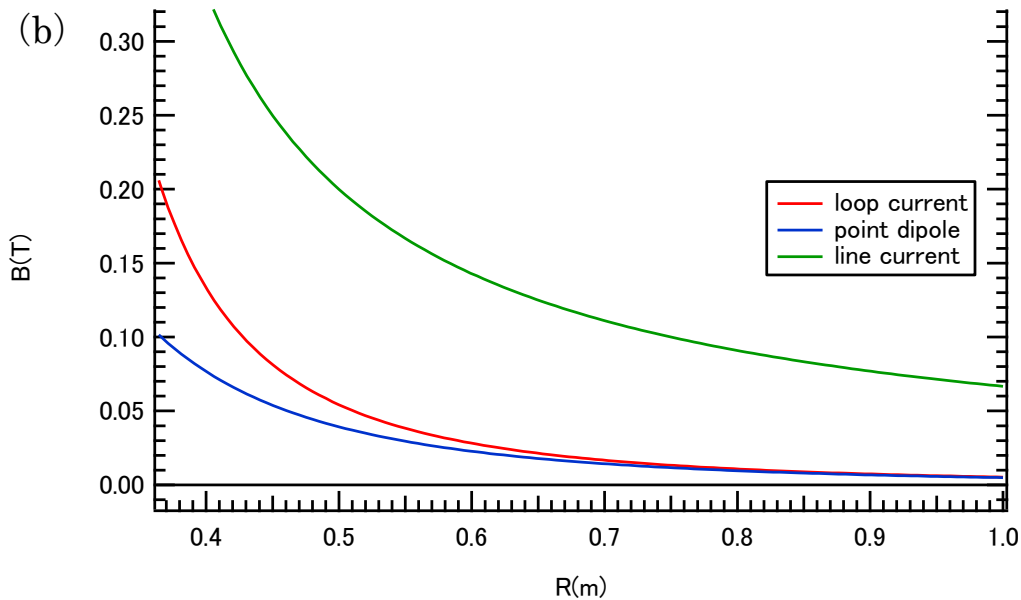
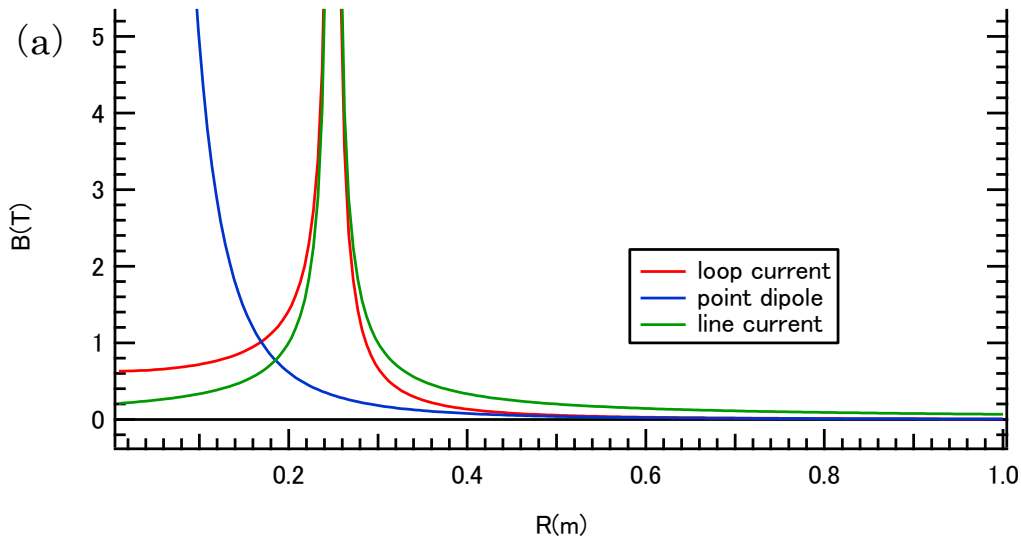


図 3.1.6 (a)円環電流周り・ポイントダイポール・直線電流周り磁場配位の磁場強度
 (b) 円環電流周り・ポイントダイポール・直線電流周り磁場配位の磁場強度 (円環から遠い領域)
 (使用プログラム : CAL-DPBB.for)。円環に近い領域では直線電流周りの解析磁場と一致し、遠い領域ではポイントダイポールの解析磁場と一致する。

以上から解析解が存在する領域で円環電流周りの磁場はベンチマークされる。

3. 1. 2 軌道計算の方法と精度

2 章と同様に、まずは計算の一例を示す。R=0.5(m),Z=0(m)の点で磁力線に垂直方向(X 方向)、平行方向(-Z 方向)にそれぞれ 50(eV)のエネルギーを持つ電子の軌道を考える。プログラムは XYZ

のデカルト座標が使われているため、R 軸と X 軸を一致させる。Y 軸の値はとくに断りがなければ $Y=0(\text{m})$ である。最小時間刻みとは、ルンゲクッタ法の時間刻みの最小値のことである。この RT-1 装置の磁場はポイントダイポール磁場と違い、電流中心のあるコイル内はプラズマが存在せず電子が運動をしない領域である。そのため電子が運動をする領域ではポイントダイポール磁場の原点付近のように磁場強度が極端に大きくなる。時間刻みが与え得た最小値より小さくならない。

計算条件

- ・ 初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$ 、初期エネルギー : $E_{\perp}=E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- ・ 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
(時間刻みはこれが最適であると後に示されるので、ここでは天下り的に用いる)
- ・ 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

- ・ 軌道

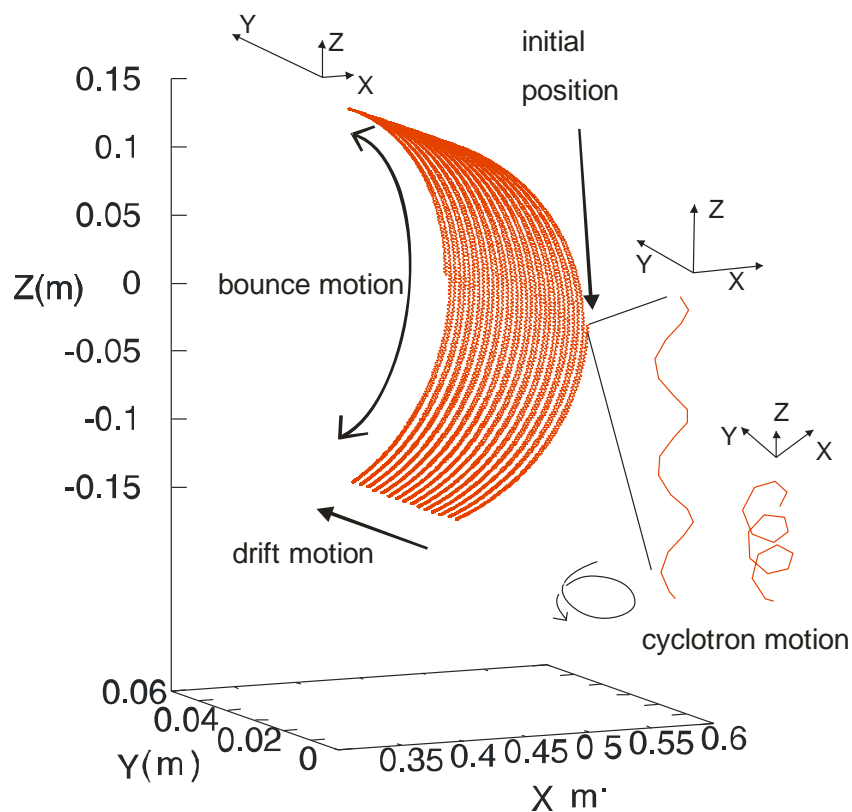


図 3.1.7 軌道図。初期位置からサイクロトロン、バウンス運動を繰り返しながら Y 方向にドリフト運動をしていることが分かる。

・ μ と $J_{||}$ の時間変化

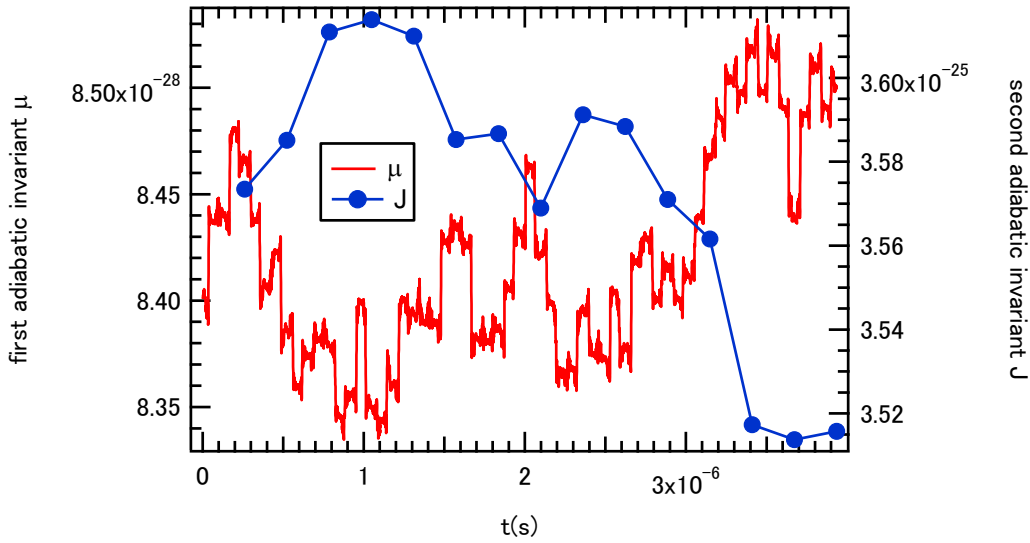


図 3.1.8 μ と $J_{||}$ の時間変化。 μ はサイクロトロン運動を 1 周期分で平均した値である。この計算時間では数(%)のオーダーで値が変動する。

・ 運動エネルギーと速度

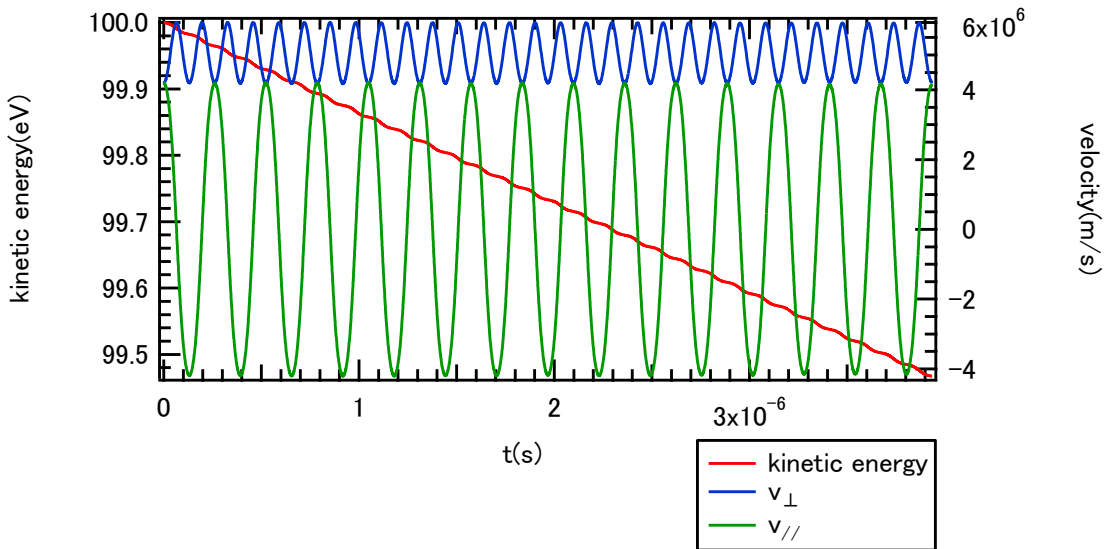


図 3.1.9 運動エネルギーと速度。運動エネルギーはこの計算時間で 0.1(%)のオーダーで減衰している。 v_{\perp} が $v_{||}$ よりも大きい理由は、初期位置の $Z=0(\text{m})$ の赤道面上では同じ速度でも、 v_{\perp} は赤道面から離れ強磁場側を運動するにつれて増加し、 $v_{||}$ は運動エネルギーの保存のため減少するからである。

運動エネルギーに関して、時間刻みを小さくし精度を上げればエネルギーの減衰が無視できるまで小さくなることは後で示す。

・磁場強度と磁気面值

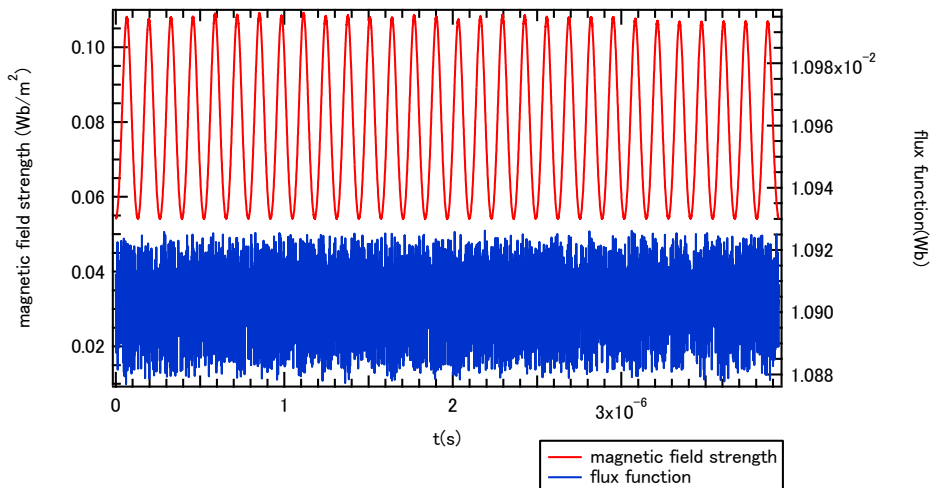


図 3.1.10 磁場強度と磁気面值。磁場強度の振幅は変化せず、磁気面值も 0.1(%)のオーダーの範囲でしか振動しないので、同じ磁気面上を運動していることが示される。

図 3.1.9 で運動エネルギーが減衰する理由は、2 章の図 2.2.10 の解説で述べた通りで時間刻みが荒いためである。なお計算時間は 4(s)である。次に時間刻みを細かく $1e-12(s)$ と固定し精度を上げて同じ計算を行う。

計算条件

- ・初期位置 : $R=0.5(m), Z=0(m)$ 、初期エネルギー : $E_{\perp} = E_{\parallel} = 50(eV)$
- ・計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ルンゲクッタの時間刻み : $1e-12(s)$ の固定値
- ・使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

- ・サイクロトロン運動の軌道

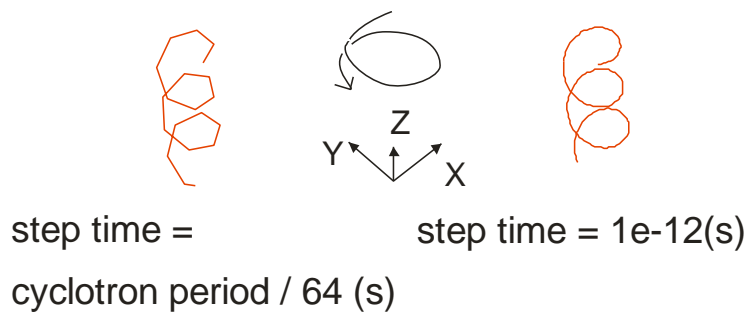


図 3.1.11 サイクロトロン運動の軌道。図 3.1.7 で示した詳細なサイクロトロン運動と同じ場所を抜き出し、各時間刻みの条件で示す。明らかに時間刻みが $1e-12(s)$ の方が滑らかな軌道となり、精度が上がったことが示される。バウンス・ドリフト運動は図 3.1.7 と同じように観察できる。

・ μ と J_{\parallel} の時間変化

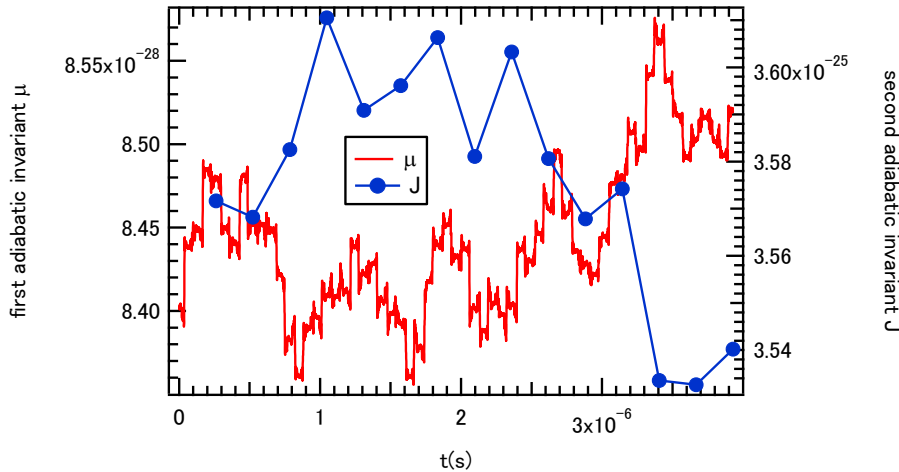


図 3.1.12 μ と J_{\parallel} の時間変化。この計算時間で数(%)のオーダーで値が変動する。図 3.1.8 の変動のオーダーと変わらない。

・ 運動エネルギーと速度

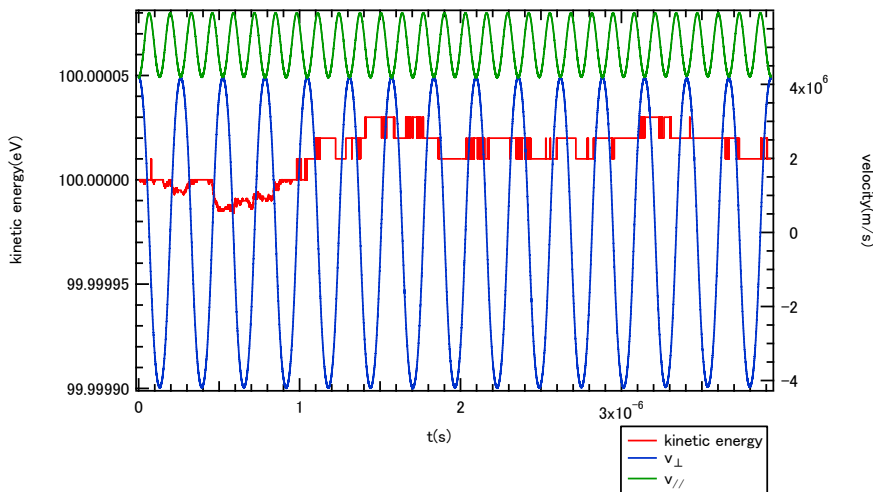


図 3.1.13 運動エネルギーと速度。運動エネルギーの変動は $1e-5(\%)$ と、ほぼ無視できる範囲となる。磁場強度と磁気面值は図 3.1.10 とほぼ等しいためここで示さない。計算時間はこちらの方が遅く 27(s) である。

以上、エネルギーの減衰が無視できない場合と、できる場合の 2 通り計算してきた。 μ 、 J_{\parallel} の変動の幅はほぼ変わらない。軌道計算によって知りたい量は断熱不変量の値であり、同じ程度の変動であれば今後の大量の軌道計算のために計算時間の短い方を採用する。エネルギーが多少減衰しても μ 、 J_{\parallel} の値が変わらなければよい。これまで天夕りの的に時間刻みをサイクロトロン周期の $1/64$ という値を使ったが、この値が最適であることを次で示す。時間刻みをパラメータとして以下の計算条件で調べ、表 3.1.1 にまとめる。表では μ と J_{\parallel} の変動を次のように評価している。表中の $J_{\parallel 0}$ とは J_{\parallel} の 1 周目の値、 $J_{\parallel av}$ は全周分の J_{\parallel} の平均値、 dJ_{\parallel} は $J_{\parallel 0}$ と $J_{\parallel av}$ の相対誤差を表し、次の式から求める。

$$dJ_{\parallel} = \frac{|J_{\parallel 0} - J_{\parallel av}|}{J_{\parallel 0}} \times 100(\%)$$

同様に μ に関しても、 μ_0 は初期位置での値（ラーマ周期で平均せず、初期位置の磁場強度とエネルギーのみで求める）、 μ_{av} は最終周期目のバウンス軌道での平均値、 $d\mu$ は μ_0 と μ_{av} の相対誤差を表し次の式から求める。

$$d\mu = \frac{|\mu_0 - \mu_{av}|}{\mu_0} \times 100(\%)$$

計算条件

- ・ 初期位置：R=0.5(m), Z=0(m)、初期エネルギー： $E_{\perp} = E_{\parallel} = 50(\text{eV})$
- ・ 計算回数：バウンス軌道 15 周期分
- ・ 使用プログラム：ADINV_loop.for

計算結果

表 3.1.1(a) J_{\parallel} の変動の評価

番号	時間刻み	$J_{\parallel 0}$	$J_{\parallel av}$	$dJ_{\parallel}(\%)$
1	ラーマ周期の 1/8	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。		
2	ラーマ周期の 1/16	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。		
3	ラーマ周期の 1/32	3.5818e-25	3.5133e-25	1.91
4	ラーマ周期の 1/64	3.5735e-25	3.5729e-25	1.62e-2
5	ラーマ周期の 1/128	3.5765e-25	3.5920e-25	0.433
6	固定値 1e-10	時間刻みが大きく軌道が磁力線に沿わないため考慮外とする。		
7	固定値 1e-11	3.5697e-25	3.5476e-25	0.623
8	固定値 1e-12	3.5669e-25	3.5696e-25	7.60e-2

表 3.1.1(b) μ の変動の評価

番号	時間刻み	μ_0	μ_{av}	$d\mu(\%)$	計算時間 (5 回平均)(s)
1	ラーマ周期の 1/8	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。			
2	ラーマ周期の 1/16	時間刻みが大きく、 μ が保存されないため考慮外とする。			
3	ラーマ周期の 1/32	8.4065e-28	6.7985e-28	19.1	2.14
4	ラーマ周期の 1/64		8.4898e-28	0.991	3.98
5	ラーマ周期の 1/128		8.4571e-28	0.602	7.92
6	固定値 1e-10	時間刻みが大きく軌道が磁力線に沿わないため考慮外とする。			
7	固定値 1e-11	8.4065e-28	7.6495e-28	9.00	2.81
8	固定値 1e-12		8.4517e-28	0.538	27.0

表 3.1.1 より時間刻みを小さくすると μ と J_{\parallel} の変動は収束するが、計算時間は増大する。ある程度 μ と J_{\parallel} の変動が少なく、計算時間が短い条件として番号 4（ラーマ周期の 1/64）が最適であ

る。今後、平衡温度の幅の範囲で初期エネルギーを与えて、多数軌道計算を行う必要があるのだが、今回のバウンス軌道 15 周期分という計算時間を短縮したい。バウンス軌道の対称性からバウンス軌道を半周期分計算すれば μ と $J_{||}$ が得られる。そこで、計算時間をバウンス軌道半周期分とした時の μ の変動を調べる。 μ_{av} を半周期分のバウンス軌道での平均値を示し、他の変数は従来通りの意味である。 $J_{||}$ の変動を調べることはできないが、表 3.1.1(a) で考慮外とならないどの番号でも変動は小さいので、常に保存するとみなす。

計算条件

- ・初期位置： $R=0.5(m), Z=0(m)$ 、初期エネルギー $E_{\perp} = E_{||} = 50(eV)$
- ・計算回数：バウンス軌道半周期分
- ・使用プログラム：ADINV_noloop.for

計算結果

表 3.1.2 μ の変動の評価

番号	時刻幅	μ_0	μ_{av}	$d\mu$ (%)	計算経過時間 (5 回平均)(s)
1	ラーマ周期の 1/8	時刻幅が大きいため考慮外とする。			
2	ラーマ周期の 1/16	時刻幅が大きいため考慮外とする。			
3	ラーマ周期の 1/32	8.4065e-28	8.3932e-28	0.158	0.166
4	ラーマ周期の 1/64		8.4297e-28	0.277	0.303
5	ラーマ周期の 1/128		8.4297e-28	0.277	0.578
6	固定値 1e-10	時刻幅が大きいため考慮外とする。			
7	固定値 1e-11	8.4065e-28	8.4166e-28	0.121	0.219
8	固定値 1e-12		8.4315e-28	0.297	1.87

表 3.1.2 だけで考えると μ の変動は小さく見え、番号 7 (固定値 1e-11) の条件が適切であるかに見えるが、長時間計算する方が条件ごとの変動の違いが顕著に表れる。表 3.1.1 より番号 7 よりも番号 4 の条件の方が計算時間は多少大きいが、変動がかなり小さい。したがって、表 3.1.2 では番号 4 の方が変動が大きくても、変動に関して精度ある議論ができる表 3.1.1 の結果を優先して、番号 4 の条件 (ラーマ周期の 1/64) を用いる。

次に、円環電流周りの磁場配位特有の軌道について述べる。図 3.1.3(b) の磁気面を周回する運動 (以後、周回運動と称する) を計算する。初期エネルギーのうち E_{\perp} よりも $E_{||}$ が十分大きい場合にピッチ角が小さくなり周回運動すると考え、次の条件で計算を行う。この周回運動の周期を、ある出発点から始まりその出発点に 1 周して戻るまでの範囲と定義する。 $J_{||}$ を求める際はこの周期の定義を用いる。

計算条件

- ・初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$ 、初期エネルギー : $E_{\perp}=1(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ 、 $\gamma=1.0001$
- ・計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- ・使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

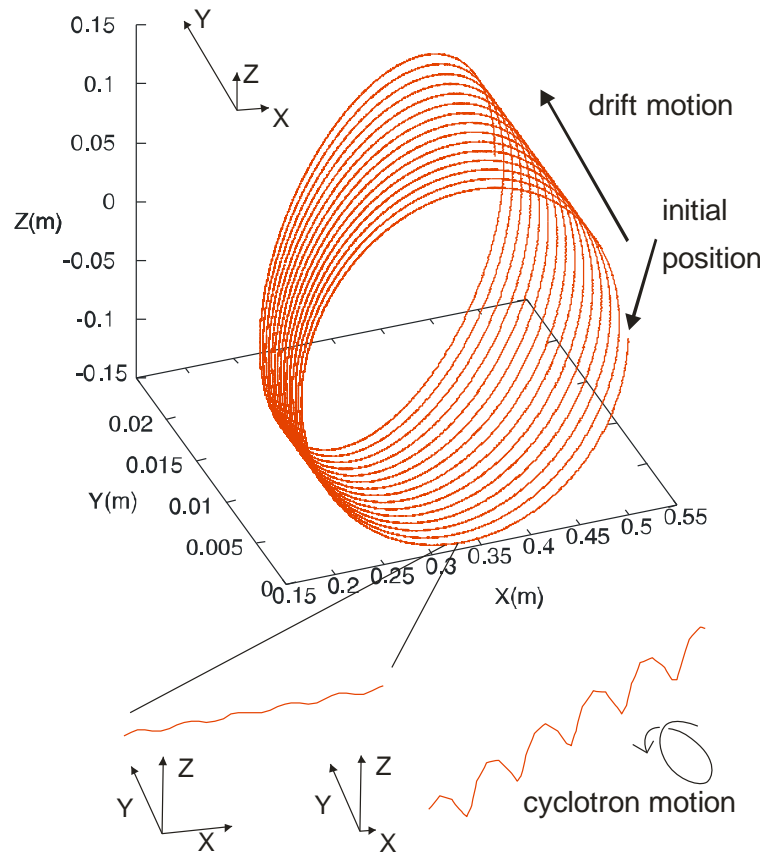


図 3.1.14 軌道図。初期位置からコイルより内側に進んでも跳ね返らず、そのまま周回運動をし Y 方向にドリフトすることが分かる。このとき $d\mu$ は 6.775(%)、 dJ_{\parallel} は 0.843(%) となり変動が小さく、 μ と J_{\parallel} は保存しているとみなす。

これまでは $R=0.5(\text{m})$ 、 $Z=0(\text{m})$ のみで計算を行ってきたが、 μ と J_{\parallel} の変動の位置依存性や初期エネルギー依存性を調べたい。2 章と同じく μ と J_{\parallel} の変動が全ての場合で小さければ問題ないが、変動が大きい場合に μ と J_{\parallel} が保存量として扱えるかどうかを知りたい。しかし、パラメータ $R(\text{m})$ 、 $E_{\perp}(\text{eV})$ 、 $E_{\parallel}(\text{eV})$ 依存性を全ての場合で調べるには手間がかかる。ここでも 2 章と同様に天降りではあるが、後に様々なパラメータで軌道計算していく中で、ピッチ角が小さくなり、初期位置が外側の磁気面になるほど μ と J_{\parallel} の変動 $d\mu$ と dJ_{\parallel} が大きくなることを確認される。そこで、まず位置を $R=0.5(\text{m})$ で固定し、ピッチ角の依存性を調べ (計算①)、後にピッチ角を固定し位置の依存性を調べる (計算②)。

計算① 条件

- ・初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- ・初期エネルギー : $E_{\perp}=1(\text{eV}), E_{\parallel}=1\sim 1000(\text{eV})$ (運動エネルギーが増加しピッチ角が小さくなる)
 $E_{\perp}=0.01\sim 50(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ (運動エネルギーが一定でピッチ角が小さくなる)
- ・計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- ・使用プログラム : ADINV_loop.for

計算① 結果

結果を次の図 3.1.15 で示す。

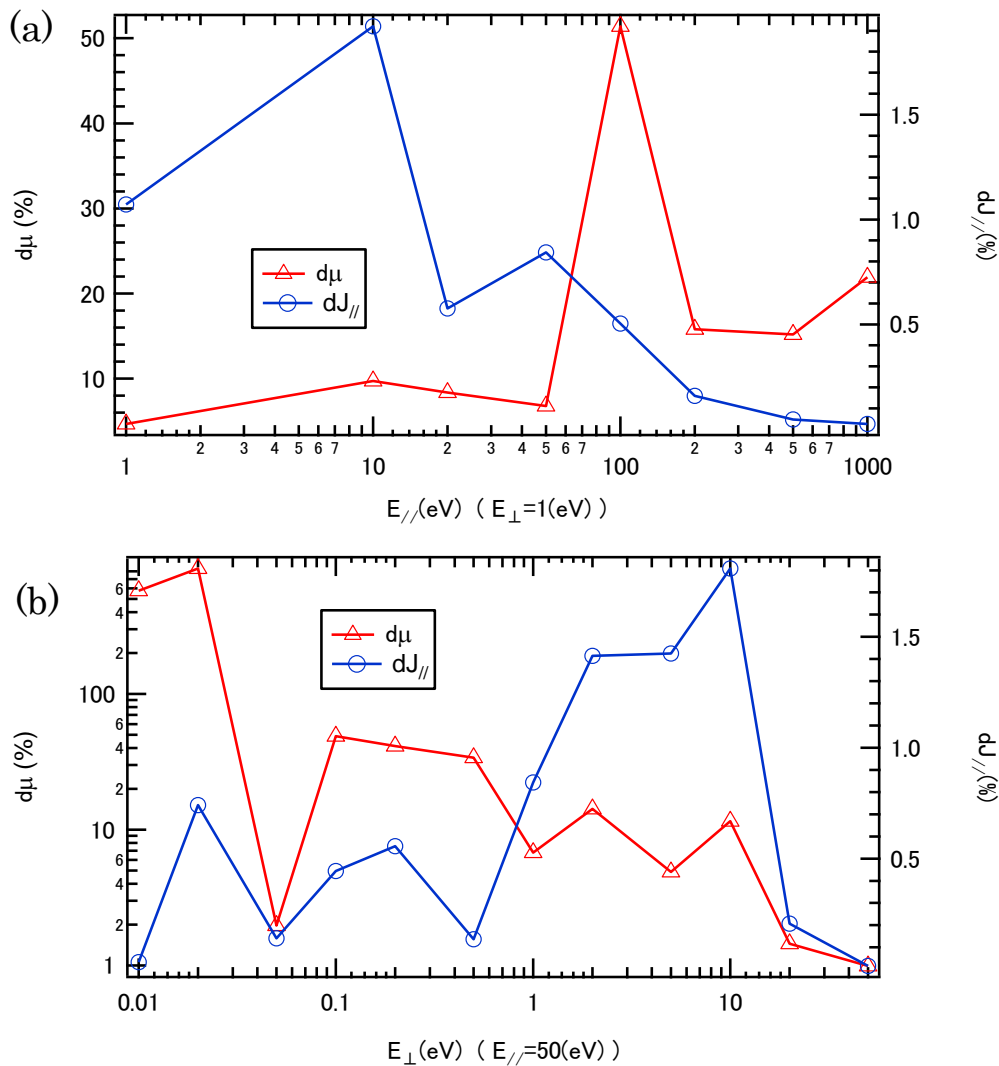


図 3.1.15 $d\mu$ と dJ_{\parallel} のエネルギー依存性 (a) $E_{\perp}=1(\text{eV}), E_{\parallel}=1\sim 1000(\text{eV})$ (b) $E_{\perp}=0.01\sim 50(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ 。運動エネルギーを大きくしてピッチ角を小さくしても最大 $d\mu$ は 50(%) 程で収まる。しかし(b)では $d\mu$ は 100(%)を超える。 dJ_{\parallel} はどちらも小さい値で収まる。そこで $d\mu$ が最大となった $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$ でエネルギーを固定して、 $d\mu$ の R 方向依存性を計算する。

計算② 条件

- ・初期位置 : $R=0.1\sim 3.0(m), Z=0(m)$
- ・初期エネルギー : $E_{\perp}=0.02(eV), E_{\parallel}=50(eV)$
- ・計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ・ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1e-15(s)$
- ・使用プログラム : ADINV_loop.for

計算② 結果

結果を次の図 3.1.16 で示す

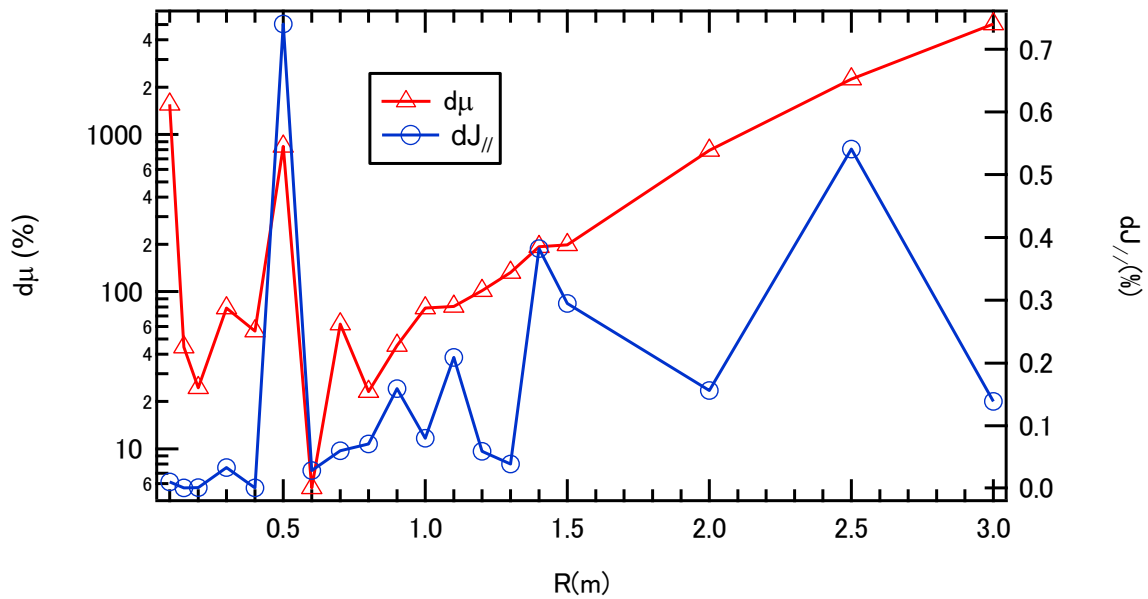


図 3.1.16 $d\mu$ と dJ_{\parallel} の R 方向依存性。R が 0.1~1.0(m)では値が変動するが、0.8(m)を超えると単調増加し、2.0(m)を超えると、変動が 1000(%)を超える。それに対して dJ_{\parallel} は十分小さい範囲で収まる。

これまでの結果をまとめると、運動エネルギーが大きくなり(50(eV)程度)、ピッチ角が小さく R が 0.8(m)より大きくなるほど $d\mu$ の変動が大きくなり 1000(%)を超えるものも存在する。 μ と J_{\parallel} の保存を調べるには図 3.1.15 と 16 のようなグラフを作り $d\mu$ の大きい条件を選び出し、時間変化を観察すればよい。しかし、この作業を全ての場合で調べることは非現実的である。今後、R は真空容器のサイズ 0.1~1.0(m)でしか与えないことを考えると、図 3.1.16 で 0.1~1.0(m)の中で最大の $d\mu$ 値、1553(%)よりも大きい $R=2.5(m)$ の値、2253(%)に注目し、次の計算条件で μ と J が保存されれば、それより内側の磁気面で任意のピッチ角・任意の運動エネルギーを与えても μ と J は保存すると決める。

計算条件

- 初期位置 : $R=2.0(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

μ 、 J_{\parallel} の時間変化を次の図 3.1.17 で示す。

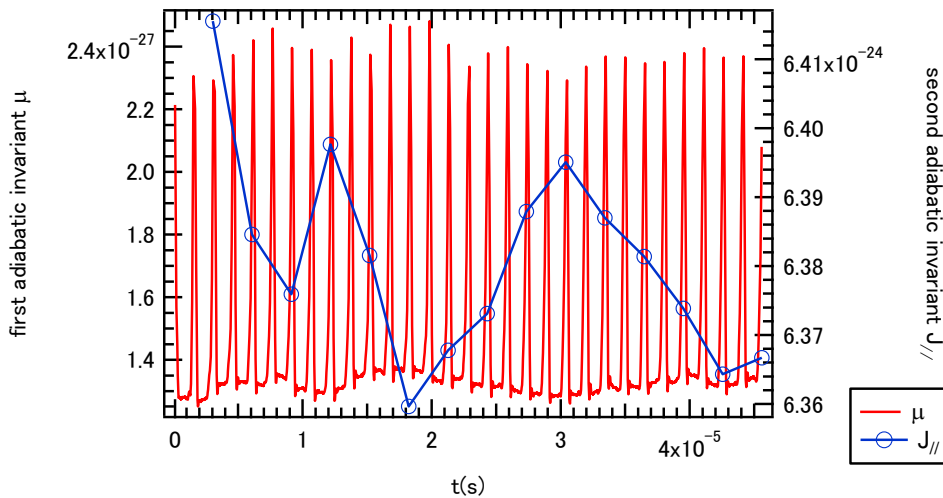


図 3.1.17 μ 、 J_{\parallel} の時間変化。 J_{\parallel} の振動は、値の 1%のオーダーなので保存しているとみなす。 μ は平均値の 50%の範囲内で振動している。この振幅は時間が経過してもほぼ一定である。ここで、2章と同じく次の仮定を置く。 μ が保存するとは、ある一定の範囲内で振動が時間発展によらない状態である。すると図 3.1.17 の μ は保存しているとみなせる。

よって $R=2.5(\text{m})$ より内側の磁気面で任意のピッチ角、任意の運動エネルギーを与えた時、 μ と J_{\parallel} は保存されるとみなす。

では逆に保存しなくなるような条件はどのような条件であるかを考える。図 3.1.16 より R が $2.5(\text{m})$ より大きくなるとさらに $d\mu$ が大きくなる。そこで、 $R=5(\text{m})$ で計算を行う。

計算条件

- 初期位置 : $R=5.0(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー : $E_{\perp}=0.02(\text{eV}), E_{\parallel}=50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop.for

計算結果

・ μ と $J_{//}$ の時間変化

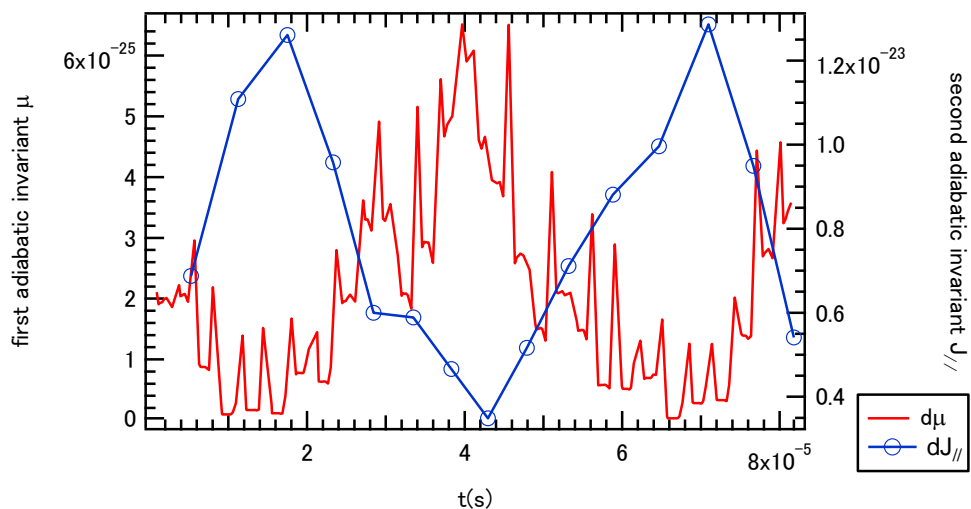


図 3.1.18 μ と $J_{//}$ の時間変化。 μ 、 $J_{//}$ の変動は 100(%) 以上のオーダーとなる。振動の様子が時間によって変化するので両者は保存しないとみなす。 R が大きくなると μ が保存しなくなる理由は、磁場強度が小さくなるほどサイクロトロン運動の半径が大きくなるからである。その様子を確かめるために図 3.1.19 に軌道図を示す。

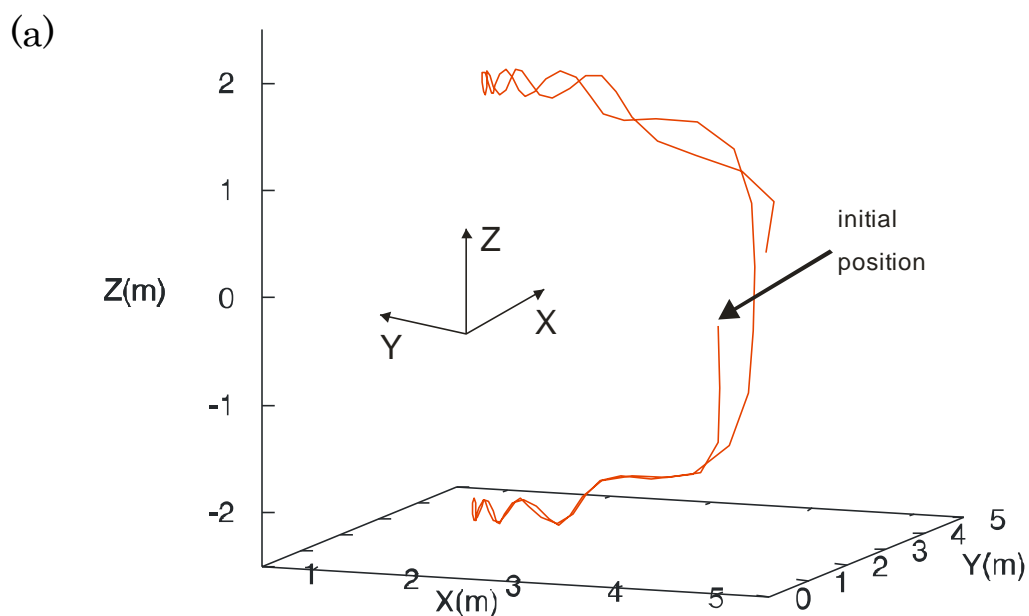


図 3.1.19 3次元軌道図 (a) バウンス軌道 1 周期分

(b)

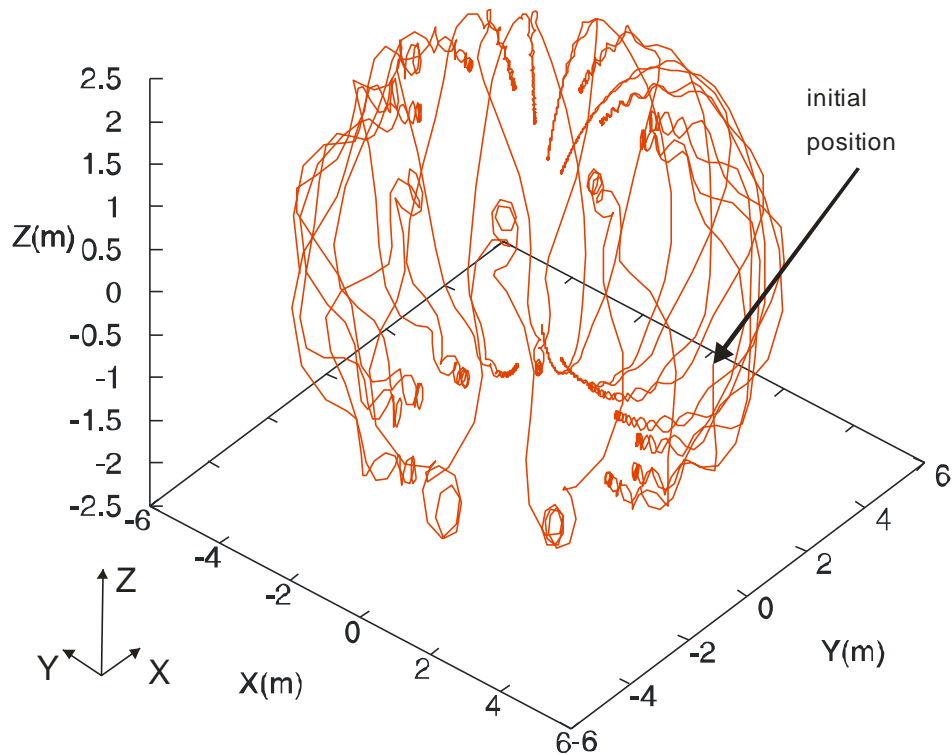


図 3.1.19 3次元軌道図 (b)バウンス軌道 15 周期分。(a)では初期位置から大きなサイクロトロン運動で回転し、回転半径を小さくしながら跳ね返り点で跳ね返るといふバウンス運動が確認できる。(b)ではトロイダル方向へのドリフト運動が確認できる。

この計算条件では μ と $J_{||}$ は保存しないとみなしたが、軌道図を見る限りサイクロトロン運動、バウンス運動の周期運動が行われているので保存するかの判断は難しい。この μ と $J_{||}$ の保存に関してはさらなる研究が必要である。 $R=2.5(m)$ 、 $Z=0(m)$ の磁気面の内側で任意のピッチ角、任意の運動エネルギーを与えた時に μ と J は保存されると仮定する。

3. 1. 3 計算結果

2章では解析解との比較を行ったが、円環電流磁場では解析解が得られないので、比較を行わず計算結果だけ述べる。平衡温度は2章と同じく100(eV)とする。

3. 1. 3. 1 ケミカルポテンシャルの範囲

まずは積分変数の組を図 3.1.20 で示す。ポイントダイポール磁場の場合と違いピッチ角が0で

も軌道計算を行えるため、ID=3 がない。

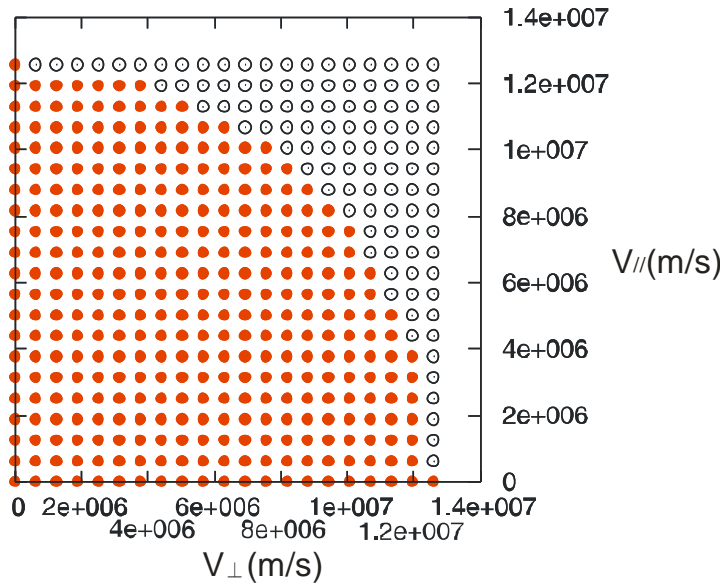


図 3.1.20 積分変数の組分け。●は軌道計算を行う組(ID=0)。○は行わない組(ID=1)

ケミカルポテンシャル α と γ を与える範囲を 2 章と同じ手順で決める。まずは α と γ が 0 の場合の $-\beta H$ の値を図 3.1.21 で示す。値が 0 となる場合は軌道計算を行わない場合である。

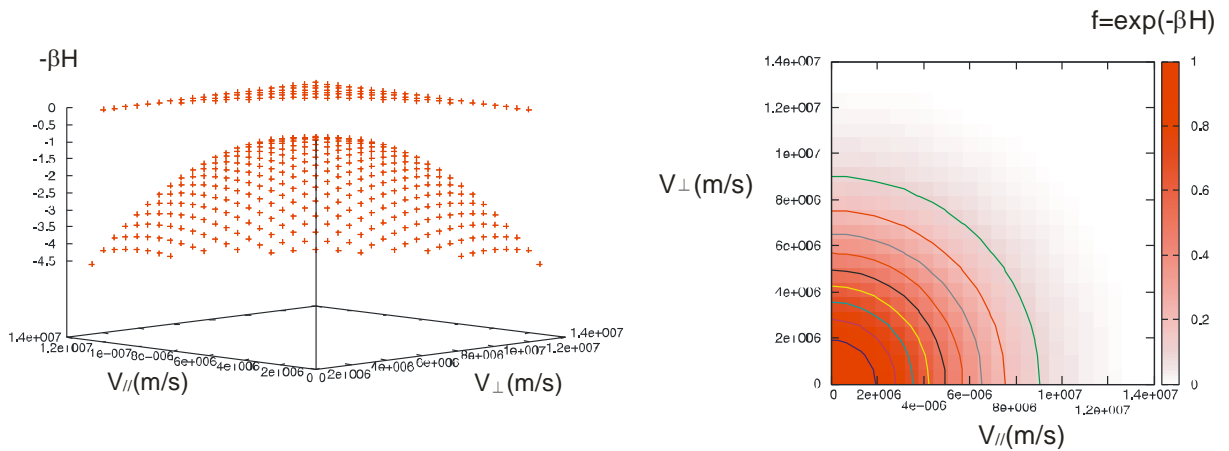


図 3.1.21 $-\beta H$ の値(左)と分布関数(右)。 $-\beta H$ の最小値は -4.5 付近となる。分布関数は等方的な分布となり、熱平衡状態であることを示す。

次に $\alpha \neq 0$ 、 $\gamma = 0$ の場合を考える。 α の最大値を得るためには ID=0 となる μ の最大値を知る必要がある。 2 章で、一定磁場で ID=0 かつ μ が最大となるような運動エネルギーの組は $(E_{\perp}, E_{\parallel}) = (450, 0)$ であった。この組での μ の位置依存性を図 3.1.22 で示す。

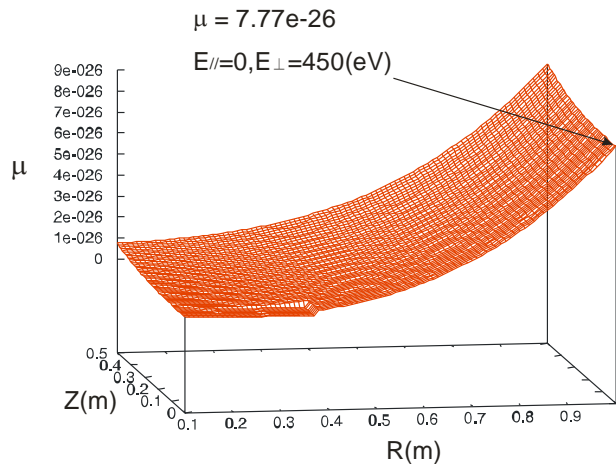


図 3.1.22 μ の 2 次元分布。ID=0 の積分変数の組で μ が最大となる場所は $R=0.95(m)$ 、 $Z=0(m)$ 。

以上より ID=0 での μ の最大値 $7.77e-26$ を得た。 α の最大値を調べるため、 μ が最大となる場所における分布関数の等高線図を図 3.1.23 に示す。

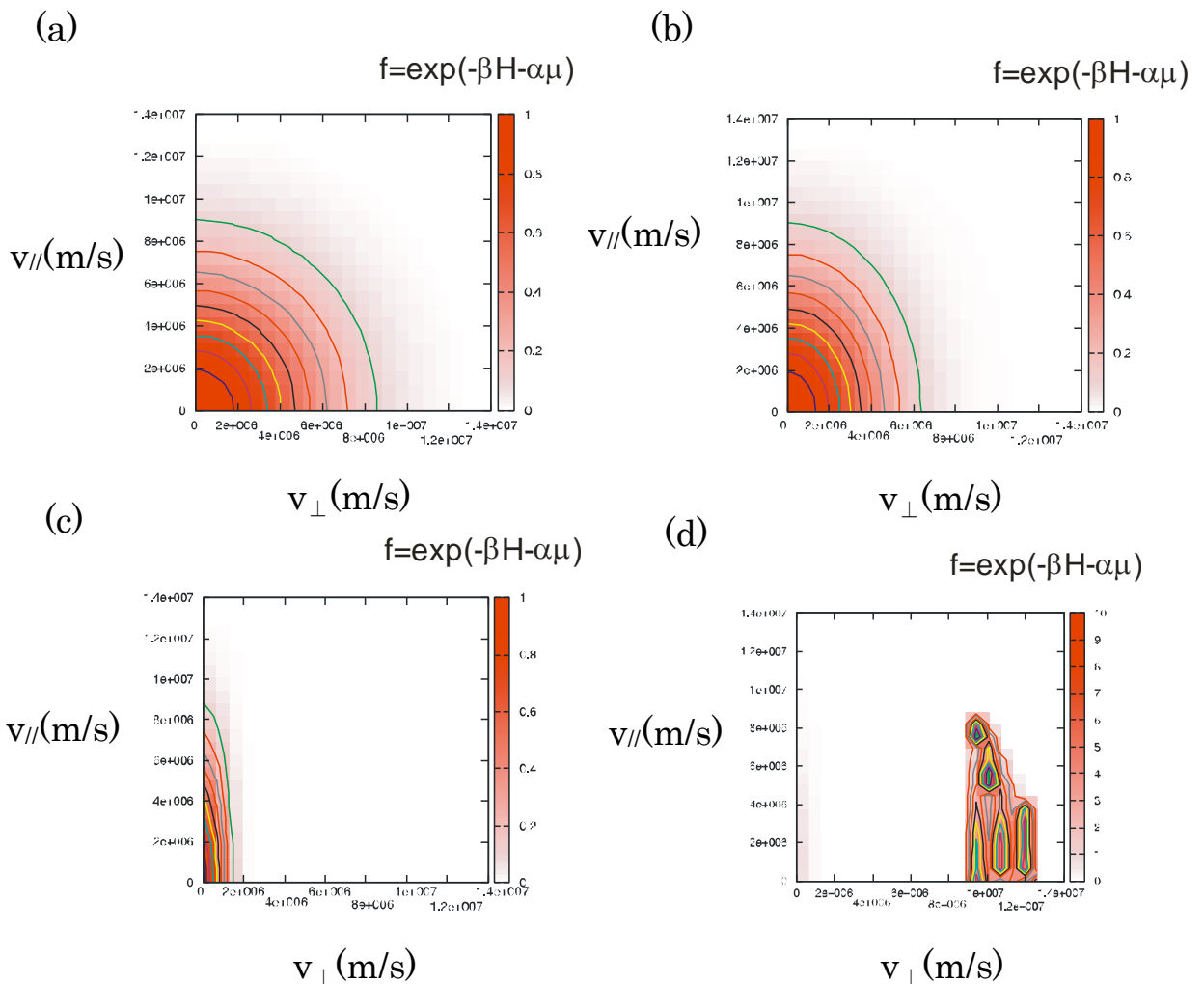


図 3.1.23 α をパラメータとした分布関数。(a) $\alpha=10^8$ (b) $\alpha=10^9$ (c) $\alpha=4 \times 10^{10}$ (d) $\alpha=10^{11}$
 α を大きくすると等方分布からずれる。 \exp 関数の計算は(c)までは可能だが、(d)では v_{\perp} が大きい領域で 1 よりも大きい値を出しており \exp 関数が正しく計算できていない。

以上より α の上限値は 4×10^{10} である。参考のため計算できない条件 $\alpha = 10^{11}$ での $-\beta H - \alpha \mu$ の値を図 3.1.24 に示す。下限値は分布関数が等方分布からずれ始める 10^8 とする。 α が下限値より小さいと、 $-\beta H - \alpha \mu \approx -\beta H$ となり熱平衡分布とほぼ等しい分布となる。

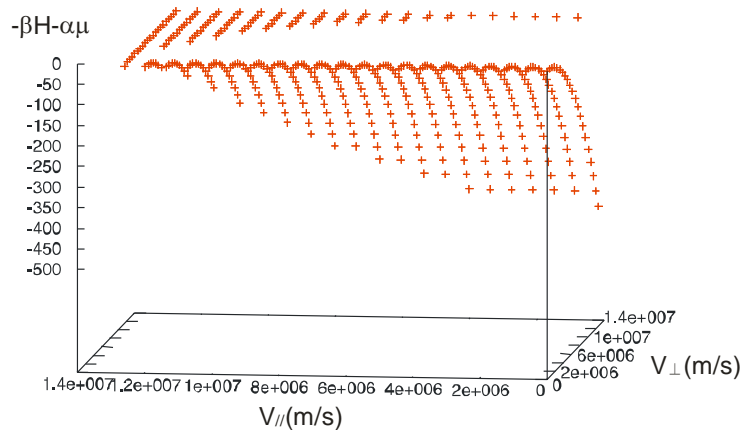


図 3.1.24 $-\beta H - \alpha \mu$ の値。図 3.1.21 に比べて値の桁が 2 つ異なる。exp 関数の計算は引数が -500 付近で出来なくなる。

$\alpha = 0, \gamma \neq 0$ の場合を示す。前の場合と同様に ID=0 での $J_{||}$ の最大値を知りたい。データを読み込む際に最大値を求めると、運動エネルギーの組 $(E_{\perp}, E_{||}) = (288, 162)$ で $R = 0.12(\text{m}), Z = 0.15(\text{m})$ の位置での $J_{||}$ が最大となる。参考までにこの運動エネルギーの組での $J_{||}$ の位置分布を図 3.1.25 で示す。

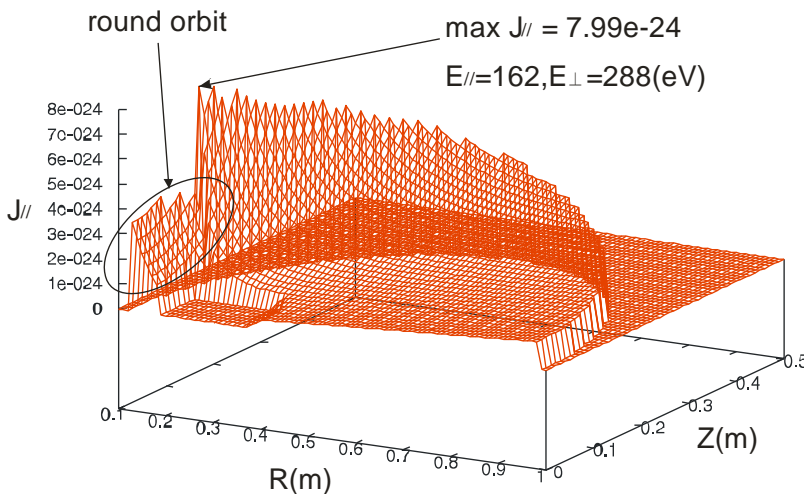


図 3.1.25 $J_{||}$ の 2 次元分布。くぼんだコイル領域より内側で $J_{||}$ の値が小さくなるのは、バウンス軌道から周回軌道に変化し軌道長が短くなるためである。

こうして $J_{||}$ の最大値 $7.99e-24$ を得るので、次に γ の最大値を調べる。 $J_{||}$ が最大となる場所における分布関数の等高線図を図 3.1.26 に示す。

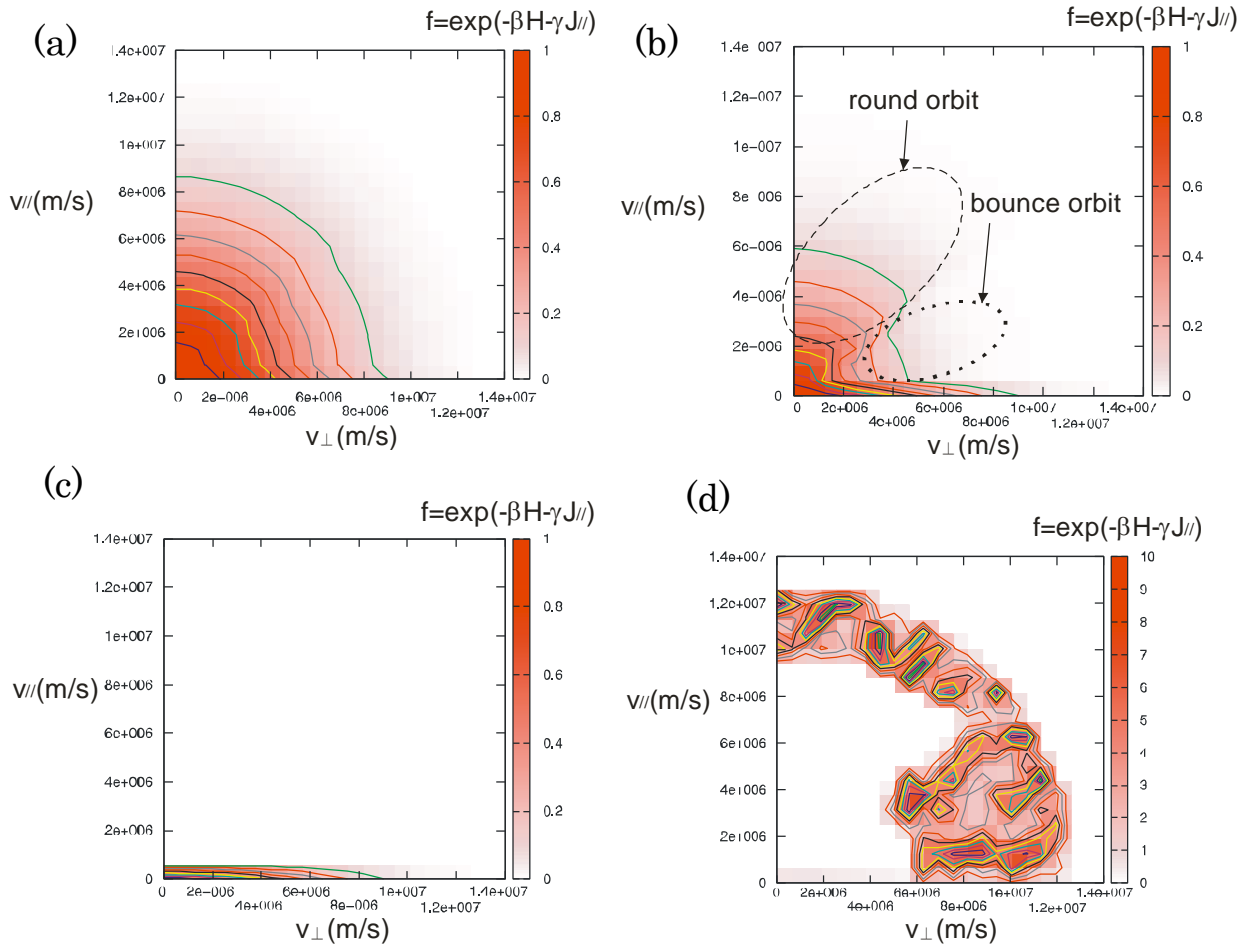


図 3.1.26 γ をパラメータとした分布関数。(a) $\gamma=10^6$ (b) $\gamma=10^7$ (c) $\gamma=4 \times 10^8$ (d) $\gamma=10^9$
(c)までは計算可能だが、(d)では分布関数が 1 を超え exp 関数が正しく計算できていない。

以上より γ の上限値は 4×10^8 である。参考のため計算できない条件 $\gamma=10^9$ での $-\beta H - \gamma J_{\parallel}$ の値を 図 3.1.27 に示す。下限値は分布関数が等方分布からずれ始める 10^6 とする。 γ が下限値より小さいと、 $-\beta H - \gamma J_{\parallel} \approx -\beta H$ となり熱平衡分布と等しい。

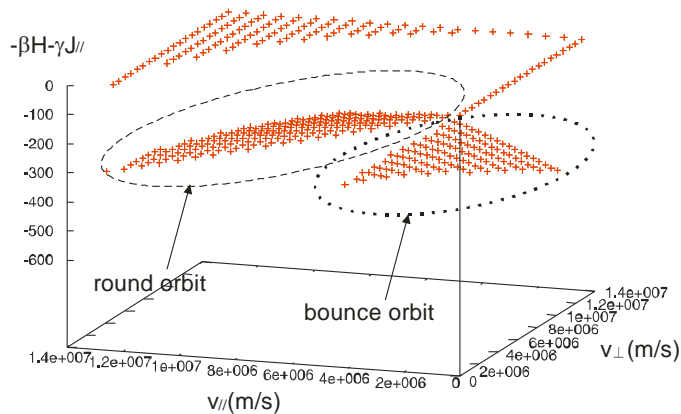


図 3.1.27 $-\beta H - \gamma J_{\parallel}$ の値。図 3.1.21 に比べて値の桁が 2 つ大きい。バウンス軌道の方が周回軌道より軌道長が長く J_{\parallel} の値が大きい。

以上で求めた α と γ の範囲を $\alpha : 10^8 \sim 10^{10}$ 、 $\gamma : 10^6 \sim 10^8$ とする。

3. 1. 3. 2 熱運動のみを拘束条件に加える場合

式(2.10)で α と γ を0とおけば、

$$\rho(x) = \frac{2\pi}{mZ} \int \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2\right)\right\} \omega_c(x) d\mu(x, v_{\perp}) dv_{\parallel}$$

となり熱運動のみを考慮した場合となる。実際の計算は2重積分を行うADINV-dint.for中で $\alpha = \gamma = 0$ として行う。熱運動のみを考える場合は断熱不変量を扱わないため、解析解との比較が可能である。ただしRT-1装置のコイル領域を $R=0.18\sim 0.375(\text{m})$ 、 $Z=0\sim 0.075(\text{m})$ の長方形領域とし、そこには電子が存在しないとして計算を行わない。解析解は以下の式である。

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{3/2}$$

計算条件

- ・平衡温度：100(eV)
- ・位置の刻み数：X方向9等分、Z方向5等分
- ・ケミカルポテンシャル： α 、 $\gamma=0$
- ・用いたプログラム：ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

表 3.1.3 熱運動の密度値

積分変数 刻み数	解析解	積分値	解析解に対する 最大誤差(%)	計算時間	積分に使用したデータ数/ 全データ数
5	1.162e21	1.031e21	11.2	145(s)	865 / 2160
10		1.104e21	4.92	0.16(h)	2822 / 7260
20		1.191e21	3.67	0.638(h)	10012/26460
40		1.122e21	3.41	2.54(h)	37608/100860
80		1.124e21	3.21	10.1(h)	145440/393660

表 3.1.3 よりポイントダイポール磁場の場合に比べて計算時間が短い。これはピッチ角が小さいときの計算時間が短くなるためである。ポイントダイポールの場合は強磁場側でのサイクロトロン周波数が短く、軌道の位置を更新する回数が多い。円環電流磁場の場合は前者よりも最大磁場強度が弱いため、更新回数が多くならない。次に表 3.1.3 中の最大誤差・計算時間の積分変数刻み数依存性を図 3.1.28 に示す。

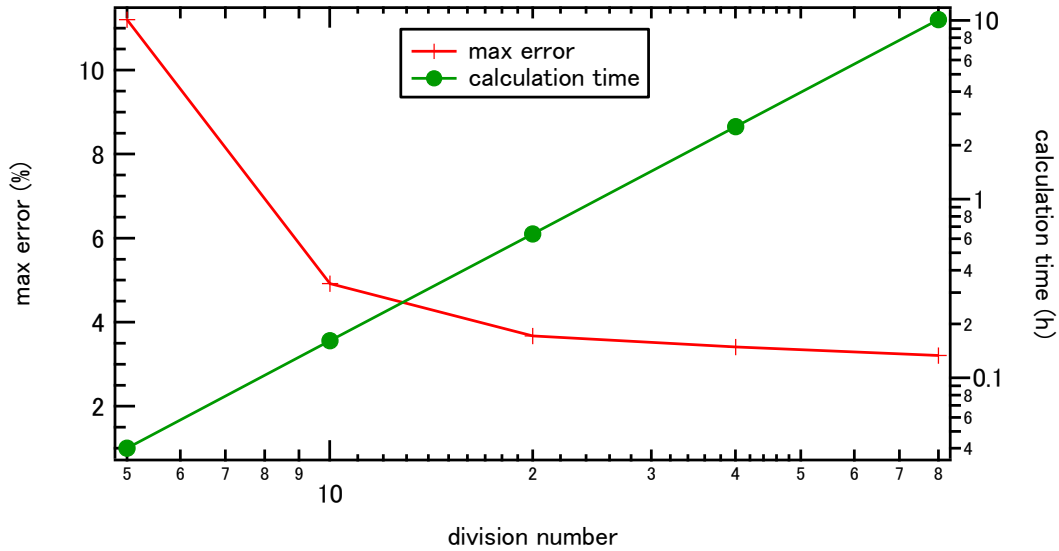


図 3.1.28 最大相対誤差・計算時間の積分変数刻み数依存性。最適な積分変数刻み数は 20 とする。細かい位置分布を見るために、積分変数刻み数を 20 とし、位置の刻み数を増やして計算を行う。

計算条件

- ・ 平衡温度 : 100(eV)
- ・ 位置の刻み数 : X 方向 90 等分、 Z 方向 50 等分
- ・ 積分変数刻み数 : 20 等分
- ・ ケミカルポテンシャル : α 、 $\gamma=0$
- ・ 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

- ・ 密度値

表 3.1.4 位置の刻み数を増やした場合

積分変数 刻み数	解析解	積分値	解析解に対する 最大相対誤差	計算時間	積分に使用したデータ数/ 全データ数
20	1.162e21	1.115e21	3.99%	183140(s)	830395 / 2046681

表 3.1.4 より最大相対誤差は表 3.1.3 の同じ条件とほぼ同じである。次に計算解の密度の等高線図を示す。なお密度は最大密度値で規格化してある。

・計算解の等高線図

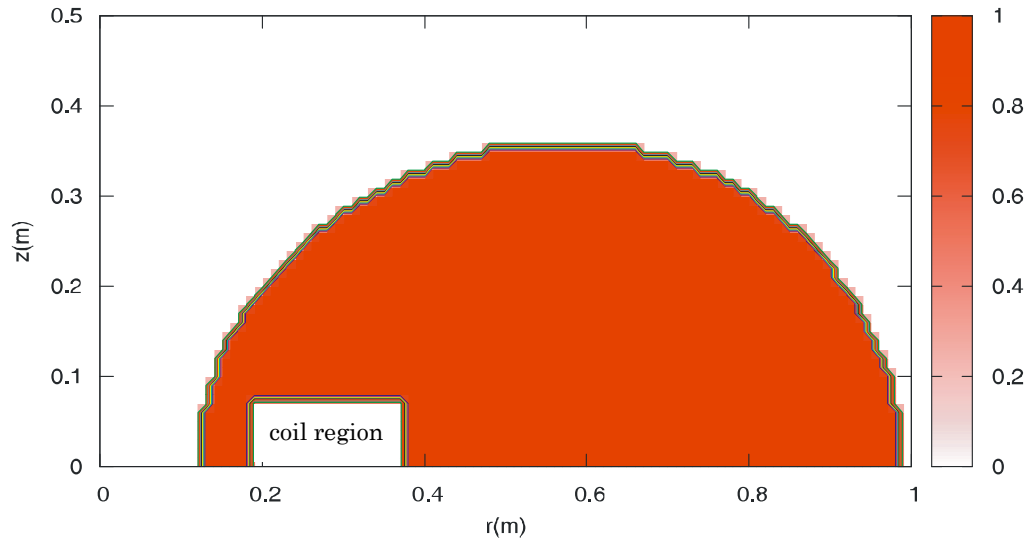


図 3.1.29 密度分布の等高線図。平坦な分布が得られる。

3. 1. 3. 3 熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加える場合

式(2.10)で γ を 0 とおけば、

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{2\pi\omega_c(\mathbf{x})}{Zm} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) - \alpha\mu\right\} d\mu dv_\parallel$$

となり熱運動とサイクロトロン運動のみを拘束条件に加えた場合を計算できる。具体的にはプログラム ADINV-dint.for において、ケミカルポテンシャル γ を 0 で代入する。ケミカルポテンシャル α をパラメータとし結果を示す。

計算条件

- ・平衡温度：100(eV)
- ・位置の刻み数：X 方向 90 等分、Z 方向 50 等分
- ・積分変数刻み数：20 等分
- ・ケミカルポテンシャル： $\gamma=0$
- ・用いたプログラム：ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

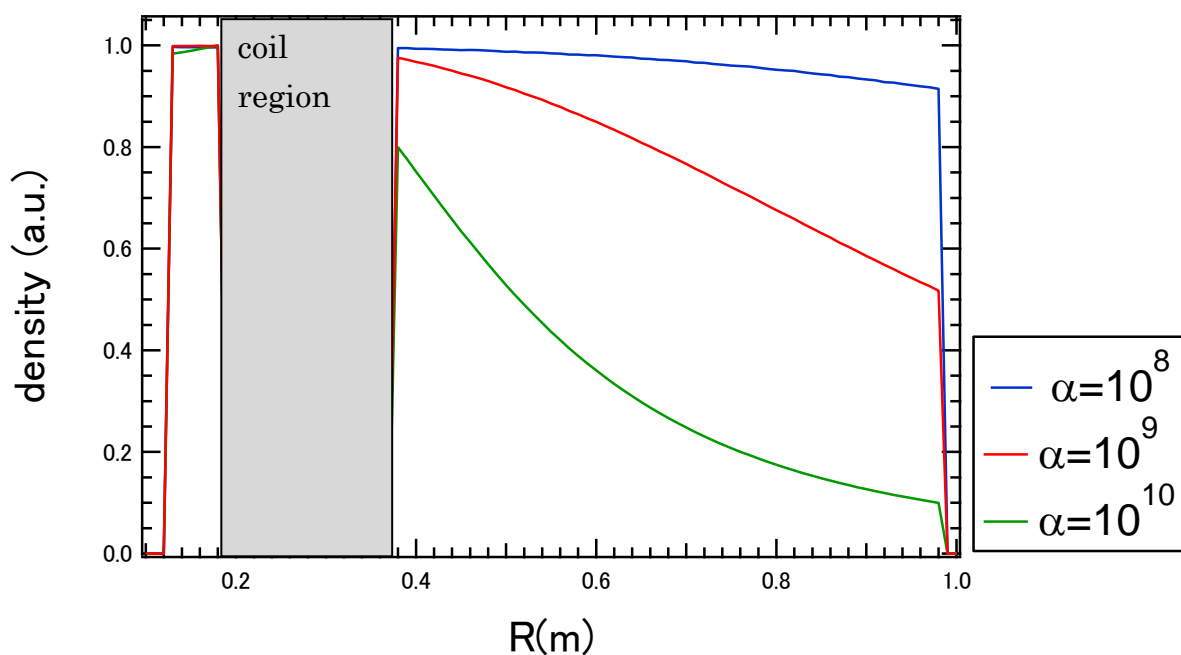


図 3.1.30 $Z=0(m)$ 赤道面上でのケミカルポテンシャル α 依存性。ポイントダイポールの場合と同じく α が大きくなると、熱平衡の平坦な分布からコイル付近の磁場強度の強い領域に密度が多くなる分布に移行していく。

次の図 3.1.31 で $\alpha = 10^{10}$ での等高線を示す。

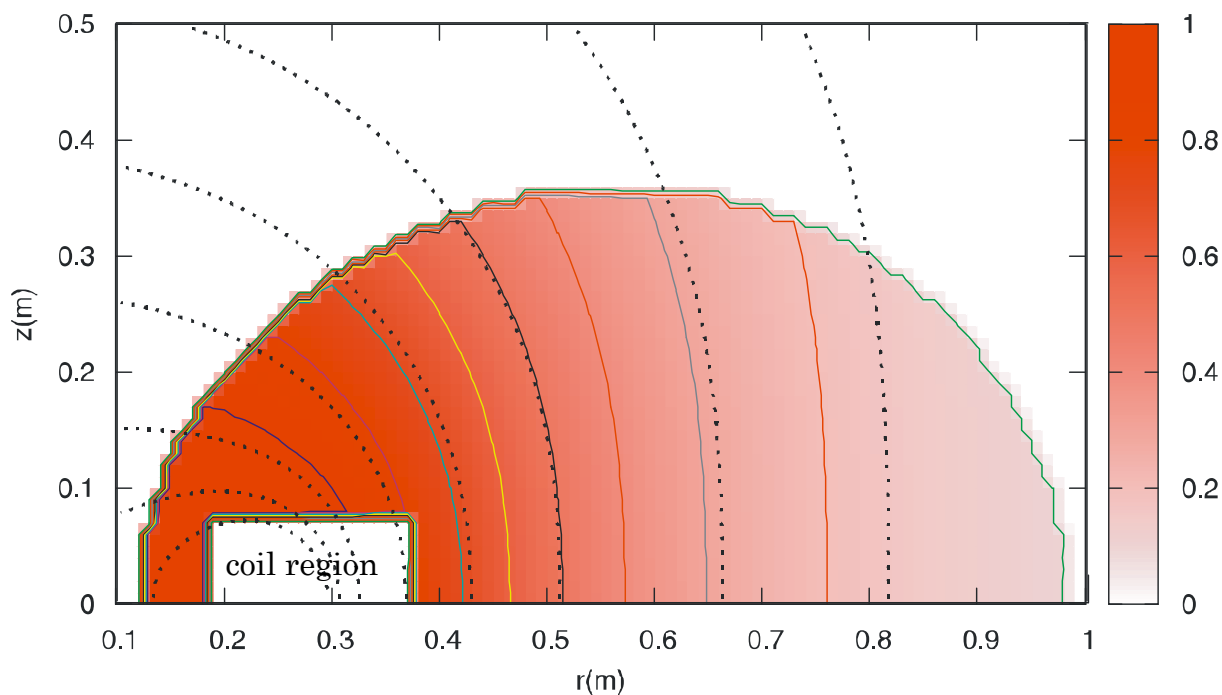


図 3.1.31 $\alpha = 10^{10}$ での密度等高線。破線は磁場強度の等高線図を表す。ポイントダイポール磁場配位と同じように磁場強度に沿って、磁場強度の強い所ほど密度が多くなる分布となる。

これは 2.4.2 節で考えたように、磁場強度の大きい領域では磁束管の断面積が小さいため、同じ微小体積での粒子数を比較すると磁場強度の小さい領域より粒子数が多くなるからである。

3. 1. 3. 4 熱運動とサイクロトロン運動とバウンス運動を拘束条件に加える場合

バウンス運動の効果をみるために $\alpha=10^{10}$ と固定して次を計算する。

$$\rho(x) = \frac{2\pi\omega_c(x)}{Zm} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) - \alpha\mu - \gamma J_\parallel\right\} d\mu dv_\parallel$$

計算条件

- 平衡温度 : 100(eV)
- 位置の刻み数 : X 方向 90 等分、 Z 方向 50 等分
- 積分変数刻み数 : 20 等分
- ケミカルポテンシャル : $\alpha=10^{10}$
- 用いたプログラム : ADINV-data.for ADINV-dint.for

計算結果

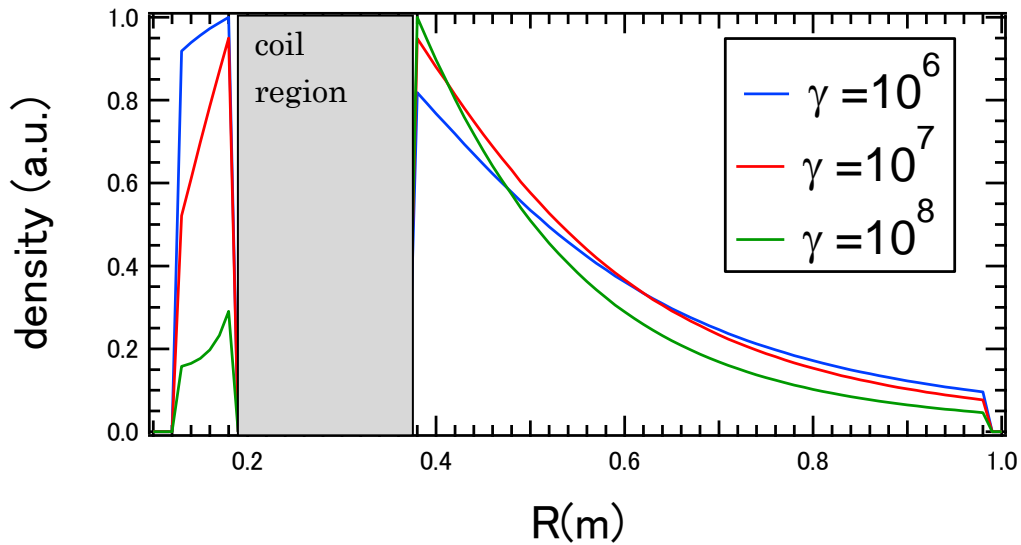
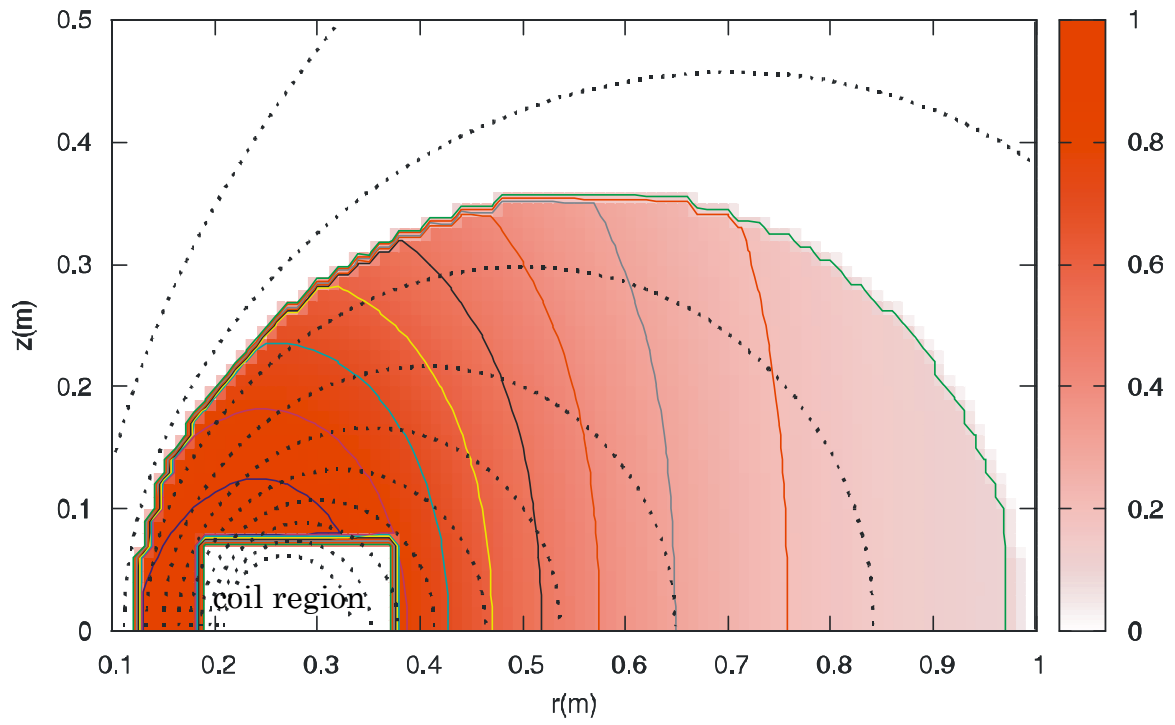


図 3.1.32 $Z=0(\text{m})$ の赤道面上における密度の γ 依存性。 γ が大きくなると赤道面上のコイル外側に密度の割合が大きくなる。

サイクロトロン運動の場合、密度の 2 次元分布は磁場強度の等高線分布に似るが、バウンス運動を加える場合は赤道面上に密度が集まる傾向が出るので 2 次元的に理解したい。そのため $\gamma=10^6$ 、 10^7 、 10^8 での等高線図を次の図 3.1.33 で示す。

(a)



(b)

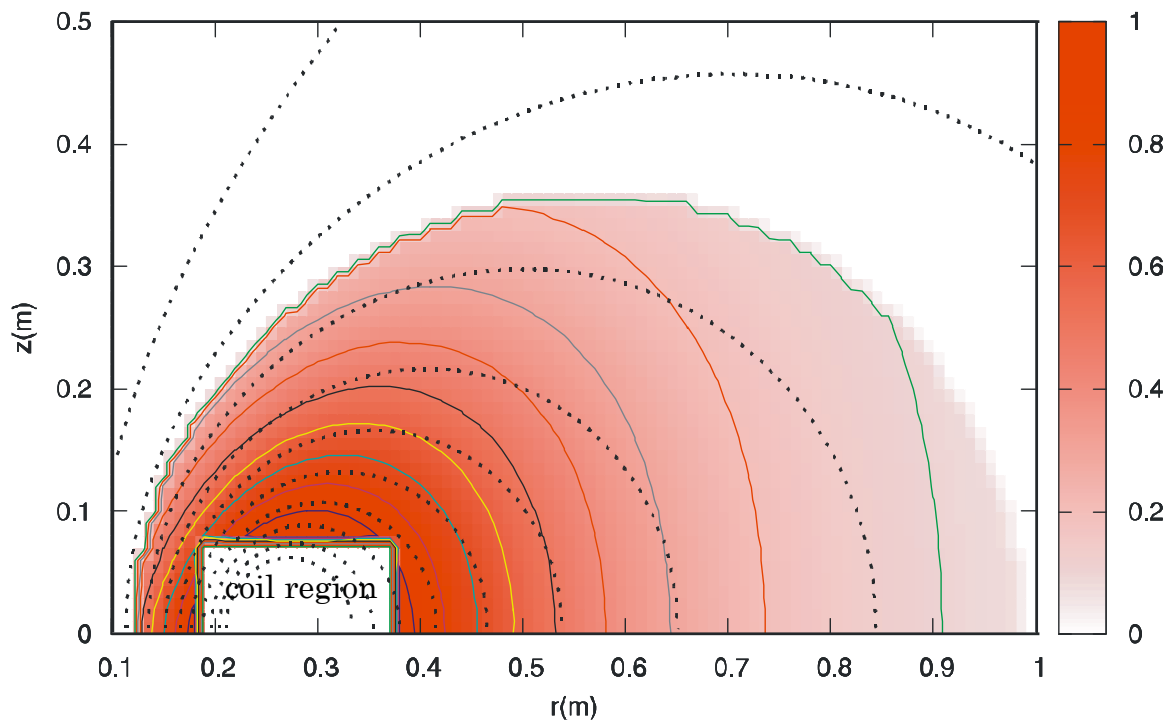


図 3.1.33 密度等高線図 (a) $\gamma = 10^6$ (b) $\gamma = 10^7$

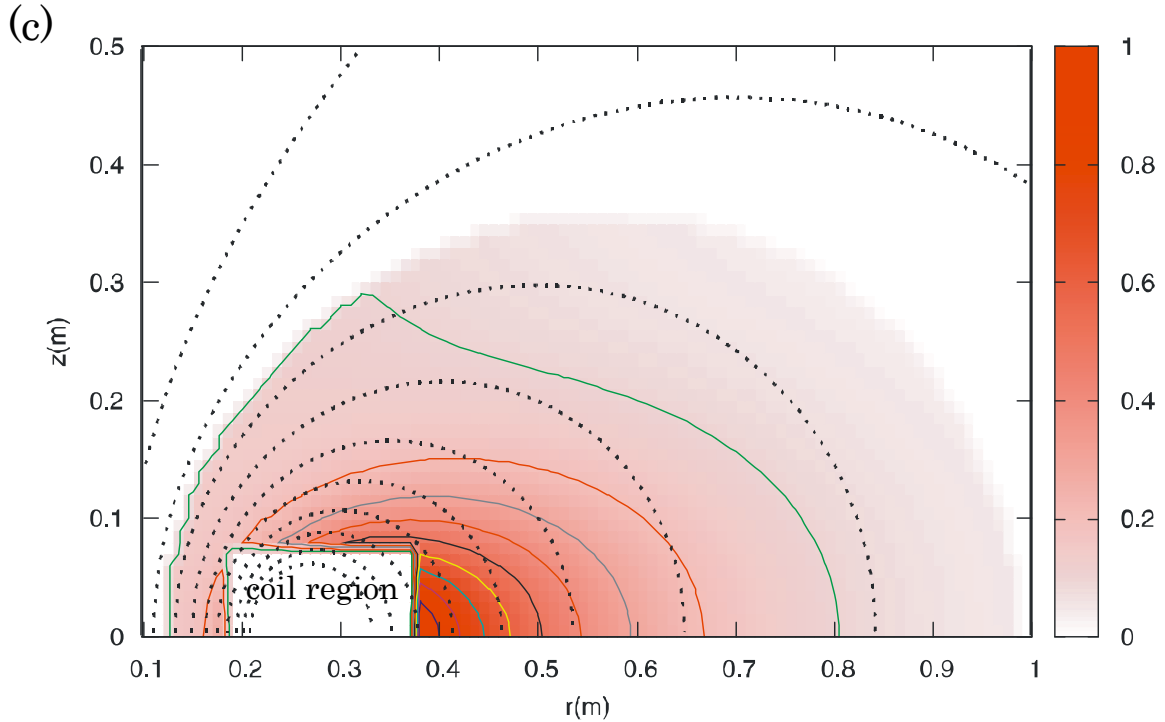


図 3.1.33 密度等高線図 (a) $\gamma=10^6$ (b) $\gamma=10^7$ (c) $\gamma=10^8$ 。破線は磁気面を表す。ポイントダイポール磁場のときと同じように赤道面上とそのコイル外側に密度が集中する。コイルに近い磁気面は周長が短いのでバウンス軌道は短くなる。するとバウンス運動の周波数が大きくなるためコイル近傍での密度が高くなる。さらに、全てのバウンス軌道は $Z=0(\text{m})$ の赤道面付近を通るので、赤道面付近を通る粒子数が最大となる。

円環電流周り磁場でも跳ね返り点が赤道面上に近いバウンス運動の割合が大きいことを予想すれば、赤道面上付近の密度が大きくなることは納得できるが、その検証が必要である。ポイントダイポール磁場で軌道のピッチ角依存性をみると(図 2.2.7)、45 度の時に軌道範囲が $Z=-0.15\sim 0.15$ であるから、全体の軌道の種類のうち半分程度がその範囲内に軌道が存在することは言える。

3. 1. 4 まとめ

- RT-1 磁場を 1 本の円環電流周りの磁場に近似した。
- この磁場配位特有の周回軌道でも μ と $J_{||}$ が保存されることを確かめた。
- 軌道計算のパラメータの最適化と、 μ と $J_{||}$ が保存する条件を定義し、この節で行った計算は全ての計算条件で μ と $J_{||}$ が保存するとみなす。
- ケミカルポテンシャルの範囲は $\alpha=10^8\sim 10^{10}$ 、 $\gamma=10^6\sim 10^8$ である。
- 断熱不変量を用いた積分を行い、熱運動のみを考慮した場合は解析解との相対誤差が数(%)に収まることを確認した。
- 密度分布はポイントダイポールの場合と同じく、熱運動では平坦な分布、熱運動とサイクロトロン運動では磁場強度の沿った分布、バウンス運動を加えると赤道面上のコイルのすぐ外側に密度が多く分布する結果となる。

3. 2 RT-1 磁場配位で電場を考慮した平衡

3. 2. 1 原理

3.1 節までの計算には電場が反映されていなかった。本節では Poisson 方程式を解き、軌道計算に電場を反映することで密度と電場が self-consistent となるような解を求め、最終目的である平衡状態の計算を実現する。3.1 までの計算式は

$$\rho = \int \frac{1}{Z} \exp\{-(\beta(\mu\omega_c + J\omega_b) + \alpha\mu + \gamma J)\} \frac{2\pi\omega_c d\mu}{m} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}}$$

である。ハミルトニアンにポテンシャルを加える。

$$H = \mu\omega_c + J\omega_b + q\phi$$

これを用いれば密度は次の式で求められる。

$$\begin{aligned} \rho &= \int \frac{1}{Z} \exp\{-(\beta(\mu\omega_c + J\omega_b) + \alpha\mu + \gamma J + \beta q\phi)\} \frac{2\pi\omega_c d\mu}{m} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} \\ &= n_0 \exp\{-\beta q\phi\} \end{aligned}$$

ただし

$$n_0 = \int \frac{1}{Z} \exp\{-(\beta(\mu\omega_c + J\omega_b) + \alpha\mu + \gamma J)\} \frac{2\pi\omega_c d\mu}{m} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} \quad (2.14)$$

とした。この n_0 は 3.1 で計算した式である。

Poisson 方程式によりポテンシャルと密度は次の関係を持つ。

$$\Delta\phi = -\frac{q}{\epsilon_0} n(x) = -\frac{q}{\epsilon_0} n_0 \exp\{-\beta q\phi\} \quad (2.15)$$

これがこの節で計算する式である。

次に規格化を次のように行う。

$$\begin{aligned} x &= a\hat{x} & a &: \text{代表長さ(m)} \\ n_0(x) &= n_{0max}\hat{n}(x) & n_{0max} &: \text{代表密度値(m}^{-3}\text{)} \\ \phi &= \phi_0\hat{\phi}, \quad \phi_0 = k_B T_e/e & \phi_0 &: \text{平衡温度(eV)} \end{aligned}$$

すると、規格化後の計算式は電子のデバイ長 λ を

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_{0max} e^2}} \text{ (m)}$$

と導入すれば

$$\hat{\Delta} \hat{\phi} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \hat{n}(x) \exp\hat{\phi}$$

となる。ここで、固定する代表値は次の通りである。

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ (m)} \quad (\text{RT-1 実験装置の真空容器半径}) \\ n_{0max} &= 3.5 \times 10^{11} \text{ (m}^{-3}\text{)} \quad ([10] \text{の実験データより引用}) \end{aligned}$$

電荷素量 1.602×10^{19} (C)、真空の誘電率 8.854×10^{12} ($C^2N^{-1}m^{-2}$)とする。以上よりパラメータとして変化させる量は次の通りである。

α, γ : ケミカルポテンシャル

ϕ_0 : 平衡温度(eV)

3. 2. 2 計算の概要

式(2.14)の密度 n_0 が場所の関数で表される場合の計算を APPENDIX A-4 で示す。本研究では密度 n_0 を 3.1 節の方法を用いて運動論的に計算する。なお磁場配位は 4 章で述べる実験の磁場で用いた磁場とは異なり X 点 (磁場強度の値が 0 となる点) のない磁場とする。理論では純粋なダイポール磁場が必要で、X 点のような特例を追加したくないからである。さらに、X 点付近の軌道計算は磁場強度が 0 の点を扱うため煩雑になると予想される。

電子プラズマが作るポテンシャル分布と密度分布を反復計算して収束させる。境界条件として、真空容器表面の電位を 0(V)、浮上コイルケース表面の電位をパラメータとして与える。まず与えられた平衡温度の幅を持つエネルギーの電子の軌道計算を行い、断熱不変量を求め、与えたケミカルポテンシャルを用いて式(2.14)の n_0 を計算する。次に、式(2.15)のポアソン方程式を解き、ポテンシャル分布を反復計算によって求める。そして、電場分布をポテンシャル分布から求め、それを軌道計算に反映し再び n_0 を求め、その後は密度分布が収束するまで、ポアソン方程式を解く、電場を求める、そして n_0 を求める、を繰り返し計算する。最後に収束したポテンシャル場や密度分布から $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数を求める。

計算の収束条件を述べる。この計算では反復計算を 2 種類行っている。反復計算回数を i とすれば、ポテンシャルの反復計算では $(i-1)$ 回目と i 回目のポテンシャルの相対誤差が指定した値 ($= 1.0 \times 10^{-6}$) より小さくなったとき、密度の反復計算でも $(i-1)$ 回目と i 回目の密度の相対誤差が指定した値 ($= 1.0 \times 10^{-3}$) より小さくなったときに収束したとする。

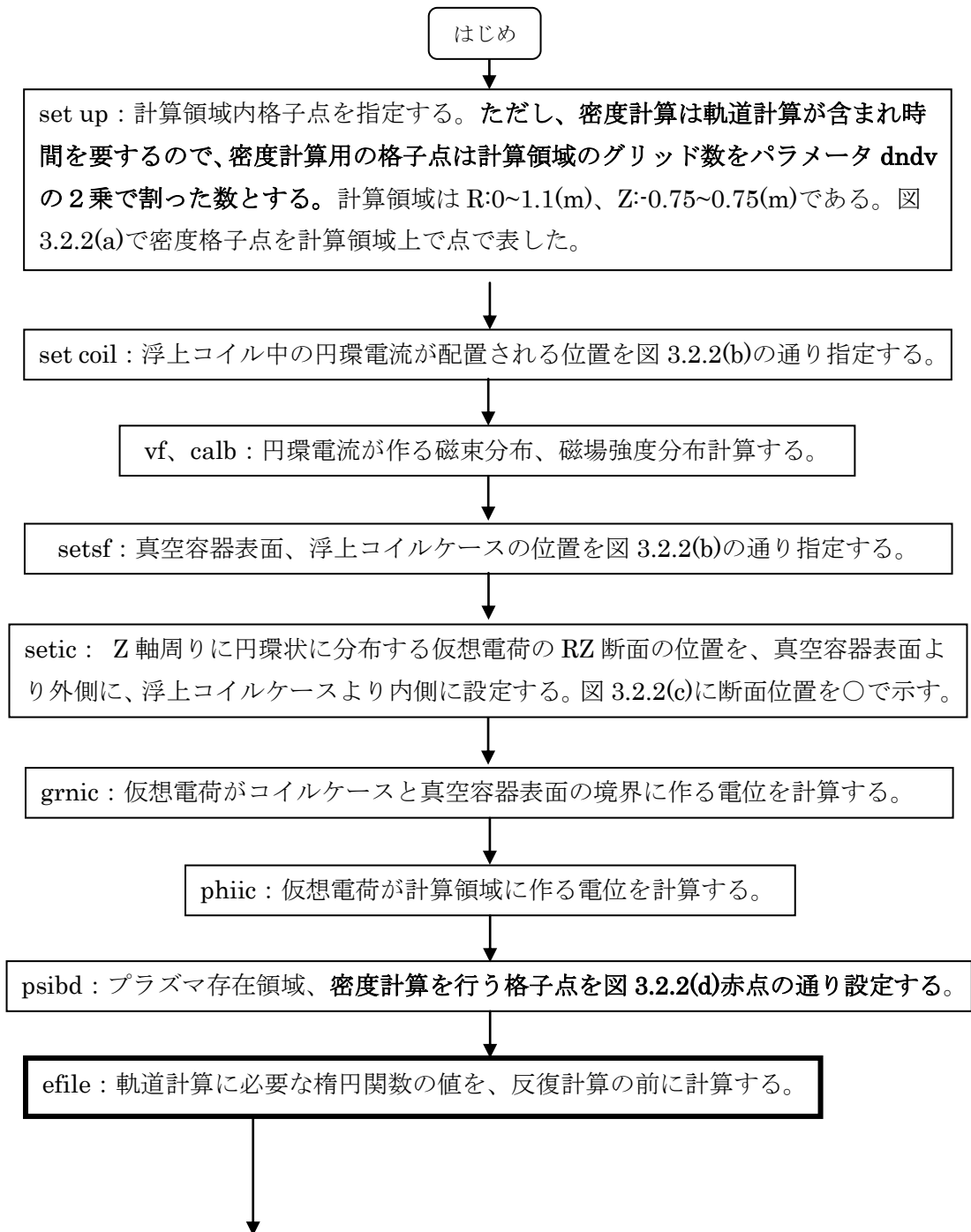
ポテンシャルの収束条件と境界条件の関係を、計算の流れに沿って述べる。初めてポテンシャルを計算した際、真空容器と浮上コイルケース表面の境界ポテンシャルは境界条件として指定した値となることはない。境界ポテンシャルを配列に収納する際に、浮上コイルケース表面だけは境界条件として与えたコイルケース表面のポテンシャルを引いて収納する。仮想電荷を真空容器表面より外側と浮上コイルケースの内側に配置し、これが境界ポテンシャルを作ると仮定しその電荷量を求め、これが作る空間ポテンシャル $\hat{\phi}_c$ を考慮した次の Poisson 方程式(2.16)をとく。

$$\hat{\Delta} \hat{\phi} = \hat{\phi}_c + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \hat{n}(x) \exp \hat{\phi} \quad (2.16)$$

そもそも仮想電荷なるものは存在しないので、反復計算により仮想電荷量が 0 に近づけば境界ポテンシャルがすべての点で 0 に近づく。収束する際には、真空容器表面上の電位は 0、浮上コイルケース表面の電位は引いた分の電位がそのまま表面の電位となり目的の境界条件を達するこ

となる。仮想電荷が 0 に近づけば空間ポテンシャルの変動も小さくなるので、境界条件に近づくことと収束条件を満たすことは同じ状況を表す。式(2.16)中で $\hat{\phi}_c \approx 0$ となり、最終的に境界条件と Poisson 方程式を満たすポテンシャル場が求まる。

主要な計算の流れを次の流れ図にて解説する。サブルーチン名と簡単な内容を述べる。本研究での追加事項、追加したサブルーチン名を太字で、枠と収束アルゴリズムを太線で示し別個解説する。従来からのサブルーチンは APPENDIXB-5 で述べる。



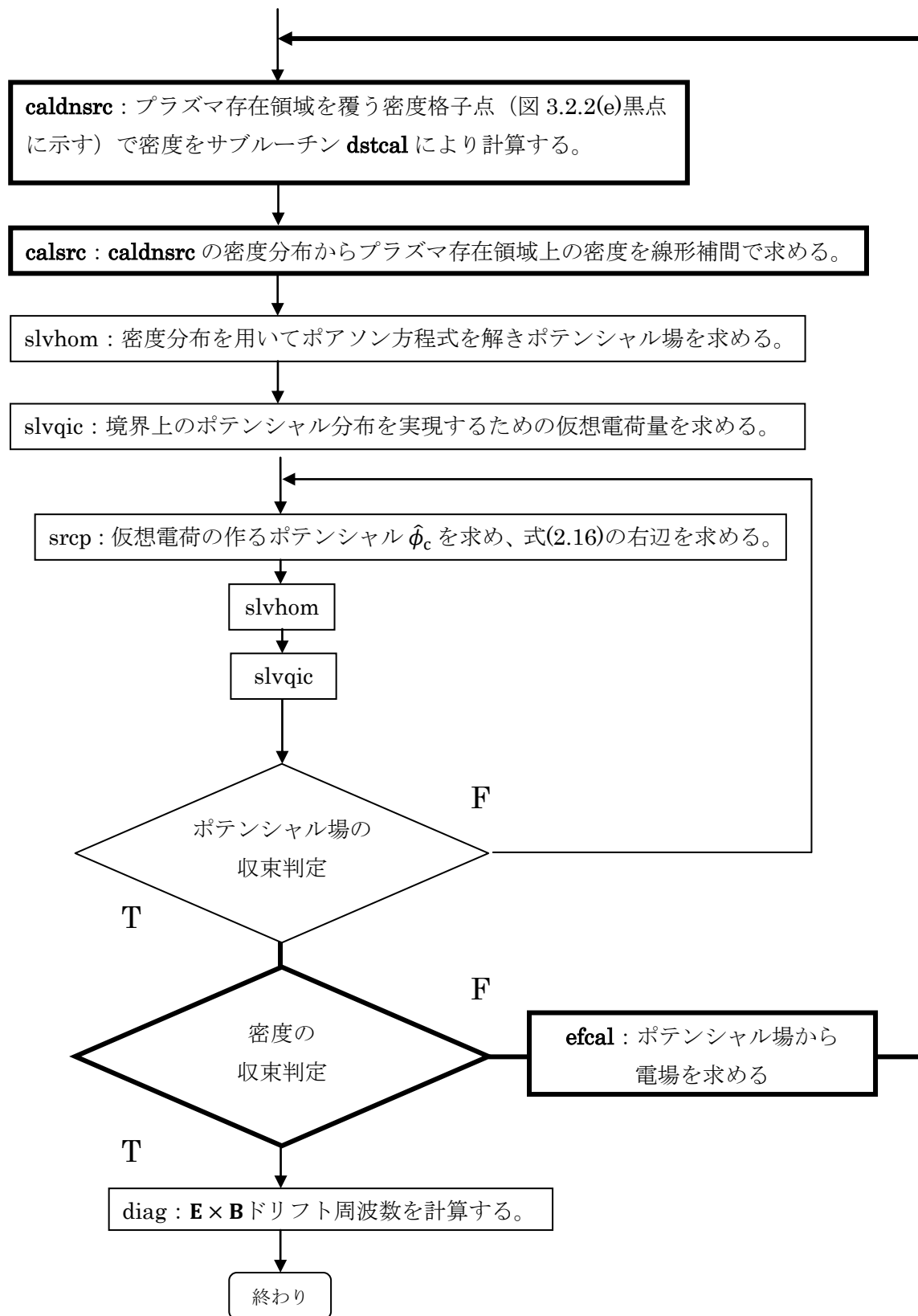
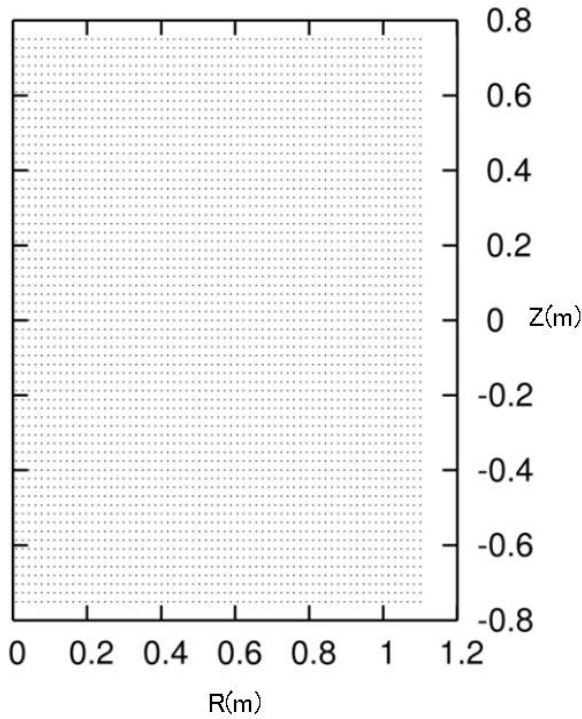


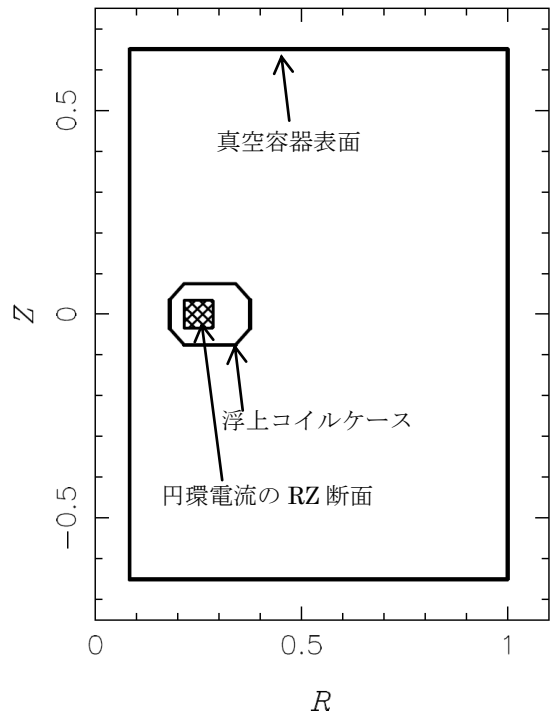
図 3.2.1 流れ図

計算領域や、境界・仮想電荷の位置、プラズマ存在範囲、密度計算を行う格子点を次の図 3.2.2 で示す。

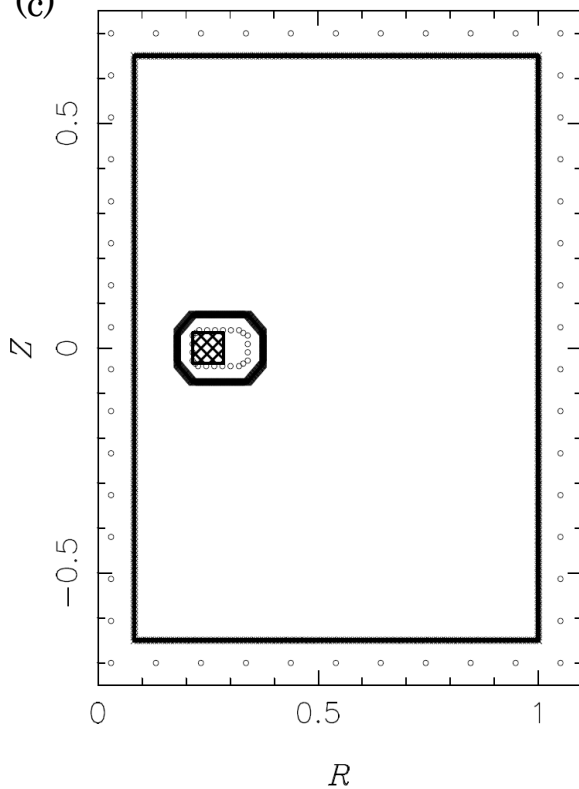
(a)密度計算用の計算領域



(b)境界・円環電流の位置



(c)



(d)

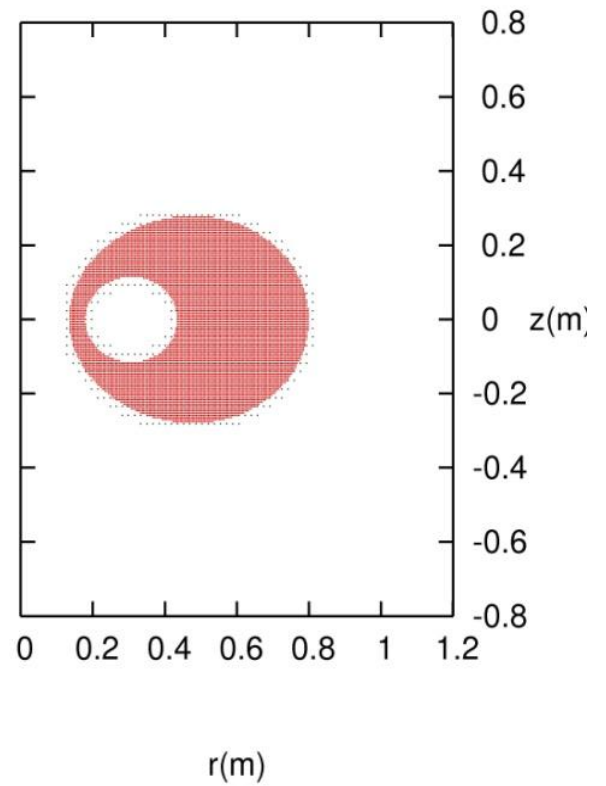


図 3.2.2 (a)密度計算の格子点分布 (b)浮上コイルケースと真空容器表面、円環電流の位置
(c)仮想電荷の RZ 断面図 (d)プラズマ存在領域 (赤点) 密度計算を行う格子点 (黒点)

本研究での追加事項、追加したサブルーチンの説明を行う。

・密度計算用の格子点の設定

計算領域は $R:0\sim 1.1(\text{m})$ 、 $Z:-0.75\sim 0.75(\text{m})$ であり、それぞれ分割数は 512 である。ポアソン方程式は微分を解くため分割数はこの程度必要である。しかし、これと同じ分割数で密度計算を行おうとすると、1 点での密度計算の際に軌道計算を多数行う必要があるために時間がかかる。また密度計算は積分を計算し、密度分布も 3.1 節で示したように複雑な形状ではない。そこで、密度計算を行う格子点は R と Z それぞれを 512 で分割した数をさらに $dndv$ というパラメータで分割し、間を線形補間することで近似する。この章で述べる結果は $dndv=8$ 、つまり R と Z を 64 で分割したグリッド上で密度計算を行う。ただし、次で述べるように全てのグリッド上で密度計算を行うのではなく、プラズマ存在領域を覆う領域 (図 3.2.2(d)黒点) で行う。

・密度計算を行う格子点の選定

サブルーチン `psibd` では、図 3.2.2(d)赤点で示すように指定された 2 つの磁気面值の間にプラズマは存在すると決められる。そして、その存在領域の密度が必要なので、線形補間を行えるように図 3.2.2(d)黒点で示すようなプラズマ存在領域を覆う領域を選ぶ必要がある。プラズマ存在領域は 2 次元配列 $ip(jr,jz)$ を用いて $ip=1$ 、存在しない領域は $ip=0$ で表される。ただし jr,jz は計算領域上の格子点位置を示す整数型変数である。そこで密度計算を行うかどうかを同じく 2 次元配列 $dnip(dn jr,dn jz)$ を用意し、計算を行う領域を $dnip=1$ 、行わない領域を $dnip=0$ で表せるようにすればよい。 $dn jr$ 、 $dn jz$ は密度計算用の格子点位置を示す整数型変数である。値の指定方法は、ある $ip=1$ となるような密度計算用の格子点を 1 点選び、その周りの 8 点で $dnip=1$ とし、これを全ての $ip=1$ となるような密度計算用の格子点で行えば図 3.2.2(d)黒点で示されるような領域が選定できる。

・ `efile`

3.1 で述べたように軌道計算の際に、ある位置から磁場強度を計算する関数が必要となる。すでにサブルーチン `calb` で磁場強度は求まっているが格子点上の値なので、何らかの近似が必要となる。軌道計算はルンゲクッタ法を用いており、1 回の位置の更新スケールは小さい。よって近似を行うよりも正確な磁場強度を次の式から求める。

$$B_r = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{z}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right)$$

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right)$$

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \tag{2.17}$$

ただし $K(k)$ 、 $E(k)$ はそれぞれ第 1 種完全楕円積分、第 2 種完全楕円積分である。軌道計算中は位置が更新される度に楕円関数の値が必要である。しかし、楕円関数を毎回計算すると膨大な時間がかかるので、事前に楕円関数の値を収めた配列 $\mathbf{K}(\mathbf{k})$ 、 $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ をここで用意する。この配列を使う

際は式(2.17)で得られた k を 100000 倍し、整数に変換された k と対応する $K(k), E(k)$ を読みだして用いる。このサブルーチンでの k の範囲は 0~99999 (楕円関数の変数としての k の範囲は 0~0.99999) とし、それぞれに対応する楕円関数の値を保存しておく。

- caldnsrc

図 3.2.2(d)の黒点で示す位置での密度を運動論的に求める。ただし、実際の密度を計算するサブルーチンは新しく作った `dstcal` で行い、このサブルーチンでは引数となる位置情報を `dstcal` に渡し、密度の数値を受け取り、配列に収納する。

- dstcal

位置情報から密度を運動論的に計算するサブルーチンである。計算の原理は 3.1 章と同じである。ただし、3.1 章では軌道計算をおこなうプログラム `ADINV-data.for` と、そのデータを用いて密度を計算するプログラム `ADINV-int.for` に分けていたが、ここでは統一して `dstcal` にまとめる。さらに電子の運動方程式に電場の項を加える。軌道上のある位置での電場の値は、後述するサブルーチン `efcal` の電場を線形補間により与える。計算時間の短縮のため、 Z が 0 以上の領域だけを計算し、 $Z < 0$ の領域は対称性を仮定し密度計算をしていない。

- calsrc

`caldnsrc` で得た密度分布からプラズマ存在領域上の密度を線形補間で求める。そのために図 3.2.2(d)のようにプラズマ存在領域よりも外側の領域まで密度計算を行う必要がある。

- efcal

サブルーチン `dstcal` で必要な電場をポテンシャル分布から差分をとり求める。

3. 2. 3 計算結果

計算結果を述べる。なお共通の計算条件は以下の通りである。

- Poisson 方程式を解く計算グリッド数 : R, Z 方向ともに 512 等分
- 密度を計算する計算グリッド数 : R, Z 方向ともに 64 等分
- 密度を計算する際の積分変数刻み数 : 5
(2 章と 3.1 節では 20 の値が最適としたが、計算時間の節約から 5 とした。)
- 境界条件 : 真空容器表面の電位 0(V)、浮上コイルケース表面-1(kV)
([10]の実験データから予想される値を用いる)

3. 2. 3. 1 ケミカルポテンシャル依存性

計算条件

- ・平衡温度：500(eV)
- ・ケミカルポテンシャル：① $\gamma=10^8$ 、 $\alpha=10^{8-10}$
② $\gamma=10^{6-8}$ 、 $\alpha=10^{10}$

計算結果① $\gamma=10^8$ 、 $\alpha=10^{8-10}$

まずは密度プロファイルを図 3.2.3 に示す。図中の灰色の部分の部分は浮上コイルの領域で、プラズマが存在しない。さらに浮上コイルの少し外側にもプラズマは存在しない。それは、プラズマが存在する領域を $Z=0(\text{m})$ の赤道面上で浮上コイルに内側で接する磁気面 ($R=0.18(\text{m})$ の位置) から、真空容器の手前の磁気面 ($R=0.8(\text{m})$) で指定しており、前者の磁気面が $R=0.44(\text{m})$ 付近を通るためである。図 3.2.2(d) の赤い領域がその存在領域で、内側の境界線が前者の磁気面を示す。図 3.2.2(c) の浮上コイルの左端が図 3.2.2(d) の内側の境界線に左側で接し、浮上コイルと内側の境界との間に間隔が出来る。この間隔が図 3.2.3 の coil region と 0 でない値を持つグラフの間隔である。さらに図 4.3.5 と 4.3.6 を見ると分かりやすい。

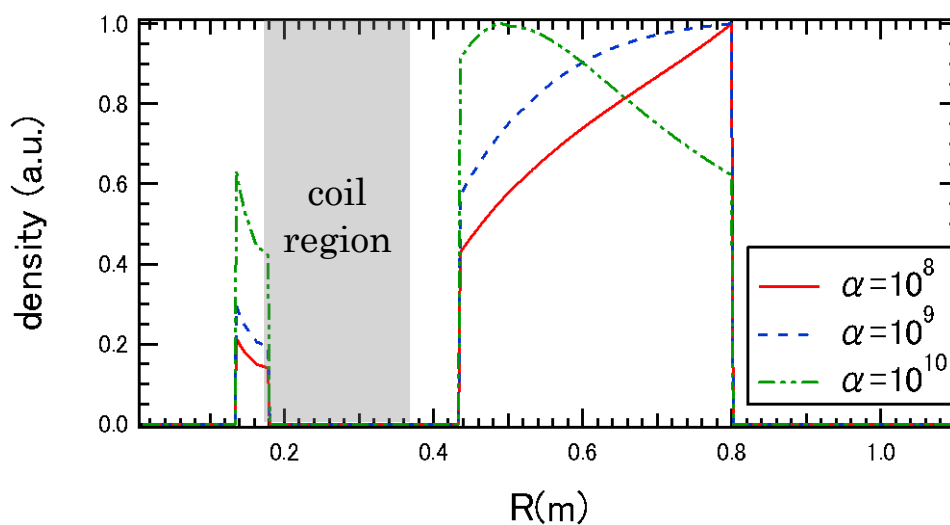


図 3.2.3 密度プロファイルの α 依存性 ($\gamma=10^8$)。 α の増加に伴いコイル外側の密度の割合が集中する。これは 2 章や 3.1 節の場合と同じである。次にポテンシャル分布を図 3.2.4 に示す

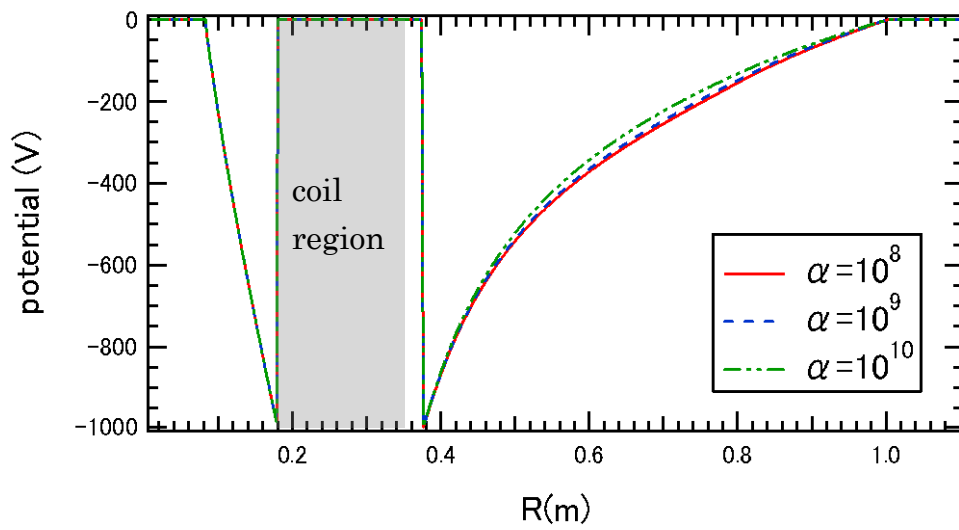


図 3.2.4 ポテンシャルの α 依存性。 α の増加に伴い外側の位置でのポテンシャルの勾配が小さくなる。これは図 3.2.3 でコイル外側の密度の割合が減少していくためである。

次に $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数を図 3.2.5 に示す

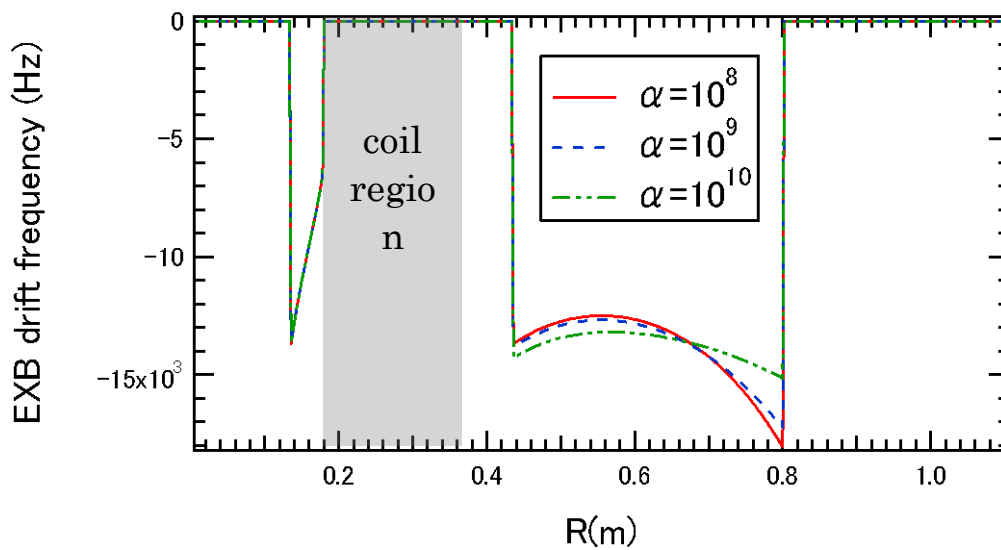


図 3.2.5 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数の α 依存性。 α の増加に伴い周波数が一定に近づく。これは剛体回転に近づくことを示す。周波数は 13~14(kHz)である。

計算結果② $\gamma=10^6\sim 8$ 、 $\alpha=10^{10}$

密度分布を図 3.2.6 に示す。

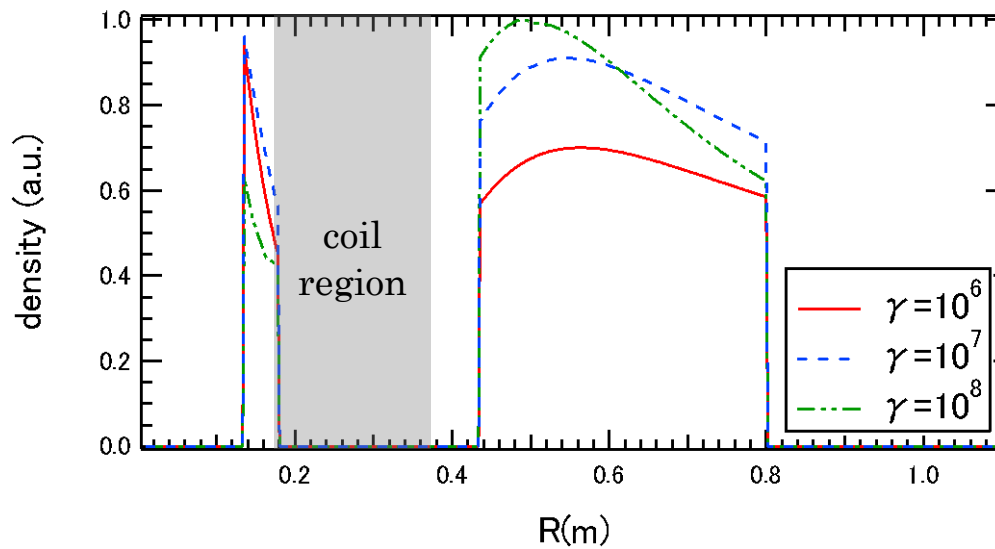


図 3.2.6 密度の γ 依存性。 γ の増加により赤道面上での密度の割合が増加し、コイルすぐ外側で密度が大きくなる。これは 3.1 節と同じ傾向である。

図 3.2.7 にポテンシャル分布の γ 依存性を示す。

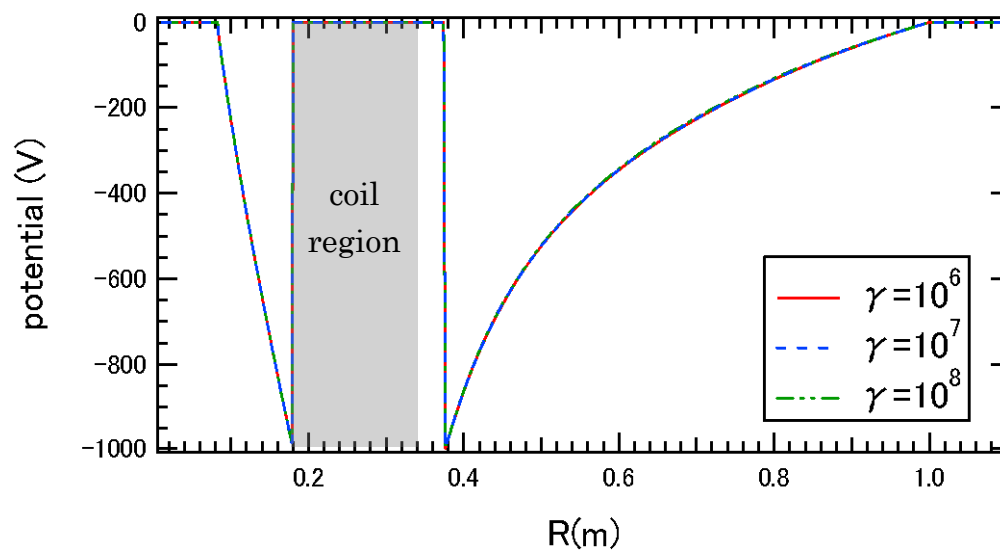


図 3.2.7 ポテンシャル分布。ほぼ変化はない。

次に $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数の γ 依存性を示す。

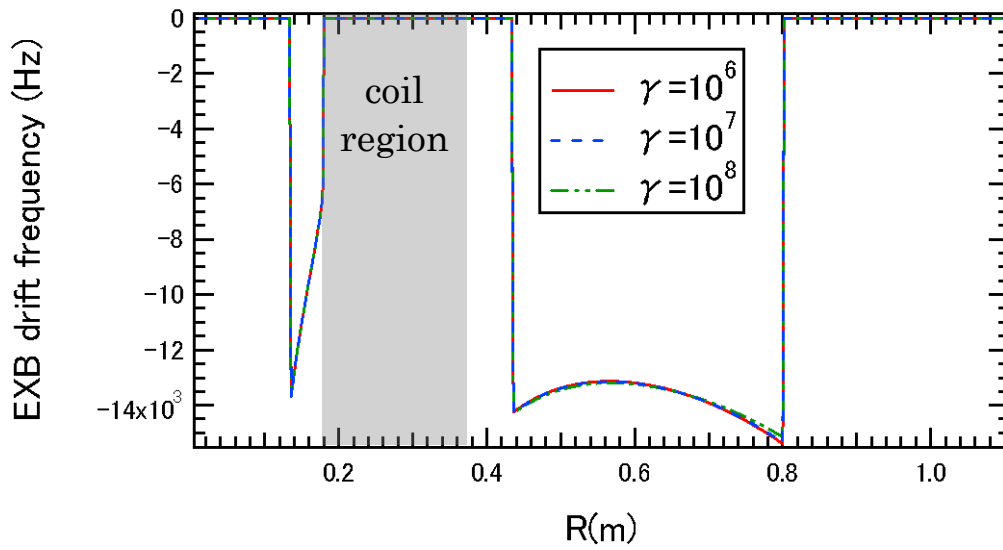


図 3.2.8 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数の γ 依存性。ほぼ変化しない。 α をパラメータとした時は変化が見られる。

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数が定数だと剛体回転と見なすことができるので、それに近いパラメータを選ぶと、ケミカルポテンシャルが $\alpha = 10^{10}$ $\gamma = 10^6 \sim 10^8$ となる。これらの RZ 平面上での 2次元図を次に示す。ただし、 ψ は磁気面值(Wb)、 ϕ はポテンシャル(V)、 n は密度の規格値である。

① $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^6$

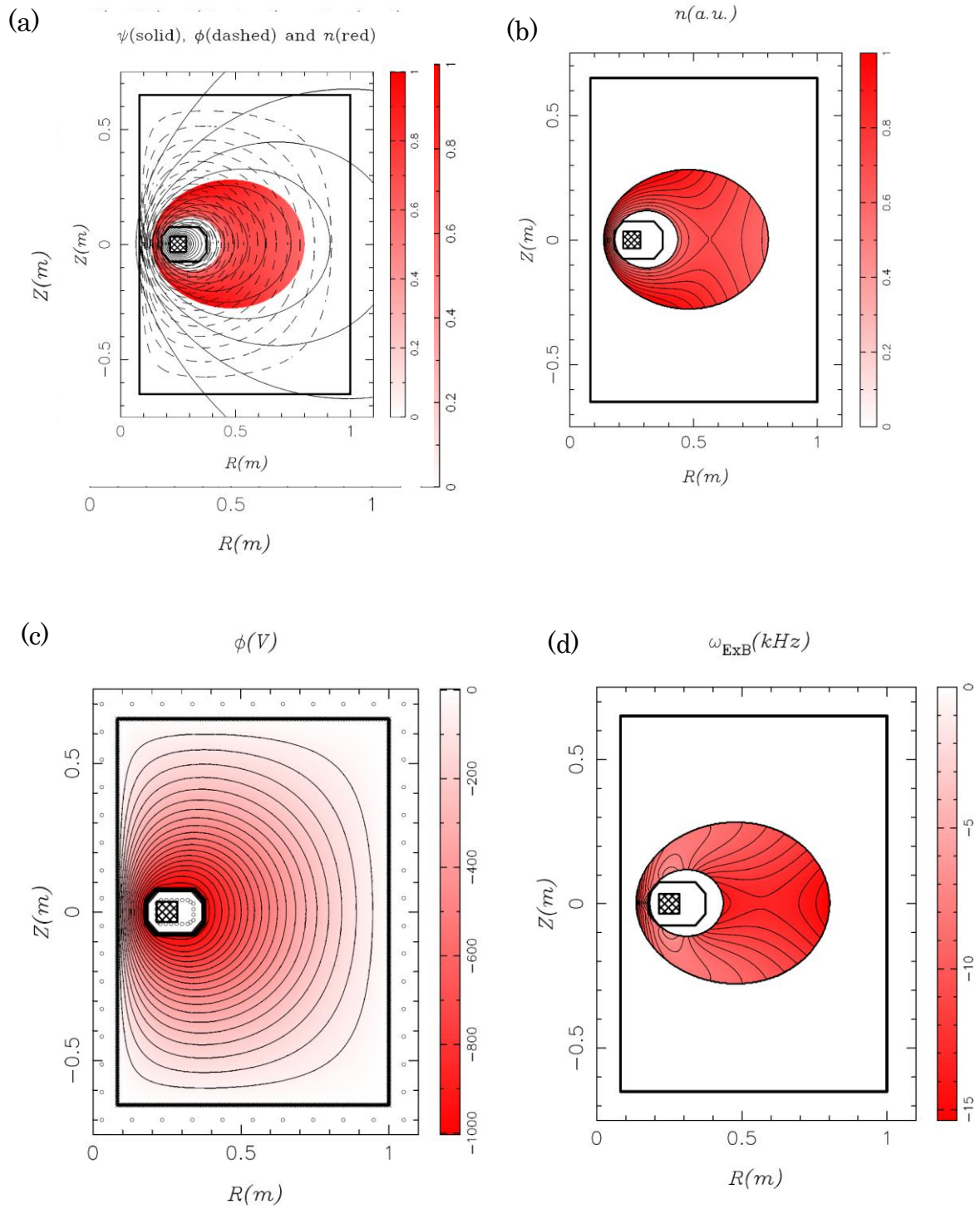
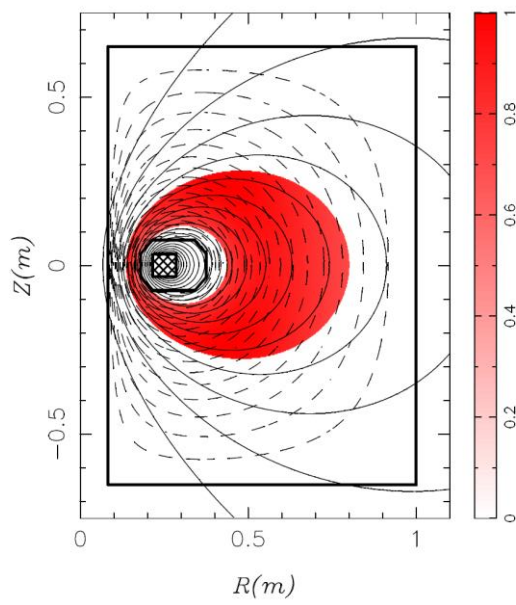


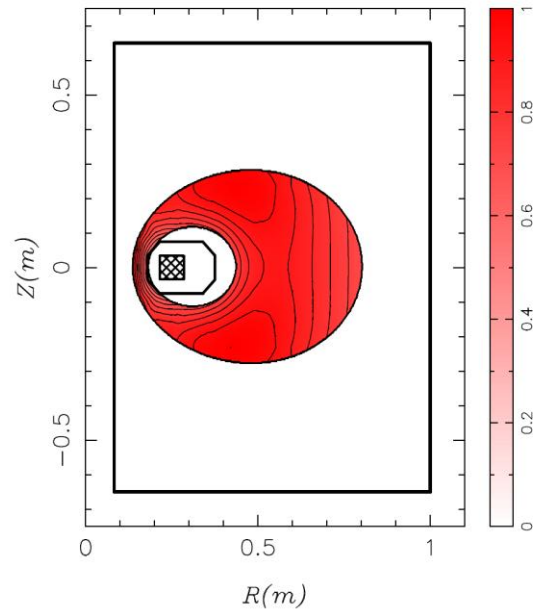
図 3.2.9 $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^6$ 。(b)より密度の割合が外側の磁気面で大きくなる。

② $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^7$

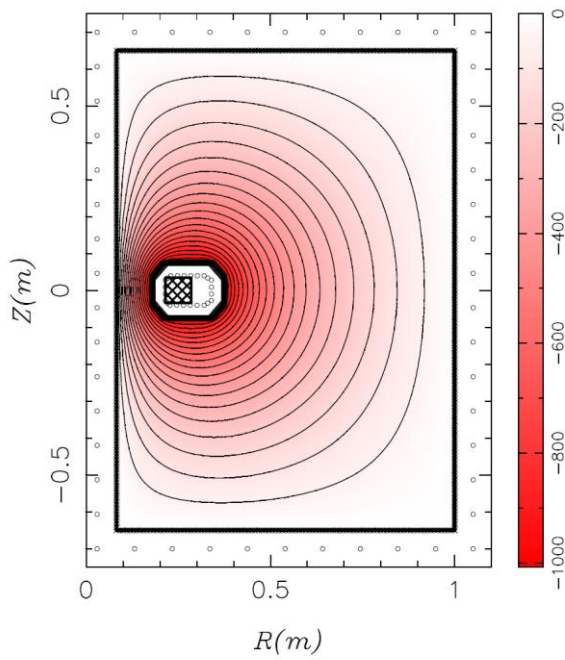
(a) ψ (solid), ϕ (dashed) and n (red)



(b) n (a.u.)



(c) ϕ (V)



(d) ω_{ExB} (kHz)

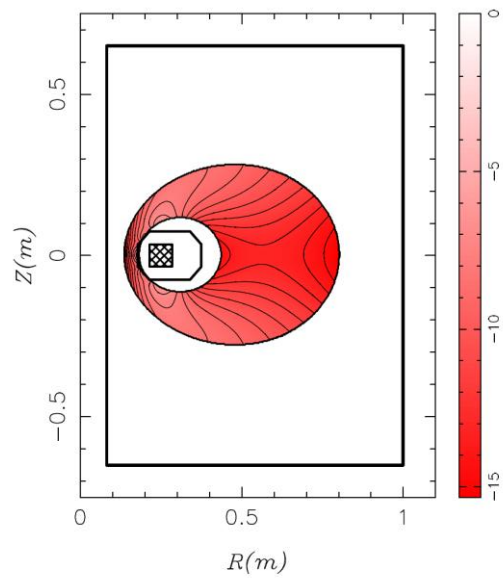


図 3.2.10 $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^7$ 。(b)より外側の磁気面に密度の割合が大きい。

③ $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$

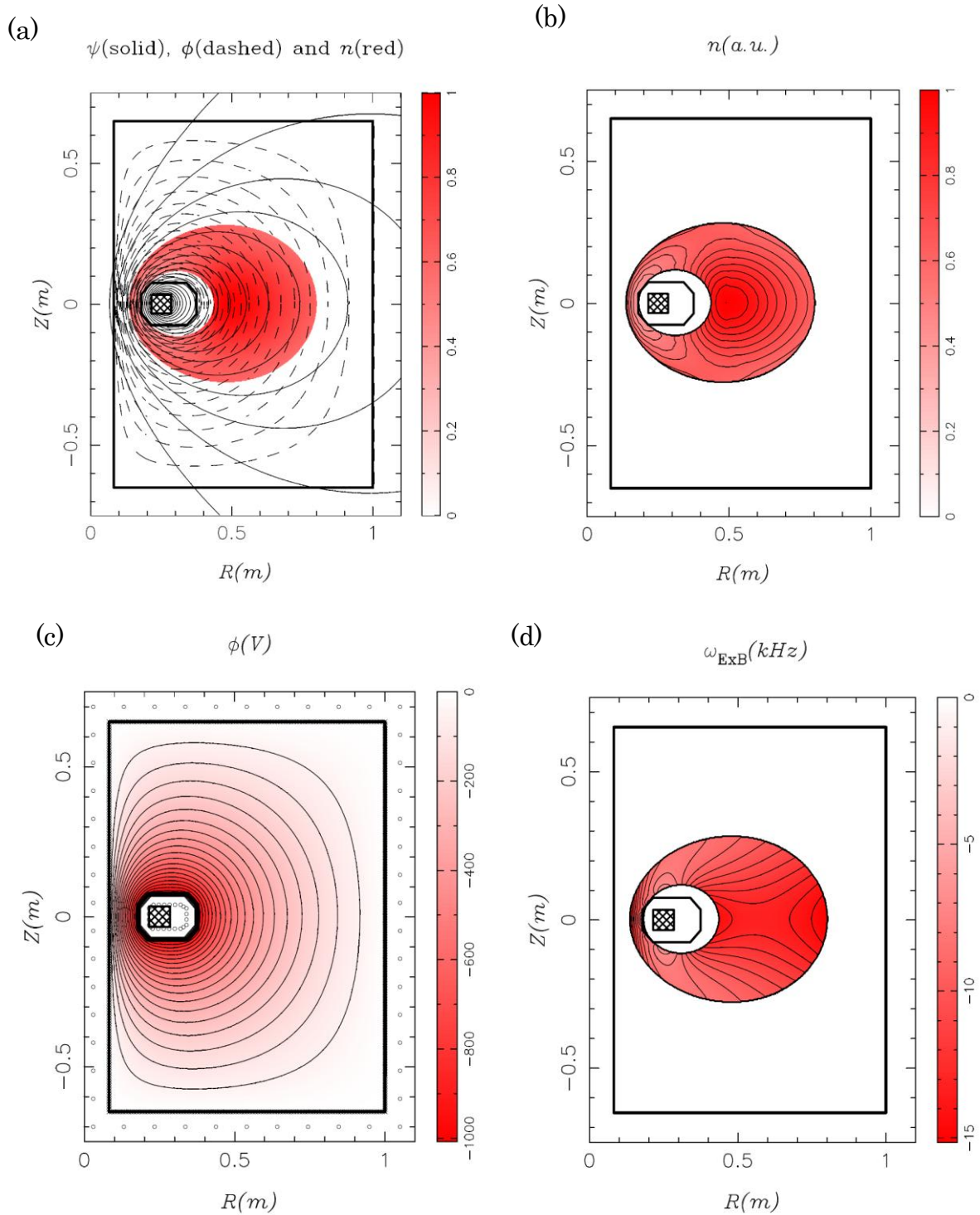


図 3.2.11 $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$ 。(b)より γ が大きくなればコイルの内側に密度が集中する。

以上より考える剛体回転のモデルに合うパラメータは $\alpha = 10^{10}$ である。 γ は 10^6 - 10^8 どちらとも決め難く、4章の実験の結果から選ぶことにする。

3. 2. 3. 2 電場がある場合の軌道計算

これまでには密度やポテンシャルの分布を調べてきた。ここでは、この計算の前提となる μ と J_{\parallel} が保存されているかを確認する。しかし、全ての条件で確認することは難しいので、 $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$ の平衡解での電場で考える。まずは図 3.2.13 に電場の等高線図を示す

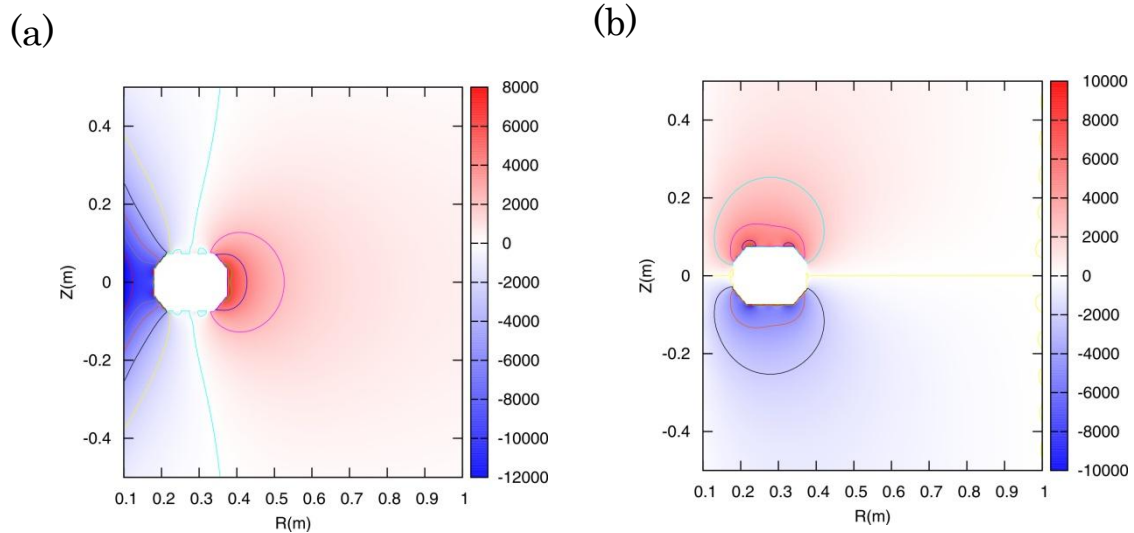


図 3.2.13 $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$ の平衡解での (a) R 方向の電場 (V/m) (b) Z 方向の電場 (V/m)。Z 方向よりも R 方向の電場が強く、 $Z=0(\text{m})$ の赤道面上ではコイルのすぐ外側で最大値、コイルのすぐ内側で最小値となる。

そこで電場を考えない場合の軌道図 3.1.7 の条件で軌道計算を行い、電場の効果を確認する。

計算条件

- 電場 : $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$ の平衡解
- 初期位置 : $R=0.5(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー $E_{\perp} = E_{\parallel} = 50(\text{eV})$
- 計算回数 : バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み : ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム : ADINV_loop_efld.for

計算① 結果

・軌道

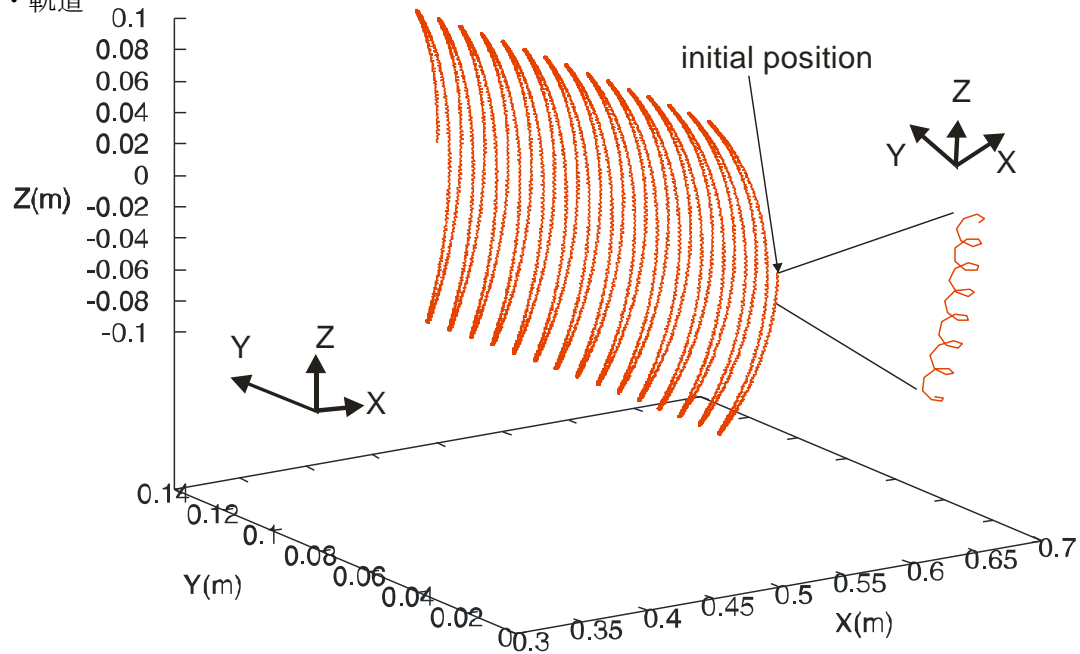


図 3.2.14 $R=0.5(m), Z=0(m)$ を初期位置とする軌道図。電場が無い場合と同様に周期運動をしている。

電場が無い場合の軌道図は、初期位置がこの条件と違う $R=0.5(m), Z=0(m)$ が、図 3.1.7 を見るとよい。ほとんど軌道の形は変わらない。

・ μ と $J_{//}$ の時間変化

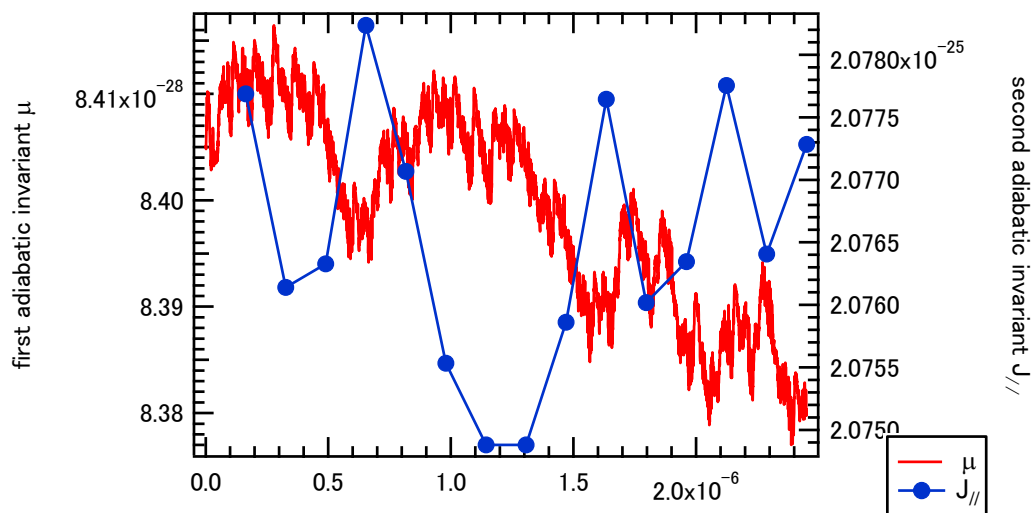


図 3.2.15 μ と $J_{//}$ の時間変化。 μ と $J_{//}$ ともに 0.1(%)単位で変動している。一定の振幅を保っている訳でもないが、変動の幅が小さいので保存するとみなす。電場を反映させても μ と $J_{//}$ が大きく変動することはない。

またドリフト周波数を図 3.2.16 に示す。

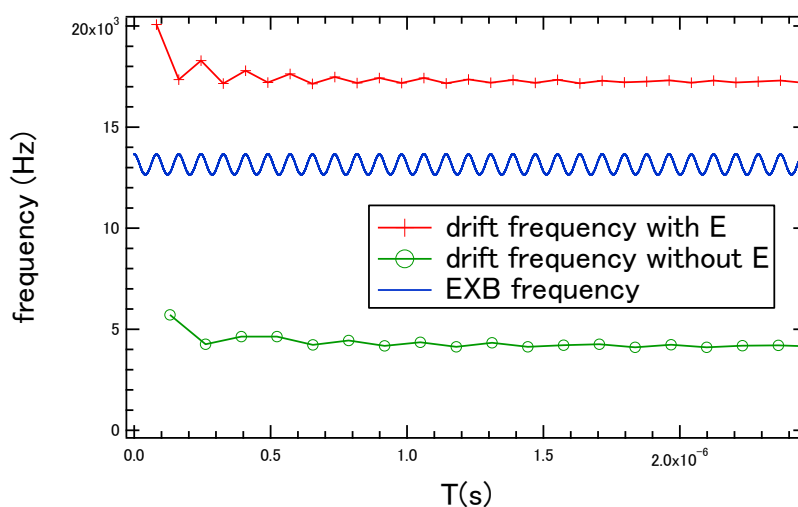


図 3.2.16 トロイダル方向のドリフト周波数。電場と磁場から求めた $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数と、軌道から求めたドリフト周波数（電場がある場合と無い場合）を示す。電場がある場合のドリフトは 17(kHz)程度で、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数 13(kHz)と電場がない場合のドリフト周波数 4(kHz)の和である。後者は $\text{grad } B$ ドリフトによるものと推測される。

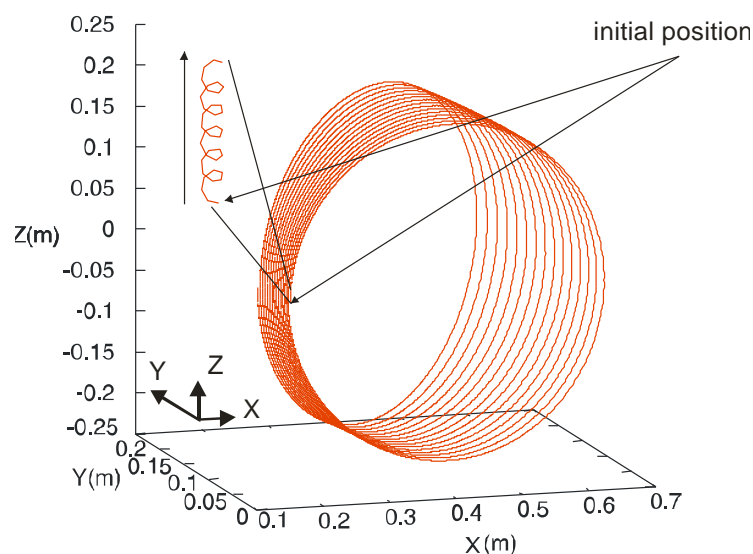
次に電場が強い領域で軌道計算を行い電場の効果を確認する。

計算条件

- 電場： $\alpha = 10^{10}, \gamma = 10^8$ の平衡解
- 初期位置： $R=0.15(\text{m}), Z=0(\text{m})$
- 初期エネルギー $E_{\perp} = E_{\parallel} = 50(\text{eV})$
- 計算回数：バウンス軌道 15 周期分
- ルンゲクッタ法の時間刻み：ラーマ周期の 1/64、最小時間刻みは $1\text{e-}15(\text{s})$
- 使用プログラム：ADINV_loop_efld.for

計算結果

- 軌道
- (a)



(b)

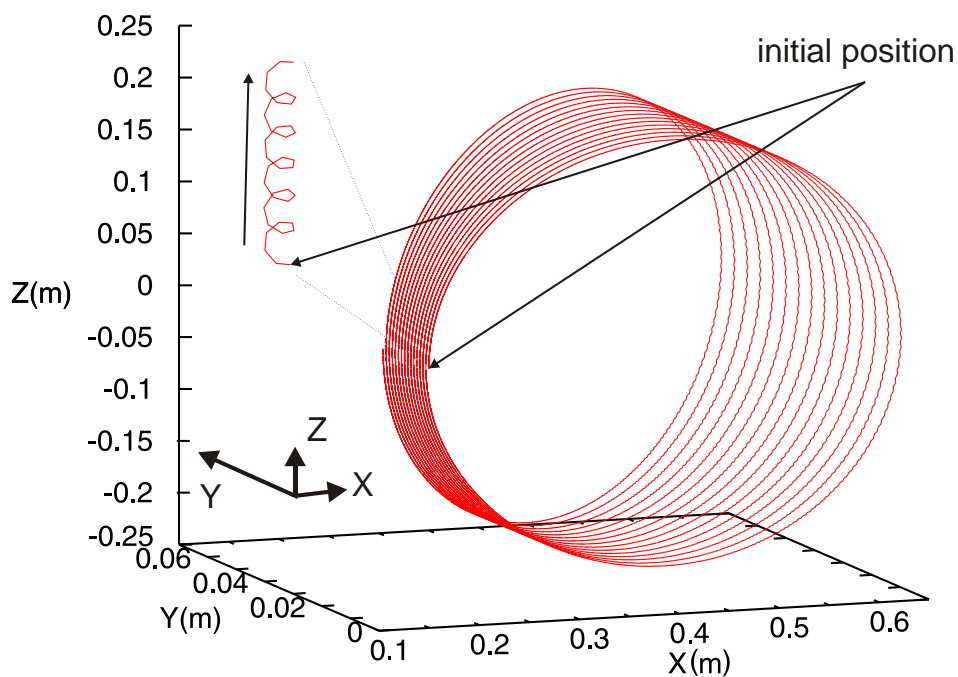
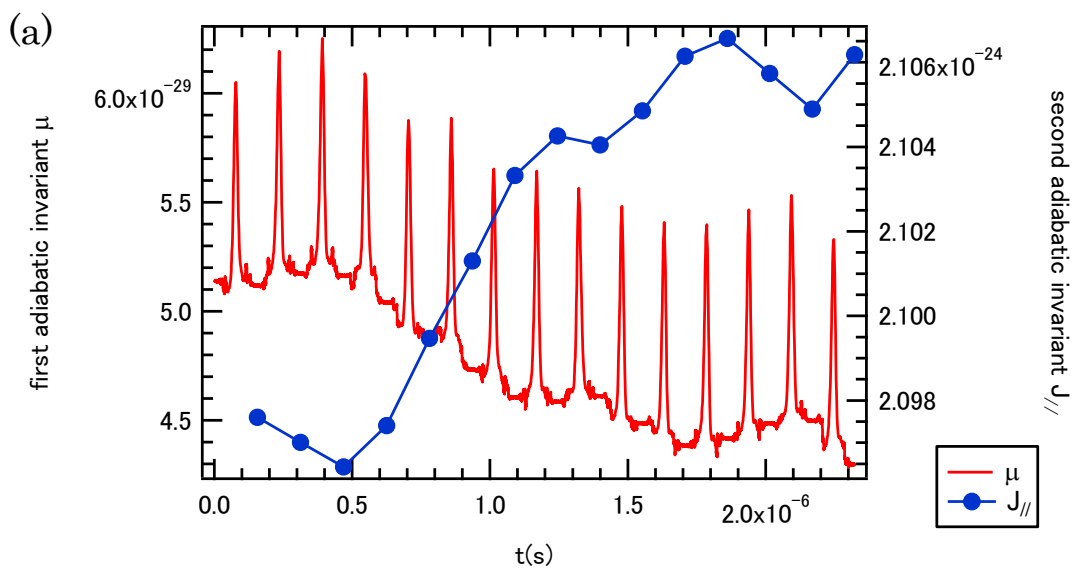


図 3.2.17 $R=0.15(m), Z=0(m)$ を初期位置とする軌道図 (a)電場あり (b)電場無し。
(a)、(b)の軌道変化は見えない。電場ありの方が Y 方向のドリフト速度が大きい。これは $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度のためである。

次に μ と $J_{//}$ の時間変化を次に示す。



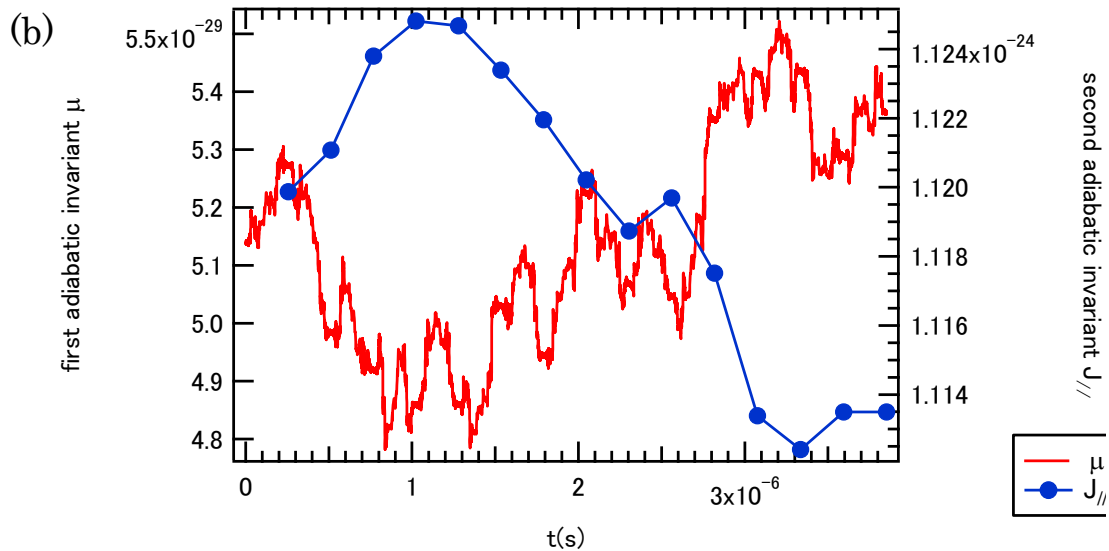


図 3.2.18 μ と $J_{//}$ の時間変化。(a)電場あり (b)電場無し。両者ともに μ の変動は 10(%) 単位、 $J_{//}$ の変動は 1(%) 単位で保存されているとみなす。電場ありの場合 $J_{//}$ の値が大きい。

以上、電場がある場合の軌道計算の一例だけ行った。周期運動は電場の有無にかかわらず保たれ、 μ と $J_{//}$ も保存している。本研究では、他の条件でも μ と $J_{//}$ は保存するとして、これ以上詳細な議論は行わない。

3. 2. 4 まとめと考察

- ・ポアソン方程式を解き、密度と電場の self-consistent な解を求めた。
- ・剛体回転モデルに近いパラメータはケミカルポテンシャルが $\alpha=10^{10}$ 、 $\gamma=10^{6\sim 8}$ となった。
- ・ α が大きくなると磁場強度の強いコイル内側に密度の割合が多くなる。
- ・ γ が大きくなるとバウンス運動の効果により、赤道面付近の密度の割合が高まり、コイルすぐ外側で特に密度の割合が大きい。
- ・電場を反映した軌道計算をしても μ と $J_{//}$ は保存する。

第4章 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置RT-1での純電子プラズマ実験

4.1 実験の目的と概要

先行実験[10]では、電子銃入射中に30(kHz)程度の揺動が起こる。電子銃入射後は密度分布が浮上コイル側にピークを持つ剛体回転の構造であることと、その状態が300(s)程度保たれていることがwall probeによって確認された。また、プローブ計測により赤道面上で浮上コイルに向かって空間電位が減少していく分布も明らかになった。電子は電子銃入射中に内側の磁気面に入り、平衡状態に落ち着くと考えられる。

先行実験での測定は赤道面上でしか行われておらず、同様の計測を浮上コイルの真上のZ方向でのプローブによる計測を行うことで電子のバウンス運動が赤道面からどの程度まで離れて行われるかを確認できる。よって、Z方向の空間電位分布の測定を実験の主な目的とする。

この実験のためには浮上コイルを吊り上げコイルを用いた電磁力で浮上させなければならないが、Z方向測定用のプローブは吊り上げコイル近傍で手動で位置を移動させなければならない。よって測定位置を変えるごとに浮上をやめ、吊り上げコイルの電流を落とす必要があり大変時間がかかる。さらに、長時間の浮上実験は地震により浮上コイルの位置を監視するレーザーセンサの誤作動のためのコイル落下という大事故の危険性が高まる。プローブの位置変更を自動で行う機械を据え付ければ細かい位置精度のデータが取得できるが、手動で行うためZ方向では2点のみ測定する。すなわち、電子銃入射位置の磁気面上の点と、それよりも内側の磁気面である。浮上実験の前に、浮上コイルが下から支持された状態での空間電位分布や浮遊電位分布を行い測定に慣れる。また、本研究と関連する電子銃入射中の電流揺動も測定する（これが第3断熱不変量 ψ の保存を壊し内向き輸送を起こす原因となる）。

4.2 原理

4.2.1 エミッシブプローブ法

先端にフィラメントをつけ、加熱すれば電子の放出が可能なプローブをエミッシブプローブと呼ぶ。加熱し電子が放出された状態をhot probe、加熱されず電子が放出されない状態をcold probeと称することにする。

cold probeはシングルプローブの機能と同じである。プローブ先端の電位が空間電位よりも大きい場合は、電子がプローブに入る。逆の場合、もし電子が運動をせずに止まっていれば電位差のためにプローブに入らない。しかし、実際の電子は温度の幅を持った運動エネルギーの分布を持つので、運動エネルギーが電位差より大きくプローブに入る電子が存在する。このため、測定するプローブ電流の挙動が空間電位前後で変化が無い。これを定性的に図4.2.1(1)に示す。cold probeの定性的記述はAPPENDIX C-2に示す。

hot probeの状態ではプローブの先端の電位が測定する空間電位よりも小さい場合、フィラメントとそれに流す電流値で決まる一定の電子が外の空間へ放出される。逆の場合は放出されても電位差のためにすぐに先端に戻され、正味放出量が0となる。この現象は電位の大小のみで決まるため、測定するプローブ電流の挙動が空間電位前後で全く異なるために空間電位がはっきりと測定できる。また、Child-Langmuirの法則（APPENDIX C-3）によりプローブ電位が空間電位より

も少し小さくなくても急激に電子が放出されることはなく、緩やかに放出される。これを定性的に図 4.2.1(2)に示す。実際は運動エネルギーをもった電子がプローブに入り込むために、cold probe の挙動 (図 4.2.1 の(1)) が加わり、図 4.2.1(3)となる。

フィラメント電流の on と off の操作により、hot probe と cold probe の 2 パターンを測定すれば図 4.2.1 の(1)と(3)が同時に表示でき、分岐点付近を空間電位とする。浮遊電位は図 4.2.1 の IV 特性上に、 $V = IR_h$ の直線を引き、図 4.2.1(1)と(2)との交点を求めることで推定できる。浮遊電位測定とはエミッシブプローブ測定と異なりプローブに電位を与えない。プラズマを電流源と見なしたとき、それと真空容器の間に抵抗をつなぐことで閉じた回路を作り流れる電流を測定する。これにより測定位置にどのくらいのプラズマが存在するか (電流源の大きさ) が分かる。 R_h は測定抵抗で、分岐点よりも下の位置で交わるように調整する必要がある。図 4.2.1(1)との交点が放出なし(cold)での浮遊電位、(3)との交点が放出ありでの浮遊電位で、 R_h を上手く与えないと空間電位からずれることがわかる。

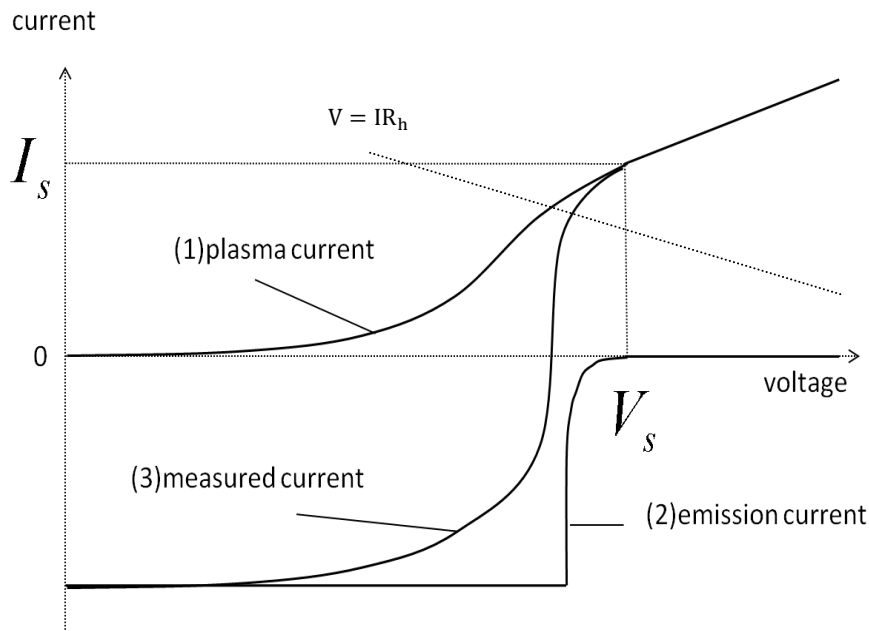


図 4.2.1 IV 特性 空間電位は(1)(2)の分岐点付近である。

4. 3 実験装置

4. 3. 1 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1

RT-1 は真空容器内のトーラス型の超電導コイル (以下、浮上コイルと称する) に電流を流してダイポール磁場を作り、プラズマを閉じ込める装置である。真空容器上部にある吊り上げコイルに、浮上コイルと同じ向きの電流を流したときに働く引力を利用して浮上コイルを浮かせることができる。このとき、浮上コイルと吊り上げコイルが作る磁場配位をセパトトリックス磁場配位と称する。RT-1 の詳細は APPENDIX C-1 に述べるが、図 4.3.1 の磁場配位が得られる。

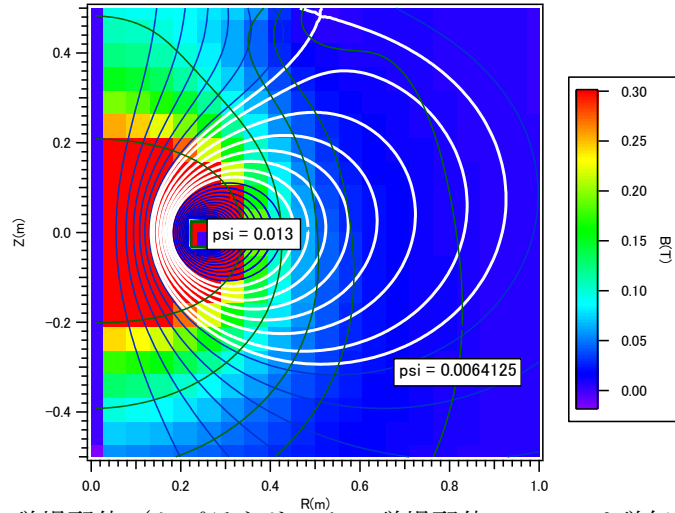


図 4.3.1 R T - 1 磁場配位 (セパトロリクス磁場配位で、psi は磁気面値を最内殻磁気面値と最外殻磁気面値を示す。また、カラーマップで表示する最大磁場強度値は 0.3(T)である)

4. 3. 2 電子銃

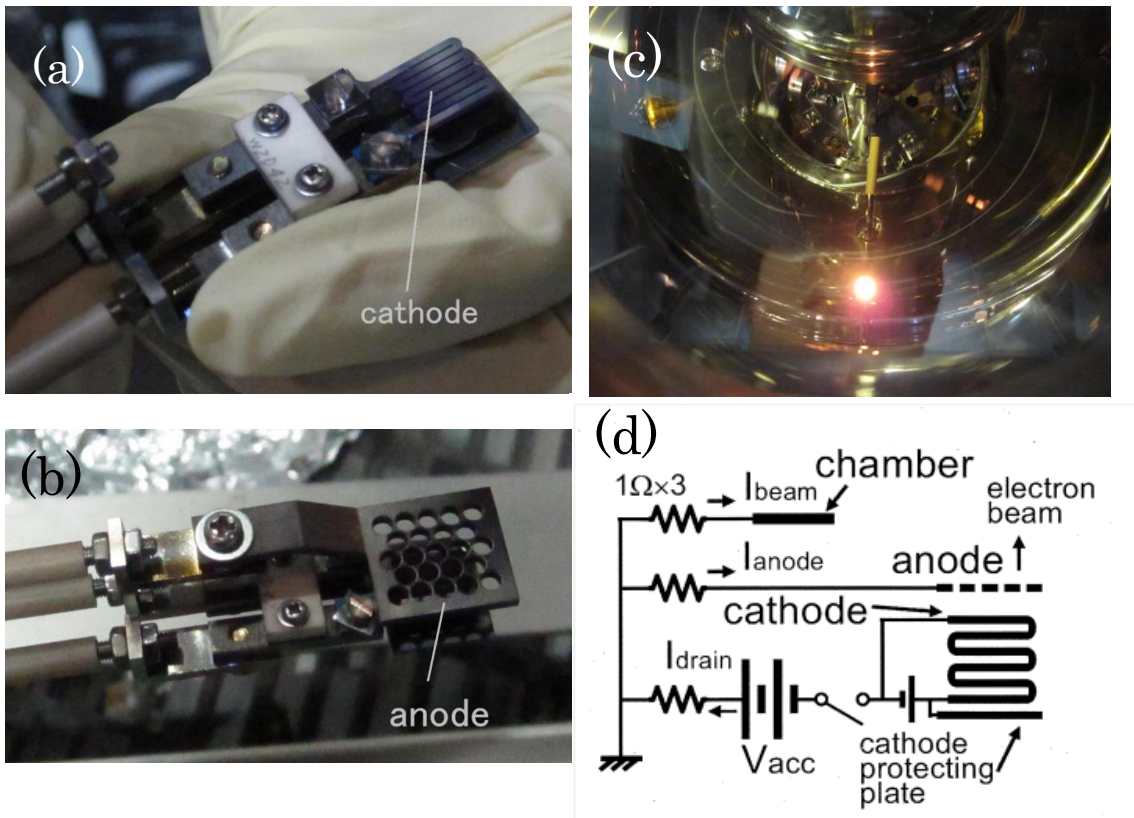


図 4.3.2 (a)組み立て後のカソード (b)組み立て後のアノード (c)カソード加熱中 (d)電子銃系の回路図。

図 4.3.2 に電子銃の構造を示す。(a)は LaB_6 カソード、(b)はカソードの上に Mo アノードを取り付けた写真である。カソードに対して負の高電圧をアノードにかけることで、加熱されたカソードから出る電子を加速させ、真空容器内に飛ばす。(c) に加熱された写真を示す。(d)に電子銃の

概要図を示す。カソードを加熱した後、スイッチを閉じるとアノードとの間に高電圧がかかる。電子が放出する向きは、中心を向いた R 軸に対して迎角 110° の向きである。放出後の電子の軌跡は 3 通りある。真空容器を介してカソードに戻ってくる場合、アノードを介する場合、ダイポール磁場に補足されて戻らない場合である。それらの割合は[10]に述べられている。加速電圧は $100\sim 1000(V)$ を利用し、カソード電流は $20\sim 30(A)$ である

4. 3. 3 測定プローブ

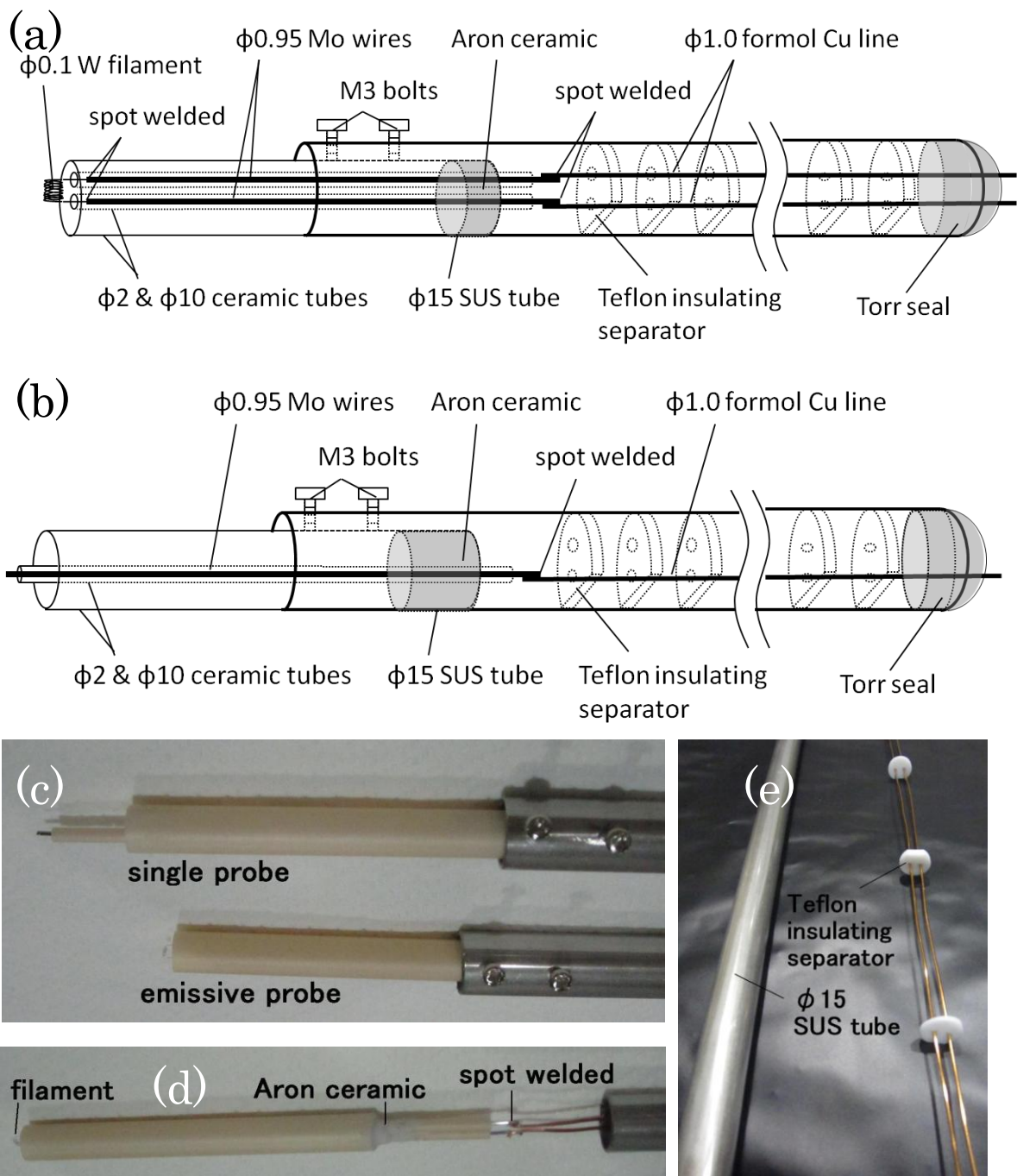


図 4.3.3 (a)エミッシブプローブ概要図 (b)シングルプローブ概要図 (c)組み立て後のプローブ (d)組み立て前のエミッシブプローブ各結合部 (e)テフロン製のセパレータ取り付け

図 4.3.3(a)にエミッシブプローブの概要図を示す。プローブ先端のフィラメントは、直径 0.1(mm)のタングステン線を直径 1(mm)程度のホルマル線周りに 10 回巻いて製作した。フィラメントにはおよそ 2(A)まで直流電流を流すことができる。フィラメントから先の線は、加熱時の高温に耐える直径 0.95(mm)のモリブデン線を用い、スポット溶接でつなぐ。その際、薄い帯状のアルミ板で両線の周りを覆った上からスポット溶接を行った。モリブデン線に沿った直径 2(mm)のセラミックチューブ 2 本は、アロンセラミックで直径 10(mm)のセラミックチューブ内で固定されている。それぞれの結合の様子を図 4.3.3(d)に示す。さらに直径 10mm のセラミックチューブと直径 15(mm)の SUS 管とは 2 本の M3 ボルトで上から押しセラミックチューブを SUS 管に押さえつけることで固定される。ボルトで締めすぎると簡単にセラミックにひびが入ってしまうために注意が必要である。モリブデン線とは直径 1(mm)のホルマル線とスポット溶接により結合される。ホルマル線は絶縁被膜で覆われるが、念のため SUS 管が接触しないように図 4.3.3(e)のようにテフロン製の区切り板を複数配置した。区切り板の一部に斜めに欠けたところを作る理由は、真空引きの際に空気がスムーズに流れようにするためである。プローブの後端はトルシールで固め、真空漏れを防ぐ。

図 4.3.3(b)に電子銃入射中の揺動を測定するシングルプローブの概念図を示す。フィラメントが無く、モリブデン線・ホルマル線が 1 本で構成される。

4. 3. 4 測定器配置図

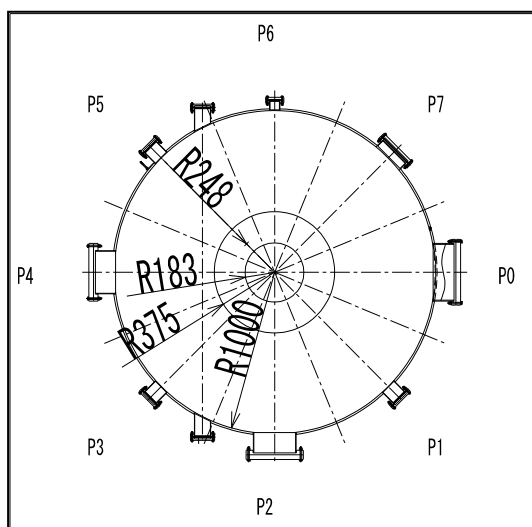


図 4.3.4 RT-1 のポート配置図 (上面図)

図 4.3.4 で示される各ポートに電子銃とプローブを以下のように配置し、実験内容も述べる。

- ・ P1 ポート：電子銃
- ・ P5 ポートと中心の線分上で R248 のポート：Z 方向の空間電位計測 (エミッシブプローブ)、浮遊電位計測 (シングルプローブ)、電流揺動計測 (シングルプローブ)
- ・ P5 ポート：R 方向の空間電位測定 (エミッシブプローブ)
- ・ P3 ポート：R 方向の浮遊電位測定 (シングルプローブ)、電流揺動計測 (シングルプローブ)

さらに、各測定場所の詳細を次の図 4.3.5 で示す。なお、点線の等高線は磁気面、波線は磁場強度を表す。

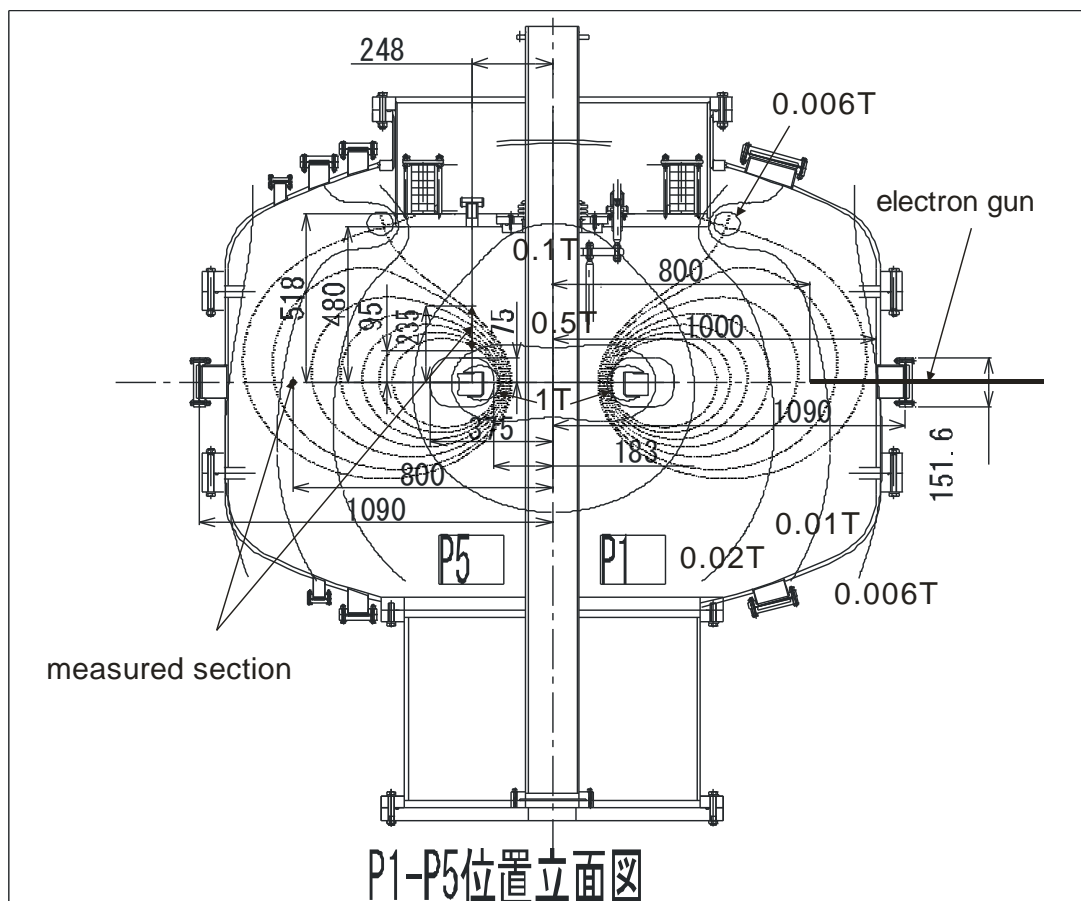


図 4.3.5 P1-P5 位置立面図

各測定位置は次の通りである。

- ・ Z 方向の浮遊電位計測・電流揺動計測（シングルプローブ）：Z=0.10~0.24(m) 図 4.3.5 に表示
- ・ Z 方向の空間電位計測（エミッシブプローブ）：Z=0.14, 0.185(m) 図 4.3.5 に表示
- ・ R 方向の浮遊電位測定・電流揺動計測（シングルプローブ）：R=0.55~0.9(m) 図 4.3.6 に表示
- ・ R 方向の空間電位測定（エミッシブプローブ）：R=0.8(m) 図 4.3.5 に表示

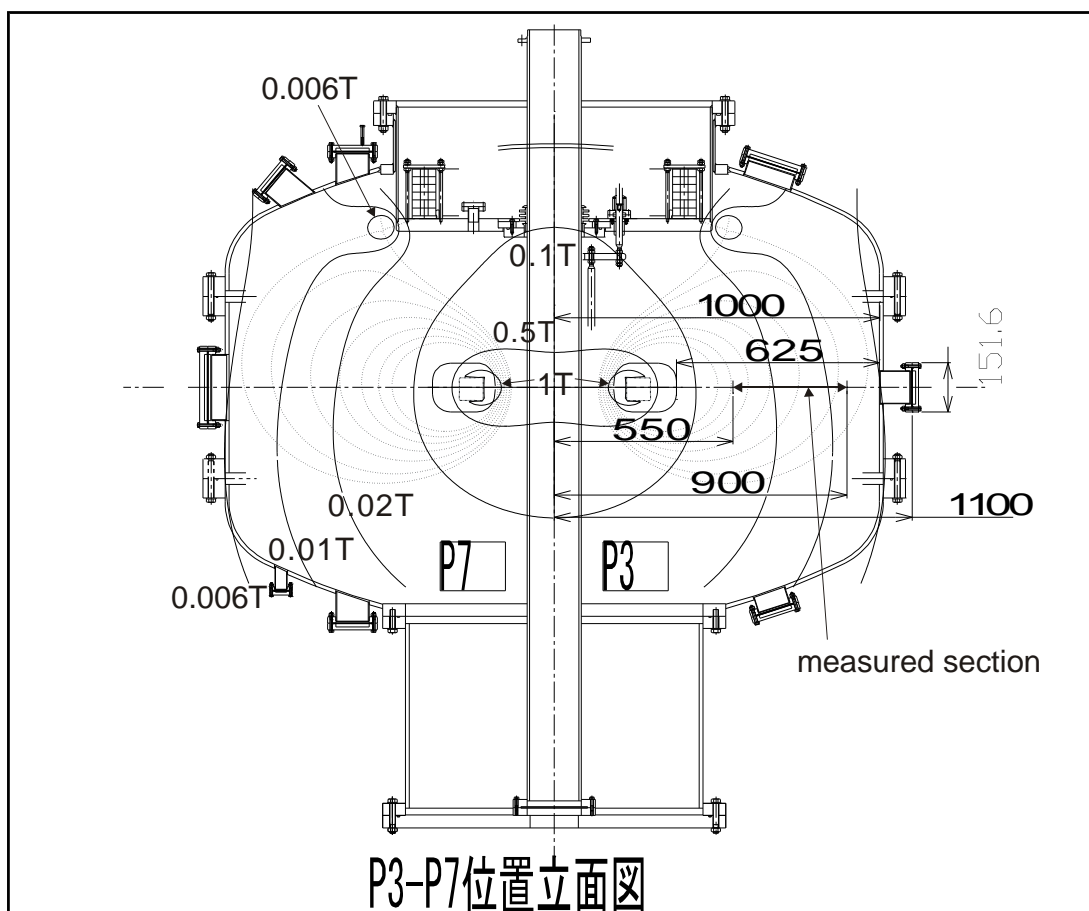


図 4.3.6 P3-P7 位置立面図

各測定位置は次の通りである。

- ・ Z 方向の浮遊電位計測・電流揺動計測（シングルプローブ）：Z=0.10~0.24(m) 図 4.3.5 に表示
- ・ Z 方向の空間電位計測（エミッシブプローブ）：Z=0.14、0.185(m) 図 4.3.5 に表示
- ・ R 方向の浮遊電位測定・電流揺動計測（シングルプローブ）：R=0.55~0.9(m) 図 4.3.6 に表示
- ・ R 方向の空間電位測定（エミッシブプローブ）：R=0.8(m) 図 4.3.5 に表示

4. 3. 5 測定用回路

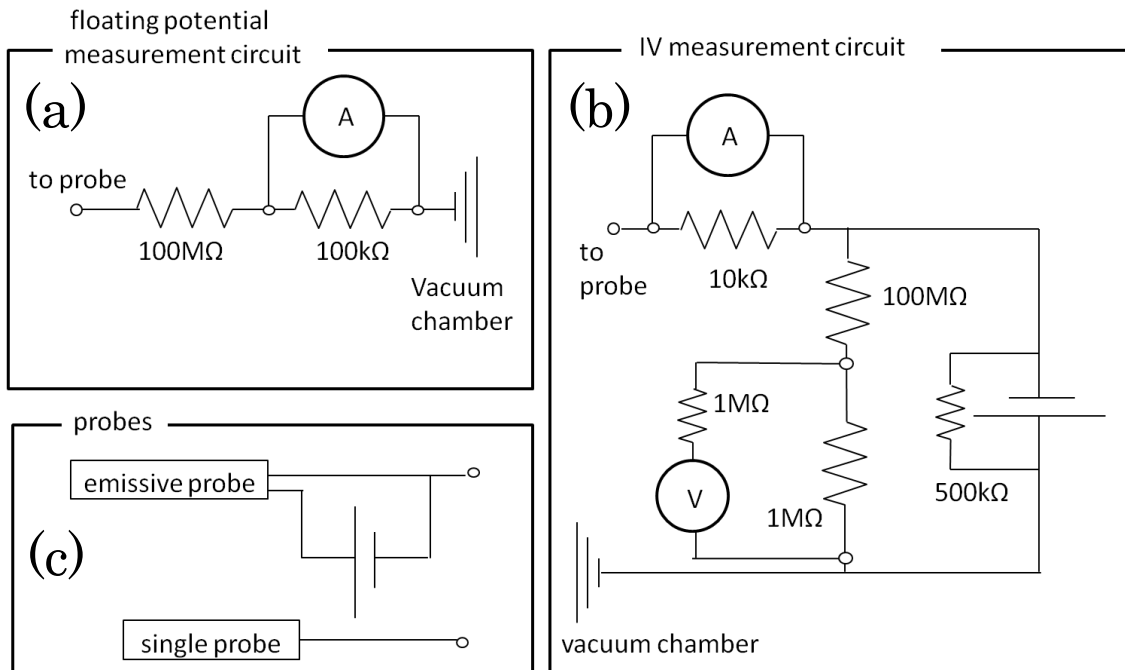


図 4.3.7 (a)浮遊電位測定回路 (b)IV 特性測定回路 (c)プローブ

図 4.3.7 に各測定回路を示す。以下、回路毎に写真を交え説明する。

(a) 浮遊電位測定回路

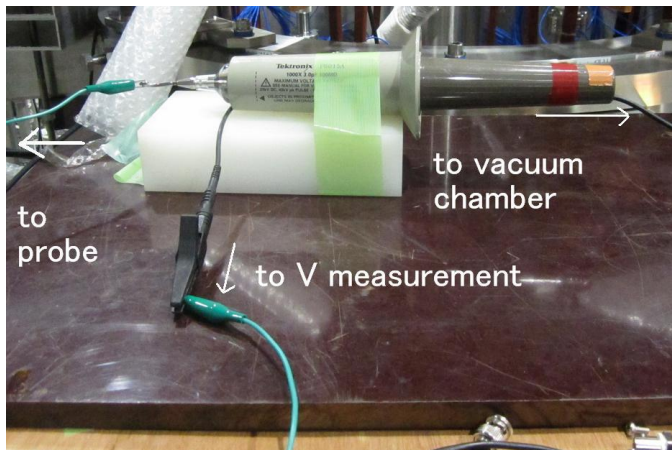


図 4.3.8 浮遊電位測定用の高インピーダンスプローブ

テクトロニクス社製の高インピーダンスプローブを用いる。電子銃の加速電圧が数百ボルトであるため、測定用プローブにつながる電圧もその程度である。よって図 4.3.8 の通り厚い絶縁版を下に敷く。グラウンドは真空容器につなぐ。

(b)IV 特性測定回路

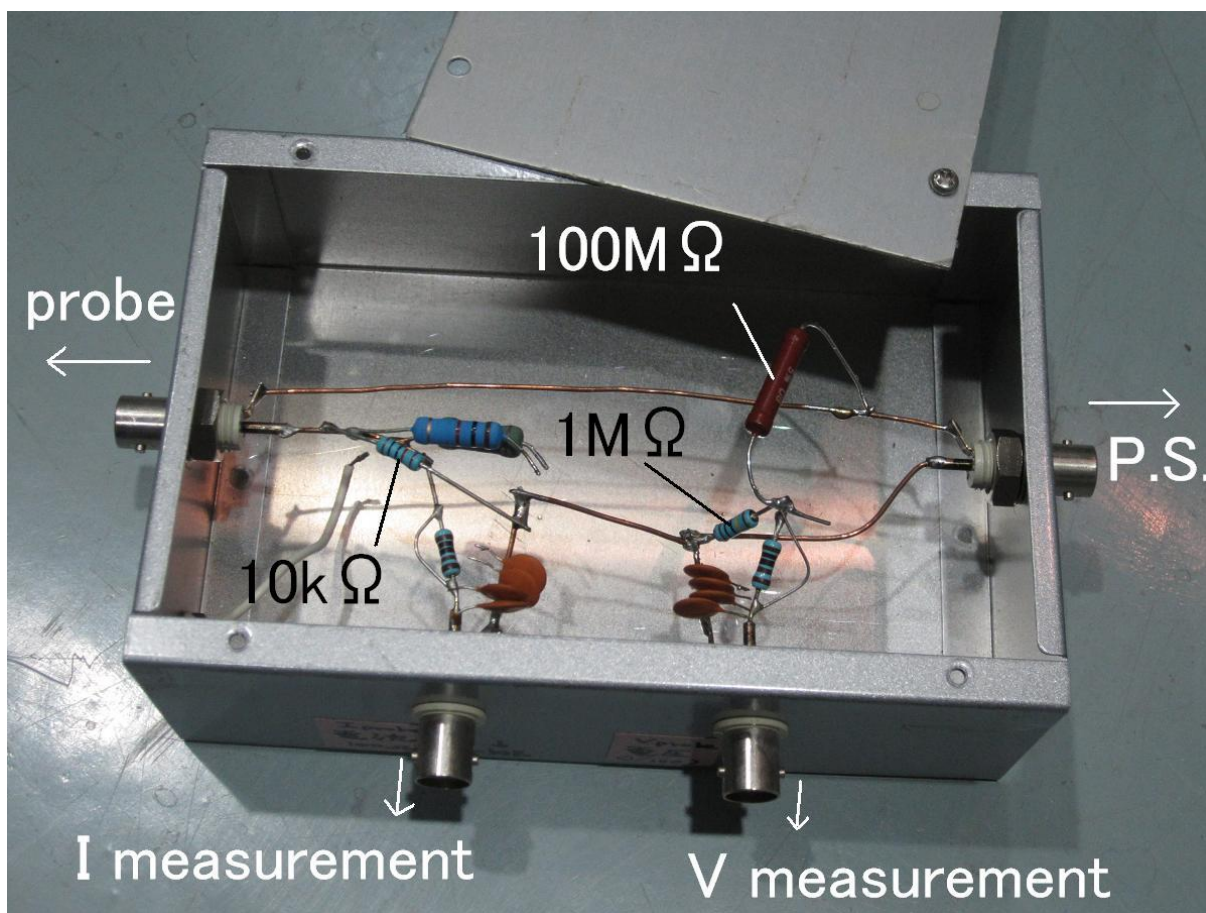


図 4.3.9 I V特性用の測定回路

IV 特性測定の場合は図 4.3.7(b)のように直流電圧源と電流測定用の抵抗を直列に、電圧測定用の抵抗を並列につなぐ。ただし、オシロスコープ内の $1\text{M}\Omega$ の抵抗のため分圧比は 200 分の 1 となる。図 4.3.9 でオシロスコープ側の端子の直前にコンデンサやその他の抵抗がみられるが、これはフィルタである。しかし、コンデンサ由来のノイズを多く広い測定に不向きなことからここで述べる実験では回路から断線させている。また、図 4.3.9 で電流測定用の抵抗を何種類かつないであるが、ここで用いるのは $10\text{k}\Omega$ のみである。また、直流電圧源は一方向の電圧しかかけられない。そこで電圧の向きが正と負の両方に対応させるため、図 4.3.10 のように 500Ω の抵抗を並列につなぎ電圧源に入る電流の向きを一定に保つ。

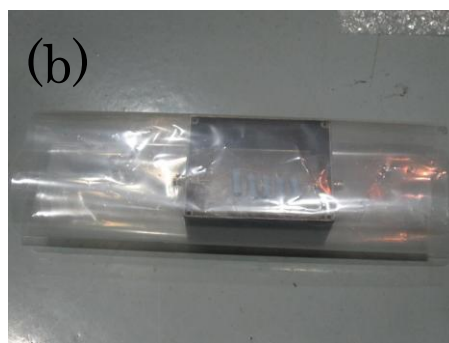
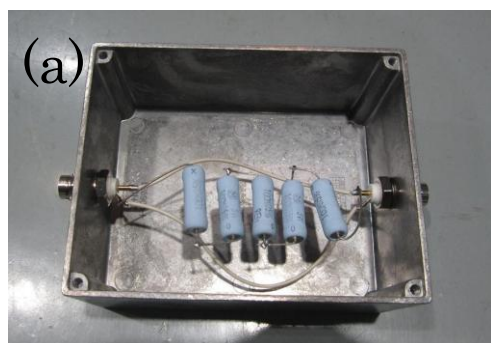


図 4.3.10 (a)電圧源に入る電流を 1 方向のみにするための補助回路(b)組み立て後

図 4.3.10(a)の端子の正負はどちらにとっても同じである。また、電圧源から数百ボルトの電圧がかかるために、図 4.3.10(b)のようにビニールでまいておく。

(c)プローブ回路

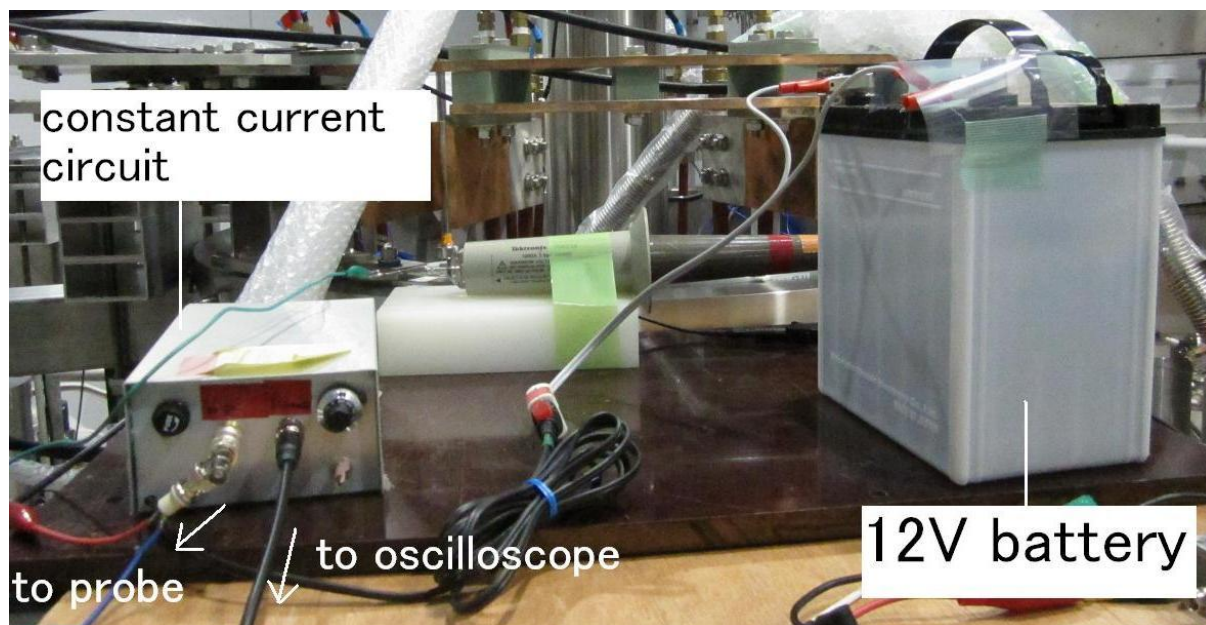


図 4.3.11 エミッシブプローブ用の電源

エミッシブプローブには、図 4.3.11 のように車で使われる 12V バッテリーと定電流回路を電源としてつなぐ。定電流回路は可変抵抗が付いており、そのつまみの値と電流値の対応を実験中に確認しなければならない。安全のため測定回路やプローブの電源は厚い絶縁版を下に敷く。図 4.3.7(c)のようにエミッシブプローブは、電流源を外せばシングルプローブとして用いることができる。同一のポート上でプローブを交換することは、RT-1 真空容器に挿入する前に差動排気を数時間行う必要があり時間を要するので、エミッシブプローブをシングルプローブとして用いることも行う。

(d)電流揺動測定回路

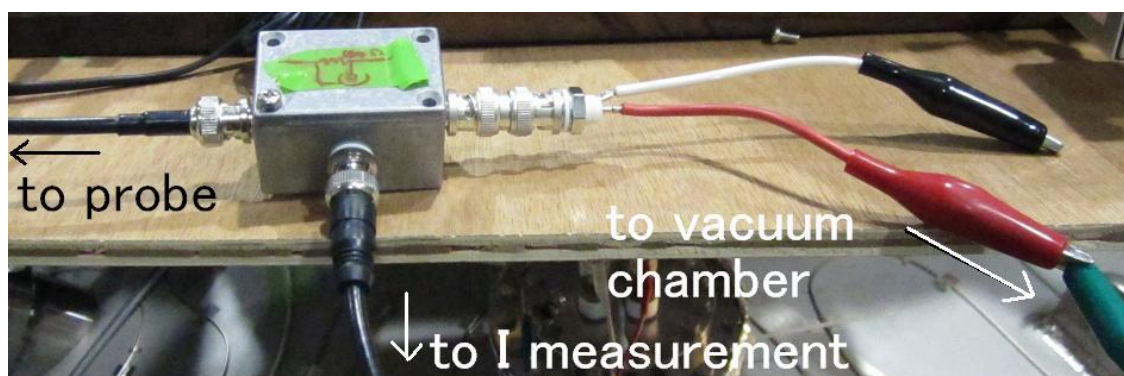


図 4.3.12 電流揺動測定用回路

測定にはシングルプローブを用いる。図 4.3.12 のように 100Ω の抵抗を用いて、電子銃入射中に流れるプラズマ電流の量を測定する。グラウンドは真空容器に取る。

(e) フィルタ



図 4.3.13 (a)浮遊・空間電位測定用のローパスフィルタ

$$\tau = 4.4 \times 10^{-6}(\text{s}) \quad (R = 1\text{K}\Omega, C = 0.0044\mu\Omega)$$

(b)電流揺動測定用の定パスフィルタ

$$\tau = 2.2 \times 10^{-7}(\text{s}) \quad (R = 220\Omega, C = 1.0\text{n}\Omega)$$

図 4.3.13 のように各測定の際にはローパスフィルタを付ける。吊り上げコイルに電流を流した際のノイズが最も大きく、 $\tau = 2.2 \times 10^{-7}(\text{s})$ を用いる。

4. 4 実験方法と結果

4. 4. 1 浮遊電位測定

浮遊電位測定は IV 特性を使って空間電位を計測する方法に比べて容易であるので、先に浮遊電位測定を行う。浮上コイルは支持された状態で、電子銃位置は $R=0.8(\text{m})$ 、カソード加熱電流は $25(\text{A})$ とする。Z 方向以外のポートは用いない。磁場配位をセパトリックス磁場配位とするときの吊り上げコイルに流す電流は $360(\text{A})$ である。測定用回路は図 4.3.7(a) である。

次にデータ解析方法を述べる。

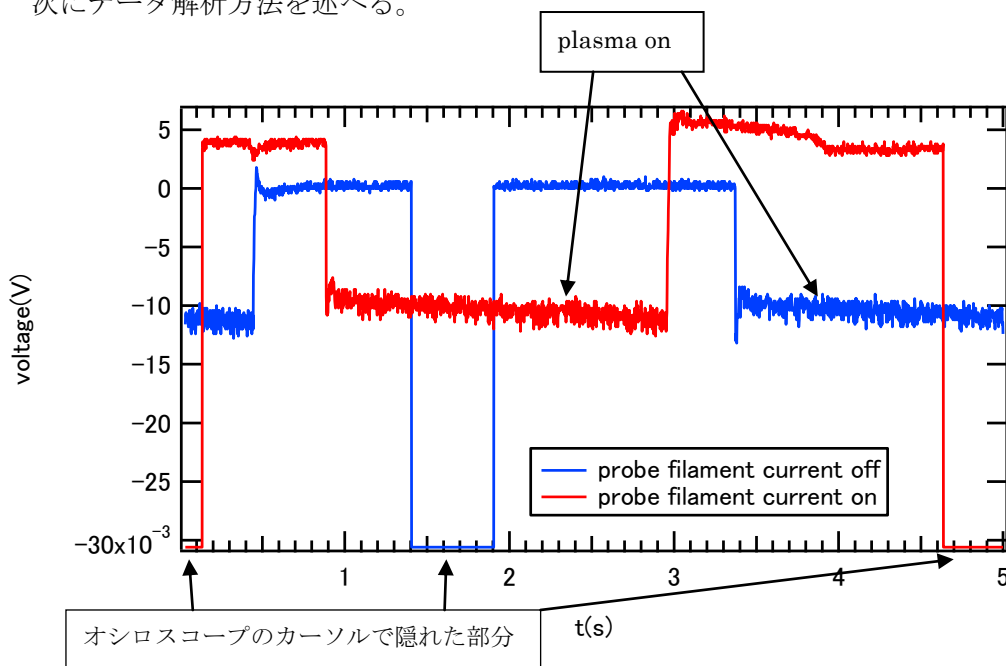


図 4.4.1 生データ解析方法(図 4.4.5 $Z=0.115(\text{m})$ の生データ)

図 4.4.1 でエミッシブプローブのフィラメントに電流を流す場合と流さない場合の生データを合わせて表示する。ともに電子銃から電子が放出されると（以下 plasma on と称する）、となると、電子がプローブに流れ込むために浮遊電位が下がる。以下、電位の基準は全て真空容器とし $0(\text{V})$ である。逆にカソード電流が $0(\text{A})$ で電子が放出されない状態（以下 plasma off と称する）では、プローブフィラメントに電流を流す場合と流さない場合で差がある。前者では、 $0(\text{mV})$ 付近を示すが、後者ではフィラメントから電子が十分放出するならば $0 \sim 10(\text{mV})$ 付近を示す（図 4.4.1 青線）。電圧の数値データは、時間一定の区間を平均した値である。オシロスコープで表示される電圧の値は分圧されたものなので、解析の際にプローブにかかる電圧に戻す。

4. 4. 1 ① 電子銃加速電圧依存性

Z 方向の位置を、ある程度浮遊電位の絶対値が大きい範囲（プラズマが存在する範囲）で適当に $Z=0.175(\text{m})$ と与えて、電子銃の加速電圧を変えて浮遊電位を測定する。このとき、セパトリックス磁場配位で、エミッシブプローブをシングルプローブとして用いるが、電源回路にはつないだままで電流を 0 （スイッチを切った状態）にする。

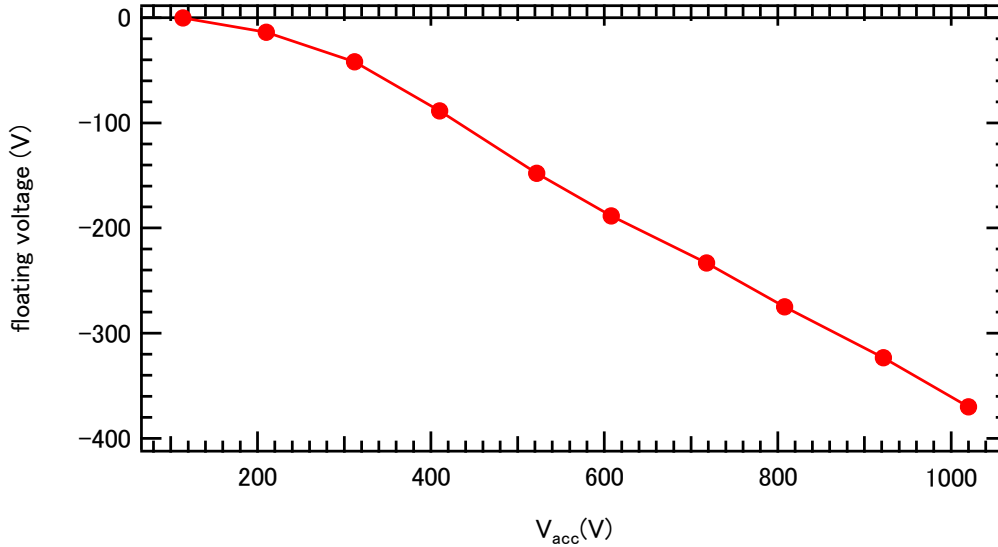


図 4.4.2 $Z=0.175(m)$ での加速電圧と浮遊電位

図 4.4.2 より加速電圧と浮遊電位はほぼ比例している。電子銃で電子に与える初期エネルギーと $Z=0.175(m)$ に達する電子の数（電流）が比例することを示している。ここではエラーバーの評価のための同じ条件で複数回の測定を行わない。

4. 4. 1 ② プローブフィラメント電流依存性

$Z=0.175(m)$ 、 $Z=0.135(m)$ で加速電圧 522(V)の条件でプローブフィラメント電流特性を調べる。このとき、セパトリックス磁場配位で、エミッシブプローブをシングルプローブとして用いる。 $Z=0.175(m)$ 、プローブフィラメント電流が 1.5(A)の際、4 回繰り返し測定しエラーバーを付ける。

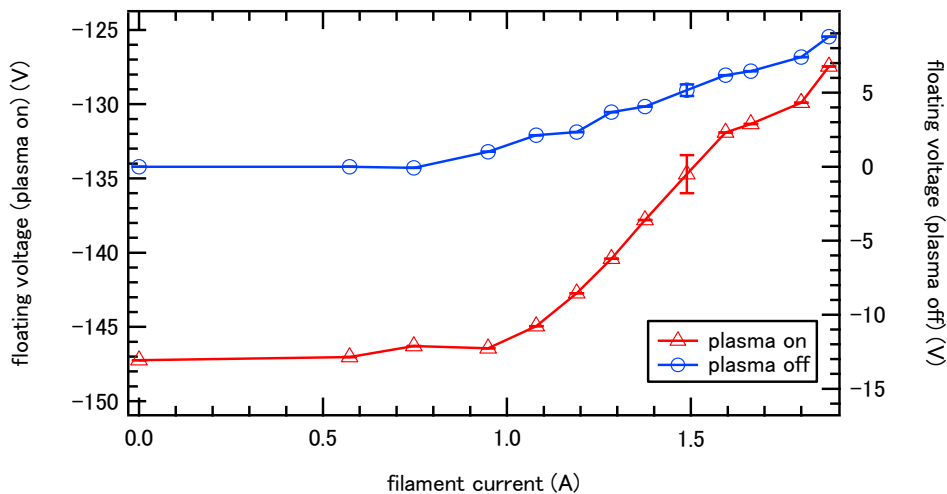


図 4.4.3 $Z=0.175(m)$ でのフィラメント電流と浮遊電位

plasma off のとき、電流が 1(A)程度を超えてから浮遊電位が 0(V)付近から大きくなり、エミッシブプローブのフィラメントから電子が放出することを示す。plasma on で、電流が 1(A)までの浮遊電位は-147(V)である。1(A)を超えると、フィラメントからの放出量が差し引かれ、on と off は

同じ割合で増加すると思われるが、on の増加量が多い。つまり、プローブに入る電子数が、フィラメントからの放出電子の影響を受け減少している。これはフィラメントからの放出電子が作る、プローブ側が負電位となあるシースによって、電子銃からの電子はシースポテンシャルよりも運動エネルギーの大きいものしかプローブに入らないことが予想される。また放出電子数とシースポテンシャルが増加すると、浮遊電位がほぼ同じ割合で減少する。これは電子のエネルギーは一定値付近だけを持つのでなく、ある幅を持っていることが分かる。もし一定値付近だけを持っていれば、そのエネルギーを超えるシースポテンシャルができると、電子銃からの電子が全くプローブに入らず、結果浮遊電位の増加がなまるからである。電子銃加速電圧 522 ボルトのエネルギーを与えても、電子のエネルギー分布は幅を持つことが分かる。

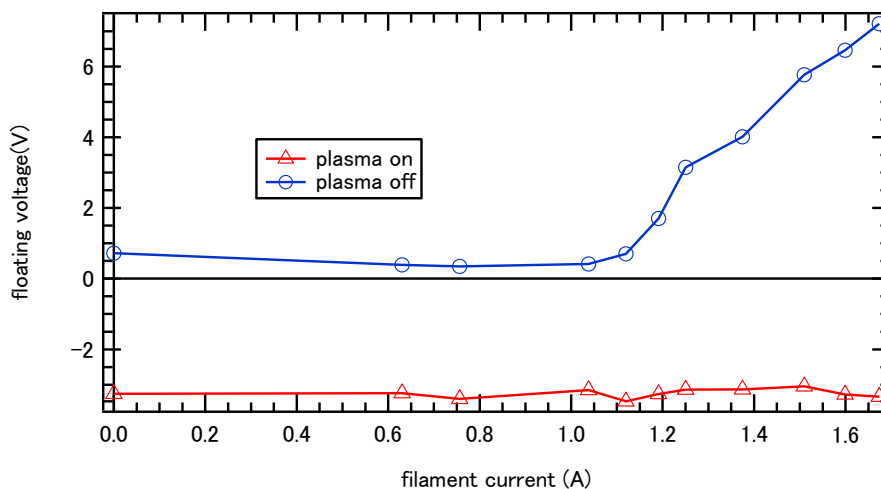


図 4.4.4 Z=0.135(m)でのプローブフィラメント電流と浮遊電位

plasma off では Z=0.175(m)と同じ割合で、電子が放出している。しかし、plasma on ではプローブフィラメント電流によらずに浮遊電位が一定で、絶対値が Z=0.175(m)に比べて小さく、プラズマが存在しないことを示す。

1(A)を超えても浮遊電位が一定となるには、電子が放出する際は、放出された量と同じ量の電子がプローブに与えられなければならない。つまり、電子銃からの電子から斥力を受け、プローブフィラメントから放出された電子が戻ってくるのではないか。

以上より、電子銃加速電圧を 522(V)、フィラメント電流を 1.5(A)とすれば、測定可能な絶対値を持った浮遊電位が得られ、電子の放出を達成できる。

4. 4. 1 ③ Z 方向依存性

加速電圧 522(V)、プローブフィラメント電流を 0(A)と 1.5(A)の場合で Z 方向の分布を計測する。このとき、セパトリックス磁場配位で、エミッシブプローブをシングルプローブとして用いる。1.5(A)の場合だけ R=0.175(m)のデータにエラーバーを付ける。

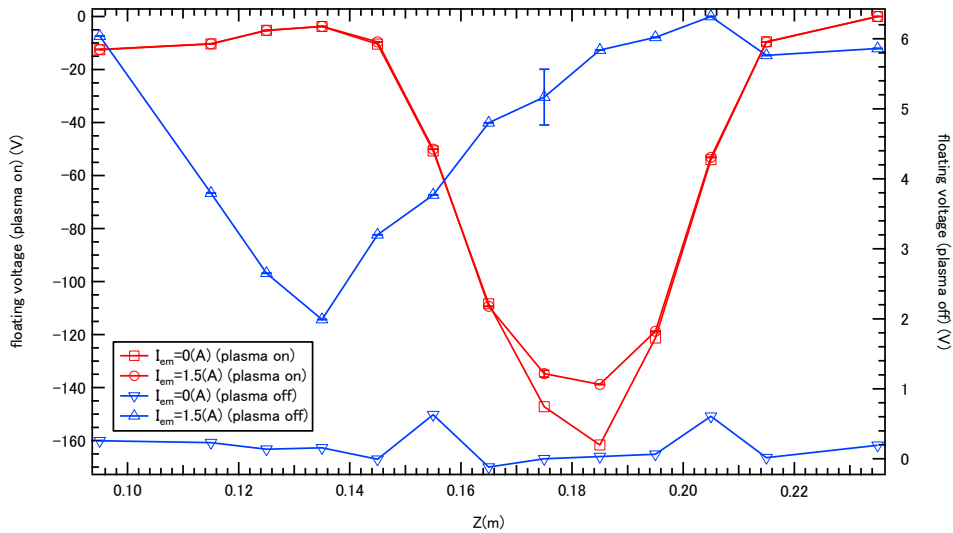


図 4.4.5 Z 方向と浮遊電位

plasma on では $Z=0.145(\text{m})\sim 0.205(\text{m})$ で浮遊電位が測定される。次の図 4.4.6 より、電子銃の位置にある磁気面は、プローブのある $R=0.25(\text{m})$ の Z 軸上では $Z=0.195(\text{m})$ である。よって電子はおよそ電子銃よりも少し内側の磁気面を通過してプローブに至る。それ以外では到達する電子は少ない。また、 $Z=0.165\sim 0.195(\text{m})$ ではフィラメントからの電子放出のシースのため、浮遊電位が放出無しの場合よりも小さくなるが、この現象は 4.4.1② で述べた通りである。plasma off で、プラズマフィラメント電流が $0(\text{A})$ では電子は放出されないが、 $1.5(\text{A})$ では放出される。また、位置の依存性が見られ、 $Z=0.135(\text{m})$ では放出されにくくなっている。しかし、図 4.4.5 を見ると同じ条件なのにこちらの方が浮遊電位が低い。 $I=1.5(\text{A})$ は一定であることは確認し、同じプローブを用いており、他の考えられる原因は位置の間違い・セパトリックス磁場配位ではないが挙げられる。また、原理より電子放出がある場合の浮遊電位の方が空間電位に近いので図 4.4.5 では電子放出がある場合を空間電位分布と近似する。

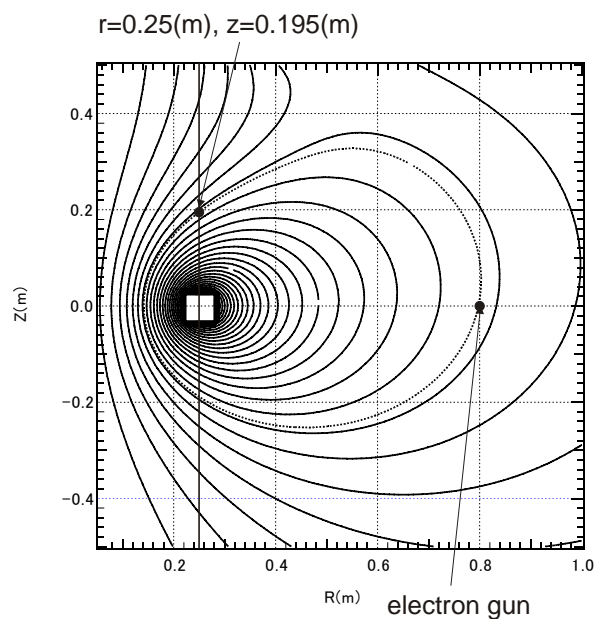


図 4.4.6 電子銃の位置の磁気面 (点線で示す)

4. 4. 1 ④ R 方向依存性

電子銃位置 $R=0.8(\text{m})$ 、加速電圧 $522(\text{V})$ 、セパトリックス磁場配位、P3 ポートでシングルプローブを用いる。他のポートにプローブはない。 $R=0.8(\text{m})$ にて同条件で3回繰り返し測定をする。エラーバーはマーカーの中に収まり、精度のよい測定といえる。

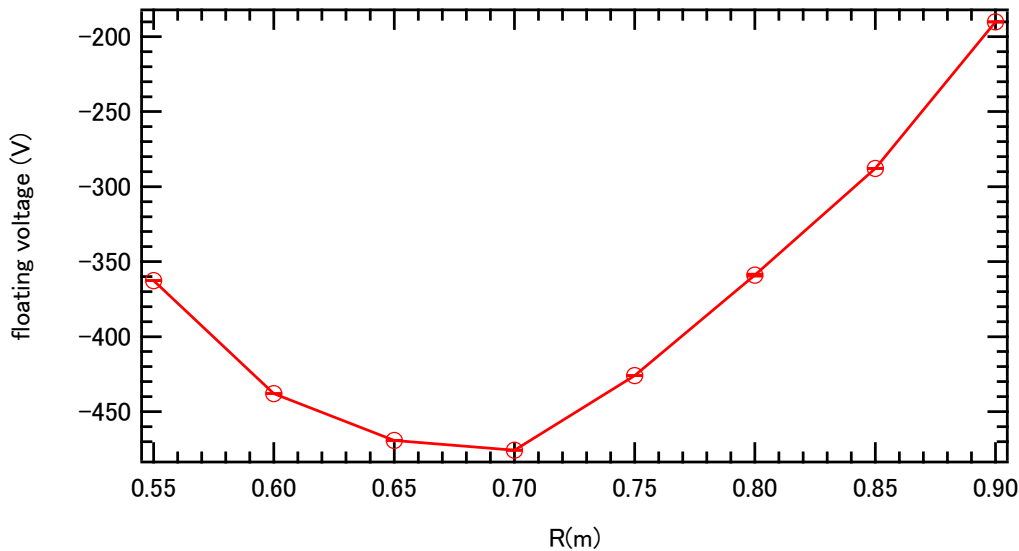


図 4.4.7 R 方向と浮遊電位

Z 方向と比べて浮遊電位の絶対値が大きい。後述するが、 $R=0.55(\text{m}), Z=0(\text{m})$ は $R=0.25(\text{m}), Z=0.14(\text{m})$ と同磁気面である。後者の点の浮遊電位は図 4.4.5 より $-10(\text{V})$ 程度であるが、前者では $-350(\text{V})$ である。これは、赤道面上であれば浮上コイルに近い磁気面まで電子が届くことを示す。

4. 4. 2 IV 特性

電子銃位置 $R=0.8(\text{m})$ 、加速電圧 $530(\text{V})$ 、カソード電流 $26(\text{A})$ 、セパトリックス磁場配位で行う。測定回路は図 4.3.7(b)である。測定方法は、まずプローブフィラメント電流を流さずに、プローブに DC 電圧を真空容器に対して $+200\text{V}$ から -800V まで段階的に変化させる、かけた電圧ごとに図 4.4.8 のようなデータを得、プラズマ電流を計測し、IV グラフ上にプロットする。この結果は原理で述べた cold プローブ特性である。その後プローブフィラメント電流 $1.5(\text{A})$ を流して、同様に DC 電圧をかけ電流を計測する。この結果は原理で述べた hot プローブ特性である。空間電位は、cold と hot プローブの特性が分岐する所を読む。また、測定回路の図 4.3.7(b)の電源を短絡すれば浮遊電位の測定も可能である。測定個所は時間の関係上 4 点のみである。

次にデータ解析方法を述べる。IV 測定の生データを以下に示す。このデータを用いて、プローブ電圧は分圧比 200 倍をし、プローブ電流は抵抗値 $10(\text{k}\Omega)$ で割って求める。

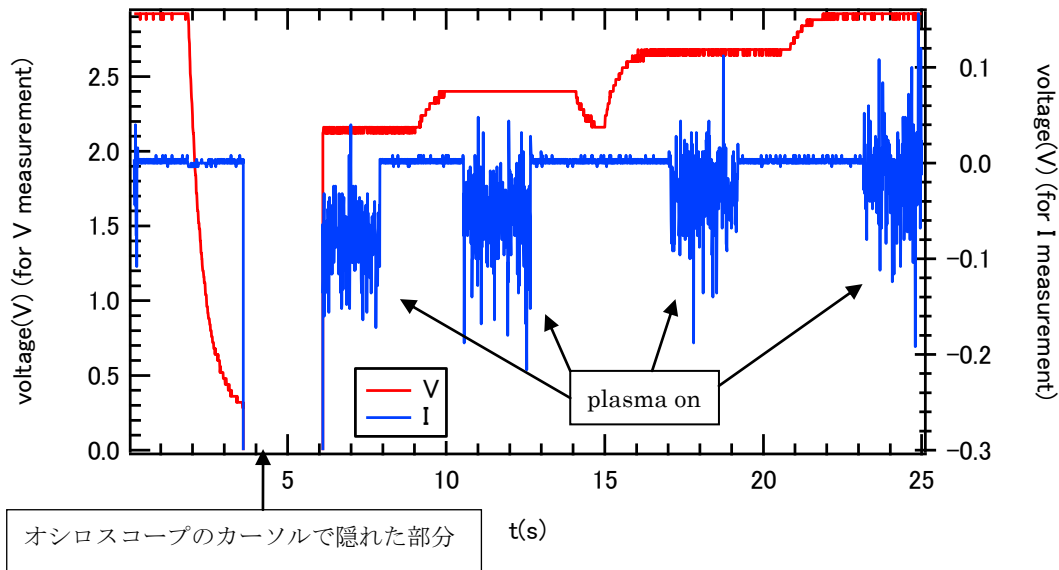


図 4.4.8 図 4.4.12 の放出なしの生データ

図 4.4.12 の放出なしのデータのうち、電圧-400(V)、-450(V)、-500(V)、-550(V)をかけた時の電圧（赤線）と電流（青線）を表す。電流値は各電圧ごとの plasma on の値の平均値を出して求める。放出が無いので plasma off では電流値はほぼ 0 となる。

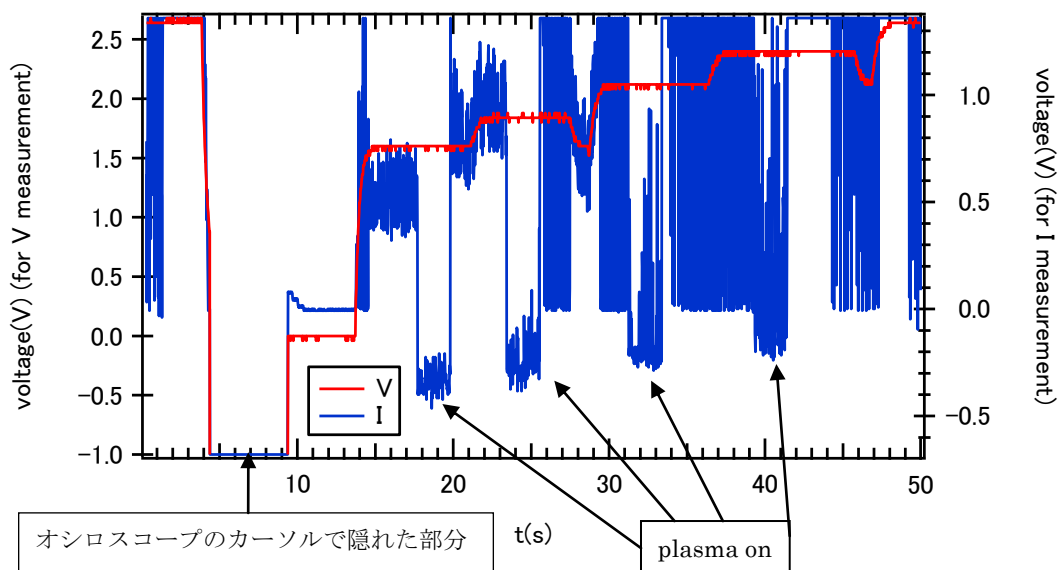


図 4.4.9 放出ありの生データ

図 4.4.12 の放出ありのデータのうち、電圧-300(V)、-350(V)、-400(V)、-450(V)をかけた時の電圧（赤線）と電流（青線）を表す。plasma off では全ての電圧で放出が確認できる。これはプラズマがないために空間電位が 0 となるために、電子が放出されやすいためである。-300(V)、-350(V)ではまだ空間電位の方がプローブ電位より低いために電子が放出されないが、-400(V)と-450(V)では plasma on になると電流値が正へ振りきれれる。この時、プローブ電位が空間電位を超

え、放出が一気に起こることを示す。また、原理で述べた IV 特性上の cold probe と hot probe が分岐するところに相当する。

4. 4. 2 ① コイル支持状態

R=0.25(m)、Z=0.185(m)で行い、他のポートにプローブはない。

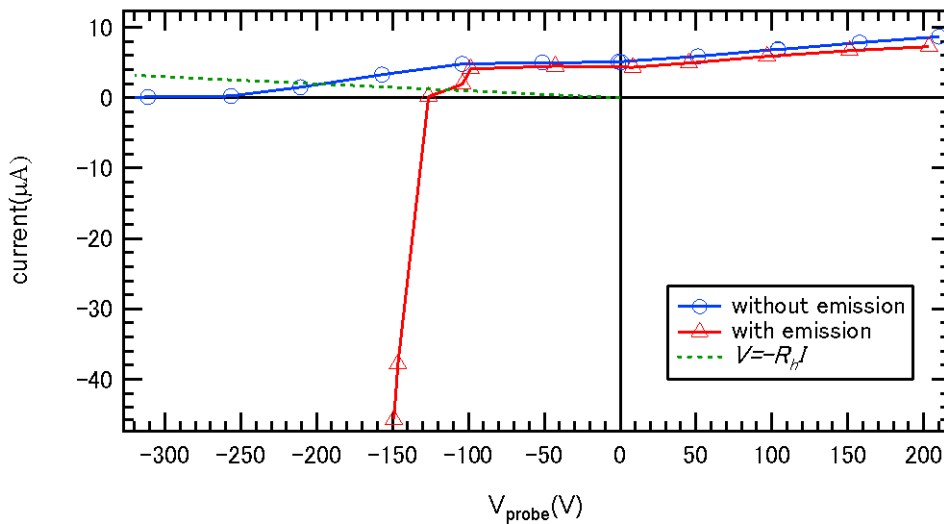


図 4.4.10 Z=0.185(m)での IV 特性
空間ポテンシャルは-100(V)と推定される。

図 4.3.7 回路(a)で測定した浮遊電位は-145(V) (放出あり)、-180(V) (放出なし) となり、図 4.4.10 で R_h を 100M Ω とした時の直線との各交点に近い値である。図 4.4.5 よりこの位置での浮遊電位は、放出ありの場合は-138(V)、なしの場合は-161(V)で-180(V)よりも低くなる。これより、空間ポテンシャルは浮遊電位の値より低く出ることが分かり、原理で述べた通りである。

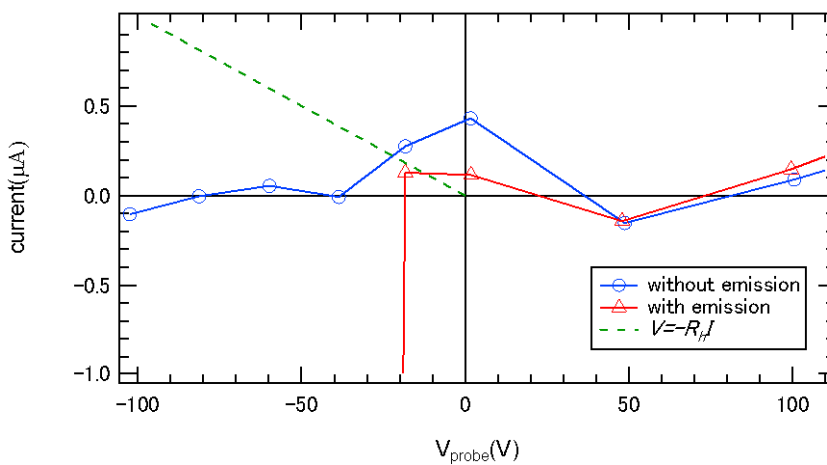


図 4.4.11 Z=0.095(m)での IV 特性
空間ポテンシャルは-15(V)と推定される。

図 4.3.7 回路(a)で測定した浮遊電位は-9.0(V) (放出あり)、浮遊電位は-9.1(V) (放出なし)である。図 4.4.11 で R_h を $100M\Omega$ とした時の直線との各交点よりも低い側に観測される。ただし、放出ありの場合のデータは、plasma off での浮遊電位が 0.5(V)となり、電子が放出しているか疑わしく信頼性は低い。図 4.4.5 より回路(a)で測定した浮遊電位は放出ありの場合が-12.4(V)、なしの場合が-12.6(V)で、こちらの方が空間電位に近い。ただし、この位置では電子銃からの電子が少なく、一致した測定を得ることが難しいと予想される。以上より、空間電位は図 4.4.5 の浮遊電位分布で近似できるが、原理で述べたように IV 特性で測定する方が空間電位の精度は高い。

4. 4. 2 ② コイル浮上状態

・ $R=0.8(m)$ 、 $Z=0(m)$ での測定

この位置での測定は過去に行われているが、今回は $R=0.25(m)$ 、 $Z=0.185(m)$ にエミッシブプローブが入っており、以前と異なる条件であるが結果を比較する。

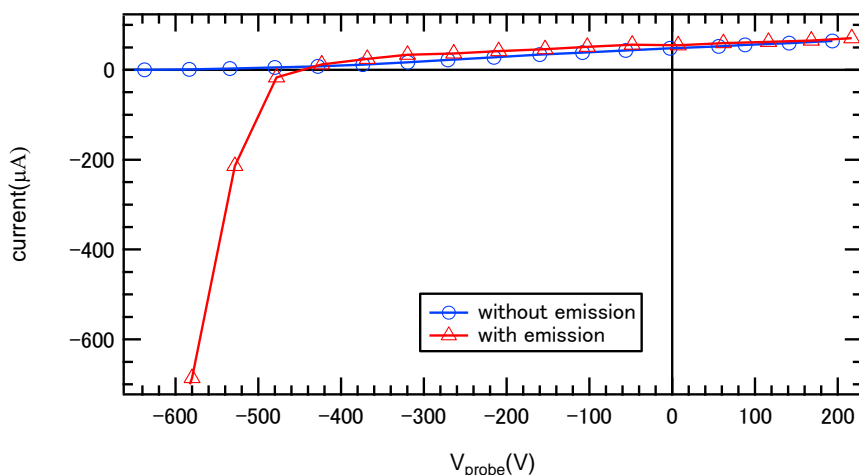


図 4.4.12 $R=0.8(m)$ 、 $Z=0(m)$ での IV 特性 空間電位は-440(V)と推定される

同じ条件で行われた実験のデータ図 4.4.13 の $R=0.8(m)$ でのエラーバー内に収まっている。条件の違いはあるが、 R 方向の空間電位分布は図 4.4.13 と近似し、図 4.4.13 の実験を再現できた。なお、浮遊電位は測定せず。

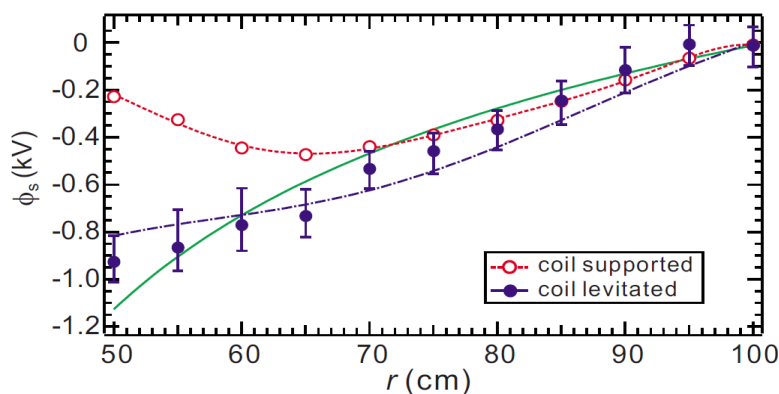


図 4.4.13 [10]の R 方向の空間電位分布 本研究では $R=80(cm)$ で同じ条件で測定しエラーバーに収まった。よって R 方向の空間電位分布はこのデータを用いる。

・ R=0.25(m)、Z=0.185(m)での測定

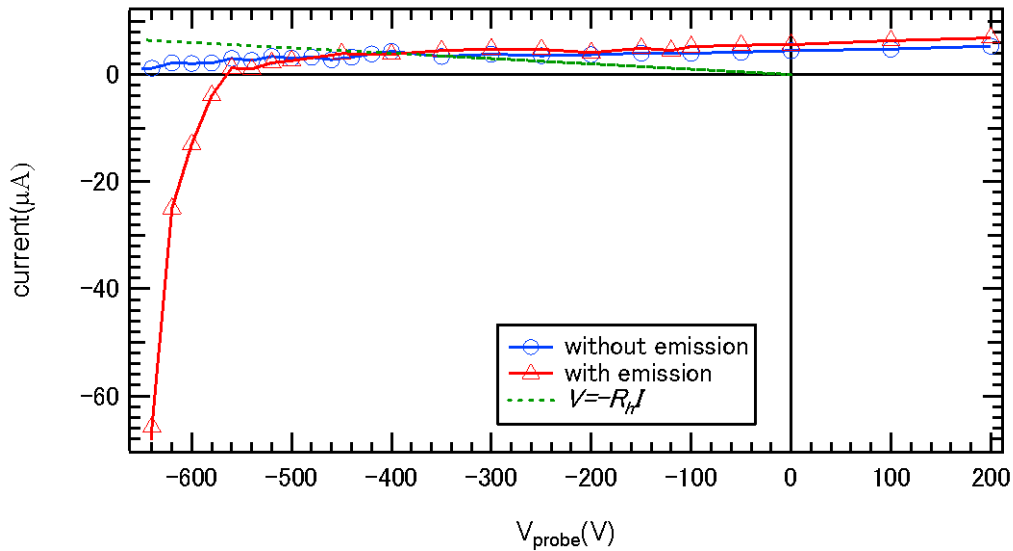


図 4.4.14 R=0.25(m)、Z=0.185(m)での測定

空間電位は-560(V)と推定され、コイル支持状態に比べて低くなる。

図 4.3.7 回路(b)で測定した浮遊電位は-333(V)(放出あり)、-348(V) (放出なし)。また、放出ありの場合、plasma offの浮遊電位は5.7(V)と図 4.4.4 と図 4.4.3 の plasma off で I=1.5(A)の浮遊電位とほぼ等しく、正しく電子が放出されていると分かる。このように空間電位が低いときは浮遊電位との差が大きくなり、この測定方法の有効性が示される。

・ R=0.25(m)、Z=0.185(m)での測定

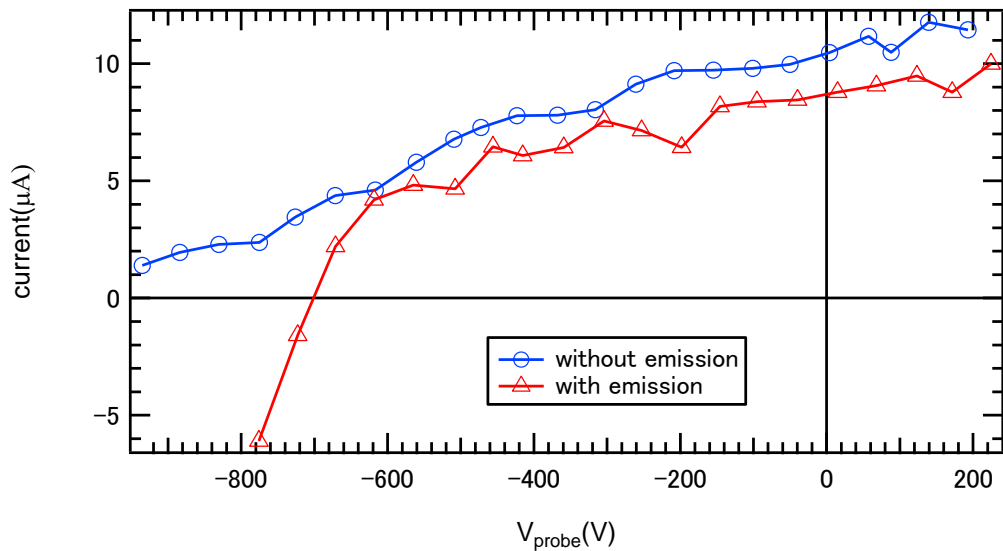


図 4.4.15 R=0.25(m)、Z=0.185(m)での測定

空間ポテンシャルは-620(V)と推定される。

Z=0.14(m)での磁気面は図 4.4.16 より赤道面上では $r=0.555(m)$ にある。図 4.4.13 より空間電位は -700~-900(V)であるから、磁気面上での空間電位の値が一致せず、磁気面に対する空間電位の勾配は赤道面上の方が大きいことが示される。浮遊電位は測定せず。ここで 3.2 節での検討事項であったケミカルポテンシャル γ の値を検討する。密度の分布が、コイルすぐ外側で割合が大きくなる $\gamma=10^8$ が適切である。なお計算で求めた絶対値としての電位の比較はできない。境界条件で与えた浮上コイルの表面電位が正確に分かっておらず、図 4.4.13 から予想された値であるため。

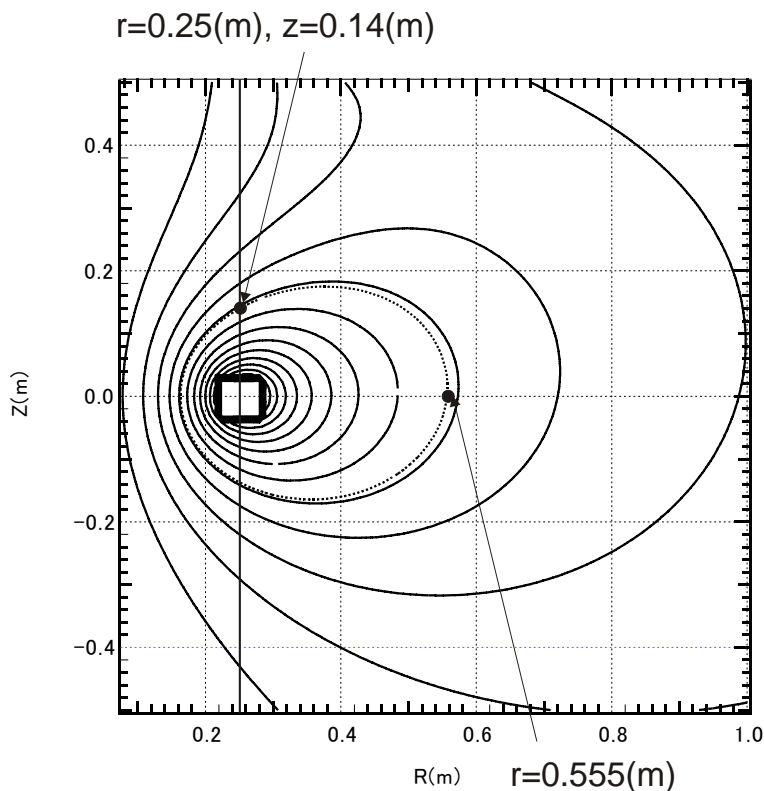


図 4.4.16 R=0.25(m), Z=0.14(m)の磁気面 (点線で示す)

この磁気面上でのポテンシャルが一定でないことが示された。測定点は $R=0.25(m)$ 、 $Z=0.14(m)$ で図 4.4.13 より $R=0.555(m)$ 、 $Z=0(m)$ の値を読み取った。前者は-620(V)、後者は-700~-900(V)である。

4. 4. 3 電子銃入射中の揺動計測

電子銃加速電圧 522(V)、セパトリティクス磁場配位、コイル支持状態で行う。測定回路は図 4.3.12 である。電子銃位置依存性を測定する以外は $R=0.8(m)$ の位置である。

次にデータ解析方法を述べる。図 4.4.17 に得られた電流揺動の時間・電圧の生データを示す。plasma on と plasma off の区間が分からず、ノイズのような挙動である。

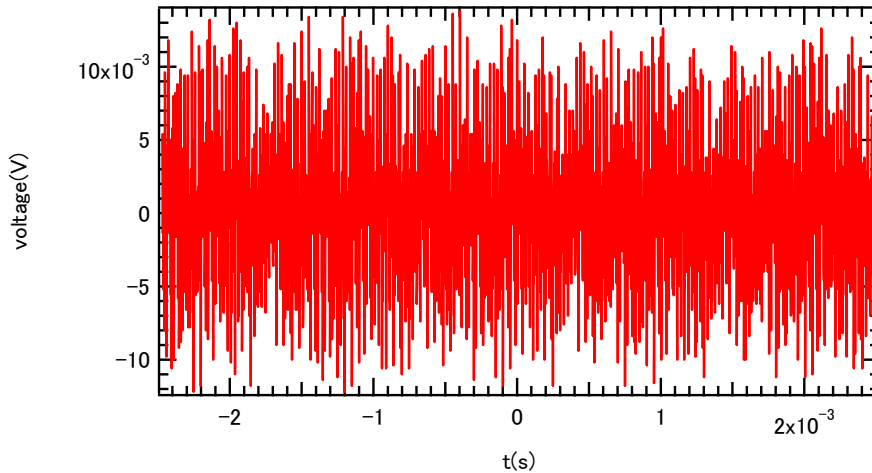


図 4.4.17 電流揺動の生データ (図 4.4.21 の $Z=0.155(m)$ の生データ)

これをフーリエ変換し周波数と強度の 2 乗で表すと、図 4.4.18 となる。フーリエ変換の際に、時間のスケールを保ったまま行う (データ間の間隔が次元のない 1 にならず、オシロスコープのデータサンプリング時間間隔にする)。ただし、吊り上げコイルに電流を流すことで測定に影響する程のノイズが発生するので、電流揺動の測定前にノイズの測定を行いノイズ単体のピーク周波数は除外する。

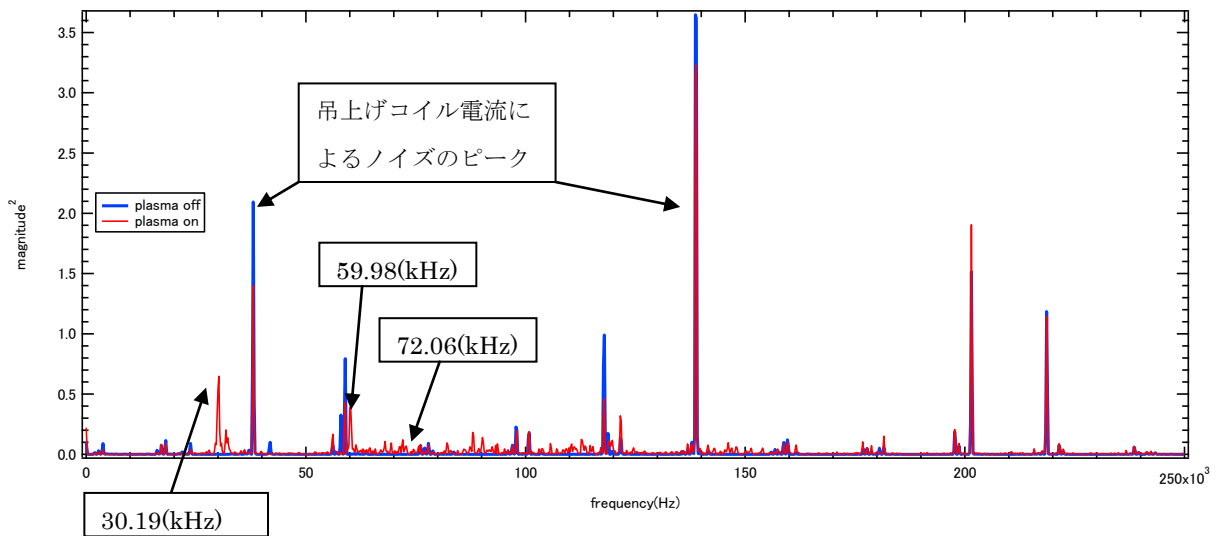


図 4.4.18 周波数スペクトル生データ (図 4.4.21 の $Z=0.155(m)$ の生データ)

図 4.4.18 の青線は電子銃を入射しない時で、吊り上げコイルの電流によるノイズである。電子銃入射中のプラズマの電流揺動の周波数は、赤線だけで構成されるピークを選ぶ。ただし図 4.4.18 の 30.19(kHz)付近のようにピークが近接して2つある場合は絶対値の値が大きいほうの周波数を選ぶ。また図 4.4.18 の 72.06(kHz)のように絶対値の値は小さいが、他の Z の値でのスペクトル図では大きいピークである周波数帯は、ここでもあえて読み取ることにする。

このようにして、異なる周波数のピークがいくつか得られるので、その周波数の値をプロットする。

4. 4. 3 ① 電子銃加速電圧依存性

加速電圧を 206(V)から 1020(V)まで変化させる。エミッシブプローブをシングルプローブとして用いる。プローブ位置は $Z=0.175(m)$ で、他のポートにプローブはない。低電圧側、高電圧側ではきれいなスペクトルが得られず、ピークの判別が難しい場合はプロットしない（以下同様である）。

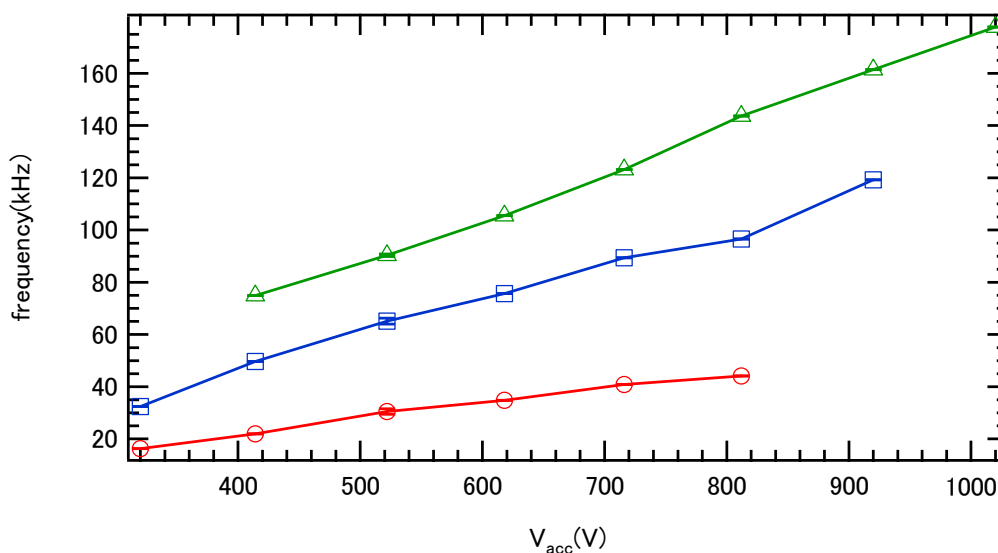


図 4.4.19 加速電圧依存性

図 4.4.19 より基調波と高調波が観測され、ほぼ加速電圧に比例する。同条件での 3 つの測定値を用い加速電圧 522(V)の点にエラーバーを付ける。加速電圧が 800(V)を超えると高調波のピークが目立つ。400(V)以下では高調波のピークが弱く測定できず、さらに 206(V)ではピークが見られない。

図 4.4.2 から同じ加速電圧を読むと、浮遊電位の絶対値が小さいことからプラズマが存在しないことが原因である。加速電圧が 800(V)を超えると、プラズマの量が多く、互いの相互作用により運動に周波数をもつことができなくなると考えられる。

4. 4. 3 ② 電子銃位置依存性

電子銃の位置を変化させる。エミッシブプローブをシングルプローブとして用いる。プローブ位置は $Z=0.175(\text{m})$ で、他のポートにプローブはない。

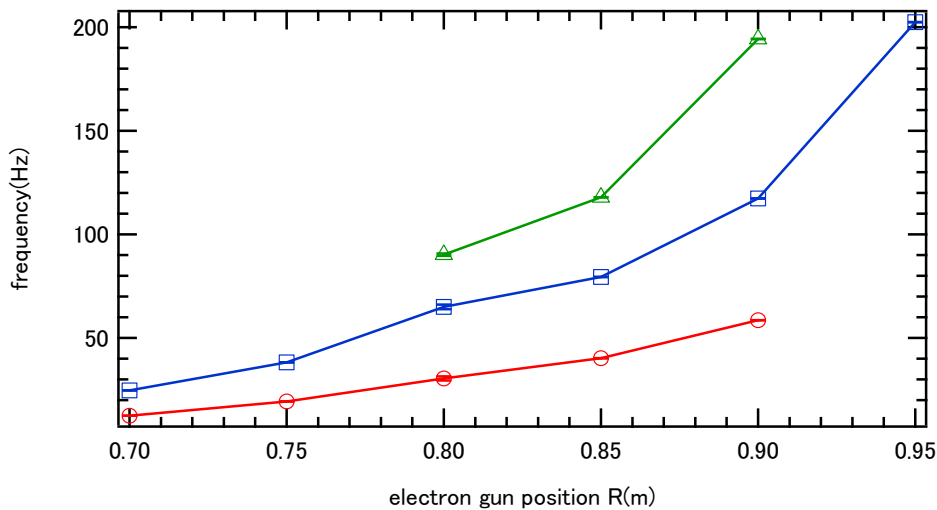


図 4.4.20 電子銃位置依存性

図 4.4.20 より基調波と高調波が観測される。同条件での 3 つの測定値を用い $R=0.8(\text{m})$ の点にエラーバーを付ける。 $R=0.9(\text{m})$ を超えると高調波のピークが強くなり周波数が急増する。 $R=0.8(\text{m})$ より内側では高調波のピークが弱く測定できない。これはプローブの位置の磁気面(赤道面上ではおよそ $R=0.9(\text{m})$) よりも内側の磁気面にプラズマが多く存在するためである。

4. 4. 3 ③ Z 方向

Z 方向依存性を測定する。エミッシブプローブをシングルプローブとして用いる。他のポートにプローブはない。

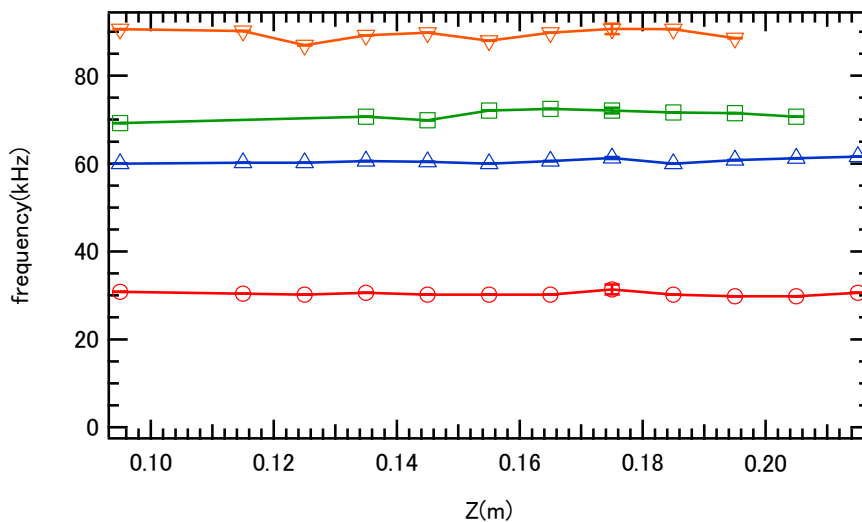


図 4.4.21 ピークを持つ周波数と Z

30,60,90kHz は 30kHz の高調波であるから、電流揺動は 30kHz と 70kHz と Z 方向に依存せず一定である。

4. 4. 3 ④ R 方向

P3 ポートでシングルプローブを用いる。他のポートにプローブはない。R=0.8(m)にて 3 回繰り返し同条件で測定し、エラーバーを付ける。マーカーの中に収まり精度のよい測定である。図 4.4.22 の通り、吊り上げコイル電流のノイズ単体をフーリエ変換してもピークは見られず、吊り上げコイル電流のノイズ影響は赤道面に到達しない。

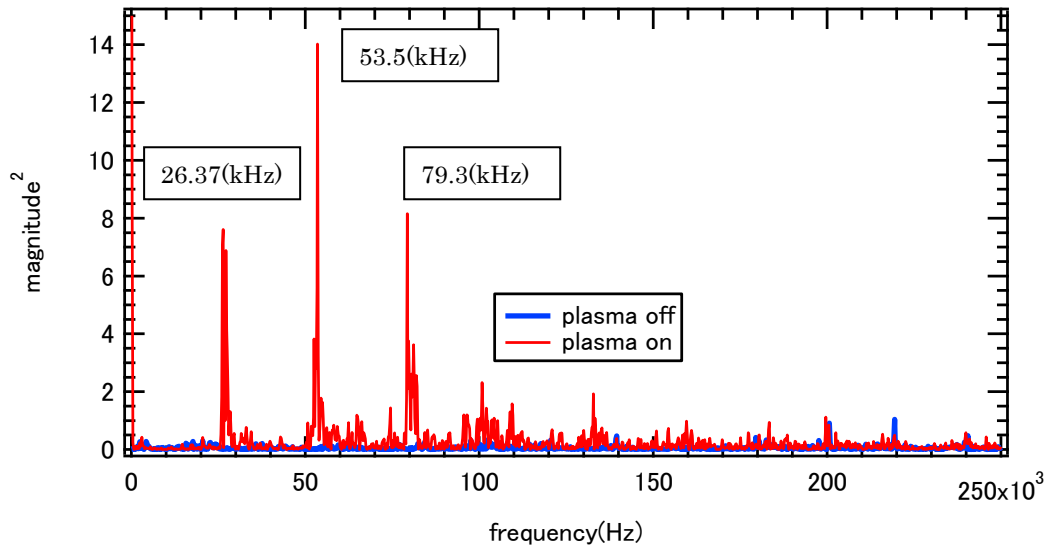


図 4.4.22 周波数スペクトル生データ (図 4.4.23 の R=0.8(m)の生データ)

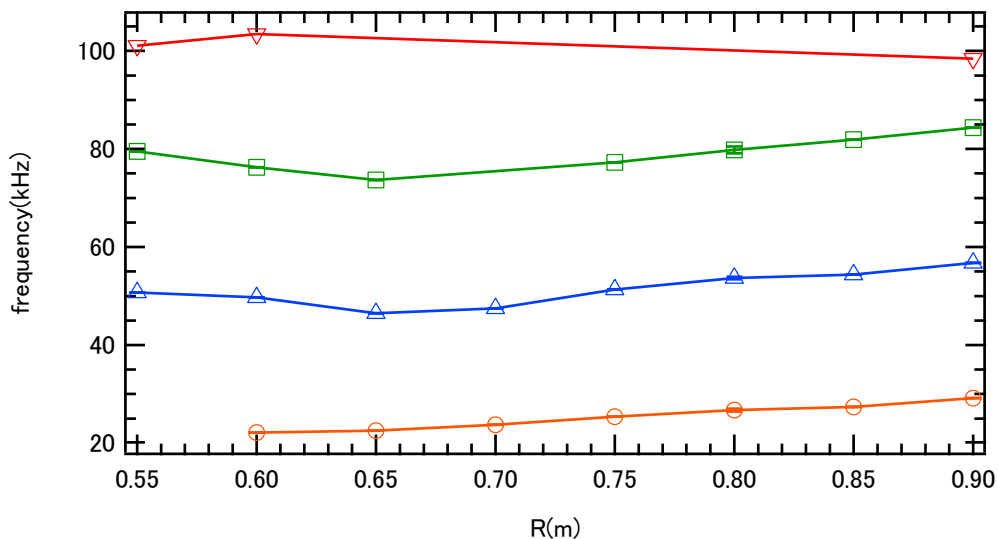


図 4.4.23 ピークを持つ周波数と R 依存性

図 4.4.23 より 20(kHz)が基調となり、高調波が観測される。R と周波数が比例関係にあり、Z 方向に比べて周波数が小さい。

4. 5 実験のまとめと考察

- ・コイル支持状態ではプラズマの存在範囲は $Z=0(\text{m})$ の赤道面上と、コイル真上の Z 方向で異なる。前者の方がプラズマは多く存在しコイル近傍まで存在するが、後者は電子銃がある磁気面付近にしか存在しない。これはコイル支持状態ではコイルの支えが障害物となり、長い軌道のバウンス運動が出来ないために差が生じたものと思われる。ただし、後者でも電子銃の磁気面付近に多く存在する理由は、電子銃からバウンス運動をせず直接プローブに至る電子が多いことを示す。
- ・コイル浮上状態では支持状態に比べて、空間電位が RZ 方向ともに低くなる。磁気面と空間電位の分布は一致しない。3.2 節の計算で最も近いパラメータは $\alpha=10^{10}$ 、 $\gamma=10^8$ である。
- ・電子銃入射中の揺動は赤道面上では R に比例するが、コイル真上の Z 方向では一定値となる。それぞれの基調波の周波数は $20\sim 30(\text{kHz})$ 、 $30(\text{kHz})$ である。コイル支持状態で行われたために 3.2 節の計算との比較はできないが、 $Z=0(\text{m})$ の赤道面上では剛体回転とならずに R によって回転速度が異なる。 $R=0.25(\text{m})$ の Z 軸上では周波数が一定で剛体回転となることが示される。

第5章 結論

5. 1 本研究の目的に対する成果

・運動論的計算

本研究ではまず電子の軌道計算を行い μ と $J_{||}$ の断熱不変量を計算した。まず、 μ と $J_{||}$ が保存するかに焦点を当てて検討した結果、初期速度の向きが磁力線の向きと平行かそれに近い場合や初期位置が $R=2(\text{m})$ あたりを超える場合では、両者の値が大きく変動した。この変動にも2種類あり、振幅を一定に保ったまま周期的なふるまいをする場合とそうでない場合とに分けられる。本研究では前者の場合に μ と $J_{||}$ が保存すると定義した。

軌道計算から求めた μ と $J_{||}$ から密度を求めた。 μ と $J_{||}$ が保存しない場合は ID という変数で保存する場合と識別し、積分の中に入れてないようにした。この計算方法は、ポイントダイポール磁場での解析解でベンチマークした。その結果、熱平衡の場合と、それにサイクロトロン運動の拘束を加えた平衡の場合には相対誤差が数%程度である。

磁場配位を RT-1 磁場配位に拡張させて検討を行った。熱運動の場合は平坦な分布となる。サイクロトロン運動の拘束を加えると、密度分布は磁場強度の分布とほぼ等しく浮上コイル内側にピークするような分布となる。サイクロトロン運動による拘束（磁化）の度合いを示すケミカルポテンシャル α をパラメータとした時、 α の増加に伴い浮上コイルの内側に密度が集中していく。さらにバウンス運動の拘束を加えると、密度分布は $Z=0(\text{m})$ の赤道面上に密度の割合が多く浮上コイルのすぐ外側で最大となる。これは赤道面付近で跳ね返るバウンス軌道の割合が多いため、赤道面付近の粒子数が増えることと、浮上コイルに近づくほどバウンス軌道が短くなり、周波数が高くなることから粒子数が増えることに起因すると考えられる。

最後に剛体回転モデルを導入し、電場を軌道計算に反映して求めた密度とポテンシャルが self-consistent となる平衡解を計算した。その結果、 α と γ のパラメータ依存性は電場を考えない場合の RT-1 磁場での計算と同じ傾向となった。この剛体回転モデルに合うパラメータとして α が 10^{10} 、 γ が 10^{6-8} が選ばれた。また、電場を反映させた軌道計算を2通り行い μ と $J_{||}$ の保存を確認した。

・実験的検証

実験の主な目的は $R=0.25(\text{m})$ での Z 方向の電位分布測定であった。結果、Z 方向で2点のデータしか得ることが出来なかったが、過去の実験データ[10]との比較により同磁気面上では赤道面の方が電位が低くなることが示された。計算結果と比較を行うと、同磁気面上では赤道面の方が高くなった。密度分布を比較した結果、最適な計算パラメータは α が 10^{10} 、 γ が 10^8 が選ばれた。

コイル支持状態での測定を行った。この状態ではコイル支持機構が障害となり、軌道長の長いバウンス運動がほとんど出来なくなっていることを示した。揺動計測では R 方向でシャープな流が起り、Z 方向では低密度のプラズマが剛体回転していることが示された。

・以上より本研究では理論のパラメータであるケミカルポテンシャルと実験の結果を主に照らし合わせて議論した。結果、適切なパラメータの平衡解が得られた。

5. 2 今後の検討事項

- ・平衡温度をパラメータとして計算を行う。
- ・浮上コイルの境界条件を変化させ計算を行う。
- ・計算の境界として与えた真空容器の形状を RT-1 実験装置にさらに近づける。
- ・RT-1 実験では本研究で測定した Z 方向の電位分布をより細かく調べることで、実験のパラメータ（例えば電子銃の加速電圧）を変化させたときの空間電位分布の測定が挙げられる。
- ・軌道計算で μ や $J_{//}$ が保存しない時の運動の解析を行う。

APPENDIX

A-1 Penning 平衡解

円柱座標で Z 方向に無限に長いプラズマ柱を考える。磁場を Z 方向に一様に

$$B_z = C e^{-r^2/4}$$

とする。ベクトルポテンシャルは回転方向(トロイダル方向)にのみ値をもち

$$A_\theta = \frac{rB}{2}$$

となる。また Poisson 方程式

$$\Delta\phi = -\frac{q}{\epsilon_0} n$$

を円柱座標系で解くと

$$\phi = -\frac{qn}{4\epsilon_0} r^2$$

となる。

準備として一般的に速度 \mathbf{U} で運動する座標系でのハミルトニアンは、新しい座標系の量を $\hat{}$ をつけて表すと

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} |\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}}|^2 - \frac{m}{2} U^2 + q\hat{\phi}$$

となる。ただし

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{m}{q} \mathbf{U}$$

$$\hat{\phi} = \phi - \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$$

である。ここで回転速度 ω によって剛体回転する静電平衡を考える。 $\mathbf{U} = r\omega\mathbf{e}_\theta$ なので剛体回転座標系でのハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{m}{2} \hat{v}^2 - \frac{m}{2} (r\omega)^2 - qr\omega A_\theta + q\phi$$

となる。ここでポテンシャルの項を消せるような適当な回転速度を選べば

$$\hat{H} = \frac{m}{2} \hat{v}^2$$

となる。これは剛体回転座標系では電場から力を受けず磁力のみを受けることを表し粒子はサイクロトロン運動を行う。マクロに見れば旋回中心は静止するので粒子はほぼ動かない。実験室系で見れば剛体回転し、回転を起こす力がポテンシャル場に起因することになる。こうして、剛体回転が実現するように粒子の運動(回転座標系で旋回中心が静止する)とポテンシャル場の構造(剛体回転を起こす)が self-consistent になる。これを Penning 平衡解と呼ぶ。この回転速度を計算してみよう。

$$-\frac{m}{2} (r\omega)^2 - qr\omega A_\theta + q\phi = 0$$

に上で求めた ϕ 、 A_θ を代入すれば

$$\omega^2 + \omega_c \omega + \frac{1}{2} \omega_p^2 = 0$$

$$(\omega_c = qB/m \quad \omega_p^2 = nq^2/m\epsilon_0)$$

この解は

$$\omega = -\omega_c \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\omega_p^2/\omega_c^2}}{2} \quad (\omega_c^2 \geq 2\omega_p^2)$$

である。ここで

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{nm}{\epsilon_0}} \cong \frac{1}{B} \sqrt{10^{-19} \times n}$$

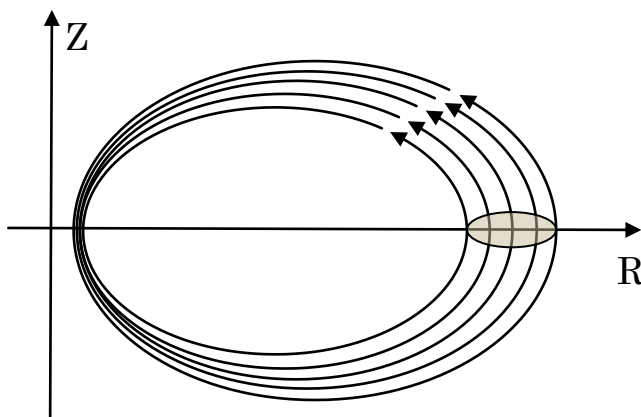
となるので低密度の場合は $\omega_p/\omega_c \ll 1$ となり、解は

$$\begin{aligned} \omega &= -\omega_c \frac{1 \pm (1 - \omega_p^2/\omega_c^2)}{2} \\ &= -\omega_D, -\omega_c + \omega_D \quad \left(\omega_D = \omega_p^2/2\omega_c = -\frac{\partial\phi}{\partial r}/(rB) = \frac{E}{B}/r \right) \end{aligned}$$

である。これはサイクロトロン運動に近いマイクロな運動の周波数と、マクロな $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト周波数である。つまり剛体回転は自己電場に対する $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトにより生じていることが分かる。実験では外部電場と自己電場を合わせて $\phi \propto r^2$ を実現している。

A-2 flux tube volume

[5]で flux tube volume は $\oint dl/B$ で表されている。図 A-1 で、磁場強度の変動が無視できる範囲



の微小面積 S を通過する磁力線の本数 ψ は、磁場強度 B を用いて

$$\psi = BS$$

で表せる。flux tube volume を図 A-1 のように一定の本数の磁力線 ψ が通る体積と定義する。flux tube volume を V とすれば

$$V = \oint S dl = \oint \frac{\psi}{B} dl \propto \oint \frac{dl}{B}$$

と求められる。

図 A-1 flux tube 模式図

A-3 流体モデル

マクロスケールでの流体の運動方程式の慣性を無視すると

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = 0$$

となる。ただし低密度を仮定し圧力項を考えない。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\varphi$$

を用いれば

$$-\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

これと \mathbf{B} との内積をとると

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (\because \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) = 0)$$

トロイダル方向に対称な磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\varphi$$

なので

$$(\nabla\psi \times \nabla\varphi) \cdot \nabla\phi = (\nabla\phi \times \nabla\psi) \cdot \nabla\varphi = (\nabla\varphi \times \nabla\phi) \cdot \nabla\psi = 0$$

$$\nabla\phi \times \nabla\psi = 0$$

以上より磁気面と電位が互いに平行になることが示される。

A-4 密度を与えた場合の電位分布

密度を場所（磁気面值）の関数とし、以下のように式を仮定する。

$$n(s(\psi)) = \left(\frac{\tanh(s/0.1)}{s} \right)^{0.8} (\tanh(s/0.1))^{0.1}$$

$$s(\psi) = \frac{\psi_{max} - \psi}{\psi_{max} - \psi_{min}}$$

s は磁気面值を規格化した値で、0~1 をとる。これを図 A-2(a)に示す。磁気面值が最大となる位置付近で密度が最大となるような分布である。RT-1 実験装置に即して言うならば、コイル外側付近で密度が最大となるような分布である。

仮定として与えた密度分布がトロイダル方向に回転する剛体回転モデルを考える。30(kHz)の回転速度でポテンシャル場との平衡解を求めると図 A-2(b)の密度分布となる。

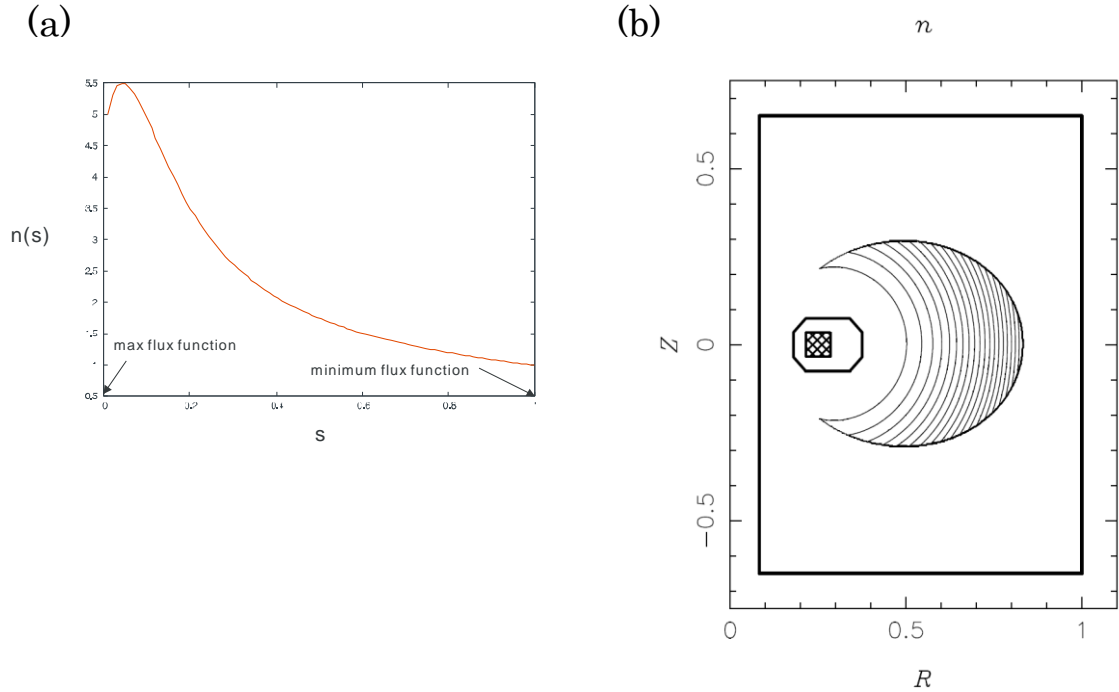


図 A-2 (a)密度分布 (b)計算結果。R の方向に密度が増加する分布となる。初期に与えた(a)の分布と大きく異なり、密度とポテンシャル場が self-consistent に解かれていない。これは密度をポテンシャル場と独立して与えているためである。本研究では密度を運動論的に計算し、ポテンシャル場を考慮し密度とポテンシャル場の self-consistent な平衡解を得ることを目的とする。

B-1 円形電流が作る静磁場

[12]に沿って解説する。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

で表せる。円柱座標では以下の式となる。

$$A_\theta(R, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds_\theta}{R'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \chi \cdot d\chi}{\sqrt{z^2 + R^2 + a^2 - 2aR \cos \chi}}$$

ここで、第1種完全楕円積分 $K(k)$ 、第2種完全楕円積分 $E(k)$ は

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$$

なので

$$A_\theta = \frac{\mu}{\pi k} I \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) K(k) - E(k) \right)$$

となる。磁場強度はベクトルポテンシャルの回転により得られる

$$\begin{aligned} B_r &= (\nabla \times \mathbf{A})_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= (\nabla \times \mathbf{A})_\theta = 0 \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{k} \left(\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right), \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k} (E(k) - K(k))$$

より磁場強度は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{z}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right) \\ B_z &= \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{((a+r)^2 + z^2)^{1/2}} \left(K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right) \end{aligned}$$

・円環の近くでは $k \approx 1$ となり以下の近似を行うと

$$\begin{aligned} E(k) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right) (1-k^2) \\ K(k) &= \ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right) (1-k^2) \end{aligned}$$

磁気面 ψ は

$$\psi = rA_\theta = \frac{\mu a I}{2\pi} \left(\ln \frac{8a}{\sqrt{(r-a)^2 + z^2}} - 2 \right)$$

となる。

B・2 ポイントダイポール磁場配位

ポイントダイポール磁場配位は、円環から十分遠方での磁場配位である。2章ではその円環の半径 a が十分小さく、磁気モーメントは実験装置 RT-1 と同じ値を用いる。ここで

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

とおき、いま円環の半径 a が十分小さいので $r \gg a$ とすれば

$$\begin{aligned} A_\theta(R, \theta, z) &\cong \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\chi \cdot d\chi}{\sqrt{1 - \frac{2aR\cos\chi}{r^2}}} \\ &\cong \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{aR\cos\chi}{r^2} \right) \cos\chi \cdot d\chi \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

となり、 R を r で書き換えると

$$\psi = rA_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$B_r = \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \frac{rz}{(z^2 + r^2)^{5/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}}$$

となる。

B-3 ダイポール磁場中の周期運動

1 サイクロトロン運動

磁場中の電子は、図 B-1 の通り磁力線の周りを周回する。運動方程式、サイクロトロン周波数、周期は次式で表せる。

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \quad T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

ダイポール磁場中では閉じた磁束管(APPENDIX A-1)が存在する。電子が磁力線に巻きついた運動をすれば、磁束管の断面が大きい所では密度が小さく断面が小さい所では密度が大きくなる。電子の運動に何も拘束がない場合は実験座標系での密度は一定となるが(構造がない)、サイクロトロン運動の拘束が加わる場合は磁力線に沿った運動に制限され、磁束管の断面が小さい磁場強度が強い所で密度が大きくなる構造となる。

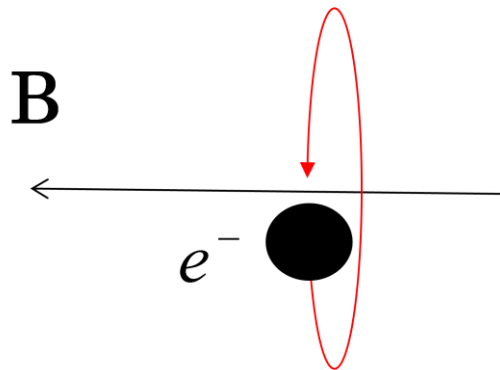


図 B-1 サイクロトロン運動

2 バウンス運動

電子が磁力線に巻きつくサイクロトロン運動をすることが前提となる。電子の磁力線方向の運動方程式を[13]に即して求める。

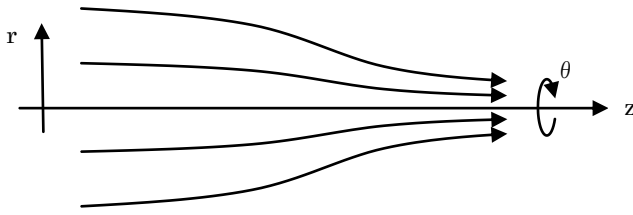


図 B-2 z 方向に勾配がある磁場強度

図 B-2 のように円柱座標系を考える。Z 方向に磁場の勾配がある場合、電子が受けるローレンツ力は

$$F = q \begin{pmatrix} v_{\theta} B_z \\ -v_r B_z \\ -v_{\theta} B_r \end{pmatrix}$$

このローレンツ力の R, θ 成分はサイクロトロン運動、Z 成分はバウンス運動に寄与する。さらに

$$\nabla \cdot B = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

の関係式から

$$B_r \approx -\frac{1}{2} r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

を用いると

$$F_z \approx \frac{1}{2} q v_{\theta} r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

となる。これのラーマ運動平均をとる。

$$r_L \omega_c = v_{\theta}, \quad \mu = m^2 v_{\perp}^2 / 2qB$$

より以下となる。

$$\bar{F}_z \approx \frac{1}{2} q \frac{v_{\theta}^2}{\omega_c} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = -\mu \left(\frac{\partial \omega_c}{\partial z} \right)$$

よって電子の磁力線方向の運動方程式は

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial \omega_c}{\partial s}$$

となり磁場強度の勾配とは逆向きに力が働く。そのため強磁場側に電子が進むと条件により磁力線方向の速度の向きが逆となり跳ね返される。ダイポール磁場の場合、磁気面に沿った磁場強度は赤道面上 ($Z=0(\text{m})$) に関して対称なので、運動も赤道面に関して対称となる。その結果、磁場強度の弱い赤道面上で v_{\parallel} が最大の大きさを持ち、跳ね返り点で跳ね返るようなバウンス運動と呼ばれる周期運動が生じる。この運動の仕組みはばねの単振動と類似する。運動の様子を図 B-3 で示す。サイクロトロン運動にバウンス運動の拘束を加えると、磁力線上を一周した運動をしない。跳ね返る位置は電子の運動エネルギーによって異なるが、全ての電子は赤道面上を必ず通る。そのため赤道面上に密度が集まるような構造を作る。

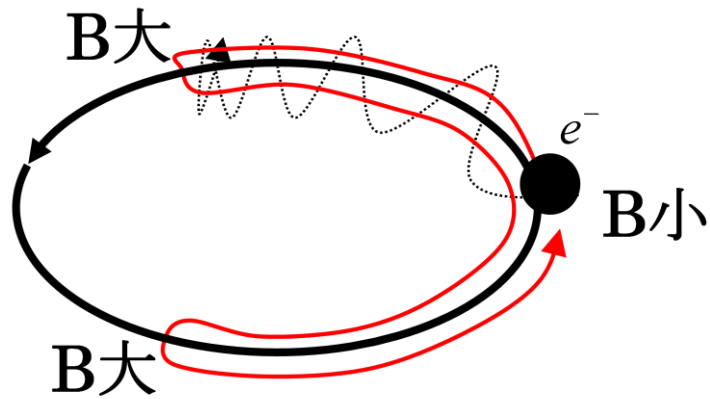


図 B-3 バウンス運動

3 : ドリフト運動

磁気面上を回転軸まわり（トロイダル方向への）周期運動である。3つの運動で最も周期の時間スケールが長く、宇宙の惑星型磁気圏でよく観測される。

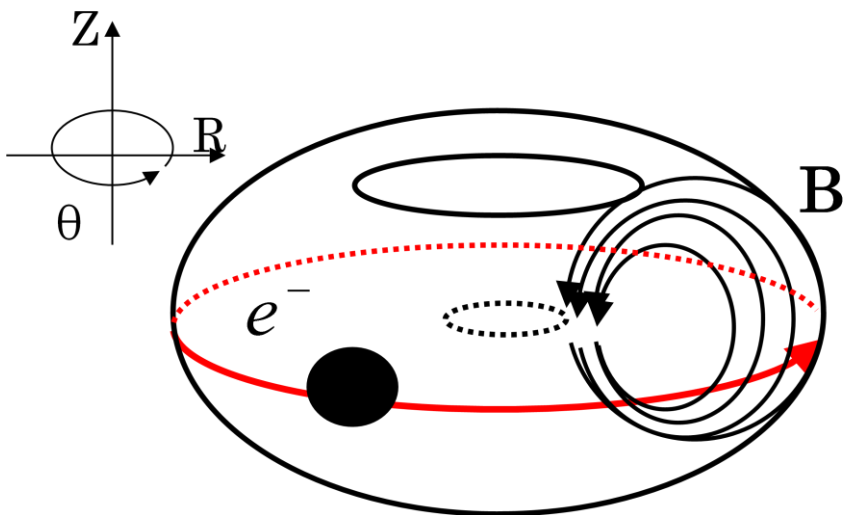


図 B-4 ドリフト運動

B-4 参考文献[7]の近似解の導出

J_{\parallel} と v_{\parallel} を関係づけるヤコビアンを定式化する。ただし、赤道面付近のバウンス運動を調和振動と近似できる範囲で近似することができる。

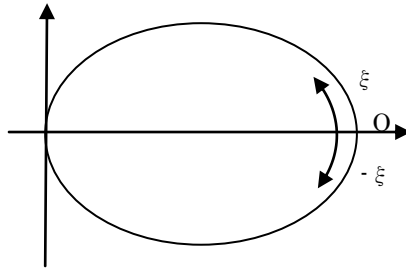


図 B-5 バウンス運動の座標

ポイントダイポール磁場中の赤道面上付近で図 B-5 のような磁力線に沿ったバウンス運動をする電子の運動方程式を考える。赤道面上の軌道を原点とし、Z 方向の軌道の長さを ξ とすれば

$$m \frac{d^2}{dt^2} \xi = -\mu \left(\frac{\partial \omega_c}{\partial \xi} \right)$$

ω_c を 2 次まで展開し、 $\omega_c|_{\xi=0} = \Omega_c$ とおき、赤道面に関して対称であることを利用すれば

$$m \frac{d^2}{dt^2} \xi = -\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Omega_c + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2 \omega_c}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \right) = -\mu \frac{d^2 \Omega_c}{d\xi^2} \xi = -\mu \Omega_c'' \xi$$

となり

$$\xi(t) = l_{\parallel} \exp(i\omega_b t)$$

で表せる。ただし角速度 $\omega_b = \sqrt{\mu \Omega_c'' / m}$ 、振幅を l_{\parallel} とした。

$$d^2 \omega_c / d\xi^2 |_{\xi=0} = \Omega_c''$$

とすれば、エネルギー保存

$$\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \mu \Omega_c'' \xi^2 = E_{\parallel}$$

より軌道の振幅は

$$l_{\parallel} = |\xi|_{max} = \sqrt{\frac{2E_{\parallel}}{\mu \Omega_c''}}$$

となる。ここで L_{\parallel} を次のように定義し、 ω_b と v_c を結びつける。

$$L_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\Omega_c}{\Omega_c''}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{\mu \Omega_c''}{m}} = \frac{1}{L_{\parallel}} \sqrt{\frac{2\Omega_c \mu}{m}} = \frac{v_c}{L_{\parallel}}$$

この L_{\parallel} を使えば、近似された磁場強度は以下のように書ける。

$$B \cong B|_{\xi=0} \left(1 + \frac{\xi^2}{L_{\parallel}^2} \right)$$

次にバウンス運動を作用 J_{\parallel} と角速度 ω_b で次のように量子化する。

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \int m v_{\parallel} ds$$

$$E_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel max}^2 = \omega_b J, \quad v_{\parallel max} = v_{\parallel} \Big|_{\xi=0}$$

となり

$$d v_{\parallel max} = \frac{\omega_b}{m v_{\parallel max}} dJ = \frac{v_c}{m v_{\parallel max} L_{\parallel}} dJ$$

ここで次の近似

$$v_{\parallel max} \cong v_c$$

を用いれば、次のようにヤコビアンを近似できる。

$$d v_{\parallel max} = \frac{1}{m L_{\parallel}} dJ$$

よって密度を求める式で、バウンス軌道が調和振動に近似できる領域で、赤道面上で $v_{\parallel} \cong v_c$ となる軌道のみを選べば

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int \frac{1}{Z} \exp\{-(\beta(\mu\omega_c + J\omega_b) + \alpha\mu + \gamma J)\} \frac{2\pi\omega_c d\mu}{m} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} \\ &= \frac{2\pi}{mZ} \int \exp\{-\mu(\beta\omega_c + \alpha)\} \omega_c d\mu \int \exp\{-J(\beta\omega_b + \gamma)\} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} \end{aligned}$$

ここで

$$\int \exp\{-J(\beta\omega_b + \gamma)\} \frac{dJ_{\parallel}}{mL_{\parallel}} = \frac{1}{\beta\omega_b + \gamma} \cdot \frac{1}{mL_{\parallel}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{2\omega_c\mu/m} + \gamma L_{\parallel}}$$

となる ($\omega_c = \omega_c|_{\xi=0} = \Omega_c$ とかく) ので、よって密度は以下の式で近似される。

$$\rho(x) = \frac{2\pi\omega_c}{m^2 Z} \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\mu(\beta\omega_c + \alpha)\}}{\beta\sqrt{2\omega_c\mu/m} + \gamma L_{\parallel}} d\mu$$

B-5 Poisson 方程式を解くコードのサブルーチン解説

1 : setup

定数、配列の次元、書き出しファイルの名前を設定する。計算領域を示す 1 次元配列 $\mathbf{r}(0:\mathbf{nr})$, $\mathbf{z}(0:\mathbf{nz})$ と、運動論的な密度計算を行う位置を表す 1 次元配列 $\mathbf{dnr}(0:\mathbf{dnnr}), \mathbf{dnz}(0:\mathbf{dnzn})$ に値を入れる。 \mathbf{nr}, \mathbf{nz} はそれぞれ計算領域の R、Z 方向のグリッド数で、input ファイルから読み込まれる。密度計算は時間を要するため、そのグリッド数は \mathbf{nr}, \mathbf{nz} を \mathbf{dndv} で割った数の $\mathbf{dnnr}, \mathbf{dnzn}$ とし、 \mathbf{dndv} は input ファイルから読み込まれる。また 2 次元中心差分法 (B-3 参照) を高速フーリエ変換で解く準備も行う。

2 : setcoil

input から読み込んだ円環電流の位置に最も近い r と z の配列要素を探し、円環電流の計算領域上での位置を与える。

3 : vf

コイルケース内の円環電流が作る計算領域の磁束分布を次の式で計算する。

$$\psi = rA_\theta = \frac{\mu}{\pi k} I(ra)^{1/2} \left(\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) K(k) - E(k) \right)$$

ただし

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$$

で $K(k), E(k)$ はそれぞれ第1種完全楕円積分、第2種完全楕円積分である。サブルーチン内の関数 $\text{gfc}(r1, z1, r2, z2)$ は RZ 平面上の点 $(r2, z2)$ を通る円環電流が、 RZ 平面上の点 $(r1, z1)$ に作る磁束を計算するためのグリーン関数である。これに電流値をかけると磁束となる。

4 : calb

計算領域の磁束分布を以下の式で磁場強度分布に変換する。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\Delta\psi}{\Delta z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\Delta\psi}{\Delta r}$$

5 : setsf

浮上コイルケースと真空容器の境界位置のデータを input から読み取り、計算領域上での位置を与える。2次元配列 $\text{ive}(0:\text{nr}, 0:\text{nz})$ を用いて、コイルケースの外側を $\text{ive}=1$ 、内側を $\text{ive}=0$ と識別する。

6 : setic

仮想電荷の位置のデータを input から読み取り、計算領域上での位置を与える。配列に入れる。仮想電荷は z 軸周りに円環状に分布しているとする。

7 : grnic

仮想電荷がコイルケースと真空容器表面の境界に作る電位を、関数 gfc を用いて計算する。 $\text{gfc}(r1, z1, r2, z2)$ とは RZ 平面上の点 $(r2, z2)$ を通る、円環状に分布する仮想電荷が RZ 平面上の点 $(r1, z1)$ に作る電位を計算するためのグリーン関数であり、円環の電荷をかければ電位となる。

8 : phiic

仮想電荷が計算領域に作る電位を関数 gfc を用いて計算する。

9 : psibd

input からプラズマが存在する範囲を指定する磁気面值を読み取り、2次元配列 $\text{ip}(0:\text{nr}, 0:\text{nz})$ で表

す。ip=1 で存在、0 で存在しないと区別する。

1 0 : slvhom

密度分布を用いてポアソン方程式

$$\hat{\Delta} \hat{\phi} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \hat{n}(\mathbf{x})$$

を高速フーリエ変換し、2次元中心差分法で計算領域のポテンシャル分布を求める。

1 1 : slvqic

slvhom で得たデータから真空容器表面・コイルケースの境界上のポテンシャルを求め、コイルケースの境界だけ input で指定されたポテンシャルを追加で足し合わせる（この操作の理由は3.2.2で述べた）。この境界上のポテンシャル分布を実現するための仮想電荷量を以下の方法で求める。その際に関数 `gfic(r1, z1, r2, z2)` が使われるが、これを簡単のため次のように関数 $G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ と表記し直す。 $G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ は \mathbf{m} 番目の円環上の仮想電荷(位置 $(\mathbf{r}2, \mathbf{z}2)$)が \mathbf{n} 番目の境界点(位置 $(\mathbf{r}1, \mathbf{z}1)$)につくる電位を計算する。ただし1つの円環状の電荷が空間に作る電位の計算法を B-4 で示す。

境界上の格子点数を M 、仮想電荷数を N 、電荷量を Q とすれば

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ G(M,1) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

を Q について解けばよい。ただしこのコードでは以下のように、 G の行列を右からかける。

$$\begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(M,1) \\ \vdots & & \vdots \\ G(1,N) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(M,1) \\ \vdots & & \vdots \\ G(1,N) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ G(M,1) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

ここで

$$qic(1:N) = \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(M,1) \\ \vdots & & \vdots \\ G(1,N) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix}$$

$$icmat(1:N, 1:N) = \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(M,1) \\ \vdots & & \vdots \\ G(1,N) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(1,1) & \cdots & G(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ G(M,1) & \cdots & G(M,N) \end{pmatrix}$$

とすれば以下の連立方程式となる。

$$qic(1:N) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = icmat(1:N, 1:N) \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

連立方程式を解くサブルーチン `DGETRS` を用いて、解の $Q(1:N)$ を1次元配列 `qic(1:N)` に入れる。

1 2 : srcp 図 3.2.1 ブロック図内の説明通り。

1 3 : slvhom

ポアソン方程式

$$\hat{\Delta} \hat{\phi} = \hat{\phi}_c + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \hat{n}(\mathbf{x}) \exp \hat{\phi}$$

を高速フーリエ変換し2次元中心差分法で解き、計算領域のポテンシャル分布を求める。

1 4 : diag

各ドリフト速度を次の式に沿って求める。ただし、ポテンシャルの微分はサブルーチン calomg、密度の微分はサブルーチン calnd で行われる。

・ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度

$$v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{(-\nabla\phi) \times \mathbf{B}}{B^2} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} / B^2 = \frac{1}{B^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_z \frac{\partial\phi}{\partial r} & -B_r \frac{\partial\phi}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

B-6 2次元中心差分法

2次元ポアソン方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial R} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Z^2} = \rho$$

これをポテンシャルに関して z 方向にフーリエ変換すれば

$$\phi = \sum_k \phi_k e^{ikz}$$

$$\frac{\partial^2\phi_k}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\phi_k}{\partial R} - k^2\phi_k = \rho_k$$

これを R 空間上での前後の値 ϕ_{kj-1} 、 ϕ_{kj+1} を用いて差分をとる。これを中心差分法と呼ぶ。

$$\frac{\phi_{kj+1} - 2\phi_{kj} + \phi_{kj-1}}{(\Delta R)^2} + \frac{1}{R_j} \frac{\phi_{kj+1} - \phi_{kj-1}}{2\Delta R} - k^2\phi_{kj} = \rho_{kj}$$

すると式??が ϕ_{kj} に関する連立方程式で表せるので、 ϕ_{kj} が求まる。

次に Z の位置を変え同様の計算を行い、2次元の ϕ_{kj} が求まる。

B-7 円環状の電荷が作る電位の導出

ポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\sigma(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

の解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

である。ここで図 B-6 のような円柱座標系で電荷 Q_c が円環状($r, z = \text{const.}$)に一様に分布しているとする。

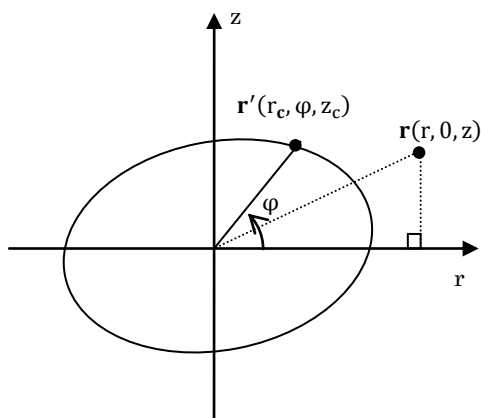


図 B-6 円環と RZ 平面上の点 \mathbf{r} の位置関係

電荷密度分布は

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q_c}{2\pi r_c} \delta(r - r_c) \delta(z - z_c)$$

で表せる。これを用いて rz 平面上の点 $\mathbf{r}(r, 0, z)$ での電位は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q_c/2\pi r_c \delta(r' - r_c) \delta(z' - z_c)}{\sqrt{(r - r_c \cos\varphi')^2 + (r_c \sin\varphi')^2 + (z - z_c)^2}} r' dr' d\varphi' dz' \\ &= \frac{Q_c}{8\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rr_c \cos\varphi' + r_c^2 + (z - z_c)^2}} \end{aligned}$$

ここで

$$k^2 = \frac{4rr_c}{(r + r_c)^2 + (z - z_c)^2}$$

とおけば

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q_c k}{8\pi^2 \epsilon_0 \sqrt{4rr_c}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi'}} = \frac{Q_c}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{k}{\sqrt{rr_c}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{Q_c}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{k}{\sqrt{rr_c}} K(k) \quad (\varphi' = \pi + 2\theta) \end{aligned}$$

となる。ただし $K(k)$ は第 1 種完全楕円積分である。このコードでは以下の規格化により

$$r = a\hat{r}, \quad Q_c = en_{0\max} a^3 \hat{Q}_c, \quad \phi = \frac{k_B T_e}{e} \hat{\phi}$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{a^2}{\lambda^2} \frac{\hat{Q}_c k}{\sqrt{\hat{r}\hat{r}_c}} K(k)$$

と変形して用いている。関数 `gfic` は次のように与えられる。

$$g_{fic} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{a^2}{\lambda^2} \frac{k}{\sqrt{\hat{r}\hat{r}_c}} K(k)$$

(オリジナルのコードでは $g_{fic} = \frac{-1}{4\pi^2} \frac{a^2}{\lambda^2} \frac{k}{\sqrt{\hat{r}\hat{r}_c}} K(k)$ としているが、負の符号は誤りと判断する。)

C-1 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1

RT-1 は真空容器内のトーラス型の超電導コイルに電流を流してダイポール磁場を作り、プラズマを閉じ込める装置である。超電導コイルには Bi-2223 高温超電導材が使われ、実験中は 25(kAT ampere-turn)の電流が流れ、図 C-1 で示すようにコイルケース表面の磁場強度は 1(T)程度、真空容器内側では数十(G)である。実験中のコイル温度は 20(K)から 30(K)で、可能実験時間は 8 時間程度である。真空容器上部にある吊り上げコイルに 30(kAT)の電流を、超電導コイルと同じ向きに流すことで引力を作り、超電導コイルを重力と釣り合わせ浮上させることができる(以下、超電導コイルを浮上コイルと呼ぶ)。

実験手順を述べる。午前中にメンテナンスチャンバーにある浮上コイルに電流リードを差し込み 250(kAT)まで浮上コイルを励磁する。その際、浮上コイルの若干温度が上昇するため午後まで He ガスの冷却を続ける。午後、トランスファーチューブと呼ばれる浮上コイルへのヘリウム導入管を外し、メンテナンスチャンバーから所定の高さまで昇降機を用いて浮上コイルを持ち上げる。浮上コイルを浮上させるときは、真空容器上部に設置されたレーザーセンサによる制御で吊り上げコイルに電流を流し、昇降機を下げる。実験終了後は浮上コイルをメンテナンスチャンバーまで下げ、消磁(浮上コイルの電流を 0(A)にする)の後、トランスファーチューブを差し込み冷却を行う。図 C-1 は昇降機が上がった状態で吊り上げコイルに電流を流した状態の図である。浮上コイルは昇降機に支持されており、磁場強度が 0(T)の点(Null 点と呼ぶ)が生成されている。この磁場配位は吊り上げコイルに電流を流さない状態でできるダイポール磁場(以下純ダイポール磁場と呼ぶ)よりも磁気面が吊り上げコイル側に持ち上げられた形をしている。この磁場を以下セパリック磁場と呼ぶ。超電導コイルの電流中心は $R=0.25(m)$ 、 $Z=0(m)$ にあり、周りはコイルケースで囲まれ図 C-1 には 2 点鎖線で示される。コイルケースに接触しない最も内側の磁気面を最内殻磁気面、Null 点を通る磁気面を最外殻磁気面と呼び、プラズマは主にその間の領域に存在する。

真空容器内は $10^{-7}(Pa)$ まで圧力を下げることが可能である
非中性プラズマ実験の他に、中性プラズマのイオン加熱実験が主に行われている。プラズマの加熱は 2.45G、8.2G の RF を入射することで行われる。

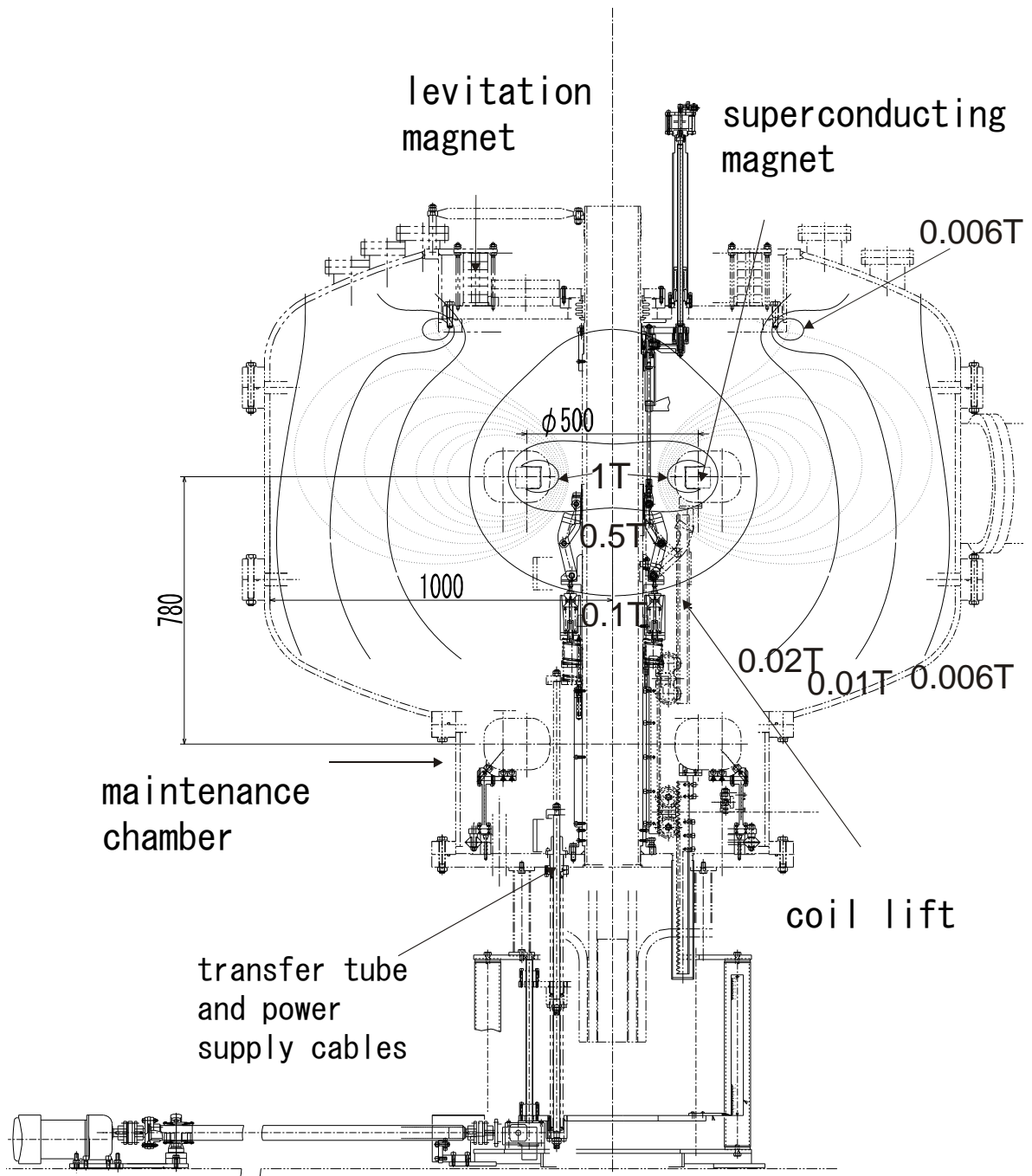


図 C-1 RT-1 断面図 (セパトリックス磁場配位で浮上コイルは昇降機により支持状態)

C-2 シングルプローブ (cold probe) 原理

簡単のためプローブ先端は平面状で XY 平面状に位置すると決める。するとプローブに入る電流密度 j は Z 方向成分の速度を持ちプローブに入る電子で構成されるので

$$j = e \int_{v_{min}}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) v_z dv_z$$

で表せる。 $f(\mathbf{v})$ は電子の分布関数、 $v_{min} = \sqrt{\frac{2e(\phi_s - \phi_b)}{m_e}}$ (ϕ_s は空間電位、 ϕ_b はプローブ電位) である。ここで分布関数を Z 方向に v_d でドリフトしている Maxwell 分布と仮定すると

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e(v_z - v_d)^2}{2k_B T_{\parallel}}\right) \exp\left(-\frac{m_e(v_x^2 + v_y^2)}{2k_B T_{\perp}}\right)$$

となり、プローブに流れる電流 I は

$$I = eSn_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{\parallel}}} \int_{v_{min}}^{\infty} \exp\left(-\frac{m_e(v_z - v_d)^2}{2k_B T_{\parallel}}\right) v_z dv_z$$

である。 $\phi_b \gg \phi_s$ では電位差がドリフト運動のエネルギーより大きいとし、一定の電流が流れ込むと考える。すなわち、 $v_z \gg v_d$ 、 $v_{min} = 0$ とし、 $0 \leq v_z \leq \infty$ で積分する。逆に $\phi_b \ll \phi_s$ のときはドリフトエネルギーが電位差よりも小さいと考え電子は入ることができない。

$$I = \begin{cases} eSn_e \sqrt{k_B T_{\parallel} / 2\pi m_e} & (\phi_b \gg \phi_s) \\ 0 & (\phi_b \ll \phi_s) \end{cases}$$

ここで $I_s = eSn_e \sqrt{k_B T_{\parallel} / 2\pi m_e}$ を電子飽和電流と呼ぶ。デバイ長がプローブ先端のスケールよりも長い場合、先端の周りにシースが膨らんで生じる。よって現実には Z 方向成分を持たない電子がシース内に入った時もシース内の電場によりプローブ先端に入りこむように軌道が曲げられる。そのため ϕ_b を大きくするとシースが膨らみ、入り込む電子も多くなり図 C-2(1)のように右肩上がりとなる。

図 C-2(2)はフィラメントからの電子の放出を表したものである。 $\phi_b \geq \phi_s$ では放出されても電位差によりプローブに戻され、正味放出量が 0 となるが、 $\phi_b \leq \phi_s$ ではフィラメントとそれに流す電流値で決まる一定の電子が外に放出される。実際には Child-Langmuir の法則により ϕ が ϕ_s よりも少し小さくなくても急激に電子が放出されることはなく、図 C-2(2)のように緩やかに放出させる。

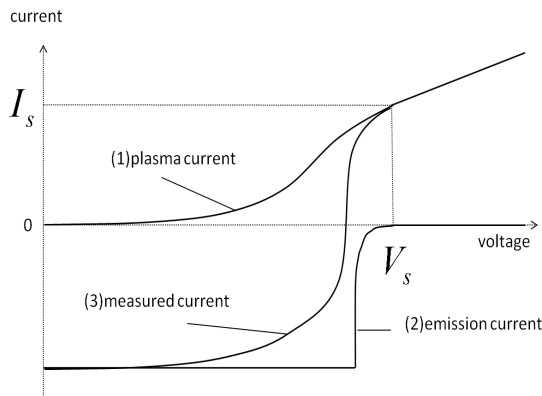


図 C-2 IV 特性図。(1)(3)の分岐点付近が空間電位となる。

C-3 Child-Langmuir の法則

図 C.3 のようにフィラメントを模した平面 A ($x = 0, V(x) = 0$) から B ($x = d, V(x) = V_B$) に電子が放出される場合を考える。位置 x での速度は

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}$$

なので、数密度 $n(x)$ は次のように表せる。ただし j は電流密度である。

$$n(x) = -\frac{j}{e} \sqrt{\frac{m_e}{2eV(x)}}$$

Poisson 方程式

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2eV(x)}}$$

に dV/dx をかけて x で積分する。ただし、平面 A 付近では電子が一様に存在しているとし $dV/dx|_{x=0} = 0$ とすれば

$$V(x)^{-1/4} dV = \left(\frac{4j}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{2e}\right)^{1/4} dx$$

よってポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = \left(\frac{4j}{\epsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m_e}{2e}\right)^{1/3} x^{4/3}$$

となる。平面 A から平面 B への電流密度を求めるために $x=0$ から d まで積分すれば

$$j = \left(\frac{2e}{m_e}\right)^{1/2} \frac{4}{9d^2} \epsilon_0 V_B^{3/2}$$

となる。この理論は平面 A の温度が 0 の場合であるが、温度が上がり放出する電子が無視できなくなると次の補正が加わった式になる。 x_m, V_m, α は補正項である。

$$j = \left(\frac{2e}{m_e}\right)^{1/2} \frac{4}{9(d-x_m)^2} \epsilon_0 (V_B - V_m)^{3/2} (1 + \alpha)$$

電子が放出された状態で測定する浮遊電位はプラズマから入ってくる電子と放出する電子の差によって決まり、プローブ表面の電位を表す。しかし、図 C-3 のように、プローブ先端付近に存在する放出電子のために、浮遊電位は空間電位よりも負側にずれてしまうことになる。

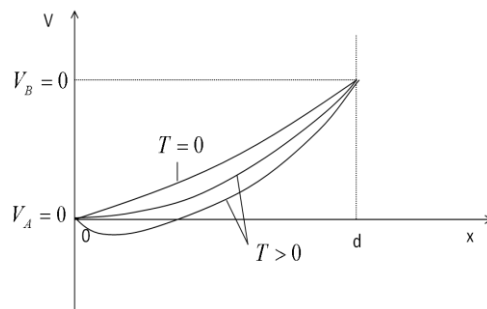


図 C-3 Child-Langmuir の法則

参考文献

- [1] 吉田善章, トーラス型トラップによる非中性プラズマの閉じ込め, 平成9年度～平成12年度科学研究費補助金(基盤研究(A)(2))研究成果報告書, 平成13年3月
- [2] Z.Yoshida, *et al.*, in N.N.P. III, p.397
- [3] H.Saitoh, *et al.*, *Phy. Rev. Lett* **92**, 255005 (2004)
- [4] Z.Yoshida *et al.*, *Plasma Fusion Res.* 1, 008 (2006)
- [5] A.Hasegawa, *Comment. Plasma Phys. Controlled Fusion* 11, 147 (1987)
- [6] A.Hasegawa, *Phys. Scr. T* **116**, 72 (2005)
- [7] Z.Yoshida *et al.*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **55**, 014018 (2013)
- [8] Krimigis S.M. *et al.*, *Science* 206, 977 (1979)
- [9] A.Hasegawa *et al.*, *Nucl. Fusion* 30, 2405 (1990)
- [10] H.Saitoh, *et al.*, *Phy. Plasmas* 17, 112111(2010)
- [11] 京都大学数理解析研究所 HP
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/intde-j.html>
- [12] 砂川重信, 電磁気学 物理テキストシリーズ 4, 岩波書店, 2003
- [13] Francis F.Chen, INTRODUCTION TO PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED FUSION, PLENUM PRESS, 1990

本研究の業績

日本物理学会第68回年次大会 口頭発表 (予定)

「ダイポール磁場中の純電子プラズマ平衡状態の運動論的計算と実験的検証」

笠岡紀和, 吉田善章, 森川惇二, 齊藤晴彦, 矢野善久, 坂本渉, 野上智晃, 古川勝

謝辞

本研究では大変多くの方にご協力いただきました。当研究室には自己組織化に興味を持ち入ったのですが、幸いにもこのテーマを研究することが出来、大変光栄に思っています。自己組織化の研究の提案や、関連する物理・数学の世界を垣間見せていただいた吉田善章教授には大変感謝しております。古川勝准教授には Poisson 方程式の計算コードを提供していただき、使い方まで丁寧にご指導を頂きました。森川先生、齊藤先生には RT-1 実験で大変お世話になりました。実験の方々にはそれぞれ独特な個性があり、楽しい思いをさせていただきました。理論の方々には自己組織化の背景にある物理を教えていただき、研究の幅が広がりました。ありがとうございました。