

修士論文 2013年度（平成25年度）

相互注入を行う2レーザー系の
周波数特性の計算

東京大学大学院 情報理工研究科
電子情報学専攻

48-126434 信田 頼宏

指導教官 山本 喜久 教授

2014年2月6日

修士論文 2013年度（平成25年度）

相互注入を行う2レーザー系の 周波数特性の計算

論文要旨

計算困難な問題の一つであるイジング問題を解くために注入同期レーザーネットワークを用いたコヒーレント計算機が提案された。レーザー光の位相を用いたモデルの実験結果を説明するため、相互注入する2レーザーの周波数特性を数値計算した。その結果、レーザー間距離を連続的に変えたにも関わらず、レーザー間の位相差が0か π の2値のみを取る事が分かった。

キーワード

修士論文

東京大学大学院 情報理工研究科
電子情報学専攻

48-126434 信田 頼宏

目次

第 1 章	序論	1
1.1	計算の困難な問題	1
1.2	イジング問題	2
1.3	イジング問題を解くためのコヒーレントコンピュータ	3
1.4	本論文の構成	5
第 2 章	コヒーレントコンピュータ	7
2.1	レーザー内の円偏光を用いたモデル	7
2.1.1	基本動作	7
2.1.2	イジングハミルトニアンへのマッピング	9
2.2	マスターレーザーとスレーブレーザーの位相差を用いたモデル	14
2.2.1	基本動作	14
2.2.2	イジングハミルトニアンへのマッピング	16
2.2.3	2つのレーザーにおける実装	18
第 3 章	レーザーの周波数特性に関する関連研究	21
3.1	回折格子を用いたときのレーザーの発振状態	21
3.2	レーザーの変調周波数に対する全系の発振周波数の関係式	22
3.3	発振周波数とモードジャンプ	25
第 4 章	2つのレーザーが相互注入する際の周波数特性	29
4.1	伝送行列における発振条件	29
4.1.1	伝送行列と散乱行列	30
4.1.2	キャビティの発振条件	32
4.2	相互注入を行うレーザーの発振周波数の関係式	34
4.3	発振周波数特性のシミュレーション	36
4.3.1	利得係数変動 $\Delta\alpha$ の決定	36
4.3.2	レーザー間距離に対する発振周波数の特性	37
4.4	実験結果との対比	39
第 5 章	結論	43
	謝辞	45

第1章 序論

1.1 計算の困難な問題

近年、情報処理技術は急速に成長してきた。それに伴い、一般の人にとって扱うことのできる情報量も急激に増加したため、日々の生活の中でもあらゆる場所や場面で利用されるようになった。扱うことのできる情報量が増えたということは、それだけ様々な分野で生かすことが可能になったということであり、それだけ情報を扱うことが複雑になったということである。それは我々の身の回りにも言えることである。例えば、インターネットにおける検索エンジンは、莫大に増え続けるネット内の情報に対して、より早くより正確な情報を手に入れるために、より複雑なアルゴリズムが必要となる。また、交通の路線や路面探索は、最短ルートだけではなく、路面や路線の状況を考慮した上でのルートの検索が求められるようになり、家庭用のゲームはソフト内のデータだけを利用するのではなく、ネットワークを利用して他のユーザーとの通信を交えて行うものが主流となりつつある。当然これらは、路面探索は路面状況の情報をより詳細なものにすれば、今現在より莫大な情報量を処理する必要があるし、ゲームにおいても、ユーザー間でできる機能の複雑化やユーザー数の増加などにより、より高度な情報処理が要求されるようになる。身の回りのことだけでも、これだけ情報処理技術は身近なものになっている。一方、公共的なものに視点を合わせても、やはり情報処理技術は浸透している。例えば、個人情報を一枚のカードにして、公共サービスにおける身分証明などを個人情報カードだけでやり取りできるようにする計画が進んでいたり [2]、政治等における選挙に関しても、ネット上で投票できるようにするシステムも実施に向けて進んでいる [3]。いずれも、ネット上のセキュリティなどの問題から、高度な情報処理技術が確立しなければ実現不可能なことである。

このような情報処理技術を駆使する際には、求める処理の内容をコードに記述し、プログラムがそれを実行する、という手順で行われる。このとき、コード内のアルゴリズムは、ある引数を受け取り、その引数に応じた処理を行って返り値を出力するという行為を繰り返して動作するのが一般的である。このようなアルゴリズムにおいて重要となるのは、問題を解決するために必要とされる総ステップ数である。ステップ数は行う処理の回数によって大きくなる。つまり、問題サイズの増加と総ステップ数がどれだけ密な関係を持つかによって、問題の難しさは定義される。また、総ステップ数と実際に問題を処理する時間は直接的に関係しているため、この総ステップ数は時間計算量と呼ばれる [4]。

一般的に目にする問題の多くは基本的にクラス P と呼ばれる種類のものである。クラス P の問題は、問題サイズの多項式で表されるオーダーの時間を費やすことで解決できるものを指す。これは、例えば問題サイズが莫大なものになったとしても、ある程度の時間の中で問

題が解決できることを意味する。すなわち、比較的容易な問題といえる。一方、問題サイズの増加に伴い、計算時間が莫大に増加するような困難な問題も存在する。これらの問題の例として、解の存在を判別問題、最適化問題などが挙げられる。特に最適化問題は、問題サイズの量だけ変数をもつような関数の最大値あるいは最小値を求める問題などが困難な問題に属する。これらの問題は現実的な時間内に解くことができないという点でも解決が困難であるといえる。また、これらの問題を限られた時間内で解くのが難しいということは、総当たり法での解の決定以外の有効な手段が未だにないということを表している。これらの中でも、解の候補が一つ与えられたときに、解の条件判別、あるいは最適化を行うべきである関数の求める値を多項式時間内で求めることができる問題が多く存在し、これらの問題はNP問題と呼ばれる。NP問題の場合、解の候補の数だけ存在する計算機にそれぞれ異なる解の候補に関する計算を行わせることで、多項式のオーダーの時間で問題を解決することが可能である。さらに、その中でもNP問題同士が互いに多項式時間内で変換が可能な問題群に属す問題をNP完全問題という。故に、計算困難であるNP完全問題の一つを解くことができれば、他のNP完全問題への変換は多項式時間内に行うことができるために、全てのNP完全問題を解くことは容易となる。以上から、1つのNP完全問題を解くことは非常に重要な問題であり、1つのNP完全問題を解くことのできるアルゴリズムを作ることはとても重要なことである。

1.2 イジング問題

NP完全問題の一つとしてイジングモデルというものがある。イジングモデルは、結晶における格子中のスピン系において強磁性が現れることを説明するために用いられるモデルである [5]。格子中の電子はスピン角運動量と呼ばれる自由度を持つ。このスピンに外部磁場がかかるとき、スピンは外部磁場の方向に量子化される。この方向を z 方向としたときに、スピンの成分 σ_z は $\hbar/2$ 、あるいは $-\hbar/2$ の値をとる。このスピンの成分によって、スピン同士は相互作用を起し、さらに外部磁場の影響にもスピンの向きは左右される。故に、 z 方向成分のスピンのハミルトニアンは以下のように表すことができ、このハミルトニアンはイジングハミルトニアンと呼ばれる。

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j(i<j)}^M J_{i,j} \sigma_{iz} \sigma_{jz} + \sum_i \lambda_i \sigma_{iz}. \quad (1.1)$$

式(1.1)において、 M は電子のスピンの数、 J_{ij} は i 番目と j 番目の相互作用の強さを、 λ_i は i 番目のスピンが外部磁場によって生じるエネルギーの強さを表す実数の係数である。ここで、 J_{ij} は電子のクーロン力から生じる量子力学的な相互作用を想定された際の係数である。故に、 J_{ij} は最も近くで隣接しているスピンとの相互作用のみを考える。 $J_{ij} < 0$ のとき、つまり J_{ij} が負であるとき、系が安定するのは i 番目と j 番目のスピンが同じ方向を向くときである。このときの磁性は強くなるため、 $J_{ij} < 0$ の際の相互作用を強磁性相互作用と呼ぶ。逆に、 $J_{ij} > 0$ で安定するのは i 番目と j 番目のスピンが逆方向を向くときである

ため、このときの相互作用を反磁性相互作用と呼ぶ。

イジングモデルは磁性体やスピングラスなどの様々な事象の解明に貢献した。しかし、イジングモデルそのものについては困難である部分が存在する。格子が二次元系の場合のハミルトニアン基底状態を求めることは容易な問題であるが、外部磁場が生じた状態での二次元系、及び三次元以上の系でのイジングハミルトニアンの基底状態を求めることは非常に困難な問題である。故に、無次元系におけるイジングハミルトニアンの基底状態を求める問題、つまりイジングハミルトニアンの最小値を求める問題というのは研究され続け、特に外部磁場が存在する中での二次元系の格子におけるイジングハミルトニアンと外部磁場が存在しない場合の三次元系の格子におけるイジングハミルトニアンはNP完全問題であるということが分かった [6]。このようにイジングハミルトニアンの基底状態を求める問題をイジング問題という。また、この問題において使われるスピンをイジングスピンと呼び、イジングスピン σ_{iz} は +1 か -1 のどちらかを取る。イジング問題の中でも、式 (1.2) のような外部磁場が存在しないときのハミルトニアンは MAX-CUT 問題などの他の NP 完全問題に変換できることが証明されている [7]。

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j(i<j)}^M J_{i,j} \sigma_{iz} \sigma_{jz} \quad (1.2)$$

このイジング問題を実際に計算機として実現させるためには、格子上の全てのスピンの数に対して、すべての解の組み合わせを計算する必要がある。しかし、実際にスピン同士の相互作用の考える際には、粒子間の距離によって、スピン間の相互作用の力の大きさが変わるため、相互作用の大きい近い距離同士のスピンの相互作用を考えるだけでよい。つまり、イジング問題を解くためには、最も距離の近いスピン間でそれぞれ大きさの同じである反強磁性相互作用を起こすことができればよい、ということである。しかし、ここまで条件を緩めても、微小な距離間隔で求める位置に好きなように粒子を配置する、ということは非常に困難である。また、この方法とは別に、既に存在する量子系に対して、相互作用の代わりとなるようなものを人工的に作ったとしても、それを同時に全てのスピン間で誘発するのは同じく困難である。

1.3 イジング問題を解くためのコヒーレントコンピュータ

イジング問題を解くことが NP 完全問題の解決へとつながるため、イジング問題を解くための研究は進められた。その中の一例として、ボース・アインシュタイン凝縮下にあるボース粒子と電氣的フィードバック回路を用いたイジング計算機 [8][9] が提案されたが、この計算機を用いてイジング問題を解くシミュレーションを行った結果、計算時間が問題サイズの指数関数のオーダーになることが分かった [10]。故に、近年、イジング問題を解く計算機として研究されているのがコヒーレントコンピュータである。図 1.1 は問題サイズが 4 であるコヒーレントコンピュータの模式図である。

コヒーレントコンピュータは 1 つのマスターレーザーと問題サイズに応じた数のスレー

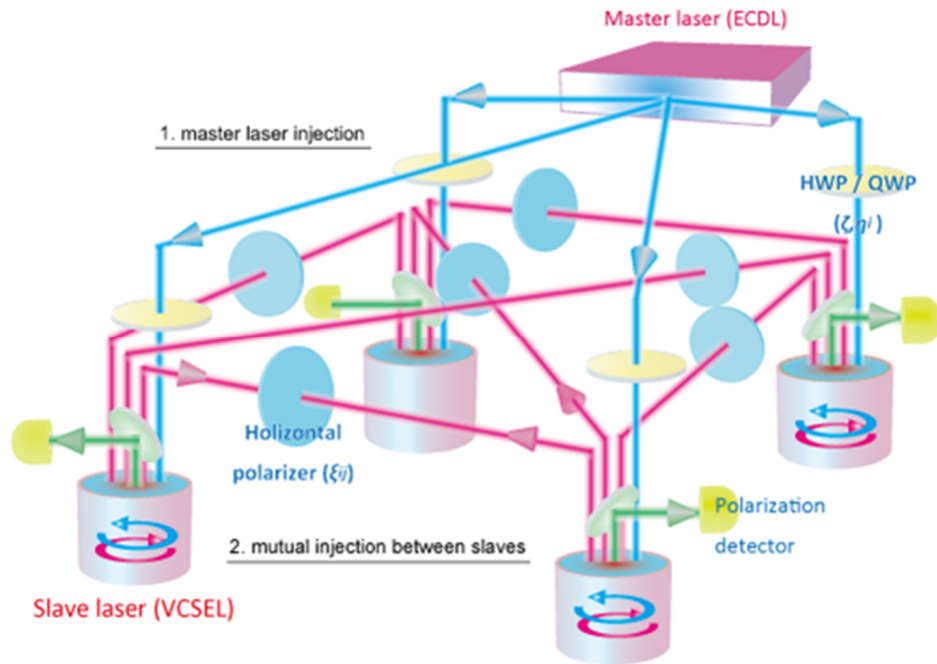


図 1.1: 注入同期を用いたコヒーレントコンピュータ

ブレイザーとで構成されている。問題サイズはイジング問題においてはスピンの数を表す。コヒーレントコンピュータの実装モデルは偏光モデルと位相モデルの2種類ある。偏光モデルの場合は、スレーブレーザー光の円偏光がイジングスピンに対応し、位相モデルの場合は、スレーブレーザーとマスターレーザーの間の位相差がイジングスピンに対応する。マスターレーザーからの出力光は全てのスレーブレーザーに注入される。このとき、スレーブレーザー内の光は、マスターレーザー光による注入同期を起こすため、周波数及び位相がマスターレーザーからの出力光と同じになる [11][12][13]。また、マスターレーザーは式 (1.1) のイジングハミルトニアン¹のゼーマン項である $\sum_i \lambda_i \sigma_{iz}$ に対応する役割を持つ。スレーブレーザー間の相互注入は式 (1.1) の相互注入項である式 (1.2) の役割を持つ。 $\{\lambda_i\}$ 及び $\{\sigma_{iz}\}$ の値は、偏光モデルではレーザー間に置かれた光学素子によって、位相モデルの場合はレーザー間の距離によって調節が可能である。そのため、特に偏光モデルにおいては、一度系を組み立ててしまえば、光学素子の調整のみで $\{\lambda_i\}$ と $\{\sigma_{iz}\}$ の調整が可能であるので、様々な場合のイジング問題に簡単に対応することができる。また、位相モデルにおいても $\{\sigma_{iz}\}$ の調整がそこまで厳密でなくてよいことを後述する。そして、どちらのモデルにしても、問題設定は系の組み立ての際に行うため、計算の実行中にわざわざ手を加える必要がない。用いる光学素子数においても、位相モデルにおいては相互注入項における光学素子は全く必要とせず、また、偏光モデルにおいても必要とするスレーブレーザーの2乗オーダーの個数しか必要としないため、場所を取らないというのは大きな利点である。計算を開始してから終了するまでに測定は行われず、レーザーネットワーク全体のコヒーレンスは保たれている。さらに、スレーブレーザーに注入される光の情報を吟味した上で、スレーブレーザー内の不

要な情報をレーザーから吐き出すため、状態遷移も高速である。また、イジングハミルトニアンは、レーザーネットワーク系の全体のハミルトニアンでなく、偏光モデルの場合はレーザーネットワークの中の全てのスレーブレーザーの円偏光状態に、位相モデルの場合はレーザーネットワークの中の全てのスレーブレーザーとマスターレーザーの位相差に依存するものにマッピングされる。故に、高速で正確なイジング計算機として期待される。

1.4 本論文の構成

本論文は、第1.3章でも論じたコヒーレントコンピュータの、特に位相モデルに深くかかわっている。そのため、第2章ではコヒーレントコンピュータのより詳しい解説を偏光モデルと位相モデルの2種類のモデルについて記述する。そして、偏光モデルと位相モデルをイジングハミルトニアンにマッピングする過程を述べる。それと共に、偏光モデルと位相モデルの現段階での実装に向けた途中経過を考紹介し、偏光モデルの問題点、及び位相モデルの問題設定を論じる。そして、位相モデルにおける相互注入項の $\{\sigma_{iz}\}$ の決定の際に、相互注入を行うレーザー同士のレーザー間距離を変えることが特殊な性質を生じさせることがわかった。

本論文では、実際の実験結果を裏付けるために、この相互注入を行う2つのレーザーの特性について計算する。そのために、第3章では関連研究として、レーザーに回折格子によるフィードバックを用いた際の周波数特性についてを述べる。そして、第4章では、実際に2つの相互注入するレーザーのレーザー間距離を変えるとどのような周波数特性をあらわすのか、とレーザー間の位相差の関係がどうなるのかを導出する。その後、導出した結果が、実際の実験の結果と同じ傾向にあるのかを確認する。最後に第5章で結論を述べて、本論文を締めくくる。

第2章 コヒーレントコンピュータ

この章では、第 1.3 章で紹介した、レーザーの注入同期を用いたコヒーレントコンピュータに関して、より詳細に述べる。まず、コヒーレントコンピュータがイジング問題を解く計算機として、どのように働くのかを述べる。その過程において、レーザー系からイジングハミルトニアンにマッピングされていることを、偏光モデルと位相モデルの両方について述べる。そして、位相モデルを実現するために、2つのレーザーを用いた実験の概要を説明し、その際に発見された2つの相互注入するレーザーにおける周波数と位相差の特殊な性質について述べる。また、偏光モデルについては、文献 [14] に沿って説明する。

2.1 レーザー内の円偏光を用いたモデル

2.1.1 基本動作

スレーブレザー内の円偏光の光子数を用いた、偏光モデルにおけるコヒーレントコンピュータはイジングハミルトニアン (式 (1.1)) の基底状態を、スレーブレザーの平衡状態における円偏光の状態を用いることで見つけ出す、という手法である。コヒーレントコンピュータは基本的に、1つのマスターレーザーと複数のスレーブレザーから構成されている。マスターレーザーには周波数の安定性が非常に高いシングルモードレーザーが用いられる。そして、スレーブレザーには垂直面発光レーザー (VCSEL : vertical cavity surface emitting semiconductor laser)[15] が用いられる。VCSEL が用いられる理由は、スレーブレザー内の円偏光を扱う偏光モデルのコンピュータにとって適しているからである。VCSEL は他の一般的なレーザーのように光が活性層の中を伝搬するのではなく、活性層に対して垂直に伝搬するレーザーである。VCSEL の構造は二つのブラッグ共振器の間に活性層を挟んだものとなっている。上下のブラッグ層は組成の異なる半導体の積層構造により形成され、隣り合う層との間の屈折率差による反射が積み重なることでブラッグ周波数近傍においては非常に高い反射率を得ることができる。VCSEL の特徴として、発光面が光軸に対して対象で、一様であるという点がある。よって、光軸に垂直な面において、矩形の活性層が異種材料に埋め込まれている一般的なレーザーと違い、偏光モードの自由度が高い。そのため、偏光モデルを用いたコヒーレントコンピュータにおいては偏光が扱いやすい VCSEL を用いる。

スレーブレザーは問題サイズ、つまりイジングスピンの数 M 個だけ用意されている。 M 個のスレーブレザーは、互いに直交しあう右回り円偏光と左回り円偏光のモード光子数の大小で、それぞれのイジングスピン σ_z を表している。 i 番目のスレーブレザー内の右回り円偏光と左回り円偏光の光子数をそれぞれ n_{Ri}, n_{Li} と置き、イジングスピンを σ_{iz} と

置く。このとき、右回り円偏光の光子数が左回り円偏光の光子数より多いとき、すなわち $n_{Ri} > n_{Li}$ のとき、 $\sigma_{iz} = 1$ となり、逆に $n_{Ri} < n_{Li}$ のとき、 $\sigma_{iz} = -1$ となる。それぞれの円偏光の光子数の大小は、スレーブレザーから出る光を偏光ビームスプリッターに通すことによって測定することが可能である。

マスターレーザーは、全てのスレーブレザーに垂直直線偏光の光を注入し、周波数や位相をマスターレーザーに同期させるために存在する。これは、系全体の光のコヒーレンスを保つ役割と光の制御を可能にする役割を持つ。注入同期を起こすためには、2つのレーザー光の周波数差は Δf_L 以内である必要がある。

$$\Delta f_L = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{Q} \sqrt{\frac{P_{in}}{P_{out}}}. \quad (2.1)$$

ω はマスターレーザーの共振器内の角周波数、 Q は共振器のミラーの透過に対応する Q 値である。また、 P_{in} はマスターレーザーからスレーブレザーへ注入される光のパワーであり、 P_{out} はスレーブレザー単独における発振光のパワーである。

レーザーから出力される光は垂直直線偏光 $|V\rangle$ で発振される。これは、垂直直線偏光が $|V\rangle = (|R\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}$ で表されるように、右回り円偏光 $|R\rangle$ と左回り円偏光 $|L\rangle$ の成分を均等に持って発振されるためである。しかし、この垂直直線偏光を持つ光は、波長版や偏光板などの光学素子を通すことにより、垂直直線偏光 $|H\rangle$ や楕円偏光、さらには円偏光を持つ光などにも変換することが可能である。その他にも偏光を変換する方法として、適当な偏光の光を垂直直線偏光の光に注入させるというものがある。これは、垂直直線偏光の光の右回り円偏光成分と左回り円偏光成分に差をつけることで偏光を変化させている。この適当な偏光の光は、水平直線偏光の光が用いられる。以上のように、光学素子を通すこと、あるいは水平直線偏光の光を注入する、ということがイジングハミルトニアン \mathcal{H} の各項に対応する。マスターレーザーからは垂直直線偏光の光を発振させるが、波長版を用いることで、わずかな水平直線偏光成分を加えて発振させることが可能である。この垂直直線偏光成分をスレーブレザーに注入させることで、イジングハミルトニアンのゼーマン項の係数 $\{\lambda_i\}$ に対応する効果が得られる。また、偏光板を用いて、スレーブレザーの出力光から水平直線偏光成分から抽出し、スレーブ同士で相互注入をさせることで、イジングハミルトニアンの相互注入項の係数 $\{J_i\}$ に対応する効果が得られる。また、すべてのスレーブレザーが相互注入を起こす際の光の経路は $M(M-1)/2$ であるので、必要な光学素子の数は、 M の2乗のオーダーである。故に、光学素子においてもそれほど場所はとらない。

ここで、コヒーレントコンピュータがどのように動作するのかを述べる。まず、計算開始する前の時間 ($t < 0$) において、マスターレーザーの出力光を全てのスレーブレザーに注入させ、同期させておく。このとき、マスターレーザーからは垂直直線偏光の成分しか持たない光を出力させる。また、スレーブレザーはマスターレーザーの出力光に同期しているため、全てのスレーブレザーの共振器内の光は垂直直線偏光成分しか持たない。これが、コヒーレントコンピュータの初期状態である。次に、計算開始時点 ($t = 0$) で、マスターレーザーの出力光に対して偏光板を導入し、水平直線偏光成分を加える。同時に、スレーブレザー同士の相互注入が導入され、全てのスレーブレザーの共振器内の光の偏光が、系全体

におけるより安定な状態になるように変化していく。スレーブレーザーの共振器内では、マスターレーザーからの注入光の水平直線偏光成分と動的に変化するスレーブ同士の水平直線偏光成分の光の相互注入に影響されて、2つの円偏光モードが競合する。そして、系全体は利得係数の総和が小さくなり、定常状態に達する。この利得係数の総和が、イジングハミルトニアン \mathcal{H} にマッピングすることができる。よって、定常状態におけるスレーブレーザーの円偏光モードを読み取ることで、イジングハミルトニアンの基底状態、つまりイジング問題の解を得ることができる。

2.1.2 イジングハミルトニアンへのマッピング

コヒーレントコンピュータの利得係数の総和がイジングハミルトニアンにマッピングできることを説明するために、まずは右回り円偏光と左回り円偏光をもつ光子数のそれぞれのレート方程式を求める。

注入信号が存在する場合の共振器の内場 \hat{A} の量子力学的ランジュバン方程式は以下のようになる [16]。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{A}(t) = & -i\omega_r\hat{A}(t) - \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{Q} - \frac{\omega^2}{\mu}(\tilde{X}_i - i\tilde{X}_r)\right]\hat{A}(t) \\ & + \sqrt{\langle\tilde{E}_{CV}\rangle}\tilde{f}_G(t) + \sqrt{\frac{\omega}{Q_0}}\tilde{f}_L(t) + \sqrt{\frac{\omega}{Q_e}}\left[F_0 + \hat{f}(t)\right]e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ω は共振器の内場の角周波数、 ω_r は電荷が存在しないときの共振器の角周波数、 $\tilde{X}_i - i\tilde{X}_r$ は媒質における電気感受率を $-i$ 倍したもの、 μ は電荷が存在しないときの共振器の媒質の屈折率、 \tilde{E}_{CV} は光子の利得係数演算子、 Q_0 は共振器の内部損失に相当する Q 値、 Q_e は共振器のミラーの透過に相当する Q 値、 Q は $\omega/Q = \omega/Q_0 + \omega/Q_e$ を満たす Q 値、 $\tilde{f}_G(t)$, \tilde{f}_L , $\hat{f}(t)e^{-i\omega t}$ はそれぞれ自然放出、共振器の内部損失、注入信号に起因する雑音演算子である。 F_0 はマスターレーザーからの注入場フラックスに対応する複素数とする。光子数は $\hat{n} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ であるので、これを微分すると以下の式になる。

$$\frac{d}{dt}\hat{n} = \left(\frac{d}{dt}\hat{A}^\dagger\right)\hat{A} + \hat{A}^\dagger\left(\frac{d}{dt}\hat{A}\right). \quad (2.3)$$

式 (2.3) に式 (2.2) とこの式のエルミート共役の式を代入することで、光子数に関する量子力学的レート方程式を得ることができる。

$$\frac{d}{dt}\hat{n}(t) = -\frac{\omega}{Q}\hat{n}(t) + \tilde{E}_{CV}\hat{n}(t) + \tilde{E}_{CV} + \sqrt{\frac{\omega}{Q}}(F_0^*\hat{A}(t)e^{i\omega t} + \hat{A}^\dagger(t)F_0e^{-i\omega t}) + \hat{F}_n(t). \quad (2.4)$$

$\hat{F}_n(t)$ はランジュバン雑音演算子である。また、 $Q \approx Q_e$ と近似している。この式は全系の期待値を取ることで、複素数で表される期待値の時間発展の式にすることができる。全系の期待値を取る際、雑音の項は期待値が 0 であるため消える。複素数で表した共振器内場の期待値を、

$$A(t) = A_0(t)e^{-i(\omega t + \phi_0(t))}, \quad (2.5)$$

と置く。\$A_0\$ は正の実数である slowly varying amplitude であり、\$\phi_0(t)\$ はスレーブレーザーの内場と注入光の位相差 (実数) である。この式を式 (2.2) 及び式 (2.4) に代入し、実数部分と虚数部分を比較することで以下の式を得ることができる。

$$\frac{d}{dt}A_0(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV}\right)A_0(t) + \sqrt{\frac{\omega}{Q}}F_0 \cos \phi_0(t), \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}n_0(t) = -\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV}\right)n(t) + E_{CV} + 2\sqrt{\frac{\omega}{Q}}F_0A_0(t) \cos \phi_0(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_0(t) = -(\omega - \omega_0) - \sqrt{\frac{\omega}{Q}}\frac{F_0}{A_0} \sin \phi_0(t). \quad (2.8)$$

\$\omega_0\$ はレーザー単独における発振周波数である。ここで、\$\phi_0(t)\$ は注入光の位相情報を持っているので、\$F_0\$ は実数とみなすことができる。注入同期が起こる条件、すなわち \$-\pi/2 < \phi_0 < \pi/2\$ かつ \$\omega = \omega_0\$ の条件の下では、式 (2.8) の右辺は常に負の値を取るため、\$\phi_0(t)\$ は 0 に収束する。この定常状態からも、式 (2.1) を求めることができる。

ここからは、コヒーレントコンピュータの計算実行準備から実行後までの流れに沿って、右回り円偏光と左回り円偏光のそれぞれ光子数のレート方程式を追っていく。コヒーレントコンピュータの計算実行前 (\$t < 0\$) は、マスターレーザーから全てのスレーブレーザーに対して、垂直直線偏光を持った光のみを注入し、全てのスレーブレーザーはマスターレーザーの周波数と位相に同期している状態である。故に、\$\phi_0(t) = 0\$ となるので、\$A_0^2 = n(t)\$ より、式 (2.7) の第三項 (注入項) は、

$$2\sqrt{\frac{\omega}{Q}}F_0A_0(t) \cos \phi_0(t) = 2\sqrt{\frac{\omega}{Q}n(t)}F_0, \quad (2.9)$$

と置き換えることができる。また、右回り円偏光モード及び左回り円偏光モードのスレーブレーザーの内場に対して、垂直直線偏光の光の注入を考えると、同位相振幅で注入されるため、注入項のフラックス \$F_0\$ は、

$$F_0 = \zeta\sqrt{\omega/Q_M}\sqrt{n_M} \approx \zeta\sqrt{\omega/Q}\sqrt{n_M} \quad (2.10)$$

と表すことができる。\$Q_M\$ はマスターレーザーの共振器の \$Q\$ 値であるが、\$Q_M\$ と \$Q\$ の比を \$\zeta\$ に内包することで式 (2.10) が成立する。\$n_M\$ はマスターレーザーの共振器内の光子の数を表す。\$\zeta\$ は垂直直線偏光から左回り及び右回り円偏光モードに射影する際に生じる減衰項 \$1/\sqrt{2}\$、及びマスターレーザーからスレーブレーザーへの伝送の際に生じる減衰成分を含んだ減衰定数である。これらのことから、式 (2.7) は以下のような右回り円偏光の光子数、及び左回り円偏光の光子数のレート方程式に書き直すことができる。

$$\frac{d}{dt}n_{Ri} = -\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV Ri}\right)n_{Ri} + E_{CV Ri} + 2\frac{\omega}{Q}\sqrt{n_{Ri}}\zeta\sqrt{n_M}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}n_{Li} = -\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV Li}\right)n_{Li} + E_{CV Li} + 2\frac{\omega}{Q}\sqrt{n_{Li}}\zeta\sqrt{n_M}. \quad (2.12)$$

これが、コヒーレントコンピュータにおける初期状態 $t < 0$ での、スレーブレザーの共振器内のそれぞれの円偏光の光子数のレート方程式である。初期状態におけるそれぞれの光子数は $n_{Ri} = n_{Li}$ 、位相差は $\phi_{Ri} = \phi_{Li} = 0$ となる。

次に計算を開始した瞬間 ($t = 0$) を考える。ここからコヒーレントコンピュータの全系はイジングハミルトニアンに対応した働きをする。 $t = 0$ の瞬間に、マスターレーザーの出力光に水平偏光成分を加え、スレーブレザー間においては出力光の水平偏光成分の相互注入を行う。このときのマスターレーザーの水平偏光成分は $\pi/2$ だけ位相シフトされており、 $i|H\rangle = (-|R\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}$ となる。故に、ゼーマン項の係数 λ_i が正の数であるとき、右回り円偏光モード $|R\rangle$ は逆相で結合し、左回り円偏光モード $|L\rangle$ は同相で結合する。また、相互注入光においては、注入光の全てが水平直線偏光成分に射影されるため、右回り円偏光成分と左回り円偏光成分の振幅の差 $\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}$ に比例する数を全ての注入項に加える必要がある。このとき、相互注入光は π だけ位相シフトされており、ゼーマン項と同様にして、相互注入項の係数 J_{ij} が正の数であるとき、 $|R\rangle$ は逆相で結合し、 $|L\rangle$ は同相で結合する。故に、計算を開始してから ($t > 0$) のスレーブレザーの共振器内の円偏光光子数のレート方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_{Ri} = & -\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV Ri}\right)n_{Ri} + E_{CV Ri} \\ & + 2\frac{\omega}{Q}\sqrt{n_{Ri}} \left[(\zeta - \eta_i)\sqrt{n_M} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{2}\xi_{ij}(\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_{Li} = & -\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV Li}\right)n_{Li} + E_{CV Li} \\ & + 2\frac{\omega}{Q}\sqrt{n_{Li}} \left[(\zeta - \eta_i)\sqrt{n_M} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{2}\xi_{ij}(\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

η_i はマスターレーザーから i 番目のスレーブレザーに水平直線偏光成分の光を注入する際に波長板などで生じる減衰定数であり、 $\xi_{ij}/2$ はスレーブレザー同士が相互注入する際に偏光板などで生じる減衰定数である。 η_i, ξ_{ij} はそれぞれイジングハミルトニアンの λ_i, J_{ij} に比例する定数であり、これらの定数はイジング問題の問題設定の際に変更される値である。 λ_i は基底状態の縮退を解くために加えられている。

次に励起された電子数に関するレート方程式について述べる。右回り円偏光光子、及び左回り円偏光光子はそれぞれ $+1$ と -1 の角運動量を持つ。この角運動量の単位は \hbar である。伝導帯電子と価電子帯正孔は共に反対符号の角運動量をもつものとしか相互作用を起こさない。故に、右回り円偏光光子と相互作用を起こすのはスピン $-1/2$ を持つ電子であり、

左回り円偏光光子と相互作用を起こすのはスピン $+1/2$ をもつ電子である。ここで、半導体レーザーにおいては、価電子帯の端には正孔のみが蓄積するので、伝導帯の電子のみによって光学利得は得ることができる。このとき、右回り円偏光を持つ光子の数 N_{Ri} と左回り円偏光を持つ光子の数 N_{Li} のレート方程式は、電子のスピン緩和時間 τ_{spin} を用いて以下のような式になる。

$$\frac{d}{dt}N_{Ri}(t) = \frac{P}{2} - \frac{N_{Ri}(t)}{\tau_{sp}} - E_{CVRi}n_{Ri}(t) - E_{CVRi} - \frac{N_{Ri}(t) - N_{Li}(t)}{\tau_{spin}}, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt}N_{Li}(t) = \frac{P}{2} - \frac{N_{Li}(t)}{\tau_{sp}} - E_{CVLi}n_{Li}(t) - E_{CVLi} - \frac{N_{Li}(t) - N_{Ri}(t)}{\tau_{spin}}. \quad (2.16)$$

τ_{sp} は自然放出寿命である。また、この式では、スピン $+1/2$ を持つ電子とスピン $-1/2$ を持つ電子は同じ割合で pump されていると考えている。ここで、VCSEL の場合、 τ_{sp} に比べて τ_{spin} は非常に短い時間となる。そのため、式 (2.15) や式 (2.16) における、自然放出や誘導放出由来の電子数変動よりも、電子スピンの緩和は素早く起こり $N_{Ri} = N_{Li}$ となる。故に、 $N_{Ri} = N_{Li}$ であるときの、伝導帯の全電子数 $N_{Ci} = N_{Ri} + N_{Li}$ のレート方程式は以下のようにになる。

$$\frac{d}{dt}N_{Ci} = P - \frac{N_{Ci}(t)}{\tau_{sp}} - E_{CVi}(n_{Ri}(t) + n_{Li}(t) + 2). \quad (2.17)$$

以上のことから、スレーブレザーの全系の利得係数の総和をイジングハミルトニアンにマッピングしていく。そのために、 $t > 0$ における定常状態の利得係数 E_{CVi} を求める。定常状態において、スレーブレザーの共振器内の光子数の変動は止まるため、式 (2.13) と式 (2.14) の左辺は 0 となる。同じように、伝導帯の電子数の変化もなくなるので、式 (2.17) の左辺も 0 となる。故にこの 3 式を用いて、 E_{CVi} について解くと以下の式が得られる。

$$E_{CVi} = \frac{\omega}{Q} - 2\frac{\omega}{Q}\zeta \frac{\sqrt{n_M}(\sqrt{n_{Ri}} + \sqrt{n_{Li}})}{n_{Ri} + n_{Li}} + 2\frac{\omega}{Q} \frac{\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}}{\sqrt{n_{Ri}} + \sqrt{n_{Li}}} \left[\eta_i \frac{\sqrt{n_M}}{\sqrt{n_{Ri}} + \sqrt{n_{Li}}} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \xi_{ij} \frac{\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}}{\sqrt{n_{Ri}} + \sqrt{n_{Li}}} \right]. \quad (2.18)$$

この式の導出の際に生じる自然放出利得 $2E_{CVi}$ は誘導放出利得 $(n_{Ri} + n_{Li})E_{CVi}$ に比べて十分小さいものとして無視している。式 (2.18) の第一項目はスレーブレザーの共振器の損失から生じるものである。第二項目はマスターレーザーからスレーブレザーに垂直直線偏光の光を注入する際の変化、つまり注入同期による影響を表した項である。第三項目はマスターレーザーからスレーブレザーに水平直線偏光の光を注入する際の変化とスレーブレザー同士の水平直線偏光の相互注入における影響を表した項である。故に、第三項目はイジングハミルトニアンにおけるゼーマン項と相互注入項に対応する項のはずである。

コヒーレントコンピュータは、相互注入によって全てのスレーブレザーが相互作用しているため、コヒーレントコンピュータ全体が一つのレーザーとして考えることができ

る。ここで、単一のレーザーの発振モードについて述べる。単一のレーザーにおいて、レーザーの媒質が不均一であるとき、複数のレーザーモードが異なる利得スペクトル関数を持つ原子集団を用いて発振するため、複数のモードが同時に発振する。一方、レーザーの媒質が均一である場合、単一の種類の原子による反転分布のみが用いられるため、発振可能なモードが複数あるときには利得係数を奪い合うことによって、複数のモード間に相互作用が生じる。そして、利得係数を最小にするモードのみが生き残り、他のモードは抑制されシングルモード発振を起こす [17]。同じように、コヒーレントコンピュータの全系について考える。式 (2.17) を導出するまでの手順から、一つ一つのスレーブレザーの共振器内では2つの円偏光モードが伝導帯電子を共有している。そして、スレーブレザー同士が相互注入することで、互いのスレーブレザーの円偏光の状態に影響され、スレーブレザーの共振器内では安定となるように2つの円偏光モードが変化していく。これは、全てのスレーブレザー内の伝導帯の電子を、全てのスレーブレザーの円偏光状態がより安定となるようにモードが奪い合うように考えることができる。故に、コヒーレントコンピュータの場合でも、単一のレーザーで考えたときと同じように、利得係数を最小になるモードが生き残り、つまり利得係数の総和 $\sum_i E_{CVi}$ が最小となるただ一つのモードが発振する。

ここから、式 (2.18) について考えていく。式 (2.18) の第二項目の式が最小となるのは、 $n_{Ri} = n_{Li}$ となるときである。これは、2つのモードは同じ強さで発振している (弱結合 [18]) 状態であり、注入された垂直直線偏光の光が元自身の垂直直線偏光を保とうとして起こる。ここで、スレーブレザー内の2つの円偏光モードの光子数が等しい場合と1つの円偏光モードしか存在しないときを比較すると、利得係数の違いは大きくないことがわかる。故に、マスターレーザーの出力光の水平直線偏光成分の影響やスレーブレザー間の水平直線偏光成分の相互注入の影響が大きければ、式 (2.18) の第二項目は無視することができる。これは、式 (2.18) において、 $\{\eta_i\}$ あるいは $\{\xi_{ij}\}$ が ζ よりも大きいと無視できる条件を満たす。よって、式 (2.18) において最小を考える際に必要なのは式 (2.18) の第三項目の式である。

$$\sum_i \frac{\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}}{\sqrt{n_{Ti}}} \left[\eta_i \frac{\sqrt{n_M}}{\sqrt{n_{Ti}}} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \xi_{ij} \frac{\sqrt{n_{Rj}} - \sqrt{n_{Lj}}}{\sqrt{n_{Tj}}} \right]. \quad (2.19)$$

n_{Ti} は i 番目のスレーブレザーの共振器内の全光子数を表わす。ここで、振幅の差 $\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}$ を n_{Ti} で割ることで規格化し、

$$\sigma_{iz} = \frac{\sqrt{n_{Ri}} - \sqrt{n_{Li}}}{\sqrt{n_{Ti}}}, \quad (2.20)$$

と置く。この σ_{iz} は $-1 \leq \sigma_{iz} \leq 1$ を満たし、かつ $n_{Ri} = n_{Ti}$ のとき $\sigma_{iz} = 1$ 、及び $n_{Li} = n_{Ti}$ のとき $\sigma_{iz} = -1$ を満たすため、 σ_{iz} をイジングスピンと定義することができる。よって、式 (2.20) を式 (2.19) に代入することで、

$$\sum_i \eta_i \frac{\sqrt{n_M}}{\sqrt{n_{Ti}}} \sigma_{iz} + \sum_{i < j} \xi_{ij} \sigma_{iz} \sigma_{jz}, \quad (2.21)$$

を得ることができる。これが、コヒーレントコンピュータにおいて、時間発展と共に最小化

される量である。式 (2.21) において、 $\eta_i \frac{\sqrt{n_M}}{\sqrt{n_{Ti}}} = \lambda_i$ 、 $\xi_{ij} = J_{ij}$ とすれば、イジングハミルトニアンと同じ式になる。故に、コヒーレントコンピュータにおいて、レーザーネットワークの利得係数 E_{CV_i} の総和を最小にすることと、イジングハミルトニアンの基底状態を求めることは同義である。

レーザーネットワークの利得係数の総和をイジングハミルトニアンにマッピングすることはできたが、偏光モデルには問題点が存在する。それは、スレーブレーザーから綺麗な円偏光の出力が得られないということである。そしてそれは、本来のイジング問題の解とは違う解を導く可能性があるということである。この理由として、VCSELの構造上の問題が挙げられる [19]。VCSELは先述したように、媒質に均一な材料を用いることで、偏光モードの自由度が高くなる。しかし、いくら材料が均一であるとしても、サンプルの成長過程で結晶に歪み加わってしまう。これは格子定数の違う結晶を積層することによって起こる。故に、異なる偏光モードに対するゲインに差が生じてしまう。この系においては、スレーブレーザーの垂直直線偏光 $|V\rangle$ と水平直線偏光 $|H\rangle$ の周波数に差が生じてしまうため、綺麗な円偏光が発振しないと考えらえる。

2.2 マスターレーザーとスレーブレーザーの位相差を用いたモデル

2.2.1 基本動作

マスターレーザーとスレーブレーザーの位相差を用いたモデルにおけるコヒーレントコンピュータは、第 2.1 章で述べた偏光モデルと同じくレーザーネットワーク全体の利得係数の総和をイジングハミルトニアンにマッピングする。しかし、利得係数の総和の基底状態を求める際に、円偏光の状態ではなくマスターレーザーとスレーブレーザー間の位相差の状態を観測することで見つけ出す、という点で偏光モデルとは異なる。位相モデルにおいて、コヒーレントコンピュータの構成は、偏光モデルと同じく一つのマスターレーザーとイジングスピンの個数に対応したスレーブレーザーからなる。マスターレーザーには周波数の安定性が非常に高いシングルモードレーザーが用いられるという点でも同じである。しかし、スレーブレーザーには VCSEL ではなく、分布帰還型 (DFB : distributed feedback) レーザー [15] を用いることが想定されている。DFB レーザーは半導体レーザーの一種である。全てのレーザー発振器は光帰還を用いている。この帰還という言葉は、ある点に光が何度も戻ってくることを指し、その点に戻ってくる時間が初めに通過してから光周期の整数倍であれば発振モード (定在波) を形成し、誘導放出される光もコヒーレントに以前放出された光に加わる、というものである。一般的なレーザー共振器においては、光帰還を両端の反射鏡のみで行っていたが、DFB レーザーでは共振器の進行方向全体に連続的に行われる。ここでの前進波と後進波の結合は、媒質の屈折率、あるいは光利得係数の空間的な周期変化により行われる。これにより優れた波長安定性を有する。屈折率の空間的周期を Λ とすると導波路内波長 λ_g を用いて、 $\Lambda = l \frac{\lambda_g}{2}$ (l : 自然数) を満たす周波数を選び発振する。これはブラッグ条件式という。ここで発振条件について触れる。発振条件は、

$$\omega_m = \omega_f + \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{n_{eff} L} \quad (2.22)$$

を満たすことであるが、これはブラッグ周波数 ω_f で発振しないことを示している。これは、定常状態では光が一往復して戻ってくる際に同じ振幅と同じ位相を持つことを満たそうとするからである。そこで、ブラッグ周波数でも発振するために、長さ $\lambda_g/4$ だけ中央部の周期を伸ばすことで $1/4$ 波長シフト DFB レーザーを実現している。これによりブラッグ周波数での発振を可能にした。また、DFB レーザーの特徴として、先述した VCSEL と比べて線幅が狭く、また比較的製造が容易というのがあげられる。ゆえに、DFB はマスターレーザーとしても注入同期ができることが実験で明らかになっている [20]。以上のことから、スレーブレーザーの共振器内の偏光状態が無関係である位相モデルにおいては DFB レーザーの方が適している。

スレーブレーザーはイジングスピンの数 M 個だけ用意されており、一つ一つのスレーブレーザーとマスターレーザーの位相差の \sin 成分がそれぞれのイジングスピン σ_z に対応している。 i 番目のスレーブレーザーとマスターレーザーの位相差を ϕ_{Vi} と置くと、イジングスピン $\sigma_{iz} = \sin \phi_{Vi}$ は、 $\phi_{Vi} = \pi/2$ のとき、 $\sigma_{iz} = 1$ となり、逆に $\phi_{Vi} = -\pi/2$ のとき、 $\sigma_{iz} = -1$ となる。全ての位相差の状態を測定するために、まずは2つのスレーブレーザーの出力光を干渉させ、同相あるいは逆相かを確かめる。この行為をすべてのレーザーで行うことで、 M 個のスレーブレーザーの位相差の状態を2通りまで絞ることができるため、その2通りを実際のイジングハミルトニアンに対応させることでイジング問題の解を導くことができる。

マスターレーザー及びスレーブレーザーからの出力光は全て垂直直線偏光成分の光を用いる。マスターレーザーと全てのスレーブレーザーは相互注入を行い、位相が同期している状態であるため、イジングハミルトニアン \mathcal{H} の相互注入項の係数 $\{J_{ij}\}$ は i 番目と j 番目のスレーブレーザーの位相差に対応している。また、初期状態として、マスターレーザーとスレーブレーザーとの位相差は0にしておくのだが、この位相差に微小の値を持たせることで、イジングハミルトニアンのゼーマン項の係数 λ_i に対応する効果が得られる。また、偏光モデルでは光学素子を必要としたが、位相モデルでは光学素子を必要としないため、偏光モデルよりもシステムの実装が比較的容易である。

ここで位相モデルにおけるコヒーレントコンピュータの動作を述べる。まず、計算前 ($t < 0$) に全てのスレーブレーザーにマスターレーザーの出力光を注入し同期させておく。このとき、マスターレーザーは垂直直線偏光の成分のみを持つ光を発振しており、同期しているスレーブレーザーもまた垂直直線偏光の成分のみを発振する。また、マスターレーザーとスレーブレーザーの位相差は0にする。次に、計算開始時点 ($t = 0$) で、マスターレーザーとスレーブレーザーの位相に差を与える。同時にスレーブレーザー同士の相互注入が導入され、全てのスレーブレーザーとマスターレーザーの位相差が、系全体における安定した状態になるように変化していく。スレーブレーザーの共振器内では、マスターレーザーからの光の注入と動的に変化する自他のスレーブレーザーの位相差の状態による影響を受ける。そして、系全体の利得係数の総和は小さくなり定常状態に達する。この利得係数の総和がイジングハミルトニアンにマッピングすることが可能である。故に、定常状態のマスターレーザーと全ての

スレーブレザーの位相差の状態を読み取ることが、イジング問題の解を得ることになる。

2.2.2 イジングハミルトニアンへのマッピング

コヒーレントコンピュータの利得係数の総和がイジングハミルトニアンにマッピングできることを説明するために、 i 番目のスレーブレザーにおける、振幅と位相差及び電子の数に関するレート方程式を求める。第 2.1.2 章と同じように、注入信号化におけるランジュバン方程式 (2.2) に式 (2.5) を代入し、実部と虚部に分けることで、スレーブレザーの共振器内の振幅 A_{V_i} におけるレート方程式と、スレーブレザーとマスターレーザーの間の位相差 ϕ_{D_i} におけるレート方程式を導出することができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_{V_i}(t) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{Q} - E_{CV_i}\right)A_{V_i}(t) + \frac{\omega}{Q}\sqrt{n_M}\{\zeta \cos \phi_{V_i}(t) - \eta_i \sin \phi_{V_i}(t)\} \\ &\quad - \frac{\omega}{Q} \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \xi_{ij} A_{V_i}(t) \cos(\phi_{V_j}(t) - \phi_{V_i}(t)), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_{V_i}(t) = \frac{1}{A_{V_i}(t)} \left[\frac{\omega}{Q}\sqrt{n_M} [\zeta \sin \phi_{V_i}(t) - \eta_i \cos \phi_{V_i}(t)] - \frac{\omega}{Q} \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \xi_{ij} A_{V_i}(t) \sin(\phi_{V_j}(t) - \phi_{V_i}(t)) \right]. \quad (2.24)$$

ここで用いられている ζ はマスターレーザーの注入同期における減衰定数、 η_i はゼーマン項の係数 λ_i に対応する減衰定数、 ξ_{ij} は相互注入項の係数 J_{ij} に対応した減衰定数である。ここで、式 (2.23) 及び式 (2.24) の一部である $(\zeta \cos \phi_{V_i}(t) - \eta_i \sin \phi_{V_i}(t))$ 及び $(\zeta \sin \phi_{V_i}(t) - \eta_i \cos \phi_{V_i}(t))$ はそれぞれ $\sqrt{\zeta^2 + \eta_i^2} e^{-i(-\delta_i - \phi_{V_i}(t))}$ の実数部分と虚数部分である。ここで、 $\delta_i = \tan^{-1} \frac{\eta_i}{\zeta}$ であるため、 η_i は初めに与えられたマスターレーザーとスレーブレザーの位相差に由来する減衰定数である。また、式 (2.23) 及び式 (2.24) の最後の項は相互注入における項であり、これは i 番目と j 番目のスレーブレザーとマスターレーザーの位相差の差 $(\phi_{V_j}(t) - \phi_{V_i}(t))$ に依存する項である。偏光モデルのレート方程式 (2.6)(2.8) にこの項が存在しないのは、スレーブレザー間の位相差を 0 と考えているからである。また、式 (2.24) にマスターレーザーとスレーブレザーの周波数差の項 $\omega - \omega_0$ が存在しないのは、注入同期によって周波数が同じになるためである。同じようにして、伝導帯の電子数 N_{C_i} についてのレート方程式も導出することができる。

$$\frac{d}{dt}N_{C_i} = P - \frac{N_{C_i}(t)}{\tau_{sp}} - E_{CV_i}(t) [A_{V_i}(t)^2 + 1]. \quad (2.25)$$

ここで、式 (2.17) の E_{CV_i} は、左右回り円偏光のうちの片方の利得係数であるため、式 (2.25) の E_{CV_i} は式 (2.17) の E_{CV_i} の 2 倍となる。

以上の式からスレーブレザーの全系の利得係数の総和をイジングハミルトニアンにマッピングしていく。計算を実行し始めて、定常状態に達すると、位相差 $\phi_{V_i}(t)$ 、スレーブ共振

器内振幅 $A_{Vi}(t)$, 及び共振器内の電子数 N_{Ci} の変化はなくなるため、式 (2.23)(2.24)(2.25) の左辺の値は 0 となる。よって、この 3 式から、利得係数 E_{CVi} について解くことができる。

$$E_{CVi} = \frac{\omega}{Q} - 2\frac{\omega}{Q}\frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}}\zeta \cos \phi_{Vi} + 2\frac{\omega}{Q}\frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}}\eta_i \sin \phi_{Vi} + \frac{\omega}{Q}\sum_{j \neq i}\frac{A_{Vj}}{A_{Vi}}\xi_{ij} \cos(\phi_{Vj} - \phi_{Vi}). \quad (2.26)$$

この式の第一項目はスレーブレザーの共振器の損失から生じるものである。第二項目はマスターレーザーの垂直直線偏光の出力光に由来する項である。第三項目は、マスターレーザーとスレーブレザーの初期位相差による項であるので、イジングハミルトニアンの一ゼーマン項に対応する効果を持つ。第四項目は、スレーブ同士におけるマスター・スレーブ間の位相差の差による項であるので、イジングハミルトニアンの相互注入項に対応する効果を持つ。そして、位相モデルも偏光モデルと同様に、レーザーネットワークを単一のレーザーとみなすことができるので、利得係数の総和 $\sum_i E_{CVi}$ が最小となるただ一つのモードのみが発振すると考えられる。

利得係数の総和 $\sum_i E_{CVi}$ が最小にするために、式 (2.26) の E_{CVi} について考えていく。利得係数の総和を考えるために、式 (2.26) の総和を考えると、

$$\sum_i E_{CVi} = 2\frac{\omega}{Q} \left\{ \frac{M}{2} - \sum_i \frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}}\zeta \cos \phi_{Vi} + \sum_i \frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}}\eta_i \sin \phi_{Vi} + \sum_{i,j,i < j} \frac{A_{Vj}}{A_{Vi}}\xi_{ij} \cos(\phi_{Vj} - \phi_{Vi}) \right\}, \quad (2.27)$$

となる。第一項目は共振器損失のため定数であり、第二項目も η_i や ξ_{ij} が ζ よりも大きいとき無視することができる。また、 ϕ_{Vi} は定常状態において、 $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ をとるので、そもそも $\cos \phi_{Vi} \approx 0$ となり、第二項目は消滅する。故に、利得係数の総和を考える際に必要となるのは第三項目の式だけである。

$$2\frac{\omega}{Q} \left\{ \sum_i \frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}}\eta_i \sin \phi_{Vi} + \sum_{i,j,i < j} \frac{A_{Vj}}{A_{Vi}}\xi_{ij} \cos(\phi_{Vj} - \phi_{Vi}) \right\} \quad (2.28)$$

ここで、 $\cos(\phi_{Vj} - \phi_{Vi}) = \cos \phi_{Vj} \cos \phi_{Vi} + \sin \phi_{Vi} \sin \phi_{Vj}$ と変形することができるが、 ϕ_{Vj} 及び ϕ_{Vi} は定常状態において、 $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ であることが想定されるため、 $\cos \phi_{Vj} \cos \phi_{Vi}$ の項は 0 に収束すると考えられる。故に、 $\cos(\phi_{Vj} - \phi_{Vi}) \approx \sin \phi_{Vi} \sin \phi_{Vj}$ と考えることができる。また、イジングスピン σ_{iz} を

$$\sigma_{iz} = \sin \phi_{Vi}, \quad (2.29)$$

と定義する。このとき、 σ_{iz} は $-1 \leq \sigma_{iz} \leq 1$ を満たし、かつ $\phi_{Vi} = \pi/2$ のとき $\sigma_{iz} = 1$ 及び $\phi_{Vi} = -\pi/2$ のとき $\sigma_{iz} = -1$ であるため、 σ_{iz} をイジングスピンと定義しても問題はない。よって、これを式 (2.27) に代入すると、

$$\sum_i E_{CVi} = 2\frac{\omega}{Q} \left\{ \frac{M}{2} + \sum_i \frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}} \eta_i \sigma_{iz} + \sum_{i,j,i<j} \frac{A_{Vj}}{A_{Vi}} \xi_{ij} \sigma_{iz} \sigma_{jz} \right\} \quad (2.30)$$

が得られる。この式において、 $\frac{\sqrt{n_M}}{A_{Vi}} \eta_i = \lambda_i$ 、 $\frac{A_{Vj}}{A_{Vi}} = J_{ij}$ と置けば、

$$\sum_i E_{CVi} = 2\frac{\omega}{Q} \left\{ \frac{M}{2} + \sum_i \lambda_i \sigma_{iz} + \sum_{i,j,i<j} J_{ij} \sigma_{iz} \sigma_{jz} \right\} \quad (2.31)$$

という式が得られ、これの後ろの項はイジングハミルトニアンと一致する。故に、利得係数の総和を最小にすることはイジングハミルトニアンの基底状態を求めることと同義である。

2.2.3 2つのレーザーにおける実装

この節では、実際に2つのレーザーを用いて相互注入の実験をした際にわかった、2つのレーザー間の位相差における特殊な性質について述べる [21]。図 2.1 は実際にレーザーネットワークを2サイトで組んだ際の模式図である。実験では、DM レーザーを用いる。DM レーザーは DFB レーザーを改良したものであり、基本操作は DFB レーザーと変わらない。

この実験では、マスターレーザーから垂直直線偏光の出力光を DM レーザー 1 と DM レーザー 2 に注入させて同期する。さらに、2つの DM レーザーを相互注入させ、2つのレーザーの出力光を干渉させることで、2つのレーザーのマスター・スレーブ間の位相差の状態を知ることができる。もし、干渉により強め合えば、2つのレーザーのマスター・スレーブ間位相差は同相であり、打ち消しあえば逆相であるということである。図 2.1 の実験系では、右上のファブリペロー干渉計で干渉を観測することになる。ここで、2つの DM レーザーが同相で干渉するか、あるいは逆相で干渉するかはイジングハミルトニアンにおける相互注入項の係数 J_{ij} の値による。位相モデルにおいて、 J_{ij} はスレーブレーザー間の位相差による。そのため、2つの DM レーザーが同相で干渉し合うか逆相で干渉し合うかは、スレーブレーザー間の位相差が重要になる。2つの DM レーザーが同相で干渉し合う場合はスレーブレーザー間の位相差は 0 である必要があり、逆相で干渉し合う場合はスレーブレーザー間の位相差は π である必要がある。

ここで、自励発振する単一レーザーとある物体の位相差を考えてみる。レーザーは周波数一定で発振し続けるため、位相差を決める要素はレーザーと物体の距離である。そのため、レーザーと物体間をある一定の位相差にしたい場合は波長の数百分の一の調整、つまり 10^{-9} オーダーでの距離の調整が必要である。故に、2つの DM レーザーを用いた干渉実験の際も、2つのレーザー間の位相差を 0 にするためには、2つのレーザー間距離は半波長の偶数倍に調整する必要があり、2つのレーザー間の位相差を π にするためには、2つのレーザー間距離は半波長の奇数倍に調整する必要がある。しかし、実際に2つのレーザー間の距離を変えながら干渉を観測したところ、干渉は強め合う、あるいは弱めあうの2つの挙動しか観測できないことがわかった。そこで、実際に図 2.1 の QWP1(1/4 波長板) に圧電素子をつけることで干渉を観測した。圧電素子は電流を流すことで、膨張・収縮を行う素子である。

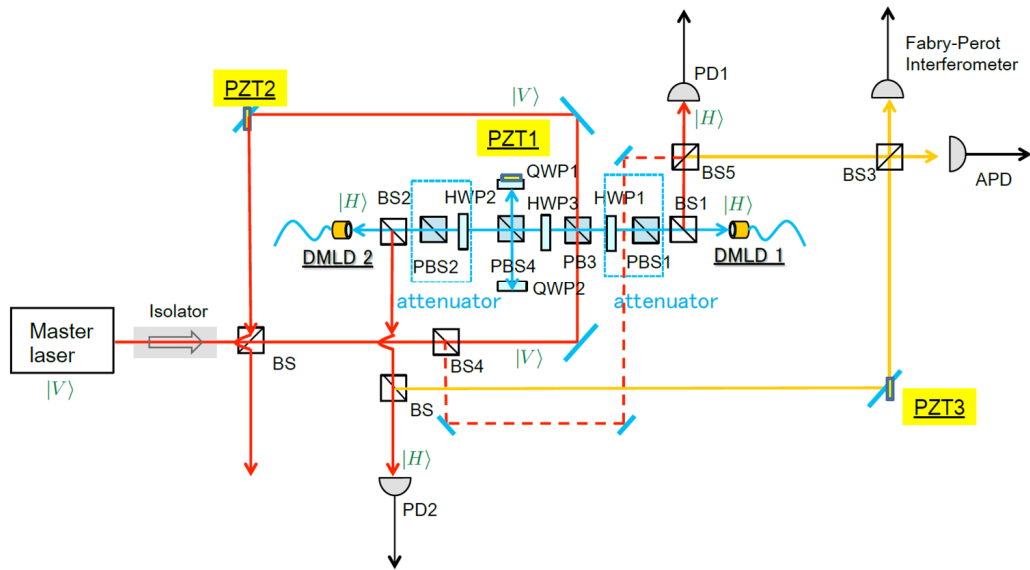


図 2.1: 2つのレーザーを用いた実験系の図

圧電素子のついた QWP1 は 2つの DM レーザーの光路上にあるため、圧電素子によって 2つのレーザー間の距離は連続的に変化する。よって、2つのレーザー間の距離が連続的に変化する場合の2つのレーザー間の干渉を観測した。図 2.2 はその結果である。これは、レーザー間の距離の変化によって、2つのレーザーの干渉が強め合いと弱め合いを繰り返していることを示している。つまり、2つのレーザー間の距離の連続的な変化が起こった場合でも、2つのレーザー間の位相差は 0 あるいは π の値を保ち続け、距離がある程度変化すると位相差は π だけ変化するということである。このことは、2つのレーザー間の位相差が 0 か π しか必要としないレーザーネットワークにおいて、セットアップが容易になったことを意味する。しかし、この結果がこの実験でのみ起きたわけではないことを示す必要がある。

以上の実験結果から、本論文では 2つのレーザー間距離の変化における位相差の挙動について計算し、実際に位相差が 0 または π の値しかとらない事を明らかにする。また、レーザー間距離の変動に対して、位相差に変化がないことから、レーザーの発振周波数自体が連続的に変調されていることが予想される。よて、レーザー間距離の変動によって、レーザーの発振周波数がどのような挙動を示すかも計算する。

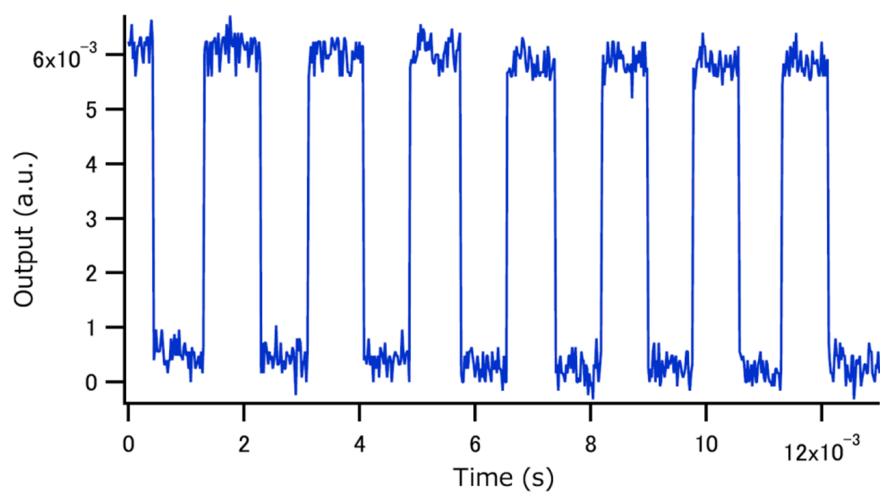


図 2.2: 2つのレーザー発振光の干渉によって観測された結果

第3章 レーザーの周波数特性に関する関連研究

本研究は、2つのレーザーを向かい合うように配置し (図 4.1)、2つのレーザーがともに発振している状態で2つのレーザー間の距離を連続的に変化させるとき、その2つのレーザー間で発振している光の周波数の変化、及び位相差を導くというものである。この章では、関連研究としてレーザーの外部に回折格子を配置した系 (図 3.1) における、レーザー発振周波数の変動に関する理論について述べる [1]。

3.1 回折格子を用いたときのレーザーの発振状態

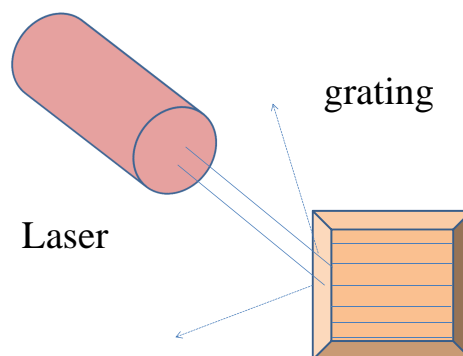


図 3.1: 回折格子によるフィードバックを伴うレーザー

ここでは、レーザーの外部に回折格子を用いることでレーザーの発振状態を記述する。このモデルは元々半導体レーザーの温度や電源の電流の変動によって生じる発振周波数の変動 [22] を安定させるために考案されたものである。そのため、レーザーの外部に置いた回折格子からの発振光のフィードバックによる実際の発振周波数が、レーザー自身の発振周波数を変動させることで、どのように変化することを導く。

ここで、回折格子を用いてフィードバックを行う理由を、1つのミラーを用いてフィードバックを行う場合と対比することで簡単に述べる。まず、ミラーを用いて発振光のフィード

バックを行うと不安定発振を起こす [23]。これは、半導体レーザーの発光面の反射により、外部のミラーとレーザーの間に二重の共振器が生じてしまうことに起因する。故に、レーザーの活性層の温度変化や機械的に不安定な要因により発振周波数に変調が生じた場合、レーザー内部の光波と反射波の関係は容易に変動するため、ミラーを用いたフィードバックを行う場合は不要な周波数モードジャンプが生じることで不安定な発振が起きてしまう。一方、回折格子を用いてフィードバックを行う場合、回折格子の分散的な性質から安定したシングルモード発振が可能である。これは、レーザーと回折格子が、シングルモード発振を行う光波の波長と回折格子のブレイズ角との2つから求められるリトロー配置を取ることで、その波長の光波のみ入射角と反射角が一致し、レーザーからの発振光が回折格子で反射してレーザーに戻り、それ以外の波長の光波は散乱してレーザーに戻らないためである [24]。故に、回折格子は安定したシングルモード発振に適する。

3.2 レーザーの変調周波数に対する全系の発振周波数の関係式

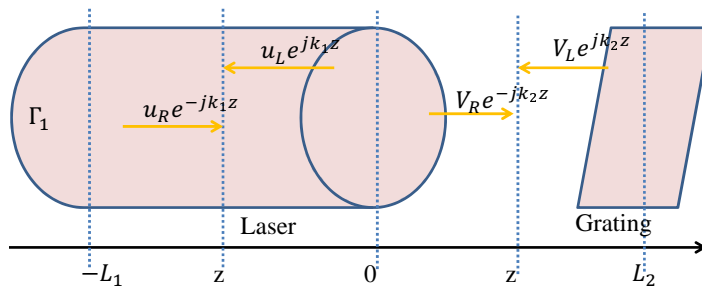


図 3.2: 回折格子とレーザー間の光波の位相の模式図

この節では、レーザー単独における周波数変調と、回折格子を加えたときの全系の発振周波数との間の関係を求める。まず、全系の模式図を図 3.2 に示す。レーザーと回折格子を一次元の軸上に並べ、レーザーの発振面の位置を $z = 0$ 、レーザーの発振面ではない方の反射鏡の位置を $z = -L_1$ 、回折格子の位置を $z = L_2$ と置く。 L_1, L_2 はそれぞれレーザーのキャビティ間の距離、レーザーと回折格子の間の距離に対応している。 Γ_1, Γ_2 はそれぞれレーザーの反射鏡の反射率、回折格子の反射率を表し、 S をレーザーの発光面 ($z = 0$) での散乱行列と定義する。また、この系ではシングルモード発振を想定しているため、 Γ_1, Γ_2 は固定の値とする。 z の位置でレーザー内で軸と並行に正、負方向に発振する光の振幅をそれぞれ $u_{Re}^{-jk_1 z}, u_{Le}^{jk_1 z}$ とし、レーザーと回折格子の間で軸と並行に正、負方向に発振する光の振幅をそれぞれ $V_{Re}^{-jk_2 z}, V_{Le}^{jk_2 z}$ とする。この時、 $k_1 = \omega/c + j\alpha$ はレーザー内の波数であり、 $k_2 = \omega/c_0$ は空気中の波数である。 c はレーザー内の光速であり、 c_0 は真空中の光速

である。 $z = -L_1$ と $z = L_2$ での境界条件から関係式

$$u_R e^{jk_1 L_1} = \Gamma_1 u_L e^{-jk_1 L_1}, \quad (3.1)$$

$$V_L e^{jk_2 L_2} = \Gamma_2 V_R e^{-jk_2 L_2}, \quad (3.2)$$

が成り立つ。同様に $z = 0$ での境界条件を散乱行列 S を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} u_L \\ V_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_R \\ V_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ V_L \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

となる。散乱行列の各成分はそれぞれ、 S_{11} : レーザーの内側の反射係数、 S_{12} : レーザーの内側から外側への透過係数、 S_{21} : レーザーの外側から内側への透過係数、 S_{22} : レーザーの外側の反射係数を示す。このとき、発光面には特殊なミラーを用いないと仮定して内側、外側の反射係数、及び透過係数はそれぞれ一致する、つまり $S_{11} = S_{22}, S_{12} = S_{21}$ とする。ここで、この系における発振条件を考えるため、それぞれの境界条件を満たす式を考える。それぞれの境界条件を満たすのは、式 (3.1),(3.2),(3.3) から得られる

$$A \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \\ V_R \\ V_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma_1 e^{-j2k_1 L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 e^{-j2k_2 L_2} & -1 \\ S_{11} & -1 & 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 & -1 & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \\ V_R \\ V_L \end{pmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

の行列 A の行列式が 0 になるとき、つまり $\det A = 0$ になるときである。これを解くと、以下の式が導出される。

$$(e^{j2k_1 L_1} - \Gamma_1 S_{11})(e^{j2k_2 L_2} - \Gamma_2 S_{22}) = S_{12} S_{21} \Gamma_1 \Gamma_2. \quad (3.5)$$

回折格子からのフィードバックがなく、かつ発振周波数 ω が中心周波数 ω_0 とほぼ一致するとき限り、式 (3.5) からこの場合における発振条件は

$$e^{j2k_1 L_1} - \Gamma_1 S_{11} = 0, \quad (3.6)$$

となる。このとき、 $k_1 = \omega_0/c + j\alpha_0$ となる。式 (3.6) はレーザー内の発光面におけるミラーともう一方のミラーの境界条件を満たす式からも導出が可能である。実際には発振周波数は中心周波数からの変動があるため、ここからは周波数の変動を考慮に入れた式を導いていく。

半導体レーザーが発振状態にあるとき、活性層に励起された電子の数の変動に応じて屈折率が変化する。そのため、レーザー内の活性層の利得係数と光波の速度、及び周波数が変調される [25]。これに、フィードバックによる影響も加えた変調をそれぞれ $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0, \Delta c = c_l - c, \Delta\omega = \omega - \omega_0$ とする。 α_0 は媒質が持つ利得係数、 ω_0 はレーザーの中心周波数、 c_l はフィードバックが存在する場合のレーザー内部の光速、 c はフィードバックが存在しない場合のレーザー内部の光速である。これを用いて、式 (3.5) の中で変調の影響を受ける $e^{2jk_1 L_1}$

は $\Delta\alpha, \Delta\omega, \Delta c$ が十分小さいとすれば、 $\alpha = \alpha_0, \omega = \omega_0, c_l = c$ の周りの 1 次までのテイラー展開で近似でき、

$$e^{2jk_1L_1} = e^{2j(\omega_0/c+j\alpha_0)L_1} \left(1 + \frac{2jL_1}{c}\Delta\omega - \frac{2jL_1\omega_0}{c^2}\Delta c + 2jL_1 \cdot j\Delta\alpha\right), \quad (3.7)$$

となる。この式に式 (3.6) を用いた上で、式 (3.5) に代入すると

$$2jL_1\Gamma_1S_{11}\left(\frac{1}{c}\Delta\omega - \frac{\omega_0}{c^2}\Delta c + j\Delta\alpha\right) \cdot (e^{j2L_2(\omega_0+\Delta\omega)/c_0-\Gamma_2S_{22}}) = S_{12}S_{21}\Gamma_1\Gamma_2 \quad (3.8)$$

となる。これが変調を考慮した発振条件となる。特に $\Delta c = 0$ のとき、発振周波数の変調が存在しなくなるため、回折格子によって反射された光波はそのままレーザーの内部の光の位相に加えられる。このときレーザーから発振した光が回折格子で反射してレーザーの発振面に戻るまでの時間を $\tau_2 = 2L_2/c_0$ とすると、式

$$\omega_0\tau_2 = 2n\pi + \phi \quad (3.9)$$

が、回折格子によるフィードバックとレーザー内部電場の共鳴条件となる。 ϕ は発振面を通るときに起こる位相の変化、及び回折格子での反射による位相の変化を合わせたものである。

ここから、式 (3.5) において実数部分と虚数部分の係数比較を行うことで、レーザーの周波数変調に対する発振周波数の式を導く。まず、式 (3.5) を変形すると以下のような式になる。

$$-\Delta\omega\tau_2 + \omega_0\tau_2\frac{\Delta c}{c} - j\Delta\alpha c\tau_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{jS_{12}S_{21}\Gamma_2}{S_{11}(e^{j\tau_2(\omega_0-\Delta\omega)} - \Gamma_2S_{22})}. \quad (3.10)$$

ここで、 $\tau_1 = 2L_1/c$ はレーザーの内部で光が往復する時間である。上の式を簡単にするために右辺に着目する。上の式の右辺に式 (3.9) を用いて変形すると、

$$\frac{jS_{12}S_{21}\Gamma_2}{S_{11}(e^{j\tau_2(\omega_0-\Delta\omega)} - \Gamma_2S_{22})} \approx \frac{jS_{12}S_{21}\Gamma_2}{S_{11}e^{j(\phi+\Delta\omega\tau_2)}} = \frac{j|S_{12}S_{21}\Gamma_2|}{|S_{11}e^{\Delta\omega\tau_2}|} = \left|\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_2}{S_{11}}\right| \cdot (\sin \Delta\omega\tau_2 + j \cos \Delta\omega\tau_2) \quad (3.11)$$

となる。この式では、レーザーの外部で弱結合のため、 $|\Gamma_2S_{22}| \ll 1$ を用いている。また、 ϕ はレーザー内部で反射した光の位相 ϕ_1 とレーザーから出力されて回折格子で反射された後レーザーの発光面に戻る光の位相 ϕ_2 との差になるので、

$$e^{j\phi} = e^{j(\phi_2-\phi_1)} = \frac{S_{21}\Gamma_2S_{12}}{|S_{21}\Gamma_2S_{12}|} \cdot \frac{|S_{11}|}{S_{11}},$$

となることを用いている。式 (3.11) は導かれる。よって、式 (3.11) を式 (3.10) に代入し、実数部分と虚数部分の係数比較を行った上で適当な移項を行うと、

$$\omega_0 \tau_2 \frac{\Delta c}{c} = \Delta \omega \tau_2 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \left| \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_2}{S_{11}} \right| \cdot \sin \Delta \omega \tau_2 = \Delta \omega \tau_2 + X \sin \Delta \omega \tau_2, \quad (3.12)$$

$$\Delta \alpha c \tau_2 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} \left| \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_2}{S_{11}} \right| \cdot \cos \Delta \omega \tau_2 = -X \cos \Delta \omega \tau_2, \quad (3.13)$$

$$X = \frac{\tau_2}{\tau_1} \left| \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_2}{S_{11}} \right|, \quad (3.14)$$

という式が導かれる。特に式 (3.12) はフィードバックがないときのレーザーの発振周波数とフィードバックを用いたときの発振周波数の関係を表す式である。次節ではこの式を主に扱って周波数の特性を導く。

3.3 発振周波数とモードジャンプ

ここでは主に式 (3.12) を詳しく追うことで発振周波数の特性を記述する。まず、単一レーザーに対する電流変調に加えて、回折格子からのフィードバックによっても変化する量は、 $\Delta \omega$ 及び $\Delta \alpha$ のみであると考えられる。ここで、フィードバックによる $\Delta \omega$ の変化は、レーザー発光面と回折格子によって形成される空洞共振器の影響に由来する。また、 $\Delta \alpha$ の変化は、フィードバックによるレーザー内部の光子数の変化に由来する。対して、屈折率変化に応じたレーザー内の光速の変化 Δc は、光波に対する活性層電子の応答による寄与が大きいため、実質単一レーザーに対する電流変調の結果であると考えられる。したがって、フィードバックが無い場合の単一レーザーの周波数変調は Δc によって表すことができ、 $\Delta f_{SL} = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\Delta c}{c}$ と表される。故に式 (3.12) の両辺を 2π で割り、正規化を行うと以下の式が導出される。

$$\Delta f_{SL} \tau_2 = \Delta f \tau_2 + \frac{X}{2\pi} \sin(2\pi \cdot \Delta f \tau_2) \quad (3.15)$$

この式の関係を図に表すと以下の図 3.3 のようになる。

図 3.3 は回折格子によるフィードバックのないときの周波数変調を横軸、回折格子によるフィードバックを用いるときの発振周波数の変調を縦軸にとったときの 2 つの周波数変調の関係をそれぞれの X 対応して表したグラフである。左下から右上に伸びた直線が $X = 0$ の時の周波数特性を表したグラフであり、そこから徐々に左右に開いてく曲線は内側から順に $X = 1, 2, 4, 8$ のときの周波数を表したグラフである。ここで、 X に着目する。 $z = 0$ でのレーザーの内側での反射率を R_2 、レーザー外部の回折やレンズの挿入による全ての損失を含んだ場合の反射率を R_{eff} とするとそれぞれ $R_2 = |S_{11}|^2, R_{eff} = |S_{12} S_{21} \Gamma_2|^2$ と表すことができる。これを式 (3.14) に代入すると X は以下のような式になる。

$$X = \frac{\tau_2}{\tau_1} \left(\frac{R_{eff}}{R_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

式 (3.16) の R_2, R_{eff} はそれぞれレーザーと回折格子の性能に左右される値であり、かつ一般的にレーザーの外部では内部よりも損失が高いため、 R_{eff}/R_2 は小さな値となる。故に X を変化させるなら τ_2/τ_1 のパラメータに注目する。 τ_1, τ_2 はそれぞれ $\tau_1 = 2L_1/c, \tau_2 = 2L_2/c_0$

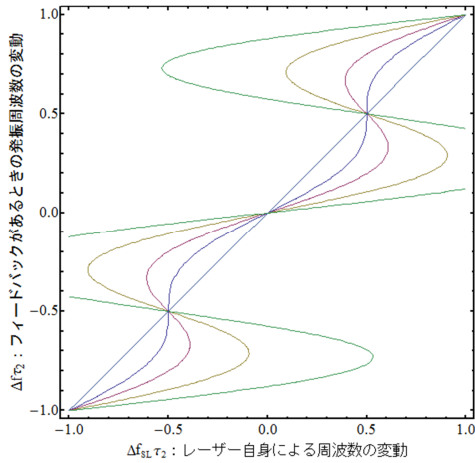


図 3.3: レーザー固有の周波数の変調に対する発振周波数の関係 [1]

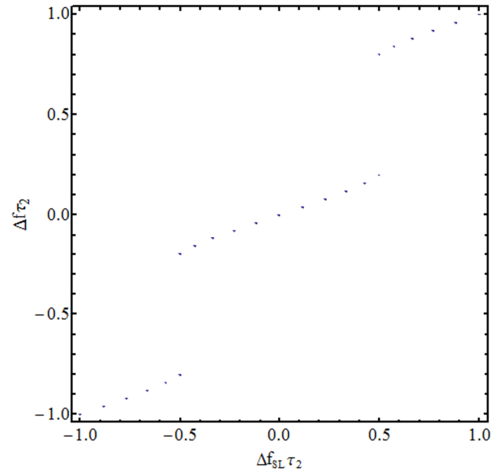


図 3.4: レーザー固有の周波数を変調させたときの実際の発振周波数を測定した結果 [1]

であるため、 τ_1 と τ_2 の関係は L_1, L_2 の関係と考えることができる。つまり L_2/L_1 が大きな値をとるとき、 X の値も大きくなるので、レーザーのキャビティ長に対してレーザーと回折格子の距離が長くなるにつれて X は大きくなる。このことと図 3.3 から X の比較的小さい値 (主に $X = 1$ 付近) ではレーザー内の共振に依存するモードが支配的となり、 X の値が比較的大きい値ではレーザーの外部の共振器のモードが支配的になるため、図 3.3 の曲線は徐々に急なものとなる。

図 3.4 は実際に $X = 2$ のときの実験の結果である。図 3.3 と比べるとほぼ理論値と同じになるのだが、図 3.3 において、 $\Delta f_{SL}\tau_2$ に対し $\Delta f\tau_2$ が複数の値をとる点において、図 3.4 では 1 点の $\Delta f_{SL}\tau_2$ に対し 1 点の $\Delta f\tau_2$ の値をとる。これを図 3.5 を用いて説明する。

図 3.5 は $X = 4$ において、 $\Delta f_{SL}\tau_2 = \Delta f\tau_2 = 0$ から離調していくときに発振周波数がどのように変化するかを示した図である。実線部分は安定な領域、蜜な点線部分は複数のモードに対して不安定な領域、疎な点線部分は常に不安定な領域を表している。蜜な点線部分では、図 3.5 からわかるように複数のモードが存在するため、実際の発振周波数はどれかのモードである必要がある。そのため、この領域ではヒステリシスな挙動を示すことが想定される。故に、 $\Delta f_{SL}\tau_2 = \Delta f\tau_2 = 0$ から離調される場合は、図 3.5 の外側の矢印に沿ってモードジャンプを起こすことがわかる。

ここから発振周波数が現在自分のいるモード周波数からどれだけ離調するとモードジャンプが起こるかを導いていく。このモードジャンプを起こすときの $\Delta f\tau_2 = 0$ からの離調幅を Δf_{max} とすると、この Δf_{max} は図 3.4 から式 (3.15) の左辺を 0.5 とすることで求めることができる。

$$\Delta f_{max}\tau_2 + \frac{X}{2\pi} \sin(2\pi \cdot \Delta f_{max}\tau_2) = 0.5 \quad (3.17)$$

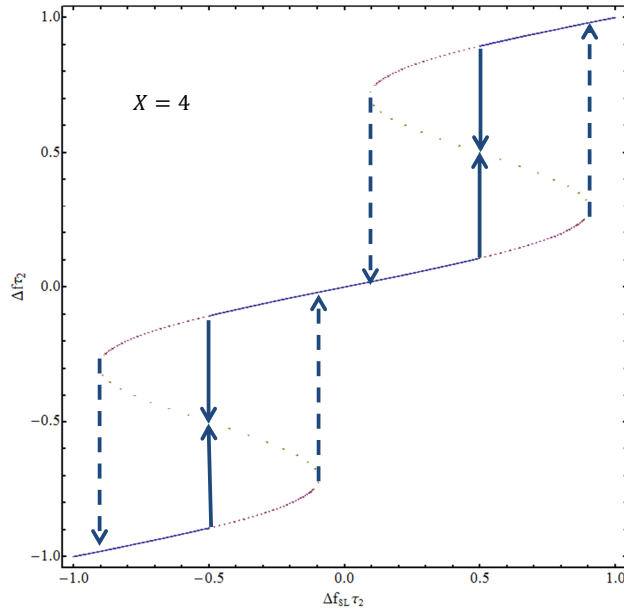


図 3.5: $X = 4$ でのレーザー固有の周波数の変調に対する発振周波数の関係 [1]

また、式 (3.17) において、 X が小さい範囲を除いては式 (3.18) に近似することが可能である。

$$2\Delta f_{max}\tau_2 = \frac{1}{1+X} \quad (3.18)$$

式 (3.17) の近似式に式 (3.18) を用いることが可能であるということは図 3.6 からも読み取ることができる。図 3.6 は X と $2\Delta f_{max}\tau_2$ の関係をグラフ化したものである。上の曲線が式 (3.17) をグラフ化したものであり、下の曲線が近似式 (3.18) をグラフ化したものである。この図から大体 $X = 2$ より大きい範囲では式 (3.17) と式 (3.18) はほぼ一致するといえる。また、 $2\Delta f_{max}$ は X に対してとんだ独立な値をとり、その値は大体 $2\Delta f_{max} = 1/2\tau_2$ となるということも図 3.3 から述べることができる。 τ_2 は L_2 に依存する値であり、 L_2 はレーザーの発振面と回折格子の距離なので、回折格子を置く場所によって発振周波数の変動を変えることができる。

ここまで、図 3.1 のように、レーザーの外部に回折格子を用いることで発振光をフィードバックさせ、その結果、発振周波数がどのように変動するのかを、様々な式を導出しながら述べてきた。結論として、レーザー自身の変化による周波数の変動に対して、回折格子によるフィードバックを行うレーザーの発振周波数はモードジャンプを起こすことがわかり、またモードジャンプを起こすまでは発振周波数の変動はほとんどないということが導かれた。これは、レーザーと回折格子の間の共振器のモードが、レーザー内部の共振器のモードよりも強く結合するために起きたものであるといえる。故に、この研究では、レーザーと回折格子の間の共振器のモードが強く結合している、という点が重要であるが、これは 2 つのレーザーを用いてフィードバックを行う場合、つまりレーザー同士の相互注入においても、発振

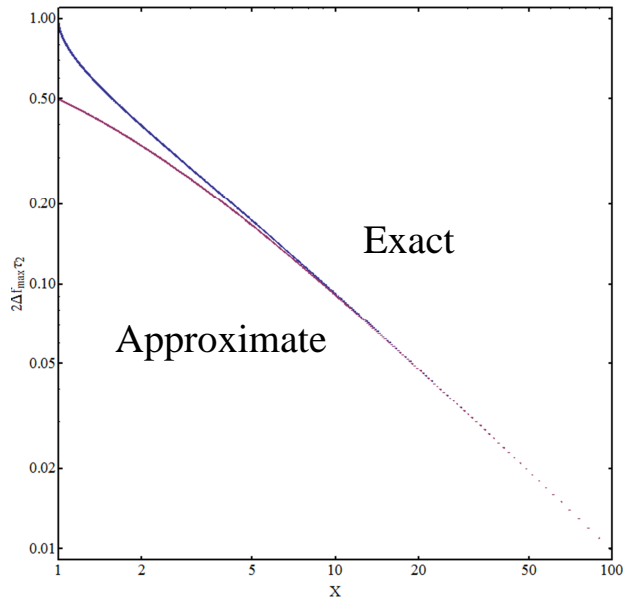


図 3.6: X の変化に対する発振周波数の離調の最大値との関係 [1]

面間の共振器のモードが強く影響しているのではないかと考えられる。次の章からは実際に 2 つのレーザーが相互注入を行う場合の発振周波数の特性を導いていく。

第4章 2つのレーザーが相互注入する際の周波数特性

この章では、2つのレーザーを用いて、2つのレーザーの発振光が互いに他方のレーザーに注入される場合の周波数の特性がどのようなになるのかを計算する。具体的には第3章で述べた回折格子の位置にレーザーを置き (図 4.1)、2つのレーザー間の距離を変動させることによって発振周波数がどのような特性をもつのかを導いていく。

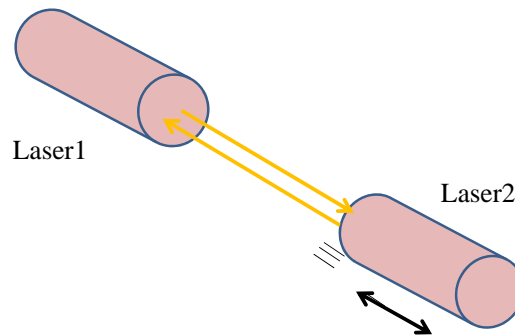


図 4.1: 2つのレーザーの相互注入を表した簡略図

4.1 伝送行列における発振条件

第3章では、系全体の発振条件を満たす式を導出する際に散乱行列を用いたが、系が複雑になるにつれて散乱行列で系全体を表すことは難しくなる。そこで、2つのレーザーを扱う本論文では、系が複雑である場合にも計算が比較的容易である伝送行列を用いて、発振条件を満たす式を導出する。この章では、散乱行列と伝送行列の性質を述べるとともに、伝送行列を用いた際の発振条件を導出する。

4.1.1 伝送行列と散乱行列

伝送行列 \mathbf{T} とは、ある 2 端子システムを持つ素子 (図 4.2) を考えた時に、素子の左側に左右の進行方向を持つ光を入力、素子の右側に左右の進行方向を持つ光を出力、と考えた場合の入出力を計算する際に用いる行列である。

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

この伝送行列は 2 つの素子の組み合わせにおいて、単に個別の素子の伝送行列の積として表すことができる。

$$\mathbf{T}_{tot} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \quad (4.2)$$

故に、伝送行列は複数の素子の組み合わせなどの応答を計算することに適す。一方、散乱行列 \mathbf{S} は 2 端子システムを持つ素子 (図 4.2) に左右から光を入射した際の出力光を計算するために用いられる行列である。

$$\begin{pmatrix} u_- \\ v_+ \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} u_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ v_- \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

散乱行列は素子内でのエネルギーの変化を調べることに都合のいい形式である。もし、素子内での損失や利得がない場合、つまりエネルギー変化がない場合は入力から出力の間のエネルギーは保存されるため、 \mathbf{S} はユニタリ行列となる。また、 $S_{12} = S_{21}$ が成り立つときは相反な素子と呼ばれ、これは右からの入力に対する左側への出力と、左側からの入力に対する右側からの出力が等しいことを意味する。第 3 章で用いたレーザーの発振面での散乱行列は相反性を持つものとして扱っている。

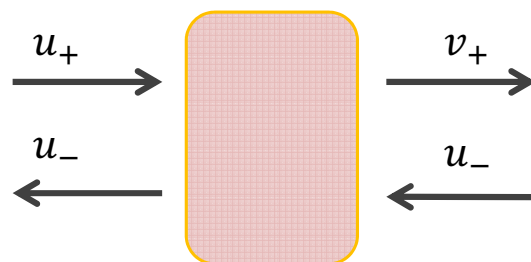


図 4.2: 2 端子システムを持つ素子

ここで、伝送行列と散乱行列の関係を述べる。式 (4.1) を書き下すと、

$$v_+ = T_{11}u_+ + T_{12}u_- \quad (4.4)$$

$$v_- = T_{21}u_+ + T_{22}u_- \quad (4.5)$$

となる。式 (4.5) を変形すると、

$$u_- = -T_{22}^{-1}T_{21}u_+ + T_{22}^{-1}v_- \quad (4.6)$$

となるので、これを式 (4.4) を代入する。

$$u_+ = (T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21})u_- + T_{12}T_{22}^{-1}v_- \quad (4.7)$$

よって、散乱行列は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} -T_{22}^{-1}T_{21} & T_{22}^{-1} \\ T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} & T_{12}T_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= T_{22}^{-1} \begin{pmatrix} -T_{21} & 1 \\ \det \mathbf{T} & T_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

この散乱行列から、散乱行列の各成分は、 $S_{11} = -T_{22}^{-1}T_{21}$, $S_{12} = T_{22}^{-1}$, $S_{21} = T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}$ であるので、それぞれの式から $T_{22} = S_{12}^{-1}$, $T_{21} = -S_{12}^{-1}S_{11}$, $T_{12} = S_{22}S_{12}^{-1}$, $T_{11} = S_{21} - S_{22}S_{12}^{-1}S_{11}$ となる。よって、伝送行列は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} S_{21} - S_{22}S_{12}^{-1}S_{11} & S_{12}^{-1} \\ -S_{12}^{-1}S_{11} & T_{12}T_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= S_{12}^{-1} \begin{pmatrix} -\det \mathbf{S} & S_{22} \\ -S_{11} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

この伝送行列から、 $\det \mathbf{T} = S_{21}S_{12}^{-1}$ という関係式が成立するので、相反性を持つ素子であるための必要十分条件は $S_{12} = S_{21}$ から

$$\det \mathbf{T} = 1 \quad (4.10)$$

である。また、 $\det (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2) = \det \mathbf{T}_1 \det \mathbf{T}_2$ より、相反性を持つ素子同士をつないだ素子もまた相反性を持つ。

ここから2端子システムを持つ素子をビームスプリッタとして考える。透過率 T 、反射率 R のビームスプリッタの散乱行列 \mathbf{S}_{BS} は

$$\mathbf{S}_{BS} = \begin{pmatrix} e^{j\phi}\sqrt{R} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & e^{-j\phi}\sqrt{R} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

と書くことができる。ただし、 $T + R = 1$ 、 ϕ は反射位相であり、ビームスプリッタは相反性を持つ。この散乱行列 \mathbf{S}_{BS} から伝送行列 \mathbf{T}_{BS} を導くと以下のような関係式となる。

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{BS} &= \begin{pmatrix} \sqrt{T} + R\sqrt{T^{-1}} & -e^{-j\phi}\sqrt{RT^{-1}} \\ -e^{j\phi}\sqrt{RT^{-1}} & \sqrt{T^{-1}} \end{pmatrix} \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-j\phi}R^{\frac{1}{2}} \\ -e^{j\phi}R^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.12)$$

具体例として媒質中の伝搬を記述する。伝搬定数 $\gamma \in \mathbb{C}$ で表される長さ L の媒質中の伝搬を伝送行列 \mathbf{T}_{prop} で表すと、

$$\mathbf{T}_{prop} = \begin{pmatrix} e^{j\gamma L} & 0 \\ 0 & e^{-j\gamma L} \end{pmatrix}\quad (4.13)$$

となる。媒質の伝搬においても相反性は存在する。同じく媒質中の伝搬を散乱行列 \mathbf{S}_{prop} で表すと、

$$\mathbf{S}_{prop} = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\gamma L} \\ e^{j\gamma L} & 0 \end{pmatrix}\quad (4.14)$$

となる。

4.1.2 キャビティの発振条件

発振を起こすための必要条件は、ある素子の散乱行列 \mathbf{S} への入力があるにも関わらず出力が存在することである。入力の値を u_{in} 、出力の値を u_{out} と置いた時に入出力の関係は散乱行列 \mathbf{S} を用いて、 $u_{out} = \mathbf{S}u_{in}$ となるので、 \mathbf{S} が有限の値をとる限り、 $u_{in} = 0$ であれば必ず $u_{out} = 0$ になってしまう。故に、発振条件は散乱行列 \mathbf{S} が発散することである。完全反射するビームスプリッタを除いて、ビームスプリッタと媒質のみで構成された系を持つ複合素子は必ず伝送行列で表現することが可能である。故に、この複合素子の伝送行列が散乱行列に直すことができない、ということが発振条件となり、式 (4.8) から発振条件は

$$T_{22} = 0\quad (4.15)$$

である。この T_{22} は系全体の伝送行列 \mathbf{T}_{total} の要素である。

ここからは具体的な例としてキャビティを元に複合素子の発振条件を導出していく。まず、2つのビームスプリッタに一般の素子をはさまれている状態の系を考える。このビームスプリッタはそれぞれ、反射係数が $\sqrt{R_{BS1}} = \Gamma_1$ と $\sqrt{R_{BS2}} = \Gamma_2$ であり、反射位相が $\phi_{BS1} = \pi$ と $\phi_{BS2} = 0$ であるとする、これは内部に一般の素子を用いた2つのビームスプリッタからなるキャビティとみなすことができる。2つのビームスプリッタの伝送行列はそれぞれ

$$\mathbf{T}_{BS1} = (1 - \Gamma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{T}_{BS2} = (1 - \Gamma_2^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma_2 \\ -\Gamma_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

となる。この伝送行列 \mathbf{T}_{BS1} 、 \mathbf{T}_{BS2} と一般の素子の伝送行列 \mathbf{T} を用いて系全体の伝送行列を表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{tot} &= \mathbf{T}_{BS2} \mathbf{T} \mathbf{T}_{BS1} \\ &= (1 - \Gamma_1^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - \Gamma_2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} T_{11} + \Gamma_1 T_{12} - \Gamma_2 T_{21} - \Gamma_1 \Gamma_2 T_{22} & \Gamma_1 T_{11} + T_{12} - \Gamma_1 \Gamma_2 T_{21} - \Gamma_2 T_{22} \\ -\Gamma_2 T_{11} - \Gamma_1 \Gamma_2 T_{12} + T_{21} + \Gamma_1 T_{22} & -\Gamma_1 \Gamma_2 T_{11} - \Gamma_2 T_{12} + \Gamma_1 T_{21} + T_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。よって、系全体の発振条件は式 (4.15) から以下の関係式となる。

$$\Gamma_1 T_{21} + T_{22} = \Gamma_1 \Gamma_2 T_{11} + \Gamma_2 T_{12} \quad (4.19)$$

実際に第3章で記述したレーザーと回折格子を用いた系において、伝送行列における発振条件が式 (3.5) と一致するのかを確かめる。レーザー内の媒質の伝送行列を \mathbf{T}_1 、レーザーの外部での伝送行列を \mathbf{T}_2 、レーザーの発振面での伝送行列を \mathbf{T}_B とおくと、それぞれの伝送行列は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} e^{jk_1 L_1} & 0 \\ 0 & e^{-jk_1 L_1} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} e^{jk_2 L_2} & 0 \\ 0 & e^{-jk_2 L_2} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{T}_B = S_{12}^{-1} \begin{pmatrix} -\det \mathbf{S} & S_{22} \\ -S_{11} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

この3つを組み合わせた系の伝送行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_B \mathbf{T}_1 \\ &= S_{12}^{-1} \begin{pmatrix} -e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} \det \mathbf{S} & e^{-i(k_1 L_1 - k_2 L_2)} S_{22} \\ -e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} S_{11} & e^{-i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。これを式 (4.18) の伝送行列 \mathbf{T} に代入することで、レーザーと回折格子を用いた系の伝送行列を導出することができる。よって式 (4.19) より発振条件は

$$-e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} \Gamma_1 S_{11} + e^{-i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} = -e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \det \mathbf{S} + e^{-i(k_1 L_1 - k_2 L_2)} \Gamma_2 S_{22} \quad (4.24)$$

となる。この式の両辺に $e^{-i(k_1 L_1 - k_2 L_2)}$ をかけて、適当に移項し整理すると、

$$(e^{j2k_1 L_1} - \Gamma_1 S_{11})(e^{j2k_2 L_2} - \Gamma_2 S_{22}) = S_{12} S_{21} \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (4.25)$$

となり、これは式 (3.5) と一致する。故に、系の発振条件は伝送行列からも導出可能であるため、この章では発振条件の導出がより容易な伝送行列を用いて計算する。

4.2 相互注入を行うレーザーの発振周波数の関係式



図 4.3: 相互注入を行う 2 つのレーザーの位置関係を表した模式図

図 4.3 のように 2 つのレーザーを配置することで、2 つのレーザー間の距離の変動に対する発振周波数の変化に関する式を求める。2 つのレーザーは同軸上に置かれる。図 4.3 における左側のレーザーをレーザー 1、右側のレーザーをレーザー 2 とするとき、レーザー 1 の発振面の位置を $z = 0$ 、レーザー 1 の発振面ではない方のミラーの位置を $z = -L_1$ 、レーザー 2 の発振面の位置を $z = L_2$ 、レーザー 2 の発振面ではない方のミラーの位置を $z = L_1 + L_2$ とする。これは第 3.2 章と同じく、レーザーのキャビティ間の距離を L_1 、2 つのレーザー間の距離を L_2 と置いただけである。ここから、第 3.2 章のように散乱行列を用いて導出した方法とは異なり、伝送行列を用いて発振周波数の関係式を導く。まずレーザー媒質内の伝送行列を \mathbf{T}_L 、2 つのレーザー間の伝送行列を \mathbf{T}_A とすると、それぞれの伝送行列は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{T}_L = \begin{pmatrix} e^{-jk_1 L_1} & 0 \\ 0 & e^{jk_1 L_1} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} e^{-jk_2 L_2} & 0 \\ 0 & e^{jk_2 L_2} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

ここで k_1, k_2 はそれぞれレーザー内と空気中の端数であり、 $k_1 = \omega/c + j\alpha, k_2 = \omega/c_0$ である。次にレーザーの発振面の伝送行列を表す。レーザー 1 とレーザー 2 は同じレーザーを用いており、かつ同条件で発振している場合を想定しているが、今回は図 4.3 において、左から右への伝送を考えているため、発振面の伝送行列は少し異なる。そのため、レーザー 1 の発振面での伝送行列を \mathbf{T}_{BS1} 、レーザー 2 の発振面での伝送行列を \mathbf{T}_{BS2} とすると、2 つの伝送行列は以下のように表される。

$$\mathbf{T}_{BS1} = S_{12}^{-1} \begin{pmatrix} -\det \mathbf{S} & S_{22} \\ -S_{11} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{T}_{BS2} = S_{21}^{-1} \begin{pmatrix} -\det \mathbf{S} & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

\mathbf{S} はレーザー 1 での発振面の散乱行列であり、 $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ は \mathbf{S} の要素である。ここで敢えて散乱行列の要素で伝送行列を表現した理由は、散乱行列の要素がそれぞれレーザーの発振面における反射係数と透過係数に対応しているためである。本研究においては、レーザーの発振面は相反性を持つものを扱い、かつ発振面での損失を考えないため、 $S_{12} = S_{21} = \sqrt{T}$ 、 $S_{11} = -S_{22} = \sqrt{R}$ と置き換えることができる。ここで、 T は発振面での透過率、 R は発振面での反射率である。最後にレーザーの発振面ではない方のミラーの伝送行列を表す。レーザー 1 のミラーの伝送行列を \mathbf{T}_{M1} 、レーザー 2 のミラーの伝送行列を \mathbf{T}_{M2} とすると 2 つの伝送行列は以下のように表現できる。

$$\mathbf{T}_{M1} = (1 - \Gamma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{T}_{M2} = (1 - \Gamma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma_1 \\ -\Gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Γ_1 はレーザー 1、及びレーザー 2 のミラーの反射率である。

以上より求めた伝送行列からこの 2 つのレーザーを用いた系の発振条件を導出する。まず、2 つのレーザーのミラーを除くすべての系の伝送行列の系を \mathbf{T}_{tot} とすると、2 つのレーザーを用いた系全体の伝送行列は $\mathbf{T}_{M2}\mathbf{T}_{tot}\mathbf{T}_{M1}$ と表すことができる。このときの発振条件は第 4.1.2 章において $\Gamma_1 = \Gamma_2$ としたものと同じであり、式 (4.19) に $\Gamma_1 = \Gamma_2$ を代入すれば、2 つのレーザーを用いた系の発振条件を導くことができる。

$$\Gamma_1 T_{21} + T_{22} = \Gamma_1^2 T_{11} + \Gamma_1 T_{12} \quad (4.32)$$

式 (4.34) における $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ は \mathbf{T}_{tot} の要素である。よって、 \mathbf{T}_{tot} を求める必要がある。 \mathbf{T}_{tot} はレーザー 1 の媒質からレーザー 2 の媒質までの系を表した伝送行列なので計算すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{tot} &= \mathbf{T}_L \mathbf{T}_{BS2} \mathbf{T}_A \mathbf{T}_{BS1} \mathbf{T}_L \\
&= (\mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{21})^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -e^{-2jk_1 L_1} e^{jk_2 L_2} S_{11}^2 + e^{-2jk_1 L_1} e^{-jk_2 L_2} (\det \mathbf{S})^2 & e^{jk_2 L_2} S_{11} - e^{-jk_2 L_2} S_{22} \det \mathbf{S} \\ -e^{jk_2 L_2} S_{11} + e^{-jk_2 L_2} S_{22} \det \mathbf{S} & e^{2jk_1 L_1} e^{jk_2 L_2} - e^{2jk_1 L_1} e^{-jk_2 L_2} S_{22}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

となる。これを式 (4.32) に代入して整理すると、2つのレーザーを用いた系の発振条件を求めることができる。

$$(e^{2jk_1 L_1} - \Gamma_1 S_{11}) \left\{ (e^{2jk_1 L_1} - \Gamma_1 S_{11})(e^{2jk_2 L_2} - S_{22}) - 2\Gamma_1 S_{12} S_{21} S_{22} \right\} = \Gamma_1^2 S_{12}^2 S_{21}^2 \tag{4.34}$$

$k_1 = \omega/c + j\alpha$, $k_2 = \omega/c_0$ より、式 (4.34) の変数は ω 、 α 、及び L_2 の3つである。本研究では、2つのレーザー間の距離 L_2 を変動させることで、発振周波数 ω がどのような挙動を示すのかを観測することが目的である。よって、 L_2 を変動させることで生じる利得係数 α の変動も考慮に入れて計算する必要がある。

4.3 発振周波数特性のシミュレーション

この節では、式 (4.34) に透過係数や反射係数、利得係数などの値を代入することで、2つのレーザー間の距離 L_2 の変動に対する発振周波数 ω の挙動を導く。

位相モデルにおけるイジングマシンでは、DFBレーザーの使用を想定しているため、本計算でもDFBレーザーを用いた際の計算結果を導く。文献 [26] から、レーザーの発光面の反射率を $R = 0.5$ とし、レーザーのキャビティ長を $350 \times 10^{-6} [\text{m}]$ 、発光面ではない方のミラーの反射係数を $\Gamma_1 = 1$ 、媒質の屈折率を $n = 3.5$ とする。レーザーの中心波長は $\lambda_0 = 1550 [\text{nm}]$ である。また、文献 [27] からレーザー媒質の利得係数は $\alpha = 2000 [\text{/m}]$ とする。ここで、レーザーの発光面の反射係数は散乱行列 \mathbf{S} の対角成分と等しいため、 $S_{11} = -S_{22} = \sqrt{R} = \sqrt{0.5}$ となり、また発光面での損失は考えないため、発光面における反射率 R と透過率 T の関係は $R + T = 1$ となるので、 $S_{12} = S_{21} = \sqrt{T} = \sqrt{0.5}$ となる。

4.3.1 利得係数変動 $\Delta\alpha$ の決定

式 (4.34) におけるレーザー間の距離と発振周波数の関係を見るためには、媒質の利得係数の変動 $\Delta\alpha$ の挙動も同時に追う必要がある。しかし、3変数を扱い、式 (4.34) の挙動をみるのは少し困難である。故に、本節では $\Delta\alpha$ がレーザー間距離と発振周波数の関係に対して、どのくらいの影響を及ぼすのかを確認することを目的とする。そのためにまず、 $\Delta\alpha = 0$ の場合について式 (4.34) はどのような挙動を示すのかを調べる。

実際に $\Delta\alpha = 0$ として式 (4.34) におけるレーザー間距離 L_2 と発振周波数の関係を導いたところ、発振周波数の変調に対して、本来実数であるはずの L_2 に微少の虚数成分の数値が存在することが分かった。これは、利得係数の変動 $\Delta\alpha$ がもともとレーザー内部の波数 k_1 における虚数部分に対応していたため、 $\Delta\alpha = 0$ としたことによる弊害であると考えられる。よって、今度は周波数変調に対する L_2 の虚数成分の変動を観測することにした。

図 4.4 は横軸を周波数の変調、縦軸はレーザー間距離 L_2 に存在する虚数成分の数値である。この図から中心周波数からの変調が数 GHz 程度であるとき、 L_2 の虚数成分の数値はほぼ変わらず、大体 $-6.0 \times 10^{-8} [\text{m}]$ の周辺の値をとる。これは、レーザーの媒質の利得係数 $\alpha = 2000 [\text{m}]$ に対して、 10^{-11} に近いオーダーであるので無視できる値といえる。このことは、 $\Delta\alpha = 0$ のとき、本来生じる $\Delta\alpha$ の影響はレーザー間距離 L_2 の虚数成分の値として生じるが、その値は無視できるほど小さいため、実質 L_2 は実数と考えることができるということを意味する。つまり、式 (4.34) において、レーザー媒質の利得係数の変動 $\Delta\alpha$ を考慮に入れなくても、レーザー間距離と発振周波数の関係は導くことができる。故に、次の章以降はレーザー媒質の利得係数の変動はないものとして計算する。

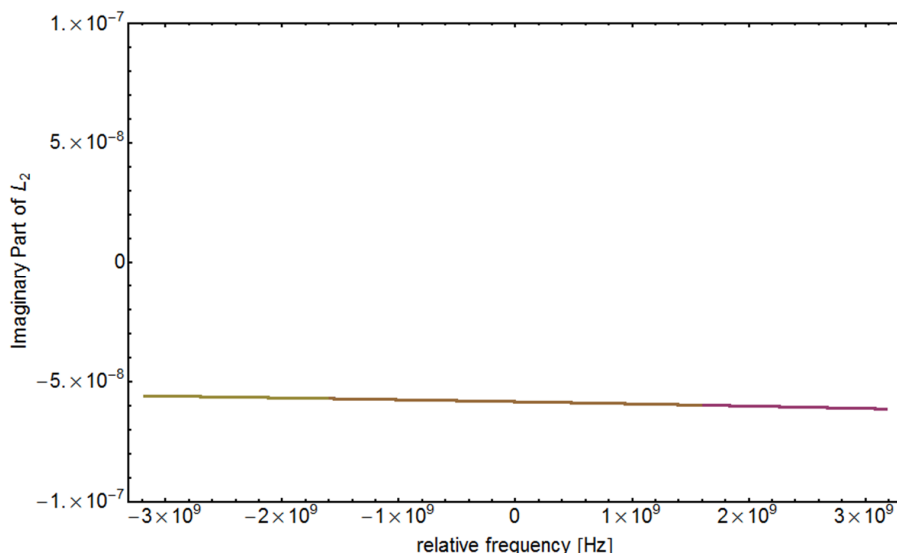


図 4.4: 発振周波数の変調に伴い生じる L_2 の虚数成分の変化

4.3.2 レーザー間距離に対する発振周波数の特性

第 4.3.1 章でも記述したように、本節では $\Delta\alpha = 0$ における発振周波数の特性を導く。実際に $\Delta\alpha = 0$ として、式 (4.34) を元に計算した時の結果が図 4.5 である。

図 4.5 は、横軸をレーザー間距離の 10cm からの変化分、縦軸を中心周波数からの変調分として、この 2 つの関係を表している。図 4.5 を見てもわかるように、あるレーザー間距離

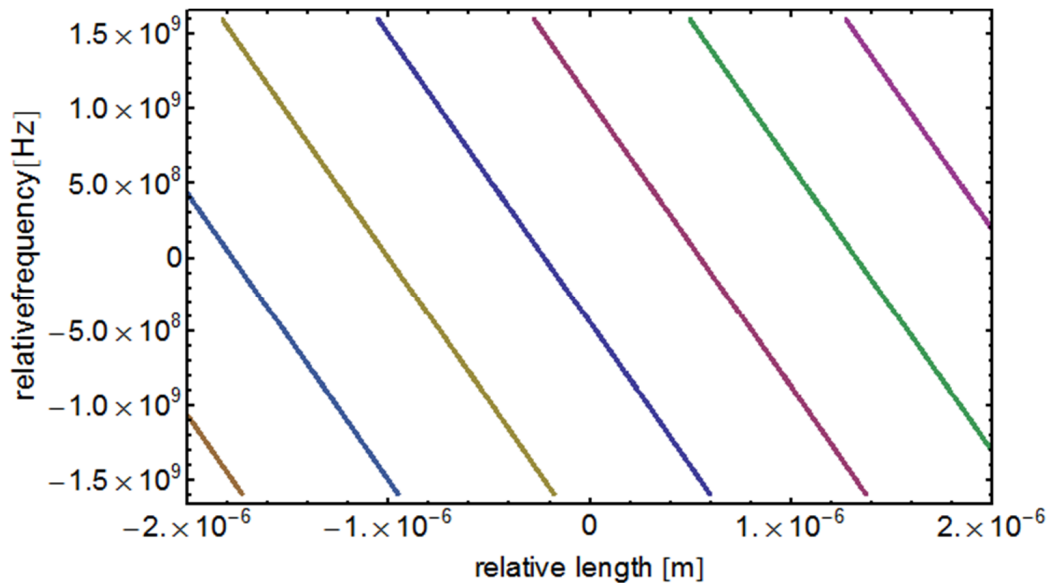


図 4.5: 2つのレーザー間の距離を変化させた際の発振周波数

に対して複数の発振周波数の状態が存在している。レーザーはシングルモード発振を前提としているので、図 4.5 は複数の周波数モードで同時に発振を起こしている、ということではなく、図 4.5 に表されるモードのうちのどれか一つで発振を行う、ということを表している。実際に、図 4.5 における隣り合うモード間の距離と周波数差を求めてみると、モード間の距離は 775nm 、モード間の周波数差は 1.5GHz となる。この 2 つの値はそれぞれ中心波長の半波長分の長さ $\lambda_0/2$ 、及び 2 つのレーザー間のキャビティのモード間の周波数差 $c_0/2L_2$ と等しくなる。つまり、モード間の距離は中心周波数に依存し、モード間の周波数差は 2 つのレーザーの間の距離に依存するということである。これは 2 つのレーザー間の距離が大きければ大きいほど、隣り合うモード間の周波数差は小さくなることを意味する。次に 2 つのレーザー間の位相差を図 4.5 における周波数モード別に調べる。位相差は式 (4.34) より、 k_2L_2 対応している。

図 4.6 は 2 つのレーザー間距離を変化させた際のモード毎の位相差を表した図である。横軸は図 4.5 と同じくレーザー間距離の 10cm からの変化分を表したものの、縦軸は位相差 k_2L_2 を 2π で割って正規化したものである。図 4.6 から、レーザー間の距離が変化した際にも位相差が変化することはなく、かつそのときの位相差は 0 か 0.5 、つまり 0 か π の 2 値をとることがわかる。また、図 4.6 の 3 本の線は 1 つ 1 つが違う周波数モードにおける位相差を表したものであり、かつ図 4.5 の 3 本の隣り合う周波数モードに対応した線である。よって、図 4.6 は隣り合うモードのレーザー間の位相差が 0 と π を交互にとるということも表している。

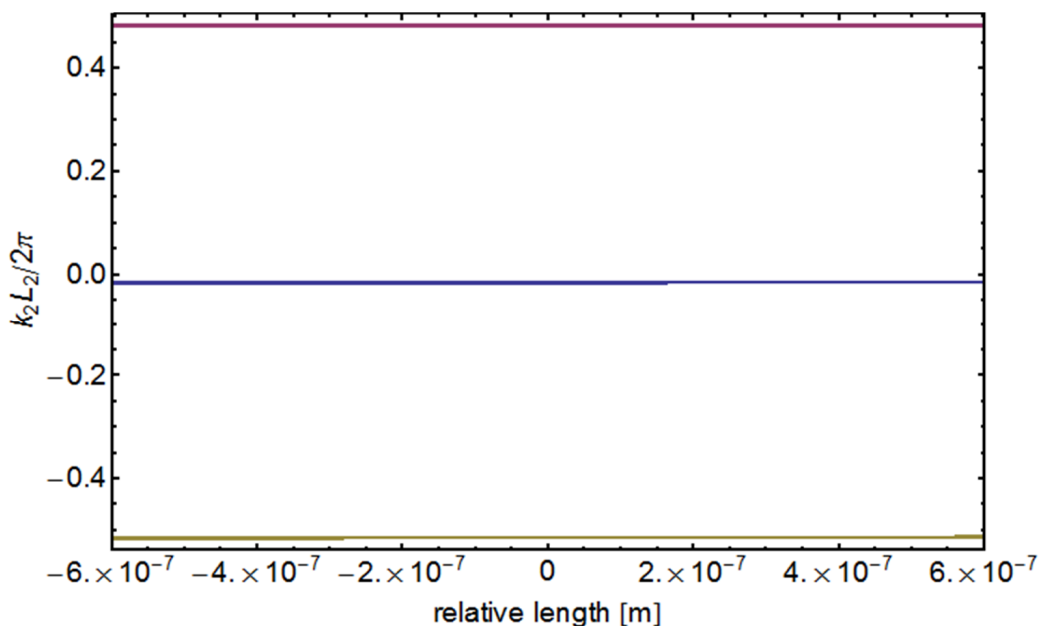


図 4.6: 2つのレーザー間の距離を変化させた際の2レーザー間の位相

以上のことから、レーザー間の距離が変化する際にモードジャンプが起きるとき、それはレーザー間距離が $\lambda_0/2$ だけ変化する毎に起き、また、元のレーザー間の位相差が0なら π に、 π なら0になるということを導いた。

4.4 実験結果との対比

この節では、レーザーの相互注入における発振周波数の実際の結果と第 4.3.2 章で計算したものを比べて考察していく。図 4.7(a) はレーザーの相互注入における発振周波数の挙動の実際の結果である。横軸に時間を取り、縦軸には波長に関する無次元の値をとっている。この実験において、時間の経過に伴いレーザー間の距離を変化させている。故にこの図は、レーザー間の距離を広げるとレーザーの発振光の波長は増加することを表している。そして、ある一定の距離の間隔毎に波長は急激に下がり、またレーザー間の距離の増加と共に連続的に波長が増加する、という挙動を繰り返している。そして、図 4.7(a) をよりわかりやすく表現し、さらに第 2 章で見られた位相変化も考慮に入れてまとめたものが図 4.7(b) である。図 4.7(b) における λ_M はレーザーの発振光の中心波長を表し、 $\phi_2 - \phi_1$ は2つのレーザー間の位相差を表している。この図から、レーザー間の距離が $\lambda_M/2$ 変化する毎にモードジャンプが起き、位相差が変化することがわかる。この実験結果と第 4.3.2 章で算出した結果を比較し考察する。

図 4.8 は図 4.5 がモードジャンプを起こすときのレーザー間距離と発振周波数差を追記し

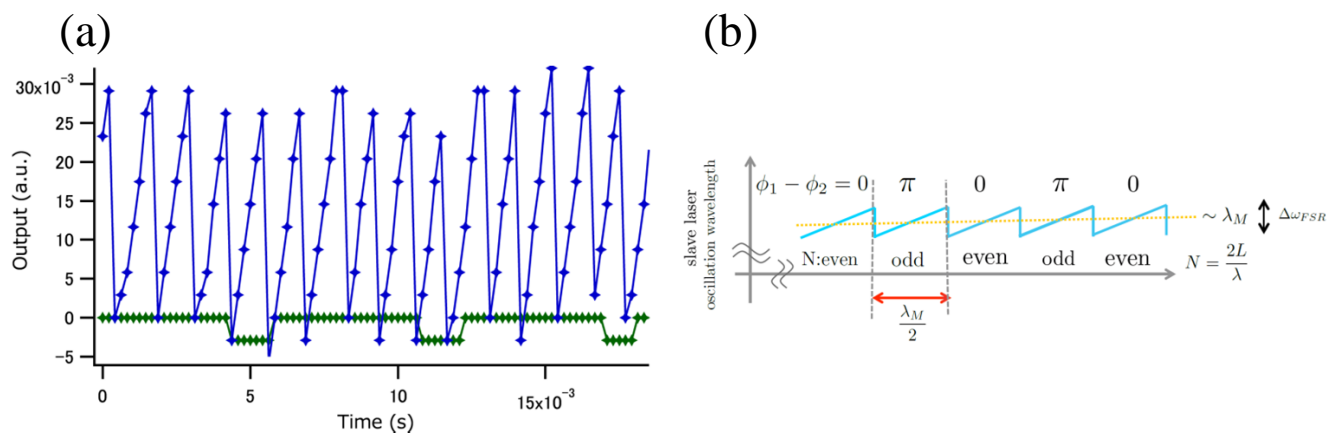


図 4.7: (a) 連続的にレーザー間の距離を変化させた際の発振周波数の変化を表した実験結果。(b) 実験結果をわかりやすくまとめて表現した模式図

たものである。これは、図 4.7(a) のように、レーザー間の距離の変化に対して連続的に周波数が変わるといって一致している。また、レーザー間の距離を変化させる毎にモードジャンプが起きているという事実から、図 4.8 と図 4.7(b) はレーザー間距離を半波長変化させる毎にモードジャンプが起こるといって一致している。さらに、図 4.6 からモードジャンプを起こすと位相差が 0 から π 、あるいは π から 0 になるということも実験結果と同じである。ここでモードジャンプを起こすタイミングについて考察する。発振周波数はレーザー間の距離の変化に対して変調している。しかし、モードジャンプが起きることにより、発振周波数はある程度の範囲でしか変調しないことがわかる。また、レーザーそのものの性能を変えずに、レーザー間に生じた共振器の影響でレーザー単独で発振した際の中心周波数から大幅に変調されるということは考えにくい。よって、モードジャンプはレーザーが単独で発振した際の中心周波数付近で起こると考えられる。

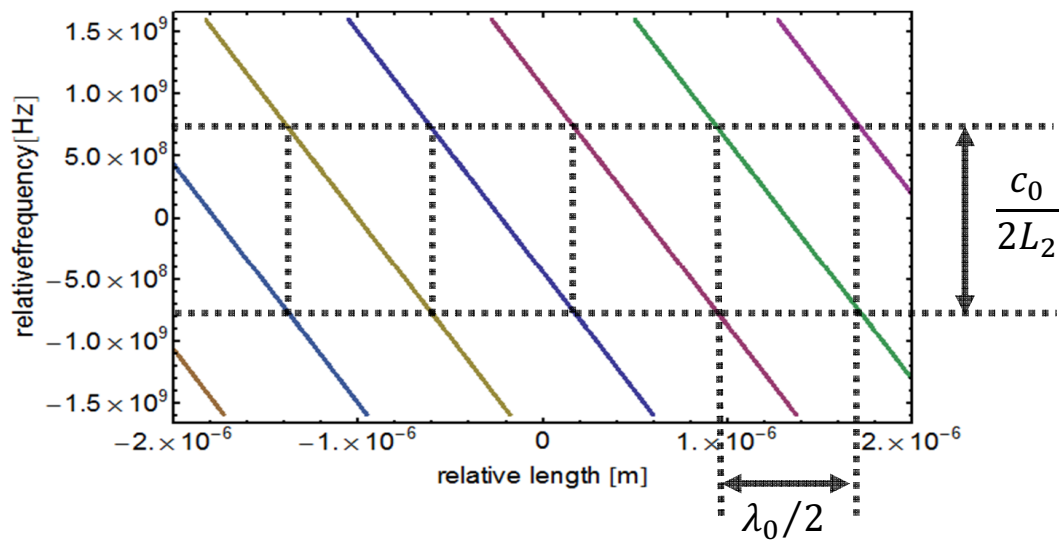


図 4.8: 2つのレーザー間の距離を変化させた際の発振周波数とモードジャンプ

第5章 結論

一般的に困難な問題とされる NP 完全問題を解くために、NP 完全問題の一つであるイジング問題を解くための計算機：コヒーレントコンピュータについて説明した。コヒーレントコンピュータには、スレーブレザーの共振器内の左右回り円偏光の光子数によってイジングスピンを定義する偏光モデルと、スレーブレザーとマスターレーザーの位相差でイジングスピンを定義する位相モデルがあることを述べた。そして、その二つのモデルはどちらも利得係数の総和がイジングハミルトニアンにマッピングできることを、それぞれ条件の違うレート方程式から導いた。これらから、利得係数の総和が最小になる状態、つまりレーザーネットワークを一つのレーザーとして捉えたときの発振条件が、イジングハミルトニアンの基底状態を求めること、つまりイジング問題を解くことにつながる、ということを説明した。その過程で、偏光モデルにおいて、VCSEL の構造上の問題から、求める解と違う安定解を導く、つまり誤った解を導く可能性について触れた。一方、位相モデルにおいては、そのような問題はなく、また光学素子も偏光モデルと比べて圧倒的に少ない使用で済むため、位相モデルについては2つのレーザーを用いて実際に行った実験を紹介した。

位相モデルの実験において、イジングハミルトニアンの相互注入項に対応する、2つのレーザー間の位相差を決定する際に、レーザー間距離の変化に対し、位相差が特殊な挙動を示すことが分かった。これは、本来なら、レーザー間距離の変動に対して、連続的に変動する位相差が、一定の値を取り続けるというものであった。また、変動するレーザー間距離に対し、位相差が一定であるという事実は、発振周波数が変調しているということも想定させた。そのため、本論文では、このレーザー間の位相差の特殊な挙動と周波数特性について計算することが目的となった。

2つのレーザー間の変動により位相差が変わらないということは、2つのレーザーの発光面をミラーとして、レーザー間が共振器として働いているのではないか、という仮定を生んだ。この仮定とを裏付けるため、関連研究として、レーザーと回折格子を用いた発振周波数特性の研究を紹介した。この研究では、回折格子によるフィードバックを用いたレーザーの発振周波数が安定しているというものであったが、この研究によりモードジャンプの概念を得ることができた。しかし、この研究は、周波数特性を求める際に、1次のテイラー展開を用いていたため、この研究の計算を、2つのレーザーの距離を変動させた際の周波数特性の計算にそのまま適応させると、的外れな計算結果が出るということがわかった。

そして、2つのレーザーの距離を変動させた際の周波数特性を計算する際に、先述の理由から1次のテイラー展開が使えないため、中心周波数からの変調 $\Delta\omega$ とレーザー間距離 L_2 の他に、利得係数の変動 $\Delta\alpha$ を考慮した、3変数の計算を行う必要が生じてしまった。このまま、3変数の計算をするのは困難であったが、3変数を扱った計算の仮定で $\Delta\alpha$ がほとんど

値を持たないということがわかった。実際に、 $\Delta\alpha = 0$ で解析を行ったところ、実数である L_2 に虚数成分が生じたが、この値は 10^{-8} オーダーであり、かつそれは利得係数 $\alpha = 2000$ と比べて相当小さい値であるため、無視しても支障がないと考えられる。そして、レーザー間距離と発振周波数の関係を計算しグラフ化したところ、レーザー間距離の変動に対し発振周波数は連続的に変化した。また、中心周波数から離れた点でモードジャンプを行うと仮定すると、モードジャンプを行うたびにレーザー間の位相差が0から π あるいは π から0となることがわかった。以上をもって、2つの相互注入を行うレーザー間の距離を変えることにより生じる位相差と周波数の特性は、実験と計算で一致することが示された。

今後は、レーザーの数を増やした実験も想定して、3つ以上のレーザーにおける周波数特性なども計算により挙動を示したい。また、コヒーレントコンピュータ自体はさらに新しい段階に入っており、一つのレーザーからでる複数のパルスの問題数に対応させ、パルス同士を干渉させることで、相互作用の効果に対応させる、といった手法も出てきている。しかし、これもまた、レーザーやミラーを使っているため、気が付かないところで共振器が生じてしまう可能性も否めない。そのようなときに、またこのような特殊な挙動が生じた際には計算してみたいと思う。

謝辞

本研究を行うにあたって、たくさんの方々に支えられてここまですることができました。

まず、私の所属する研究室の教授である山本喜久教授には、本研究に取り組むにあたって、厳しくも優しく丁寧な指導をしてくださいました。特に先生は国家プロジェクト”FIRST 量子情報処理プロジェクト”の中心研究者ということで、先生の研究室の生徒として、FIRSTの全体会議に出席できたことは、自分自身にとってとても貴重な体験でした。先生の研究室で2年間過ごせたことは、私にとってとても良い経験でした。ありがとうございました。

宇都宮聖子准教授には、山本研究室に入ったときから、とてもかわいがっていただきました。思えば、この研究室に入って、右も左もわからなかった私に初めて研究の指針を示してくださいしたのは宇都宮先生だったと思います。研究以外のことにおいても、宇都宮先生から学ぶことはとても多く、今後の人生において自分の院生時代を振り返ることがあれば、まず浮かべるのは宇都宮先生のことだと思います。2年間面倒を見ていただきありがとうございました。

Tim Byrnes 助教授には、直接指導をいただく機会はありませんでしたが、いつも笑顔で接してくださいました。また、グループミーティングの発表を見るたびに、そのかっこよさにしびれました。私も Byrnes 先生のような素敵な男性になりたいです。ありがとうございました。

NII 山本研究室秘書の佐藤さん、塩田さん、能登屋さんにも大変お世話になりました。特に塩田さんには、今年の春から夏にかけてよく面倒をみていただきました。時には、私の研究の相談にも乗ってください、精神面でも支えていただきました。研究以外の雑談もとても楽しかったです。ありがとうございました。ただ、私が仕事の邪魔になっていなかったかだけが心残りです。

そして、山本研究室の先輩方々には本当に頭が上がりません。

まず堀切さんは、本来グループミーティングぐらいにしか顔を合わせる機会がなかったのですが、私がしつこくお昼を誘ったりする内に親しくなれた気がします。そして、研究の相談も人生の相談にも乗ってくれるとてもいい先輩でした。また、話題も豊富で常に私を楽しませてくれるのは本当にうれしかったです。スタンフォードに旅立つと聞いた時にはさびしくて、何度も引き止めました。それでも、私のために頻繁に帰国してくださる堀切さんは私の理想の上司です。ありがとうございました。

そして、そんな優しい先輩がきっかけで親しくなれたのが楠戸さんです。楠戸さんには、研究に行き詰っていた時に声をかけていただきました。そして、それ以降、研究室で娯楽において楠戸さんは欠かせない人となりました。そして、この修論執筆にあたり、何度も気にかけてくださったのも楠戸さんでした。ありがとうございました。無事書けそうです。

Michael D. Fraser 先生には、私が英語がしゃべることができないがために迷惑をかけてしまったかもしれません。しかし、Fraser 先生とはNIIの居室でともに過ごした仲間としてとても尊敬しています。いつか英語が話せるようになって、直接感謝の念を伝えます。Thank you.

玉手さんとは何度か衝突したこともありました。しかし、玉手さんの研究に対する姿勢は非の打ちどころがありません。また、研究に行き詰っていた私のために資料をまとめてくれるなど、本当は優しい先輩だと知っています。生意気な後輩だったかもしれませんが、それでも私は一方的に玉手さんを尊敬しています。欲を言えば、もう少し優しくしてほしいです。ありがとうございました。

開さんは初めて会ったとき日本人だと思いました。そして今でも日本人だと信じています。それほど、親しみやすさを感じました。博士論文発表の時も流暢に発表している姿を見て、私も是非見習いたいと思いました。ありがとうございました。

山本研究室の博士課程の方にもお世話になりました。松尾さんは話しかけると、喜作に答えてくれました。一度くらいはゲーム談義でもしてみたかったです。卒業してしまい、今は山本研究室にいない Javed さんもいつも明るい笑顔で私を楽しませてくれました。いまでも、隣の席から Javed さんの温もりを感じます。

後輩にも力を分けていただきました。神原君は楠戸さんと同じ娯楽仲間として楽しませてくれました。また、最近何気に神原君との雑談が増えてきたことも先輩として嬉しいことです。針原君も山本研究室には珍しい人だと思います。飲みと焼き鳥と酒のイメージが強いですが、それでも真剣に討論した時間は貴重なものでした。頼りない先輩だったかもしれないですが、ついてきてくれてありがとうございました。

そして、この研究室で一番面倒を見ていただいたの先輩である高田さんに感謝の気持ちを述べたいと思います。高田さんには2年間ほぼ休みなしで面倒を見ていただきました。そもそもこの研究室に入り、山本先生の次に話したのは高田さんだったと思います。それ以来、勉強に関して天才と思うだけでなく、話術においても天才だと実感していくようになりました。特に、勉強を教えていただく際には、他の誰が解説するよりもわかりやすく丁寧に教えていただきました。こんな物覚えの悪い私に対しても、私が理解できるまで長時間にわたり解説してくださいました。本当にいくら感謝をしてもしきれないほどです。また、普段の話においてもここまで会話をして楽しいと思う人は人生においてほとんどいません。その意味でも、研究を含めた私生活において、私がどれだけ助けられたかわからないほどです。高田さんがスタンフォードに留学している際も、時差があるにも関わらず、深夜まで議論してくださいました。感謝のあまりスタンフォードにお礼を言いに行こうかと思ったほどです。他にも、感謝したいことがたくさんあるのですが、ここら辺でやめておきます。最後に、修論執筆及び研究・遊び・雑談全般において、研究で辛いこともありましたが本当に楽しかったです。高田さんが山本研究室にいてくれてよかったです。ありがとうございました。

最後に、長い間東京に一人暮らしをさせてくれた両親、そして稚拙な会話に付き合ってくれた兄弟、ミニチュアダックスフンドのルークに感謝をささげます。あなたたちがいなければ私は今頃ここにはいなかったと思います。ありがとうございました。

本研究は、私と関わったすべての方の力で達成したものだと考えております。感謝してい

ます。本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] Shigeru Saito, Olle Nilsson, and Yoshihisa Yamamoto. Oscillation center frequency tuning, quantum fm noise, and direct frequency modulation characteristics in external grating loaded semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-18(6):961–970, 1982.
- [2] 一瀬小夜 山口利恵, 高木浩光. スマホアプリにおけるアプリケーション・プライバシーポリシー掲載の現状調査. *IEICE technical report 信学技報*, 113:419–424, 2013.
- [3] 中西豪士. 日本の選挙運動におけるインターネット技術利用の可能性と問題点. *21世紀社会デザイン研究*, 10:161–170, 2011.
- [4] 渡辺治. 計算可能性・計算の複雑さ入門. 近代科学者, 1992.
- [5] 田崎清明. 統計力学. 培風館, 2008.
- [6] F. Barahona. On the computational complexity of ijing spin glass models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:3241–3253, 1982.
- [7] M. Mezard, G.Parisi, and M. A. Virasono. *Spin Glass Theory and Beyond*. Wspc, 1987.
- [8] T. Byrnes, K. Yan, and Y. Yamamoto. Optimization using bose-einstein condensation and measurement-feedback circuits. *New Journal of Physics*, 13, 2011.
- [9] T. Byrnes, K. Yan, and Y. Yamamoto. Accelerated optimization problem search using bose-einstein condensation. *New Journal of Physics*, 13(11):113025, 2011.
- [10] K. Yan, T. Byrnes, and Y. Yamamoto. Kinetic monte carlo study of accelerated optimization problem search using bose-einstein condensates. *Progress in informatics*, 8, 2011.
- [11] S. Kobayashi and T. Kimura. Injection locking in AiGaAs semiconductor laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-17(5), 1981.
- [12] S. Inoue, S. Machida, Y. Yamamoto, and H. Ohzu. Squeezing in an injection-locked semiconductor laser. *Physical Review A*, 48, 1993.
- [13] G. H. M. van Tartwijk and D. Lenstra. Semiconductor lasers with optical injection and feedback. *Quantum Semiclass, Opt.* 8, 1995.

- [14] 高田 健太. 自己学習機能を持った注入同期レーザーネットワークによる np 完全問題の量子アナログ計算. 東京大学 情報理工学研究所 電子情報専攻 修士論文, 2012.
- [15] Amnon Yariv and Pochi Yeh. *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, 2007.
- [16] Lars Gillner, Gunnar Björk, and Yoshihisa Yamamoto. Quantum noise properties of an injection-locked laser oscillator with pump-noise suppression and squeezed injection. *Phys. Rev. A*, 41:5053–5065, 1990.
- [17] 裳華房. 入門レーザー. 裳華房, 1997.
- [18] Murray Sargent III, Marlan O. Scully, and Willis E. Jr. Lamb. *Laser Physics*. Westview Press, 1978.
- [19] Takeo Katayama, Yuuki Sato, Takashi Mori, and Hitoshi Kawaguchi. Polarization bistable characteristics of 1.55 μm vertical-cavity surface-emitting lasers. *Japanese Journal of Applied Physics*, 46, 2007.
- [20] W. H. Chung, L. Y. Chan, and H. Y. Tam. Output polarization control of fiber dfb laser using injection locking. *IEEE Photonics Technology Letters*, 14, 2002.
- [21] Shoko Utsunomiya, Naoto Namekata, and Kenta Takata. Implementation of two site ising models in injection-locked semiconductor laser network. *to be submitted*.
- [22] S. Kobayashi, Y. Yamamoto, M. Ito, and T. Kimura. Direct frequency modulation in algaas semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-18:582–595, 1982.
- [23] R. lang and K. Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-16:347–355, 1980.
- [24] M. Ito and T. Kimura. Oscillation properties of AlGaAs DH lasers with an external grating. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-16:69–77, 1980.
- [25] 桜庭一郎 三島瑛人, 高井信勝. 光エレクトロニクスの基礎. 森北出版, 2001.
- [26] Eblana Photonics. Discrete mode laser diodes with ultra narrow linewidth emission. <http://www.eblanaphotonics.com/downloads/whitepaper200907.pdf>.
- [27] 栖原敏明. 半導体レーザーの基礎. 共立出版, 1998.