

東京大学大学院新領域創成科学研究科

基盤科学研究系

先端エネルギー工学専攻

平成25年度

修士論文

抵抗性簡約化MHD方程式の数値計算における
シア流に起因するスペクトル汚染のモデル解析

2014年1月 提出

指導教員 吉田善章 教授

47-126078 佐々木 悠大

目次

第 1 章	序論	4
1.1	研究背景	4
1.2	研究目的	5
1.3	テアリングモード不安定性	6
1.4	簡約化 MHD 方程式	9
第 2 章	抵抗性 MHD 方程式における固有モード解析	13
第 3 章	非物理的な不安定性の特性	25
3.1	空間刻み幅依存性	25
3.2	プラズマ電気抵抗率依存性	26
3.3	テアリングモードが主要な役割を果たしていない現象での固有モード解析	27
第 4 章	非物理的不安定性のモデル解析	33
4.1	モデル化	33
4.2	数値解を用いたモデル化した固有値の評価	35
4.3	モデルの定量性に関する考察	41
4.4	外部解を用いたモデル化した固有値の評価	43
第 5 章	結論	46
付録 A	非物理的な固有値と真の固有値の相互影響	48
付録 B	高次の差分近似を用いた固有モード解析	50

参考文献	57
謝辞	58
学会発表等	60

第1章 序論

1.1 研究背景

核融合の実現に向けたプラズマ閉じ込めの研究における重要な問題として、安定性の判定がある。プラズマの安定性解析において、固有モード解析はよく用いられる手法の一つである。平衡状態に摂動を与え、線形化した方程式の固有値問題を解くことで安定性を判別できる。具体的には、摂動項の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ と仮定し、固有値 ω の虚部の正負を調べることで安定性を判別することができる。線形化した方程式の生成作用素がエルミート作用素である場合、固有関数は直交し、固有モードの独立性が保証される。そのため、各モードの運動を足し合わせることで、波の運動を記述することができる。一方で、線形化した方程式の生成作用素が非エルミート演算子である場合、固有モードの独立性は保証されず、線形安定性に関する一般的な理論は確立されていない。本研究で取り扱うのは、流れをもつプラズマの線形安定性問題であるが、この場合、線形化した方程式の生成作用素は非エルミート演算子となる [1]。プラズマが流れをもつのは特別なことではなく、核融合プラズマにおいても見ることができ、平衡や安定性などに重要な役割を果たしていることが分かっている [2-4]。

プラズマの流れ、特にシア流がある場合のテアリングモード安定性の線形理論について、[5,6]などで解析的に、[7]などで数値的に解かれているが、これらにおいてはシア流に起因する連続スペクトルについては言及されていない。一方で、シア流に起因する連続スペクトルに注意して、数値的な手法を用いた研究も行われている [8]。2.2節で詳細を後

述するが，この場合，シア流に起因する連続スペクトルによって「スペクトル汚染」と呼ばれる非物理的な不安定性が生じることが見出されている．スペクトル汚染に関する研究は [9,10] などで行われている．これらは，非圧縮条件などの物理的制約が数値的に満たされないために非物理的な不安定性が生じてしまうことを明らかにし，これに対する解決法が提案されている．しかし，連続スペクトルに起因する非物理的な不安定性に関する研究は充分に行われていない．なお，先行研究 [9,10] で生じるスペクトル汚染は，空間グリッド幅をゼロにする極限でも残ってしまう汚染なのに対し，本研究で対象とする先行研究 [8] のスペクトル汚染は，空間グリッド幅をゼロにする極限では汚染が生じなくなるという違いがある．

非物理的な不安定性が生じる可能性を排除しないまま安定性解析を行うと，プラズマが不安定であるという数値計算結果が出たとしても，それが正しい不安定性なのか，あるいは非物理的な不安定性なのかを確認するために細心の注意が必要となる．もとより，流れがあるプラズマにおける，線形安定性に関する一般的な理論は未完成であるため，非物理的な不安定性が生じる可能性のある数値計算法は使うべきではない．

1.2 研究目的

以上を背景として，次の二点を研究目的とする．

- 非物理的な不安定性の性質を数値計算によって明らかにする．
- 非物理的な不安定性の性質を再現する簡易モデルを開発することで，非物理的な不安定性について定性的な理解を得る．

これにより，連続スペクトル起源の非物理的な不安定性に対する理解を深めることができ，スペクトル汚染が生じない数値計算法開発への着想を得ることができると考えている．

1.3 テアリングモード不安定性

先行研究 [8] はテアリングモード不安定性についてシア流の効果を研究したものである。その結果、シア流に起因する非物理的な不安定性が見出されている。この非物理的な不安定性に対してテアリングモードパラメータが本質的に影響を与えているのかを後に調べる (3.3 節)。そこで本節では、テアリングモードおよびテアリングモードパラメータ (Δ') について解説する。

電気抵抗のない理想的なプラズマ中では、磁束はプラズマに凍りつく。一方で、有限の電気抵抗を持つプラズマ中では、平衡磁場と垂直方向の波数を持つ揺らぎが、磁力線のつなぎ換えを伴って不安定化することがある。これをテアリングモード不安定性 [13,14,15] と呼ぶ。平衡磁場と波数ベクトルが垂直になる点は、 $\frac{m}{n} - q = 0$ を満たす点で、すなわち有理面である。ここで、 m, n はポロイダルモード数、トロイダルモード数で q は安全係数である。安全係数とは、磁力線がポロイダル方向に一回転する間に、トロイダル方向に何回回転するかを表す指標である。有理面の近傍では、慣性や電気抵抗が相対的に大きくなる抵抗層が形成されるが、テアリングモードの安定性を決めるのは、抵抗層の左右における磁場勾配の跳びによって定義されるテアリングモードパラメータと呼ばれる Δ' の符号である。以下で、円柱プラズマにおけるテアリングモードパラメータと成長率の関係を導く [13,14]。座標系は円柱座標 (r, θ, z) を用いる。抵抗層を除いた外部領域では、慣性や電気抵抗の効果が相対的に小さくなり無視することができるので、支配方程式は

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p \quad (1.1)$$

である。この式の回転(curl)をとり、さらに大アスペクト比によるオーダリングを行うと、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{j} = 0 \quad (1.2)$$

と変形できる．摂動量 $e^{i(m\theta-nz)}$ を持つと仮定し線形化を行う．さらに磁束関数を導入することで次の式を導くことができる：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} = \frac{m^2}{r^2} \psi - \frac{dj_z/dr}{\frac{B_\theta}{\mu_0} \left(1 - \frac{nq}{m}\right)}. \quad (1.3)$$

ここで， $q = \frac{rB_z}{RB_\theta}$ で， ψ は $B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ という関係にある．テアリングモードパラメータは，外部領域における式から導かれる，抵抗層の左右における磁場勾配のと跳びによって定義される：

$$\Delta' = \frac{\frac{d\psi}{dr} \Big|_{r_s+\varepsilon}}{\psi(r_s)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

ここで， ε は正の実数である．式 (1.4) と抵抗層を横切った磁場勾配の変化 (1.5) が等しいとすることで成長率を求めることができる：

$$\Delta'_{in} = \frac{\delta \left(\frac{d\psi}{dr} \right)}{\psi(r_s)}. \quad (1.5)$$

ここで $\delta(d\psi/dr)$ は $(d\psi/dr)$ の抵抗層を横切った変化を表す．分母には，抵抗層内で ψ を一定であると仮定する”constant- ψ 近似” [15] を用いた．

外部領域とは異なり，抵抗層では慣性や電位抵抗を無視することはできない．Ohm の法則の回転 (curl) をとり，さらに Faraday の法則および Ampère の法則を用いると，

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.6)$$

となる．摂動量 $e^{(\gamma t + im\theta - inz)}$ を持つと仮定し線形化を行う．同様に磁束関数を導入することで次の式を導くことができる：

$$\gamma \psi + B_\theta \left(1 - \frac{nq}{m}\right) v_r = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \psi. \quad (1.7)$$

ここで γ は成長率である。抵抗層は薄いため、 ∇^2 のうち半径方向の微分が支配的になる。式(1.7)において、半径方向の微分のみを取り出すと、

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{\mu_0\gamma}{\eta}\psi + \frac{\mu_0 B_\theta}{\eta} \left(1 - \frac{nq}{m}\right) v_r \quad (1.8)$$

となる。抵抗層では ψ は一定であると仮定し、さらに $(1 - nq/m)$ を $x = r - r_s$ の有理面まわりで展開した $-(q'/q)_{r_s}x$ で置き換えると Δ'_{in} は、

$$\Delta'_{in} = \frac{\mu_0\gamma}{\eta} \int \left(1 + \frac{B_\theta q'}{q} x \frac{v_r}{\psi}\right) dx \quad (1.9)$$

となる。ここで積分は抵抗層にわたって行う。 v_r/ψ を運動方程式から求める。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (1.10)$$

これは、式(1.1)において慣性項を含めたものになる。非圧縮性を仮定し、同様に半径方向の微分だけ取り出すと、

$$\frac{\gamma \rho r^2}{m^2} \frac{d^2 v_r}{dr^2} = \frac{B_\theta}{\mu_0} \left(1 - \frac{nq}{m}\right) \frac{d^2 \psi}{dr^2} - \frac{dj_z}{dr} B_r \quad (1.11)$$

となる。さらに、式(1.8)を用いて $d^2\psi/dr^2$ を消去すると、

$$\frac{d^2 v_r}{dx^2} - \left(\frac{B_\theta^2 m^2 q'^2}{\rho \eta \gamma r^2 q^2}\right) x^2 v_r = -\frac{B_\theta m^2 q'}{\rho \eta r^2 q} x \psi - \frac{m^2}{\rho \gamma r^2} \frac{dj_z}{dr} \psi \quad (1.12)$$

となる。抵抗層において、 ψ は一定であると仮定しているのので、この式は v_r に関する非同次方程式となる。 v_r は x について対称成分と反対称成分の和で書くことができる。右辺の第一項から生じる対象成分のみが式(1.9)の積分に寄与する。ここで、以下の変数を

導入する：

$$d = \left(\frac{\rho\eta\gamma r^2 q^2}{B_\theta^2 m^2 q'^2} \right)^{1/4}, \quad u = \frac{x}{d}, \quad y = -\frac{\rho\gamma r^2 q}{m^2 B_\theta q' d^3} \frac{v_r}{\psi}. \quad (1.13)$$

v_r, y は式 (1.12) の反対称成分のみを用いる. (1.13) を用いると, 式 (1.12) および (1.9) は次のように書きかえることができる：

$$\frac{d^2 y}{du^2} = -u(1 - uy), \quad (1.14)$$

$$\Delta'_{in} = \frac{\mu_0 \gamma d}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - uy) du. \quad (1.15)$$

式 (1.15) の積分値は 2.12 となる. Δ'_{in} と Δ' を等しいとおくと,

$$\Delta' = 2.12 \frac{\mu_0 \gamma d}{\eta} \quad (1.16)$$

となる. 式 (1.13) の d を代入すると, 次式を得る：

$$\gamma = 0.55 \left(\left(\frac{\eta}{\mu_0} \right)^{3/5} \left(\frac{m B_\theta}{(\mu_0 \rho)^{1/2} r q} \right)^{2/5} \right)_{r=r_s} \Delta'^{4/5}. \quad (1.17)$$

テアリングモードの成長率は $(\Delta')^{4/5}$ に比例し, Δ' が正のときに不安定となることが分かる.

1.4 簡約化 MHD 方程式

本研究では, 円柱プラズマにおける低 β 抵抗性簡約化 MHD 方程式を用いる [11,12]. 本節では, 簡約化 MHD の導出について簡単に説明する. 簡約化する前の抵抗性 MHD 方程式は以下である：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.18)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j}, \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.23)$$

ここで、 ρ は質量密度、 p はプラズマ圧力、 \mathbf{B} は磁場、 \mathbf{v} は流速、 \mathbf{j} は電流密度、 η はプラズマ電気抵抗率、 μ_0 は真空透磁率である。

プラズマ電気抵抗率を一定であると仮定し、これらの式を整理すると以下の式を得る：

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (1.25)$$

式 (1.24) は運動方程式、式 (1.25) は磁場の誘導方程式である。上式は、プラズマ小半径 a 、磁場 B^* 、磁気圧 $p^* = B^{*2}/\mu_0$ 、質量密度 ρ^* 、Alfvén 速度 $v_A := B^{*2}/\sqrt{\mu_0 \rho^*}$ 、Alfvén 時間 $\tau_A := a/v_A$ 、電気抵抗 $\eta^* = \mu_0 v_A a$ を用いて規格化されている。

式 (1.24) の回転 (curl) をとると、

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{U}) \right] = \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \quad (1.26)$$

となる。これは渦度方程式である。

微小パラメータ $\varepsilon \ll 1$ を用いて、 $k_{\parallel} = O(\varepsilon k_{\perp})$ を仮定し、抵抗性 MHD 方程式を簡約化する。ここで k_{\parallel} は平衡磁場に平行方向の波数、 k_{\perp} は平衡磁場に垂直方向の波数である。さらに、流れ関数 φ および磁束関数 ψ を導入する。流れ関数 φ および磁束関数 ψ は流速

\mathbf{v} および磁場 \mathbf{B} と以下の関係にある：

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla\varphi, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \hat{\mathbf{z}} + B_0\hat{\mathbf{z}}. \quad (1.28)$$

なお，円柱座標系 (r, θ, z) を使用し， $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向の単位ベクトルである．以上より，低 β 抵抗性簡約化 MHD 方程式を得る：

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla_{\parallel} J, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla_{\parallel}\varphi = \eta J. \quad (1.30)$$

平衡磁場 (0 次) は $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ であり，平衡からの微小なずれ (1 次) の磁場および速度場が

$$\mathbf{B}_1 = \nabla\psi \times \mathbf{B}_0, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_0 \times \nabla\varphi \quad (1.32)$$

と表される．ここで， $\mathbf{b}_0 := \mathbf{B}_0/B_z$ である．また， z 方向の渦度 U ， z 方向の電流密度 J ，Poisson 括弧 $[,]$ などは，

$$U := \nabla_{\perp}^2 \varphi, \quad (1.33)$$

$$J := \nabla_{\perp}^2 \psi, \quad (1.34)$$

$$[f, g] := \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla f \times \nabla g, \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\varphi,], \quad (1.36)$$

$$\nabla_{\parallel} := \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} - [\psi,], \quad (1.37)$$

$$\nabla_{\perp} := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.38)$$

である。また、 R_0 はプラズマ大半径、逆アスペクト比を $\varepsilon := a/R_0$ としている。規格化されたプラズマ電気抵抗率は η と書かれている。トロイダル回転角 ζ は、 z と $\zeta := z/R_0$ という関係にある。

第2章 抵抗性MHD方程式における固有モード

解析

本章では先行研究 [8] について紹介する.

プラズマの安定性は、平衡状態に加えた摂動量がどのように時間変化するかを調べること
で判別できる. 具体的には、抵抗性簡約化 MHD 方程式を線形化し、摂動量が $e^{i(m\theta+n\zeta-\omega t)}$
という時間・空間依存性を持つと仮定し、 ω を固有値とする固有値問題を解くことにな
る. ここで、 m はポロイダルモード数、 n はトロイダルモード数、 ω は角周波数である.
 $\text{Im}\omega > 0$ の固有値があると、その平衡は不安定ということになる. ある物理量 a に対し
て、平衡量を a_0 、摂動量を a_1 とし、抵抗性簡約化 MHD 方程式を線形化する. 線形化し
た抵抗性簡約化 MHD 方程式は、

$$-i\omega \begin{bmatrix} \nabla_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{im}{r}(v_{\theta}\nabla_{\perp}^2 - U_0') & -im\varepsilon\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{q}\right)\nabla_{\perp}^2 - \frac{imJ_0'}{r} \\ -im\varepsilon\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{q}\right) & -\frac{imv_{\theta}}{r} + \eta\nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

となる. ここで、 $\nabla_{\perp} := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ であり、プライムは r 方向の微分を表し、 φ_1, ψ_1
は φ, ψ と書き換えている.

線形化した抵抗性簡約化 MHD 方程式 (2.1) において、 ∇_{\perp}^2 を二次精度の中心差分を用
いて各グリッド点で近似し、数値的に固有モード解析が行われている. 境界条件は磁気軸
 $r = 0$ およびプラズマ端 $r = 1$ ですべての摂動量がゼロとされている. 平衡はトロイダル
電流分布 $j_t(r) = j_{t0}(1 - r^2)$ をもち、 $r = 1/2$ で $q = 2$ の有理面をもつよう j_{t0} が決められ
ている. q は安全係数である. $m = 2, n = 1$ のモードに着目し、アスペクト比は 10 とさ

れている。この平衡は、平衡プラズマ回転がない場合に、テアリング不安定である。平衡の安全係数分布を図 2.1 に示す。

平衡ポロイダル回転は、平衡状態の φ を

$$\varphi_{eq} = \frac{1}{2}(v'_{\theta s} - 2v_{\theta s})r^4 - \frac{1}{4}(v'_{\theta s} - 6v_{\theta s})r^2 \quad (2.2)$$

と選んでいる。その理由は以下のようなものである。

- 剛体回転の場合 (このとき φ_{eq} は r の二次関数)、固有値には実部が加わるだけであり、単なる Doppler シフトである。
- 有理面で、ポロイダル回転速度 $v_{\theta s}$ およびポロイダル回転速度シア $v'_{\theta s}$ が与えられた値になる。
- φ_{eq} を r の 3 次関数で表すと、 U_{eq} が磁気軸で滑らかであるという初期値コード¹の境界条件を満たさない。そのため、 φ_{eq} を r の 4 次関数で表し、初期値境界条件 $d\varphi_{eq}/dr = 0$ および $dU_{eq}/de = 0$ 磁気軸で課す。

さらに、 $v'_{\theta s} = 6v_{\theta s}$ とし、ポロイダル回転速度が r の単調増加関数であることが保障されている。 $v_{\theta s}$ を増加させることはポロイダル回転速度シアを増加させることを意味する。平衡のポロイダル回転の分布を図 2.2 に示す。

$\eta = 0$ とした場合、

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 = 0, \quad (2.3)$$

つまり、

$$(\omega - m\omega_\theta)^2 - \left(\frac{m}{r} \frac{d\psi_{eq}}{dr} + n\varepsilon \right)^2 = 0 \quad (2.4)$$

¹ 先行研究 [6] では、固有モード解析で得られた、最大成長率をもつ固有値に対する固有関数を初期値として初期値問題を解いた場合、そのモード構造を維持したまま、固有モード解析で得られた成長率で成長することを確認している。但し、本論文では初期値問題は扱わない。

が連続スペクトルとなる．ここで， $\mathbf{v}_A := \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ であり， \mathbf{k} は波数， \mathbf{v} は流速， $\omega_\theta := v_\theta/r$ は平衡ポロイダル回転の角周波数である．ポロイダル回転による連続スペクトルは，

$$(\omega - m\omega_\theta)^2 = 0 \quad (2.5)$$

となる範囲に現れ，先に述べた平衡においては， $v_\theta = \varphi'_{eq} = 8v_{\theta s}r^3$ なので， $0 \leq \omega \leq 16v_{\theta s}$ に現れる． $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-3}$ の場合， $0 \leq \omega \leq 0.08$ となる．また，磁場による連続スペクトルは，

$$\omega^2 - \left(\frac{m}{r} \frac{d\psi_{eq}}{dr} + n\varepsilon \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

となる範囲に現れ，先に述べた平衡においては， $-0.0429 \leq \omega \leq 0.0429$ に現れる．

図 2.3 に固有値の分布を示す．実部を横軸に，虚部を縦軸にとっている．小半径方向のグリッド数 $N_r = 200$ ，プラズマ電気抵抗率 $\eta = 10^{-4}$ の場合のデータである．ほぼ実軸に沿った形で分布している固有値のうち， $\text{Re } \omega = 0.08$ 辺りまで分布しているのがポロイダル回転による連続スペクトルであると考えられる．また， $\text{Re } \omega < 0$ に分布している固有値は，磁場による連続スペクトルで，小半径方向のグリッド数 N_r をさらに増やすと $\text{Re } \omega = -0.0429$ まで伸びていく．また， $\text{Im } \omega \geq 0$ の領域に分布する固有値も見られ，これらの固有値の実部は， $v_{\theta s}$ の増加とともに Doppler シフトしている．

次に， $\omega = 0$ 付近を拡大したグラフを図 2.4 に示す． $v_{\theta s} = 0$ のとき， $\text{Im } \omega > 0$ つまり不安定性を表す固有値は一つである．この時の不安定固有値は， $v_{\theta s} = 0$ の増加とともに虚部が大きくなりつつ Doppler シフトして非ゼロの実部を持つようになる．同時に， $v_{\theta s} = 0$ のときに $\text{Im } \omega < 0$ の領域にあった固有値が，実部を持つようになるのと同時に，虚部が正の領域へはみ出してくる．図では見にくいですが， $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-4}$ のとき，すでに不安定固有値は一つではなくなっている．さらに $v_{\theta s}$ を増加させると， $v_{\theta s} = 0$ の時からあった不安定固有値の虚部は減少し始める．一方で，新たに生じた不安定固有値は，虚部が増加し，

$v_{\theta s} = 1.8 \times 10^{-3}$ 辺りで、 $v_{\theta s} = 0$ のときから生じていた固有値と合流する。さらに $v_{\theta s}$ を増加させると、新たに生じた不安定固有値は、その最大成長率は減少するものの、広い領域にわたって虚部が正となっていることがわかる。

図 2.5 に、最大成長率をもつ固有値の実部および虚部を、ポロイダル回転速度に対してプロットしたグラフを示す。実部は、 $v_{\theta s}$ の増加とともにほぼ線形に増加している (Doppler シフト)。虚部は、 $v_{\theta s}$ の増加とともに一度増加した後、減少に転じる。なだらかに減少する辺りでは、実部がある範囲に広がって、虚部が少しだけ小さい固有値が多数存在している。

ポロイダル回転を加えることによって新たに生じた不安定固有値は、ポロイダル回転による連続スペクトルと関係しているように見える。連続スペクトルをもつ固有値問題を数値的に解いた場合、グリッド数によって結果が異なると考えられる。従って、グリッド数 N_r を変えた計算が行われている。図 2.6, 2.7 に最大成長率を持つ固有値の実部および虚部を示す。実部は比較的収束しているように見えるが、虚部は N_r によって変化している。特に、 $v_{\theta s}$ の増加にともなって固有値の虚部が減少に転じた後で、大きなずれが確認できる。これは連続スペクトルによるものだと考えられ、非物理的な不安定性が計算されており、スペクトル汚染が生じていると考えられている。

さらに確証を得るために、固有関数が確認されている。図 2.8-2.15 は固有値の虚部が大きい順番に 1-5 番目の固有関数をプロットしたものである。小半径方向のグリッド数 $N_r = 200$ 、プラズマ電気抵抗率 $\eta = 10^{-4}$ 、ポロイダル回転速度 $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-3}$ の場合のデータである。 $q = 2$ の有理面で、 $\text{Im}\psi = 0$ となるようにしてある。特に特徴的なのは渦度 U であり、その分布には跳びがある。渦度のプロットのみ、 r の範囲を $0.4 < r < 0.6$ としている。最大成長率をもつ固有値に対する固有関数の跳びの位置に対して、2 番目と 3 番目の固有関数の跳びはその左右に、4 番目と 5 番目はさらにその左右に位置している。

また、この渦度の跳びの位置は、 N_r によっても変化する。図 2.16, 2.17 は、 $N_r = 100$

および $N_r = 400$ とした場合の渦度の実部をプロットしたものである。また、図 2.16, 2.17 は、 $N_r = 100$ および $N_r = 400$ とした場合の渦度の虚部をプロットしたものである。実部、虚部いずれの場合も $N_r = 100$ のときは、跳びの位置の分布がまばらなのに対し、 $N_r = 400$ のときは密になっている。明らかに、グリッド数によってきまっているものであり、数値的に求められたこれらの固有値は、微分方程式では連続スペクトルになっていると考えられている。

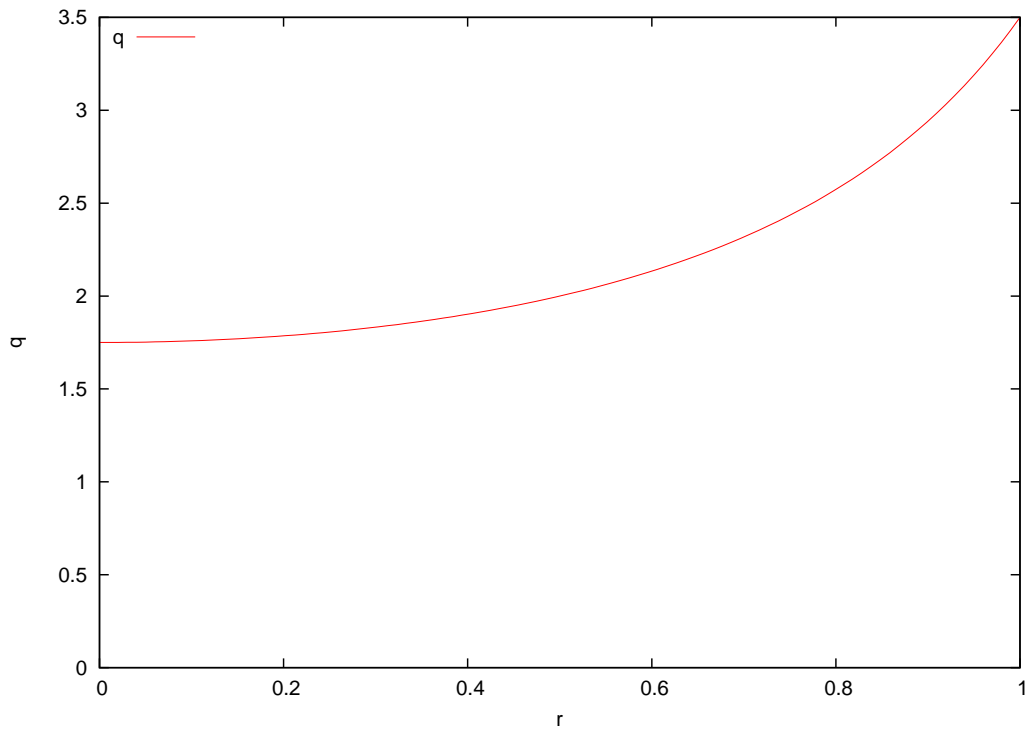


図 2.1: 平衡の安全係数分布.

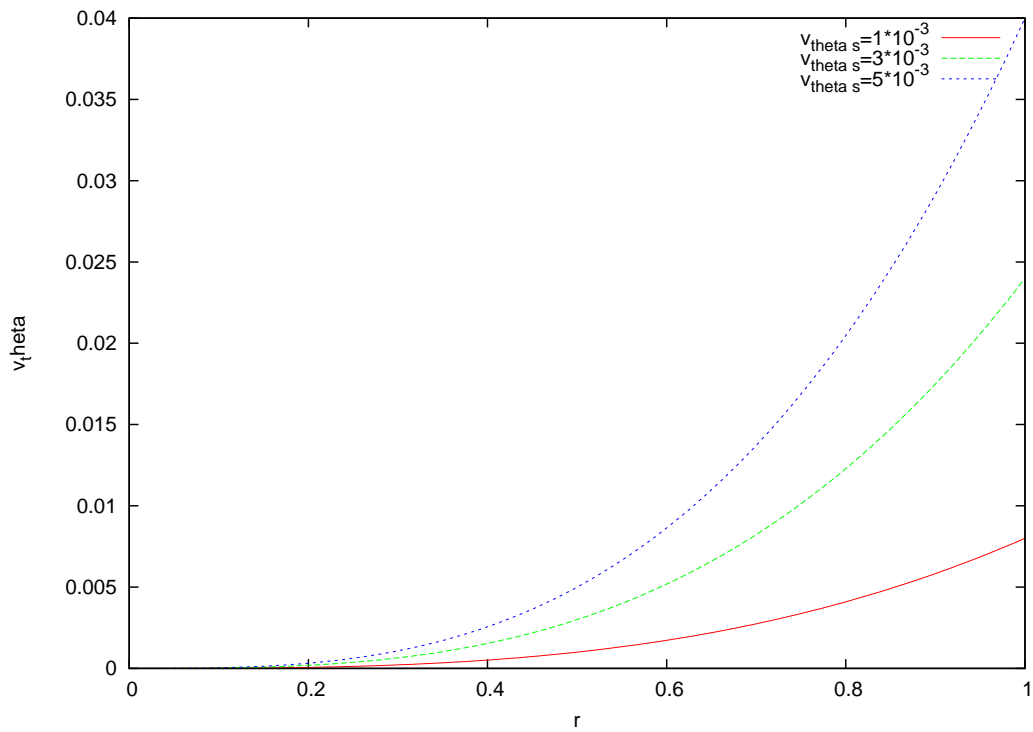


図 2.2: 平衡のポロイダル回転速度分布.

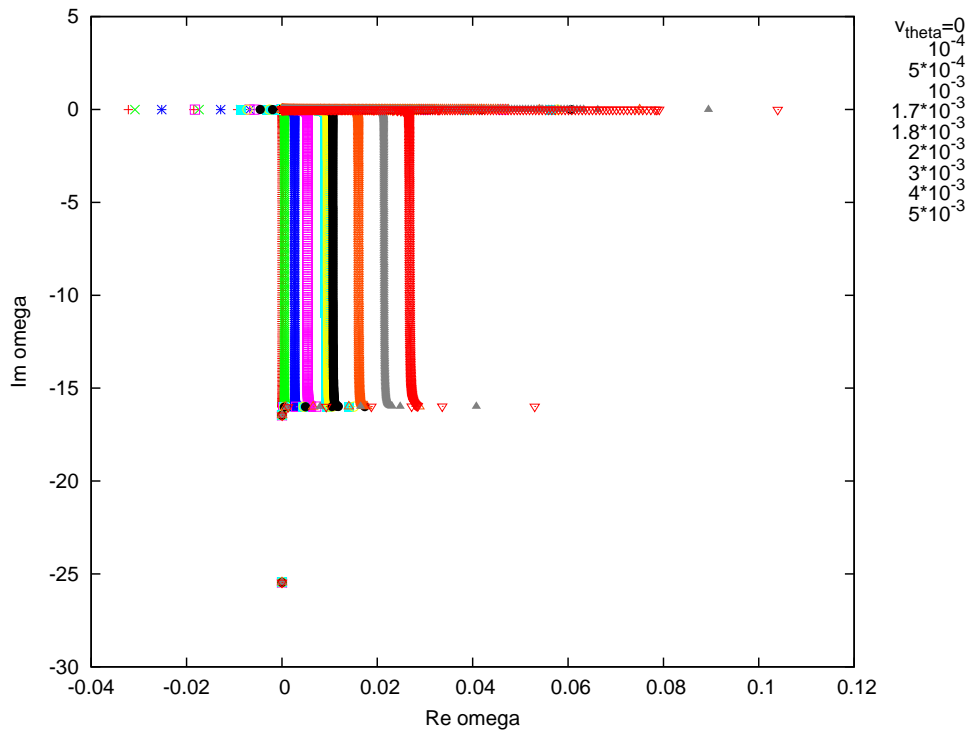


図 2.3: 固有値の分布.

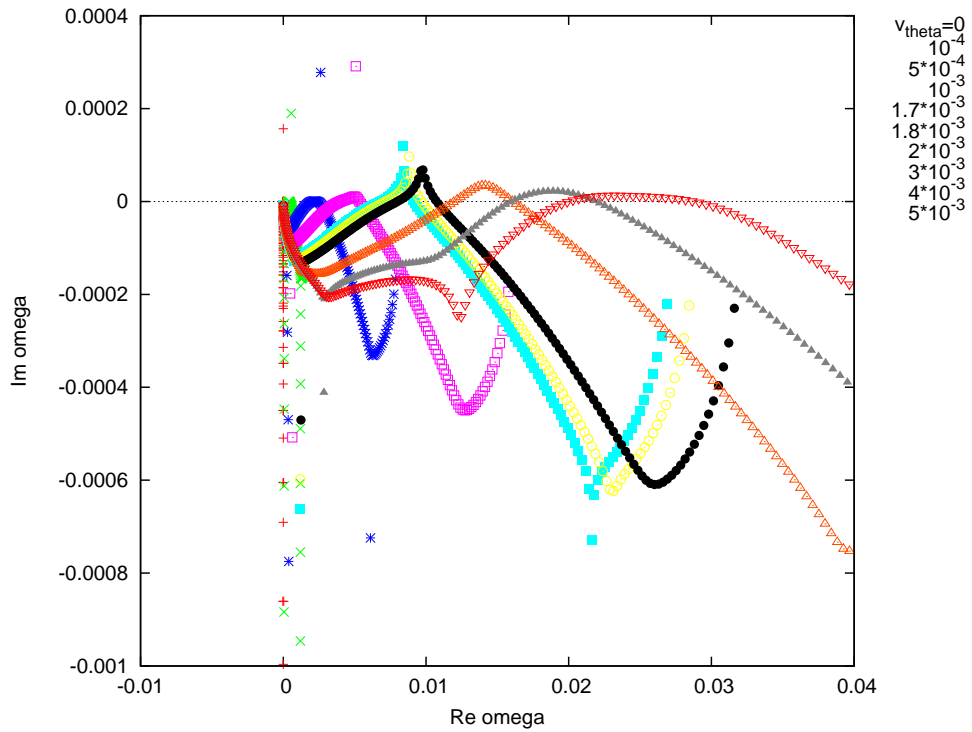


図 2.4: 固有値の分布 (拡大).

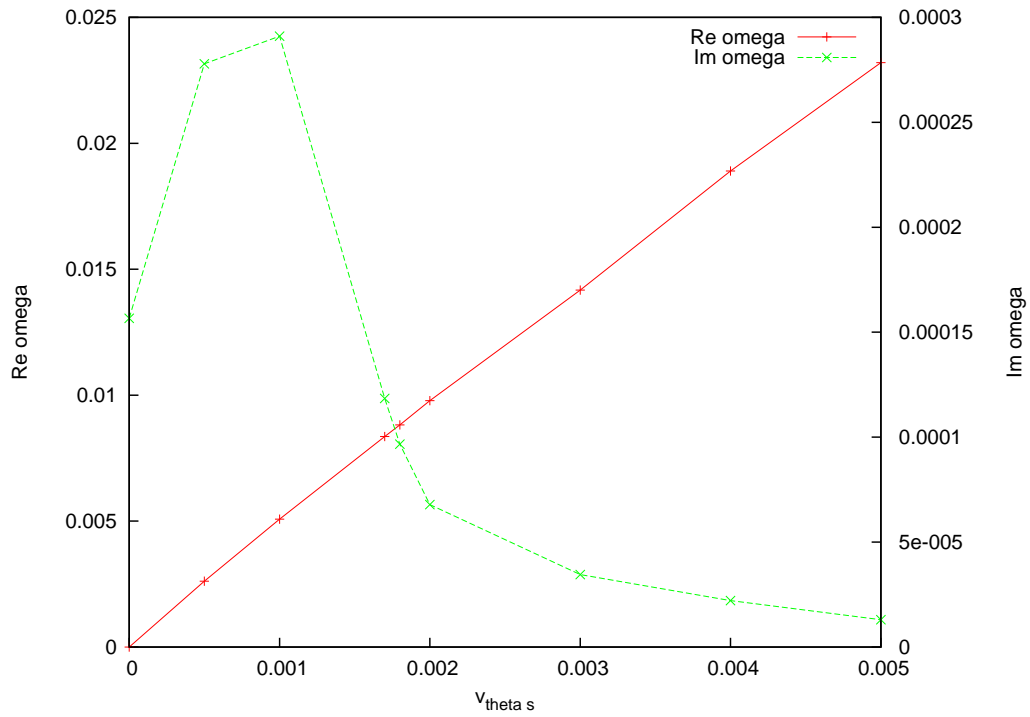


図 2.5: 固有値のポロイダル流速依存性.

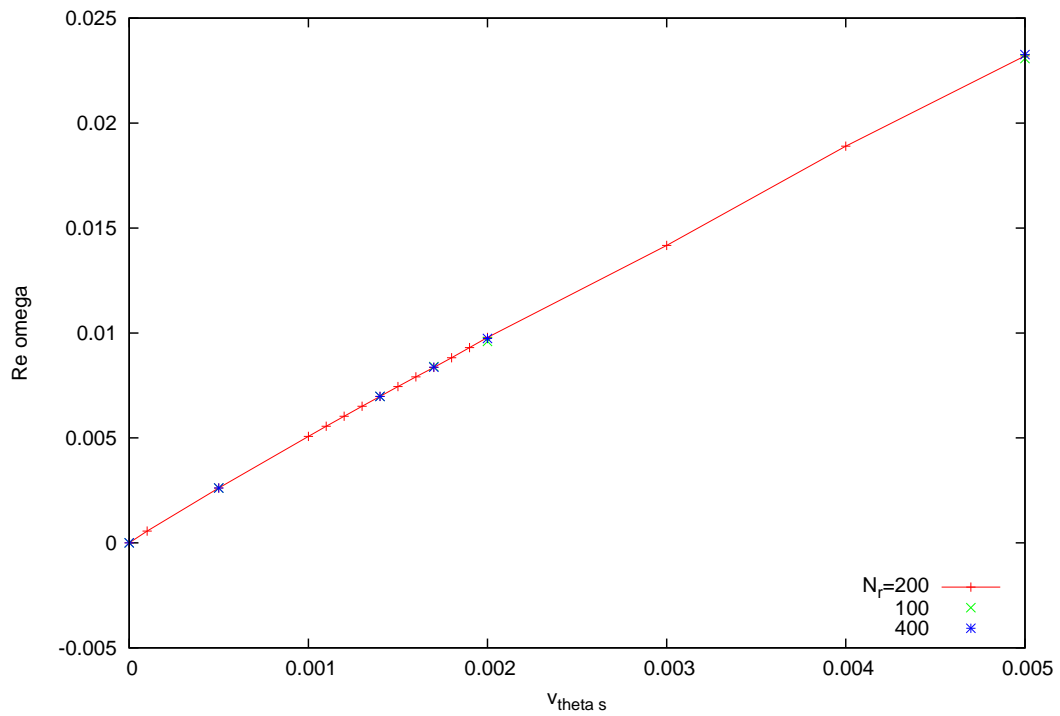


図 2.6: グリッド数を変えた場合の, 固有値実部のポロイダル流速依存性.

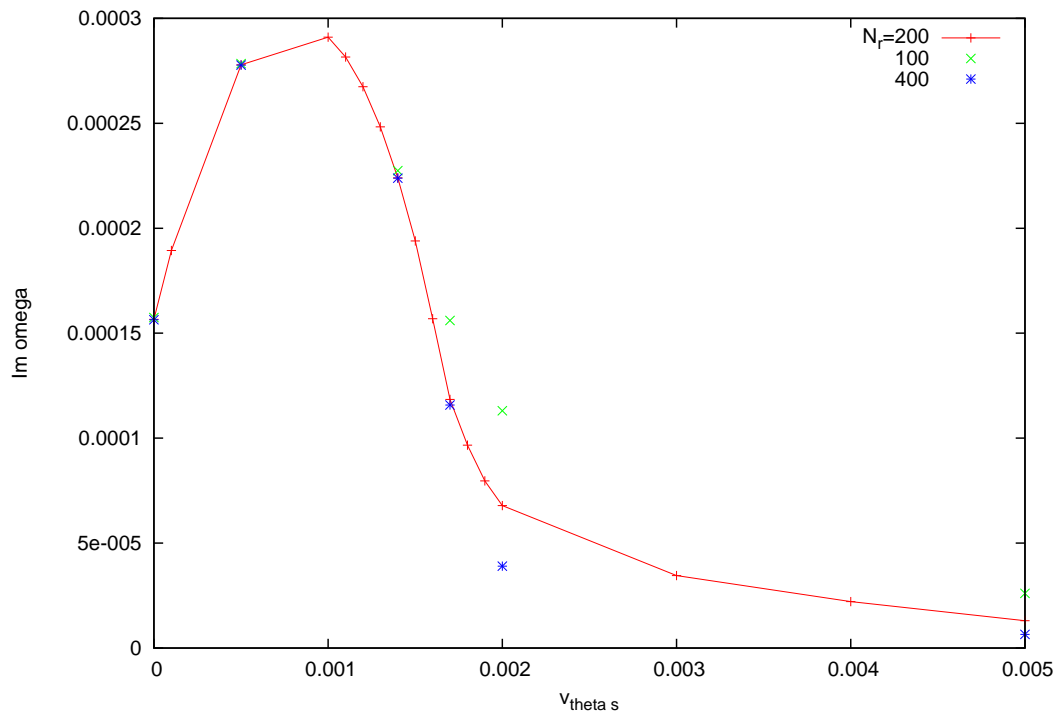


図 2.7: グリッド数を変えた場合の, 固有値虚部のポロイダル流速依存性.

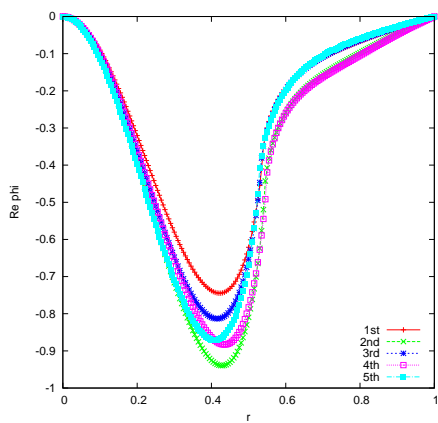


図 2.8: $\text{Re } \varphi$

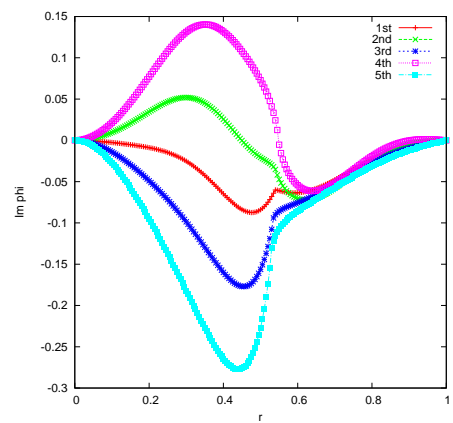
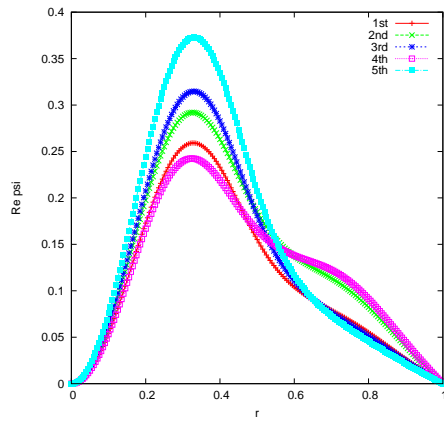
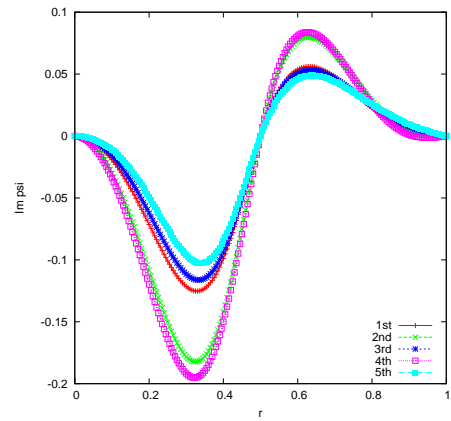


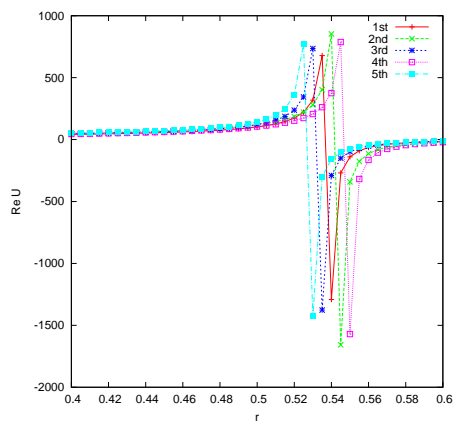
図 2.9: $\text{Im } \varphi$



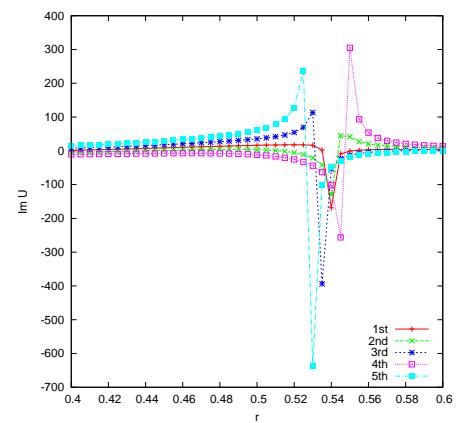
⊠ 2.10: Re ψ



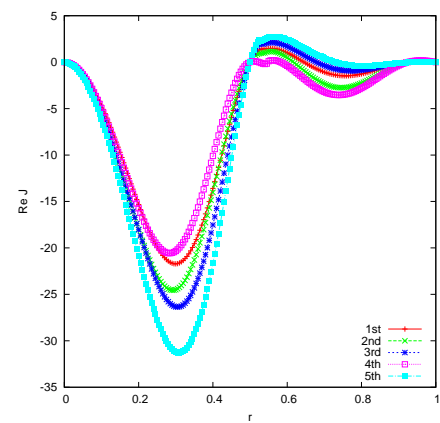
⊠ 2.11: Im ψ



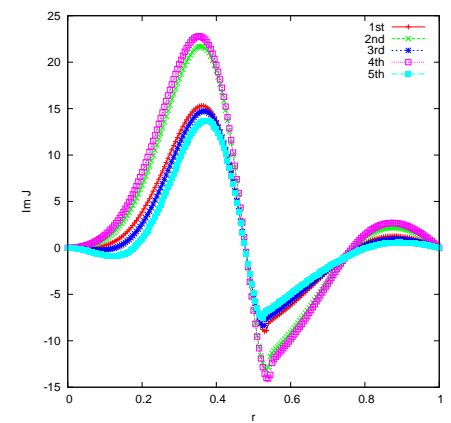
⊠ 2.12: Re U



⊠ 2.13: Im U



⊠ 2.14: Re J



⊠ 2.15: Im J

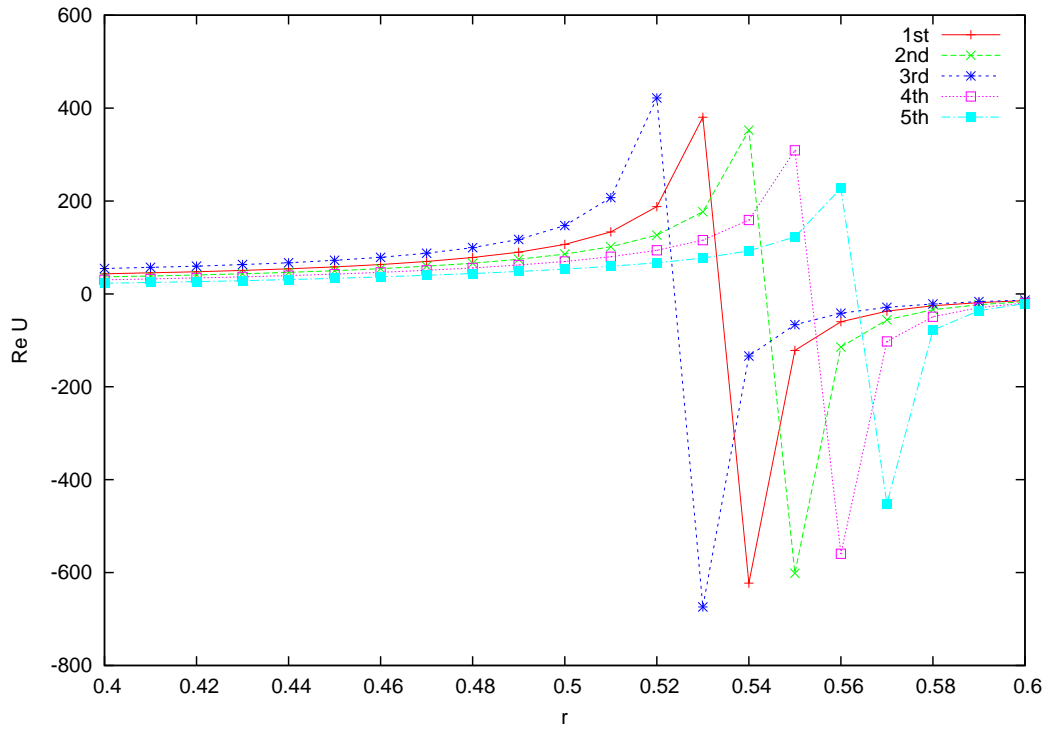


図 2.16: $N_r = 100$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部.

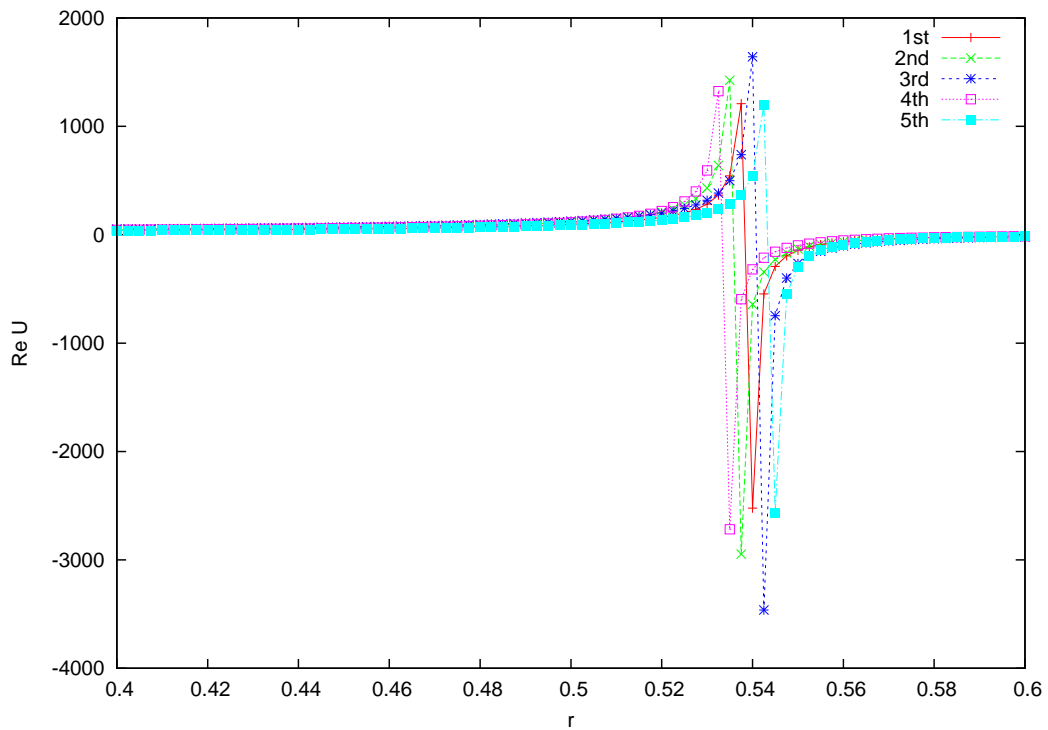


図 2.17: $N_r = 100$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部.

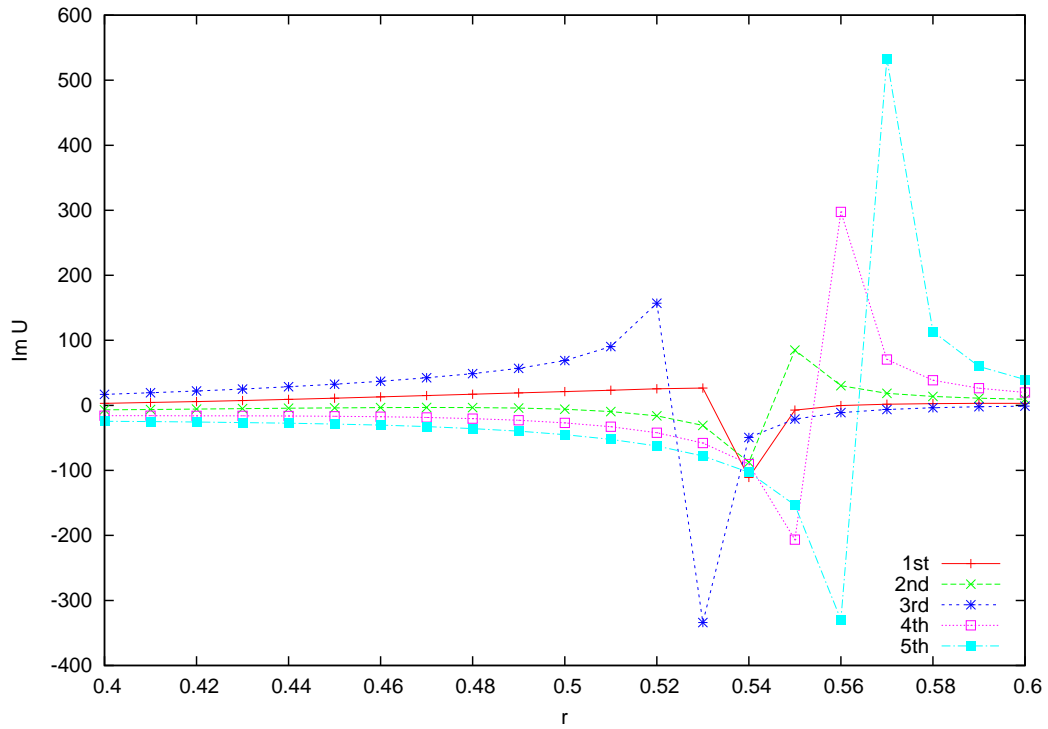


図 2.18: $N_r = 100$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部.

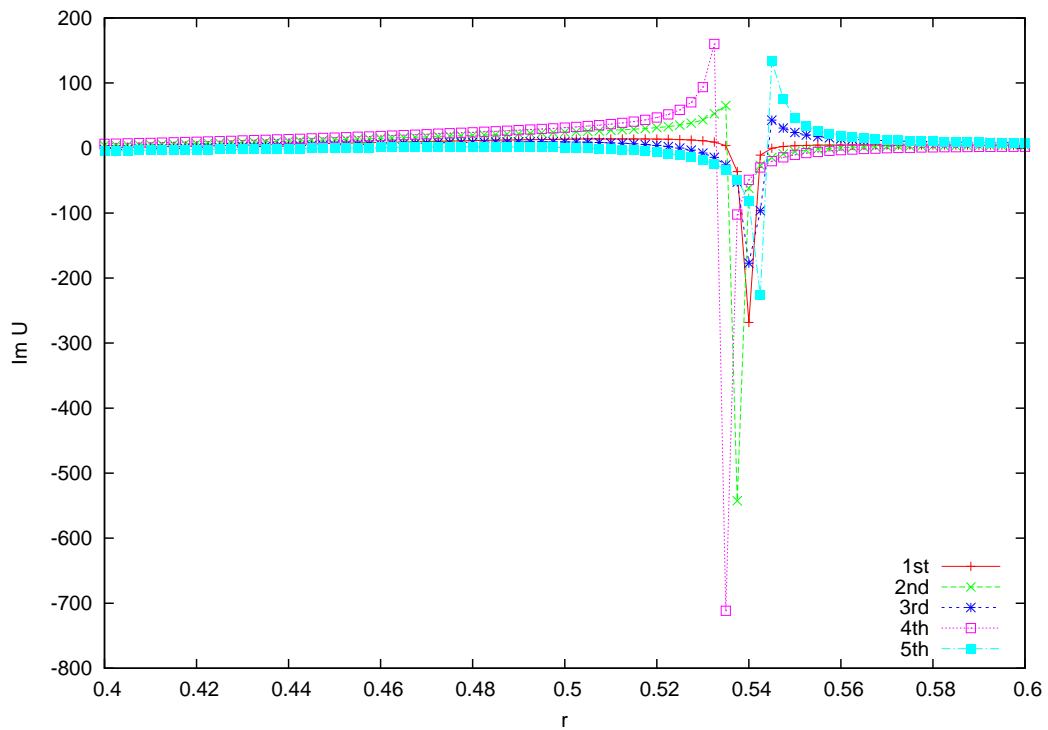


図 2.19: $N_r = 400$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部.

第3章 非物理的な不安定性の特性

第2章で見出された非物理的な不安定性の各パラメータ依存性を調べ、非物理的な不安定性の特性を明らかにする。

3.1 空間刻み幅依存性

小半径方向のグリッド数を変化させた場合の非物理的な不安定性の成長率を計算し、その最大値に対する空間刻み幅 ($h := 1/N_r$) 依存性を調べた。結果を図 3.1 に示す。空間刻み幅 h を横軸に、非物理的な不安定性の最大成長率を縦軸にとっている。ポロイダル回転速度 $v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$ 、プラズマ電気抵抗率 $\eta = 10^{-4}$ とし、小半径方向のグリッド数を $N_r = 50, 100, 200, 400, 800$ と変化させた。空間刻み幅の増加に伴い、ほぼ線形に非物理的な不安定性の成長率が増加していることがわかる。また、 h がゼロの極限では非物理的な不安定性の成長率もゼロに収束するように見える。

今回の計算に用いたのは二次精度の中心差分近似である。そのため、固有値の成長率は、 h^2 で真の値に収束するべきである。しかし、非物理的な不安定性の成長率は、 h^1 で真の値に収束しており問題が生じていると考えられる。なお、連続スペクトルに属さない真の固有値は h^2 で真の値に収束することを確認した。また、非物理的な不安定性と真の不安定性が混ざり合う付近の不安定性の成長率の空間刻み幅依存性についても調べ、付録 A に結果を示した。

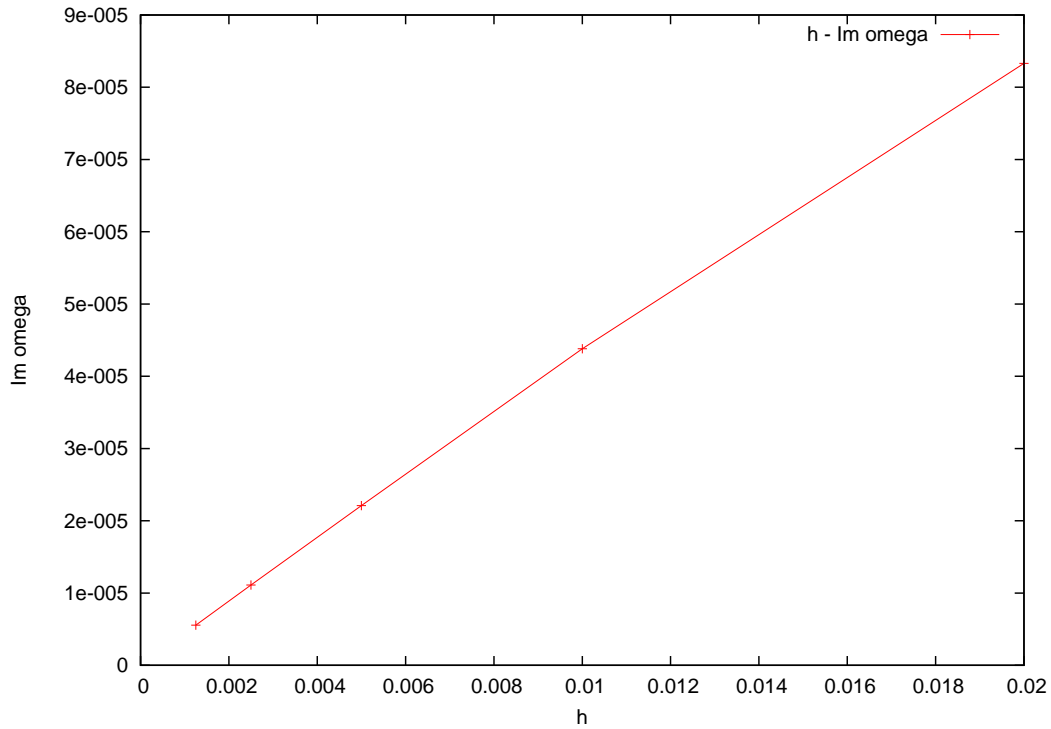


図 3.1: $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-4}$ の場合の最大成長率の h 依存性.

3.2 プラズマ電気抵抗率依存性

プラズマ電気抵抗率を変化させた場合の非物理的な不安定性の成長率を計算し、その最大値に対するプラズマ電気抵抗率依存性を調べた。結果を図 3.2 に示す。プラズマ電気抵抗率を対数目盛を用いて横軸に、非物理的な不安定性の成長率を対数目盛を用いて縦軸にとっている。ポロイダル回転速度 $v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$ 、小半径方向のグリッド数を $N_r = 200$ とし、プラズマ電気抵抗率を $\eta = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$ と変化させた。非物理的な不安定性の成長率は、プラズマ電気抵抗率 η の負のべき乗に比例することがわかる。

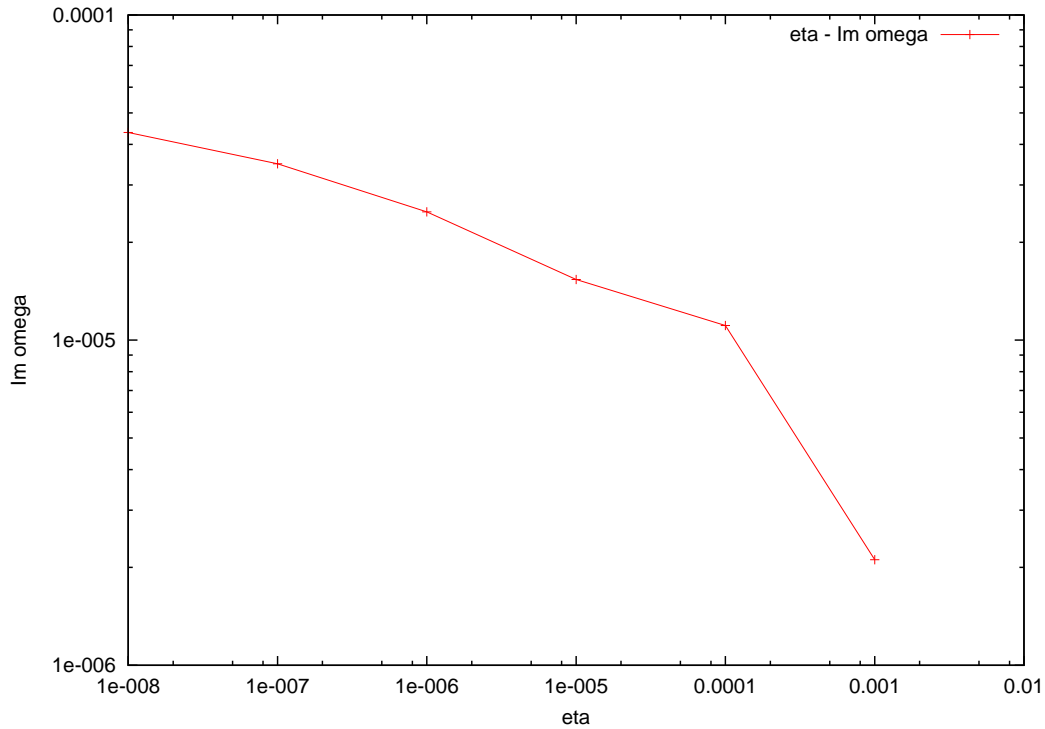


図 3.2: $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-4}$ の場合の最大成長率の η 依存性.

3.3 テアリングモードが主要な役割を果たしていない現象での固有モード解析

非物理的な不安定性が、流れがない場合に物理的なテアリングモードが不安定であることが必要なのか、そうでないのかを確認する. 第二章で示した固有モード解析では, 平衡ポロイダル回転がないとき $\Delta' = 22.4 > 0$ であり, テアリング不安定である. 本節では, 平衡ポロイダル回転がないとき, つまり $\Delta' < 0$ の場合の計算を行い, 同様にシア流を加えていった場合に, 非物理的な不安定性が生じるのかを確認する.

$\Delta' = -22.3$ の場合の計算を行った. まず, 固有値の分布を図 3.3 に示す. 小半径方向のグリッド数 $N_r = 200$, プラズマ電気抵抗率 $\eta = 10^{-4}$ の場合のデータである. 第二章と同様に, ほぼ実軸に沿った形で分布している固有値のうち, $\text{Re } \omega = 0.08$ 辺りまで分布しているのがポロイダル回転による連続スペクトルであると考えられる.

次に、 $\omega = 0$ 付近を拡大したグラフを図 3.4 に示す。 $v_{\theta s} = 0$ のとき、 $\Delta' < 0$ であるため不安定固有値は生じていない。しかし、 $v_{\theta s}$ を増加させると、 $v_{\theta s} = 0$ のときに $\text{Im } \omega < 0$ の領域にあった固有値が、実部を持つようになり、虚部が正の領域へはみ出してくる。グラフではわかりにくいですが、 $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-4}$ のときにはすでに不安定固有値が生じている。

今回生じた不安定固有値についても、ポロイダル回転による連続スペクトルと関係しているように見える。従って、グリッド数 N_r を変えた場合の不安定固有値の最大成長率および渦度の固有関数を見てみる。図 3.5 に不安定固有値の成長率の空間刻み幅依存性を示す。空間刻み幅 h を横軸に、不安定の最大成長率を縦軸にとっている。 $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-3}$ の場合の計算結果である。3.1 節で示した非物理的な不安定性の成長率と同様に、今回の不安定固有値の成長率も h に比例していることを確認できる。次に、渦度の固有関数を見てみる。図 3.6, 3.7 は、虚部が大きい順番に 1-5 番目の固有値に対する $N_r = 100$ および $N_r = 400$ とした場合の渦度の実部をプロットしたものである。また、図 3.8, 3.9 は、 $N_r = 100$ および $N_r = 400$ とした場合の渦度の虚部をプロットしたものである。実部、虚部いずれの場合も $N_r = 100$ のときは、跳びの位置の分布がまばらなのに対し、 $N_r = 400$ のときは密になっている。これはグリッド数によって決まっているものであり、今回計算された固有値も、 $\Delta' > 0$ の場合と同様に、微分方程式では連続スペクトルになっていると考えられる。

平衡ポロイダル回転がないときに $\Delta' < 0$ の場合でも、ポロイダル回転を加えていくと非物理的な不安定性が生じた。つまり、第二章において見出された非物理的な不安定性は、テアリングモードパラメータが主要な役割を果たしている現象ではないと考えられる。

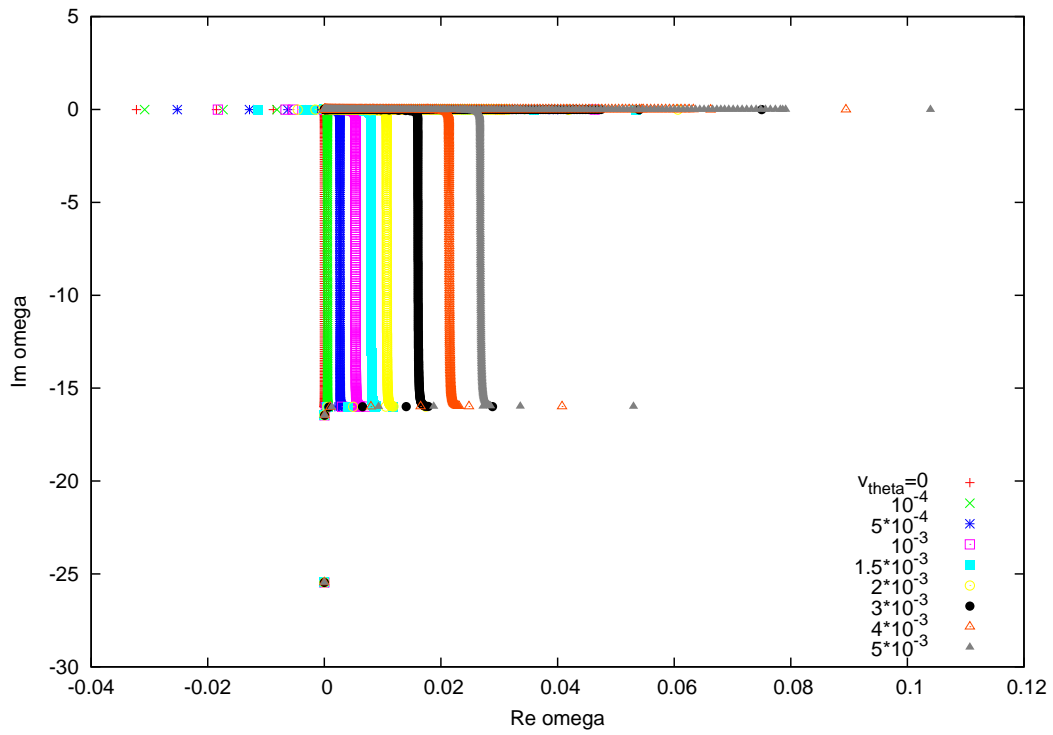


図 3.3: 固有値の分布.

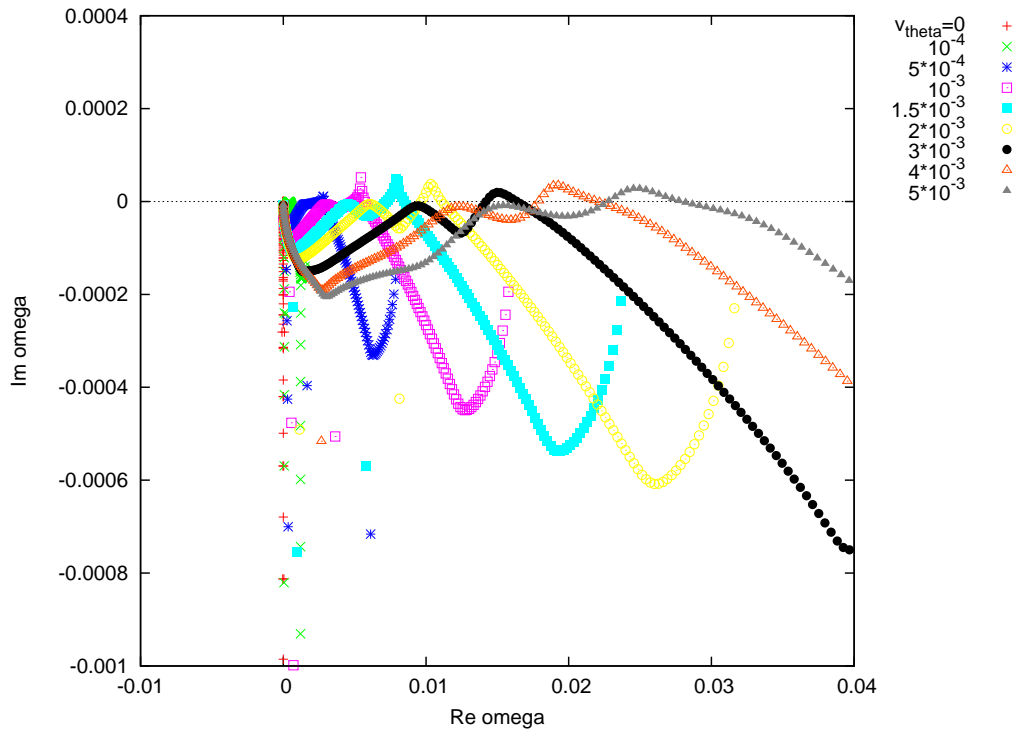


図 3.4: 固有値の分布 (拡大).

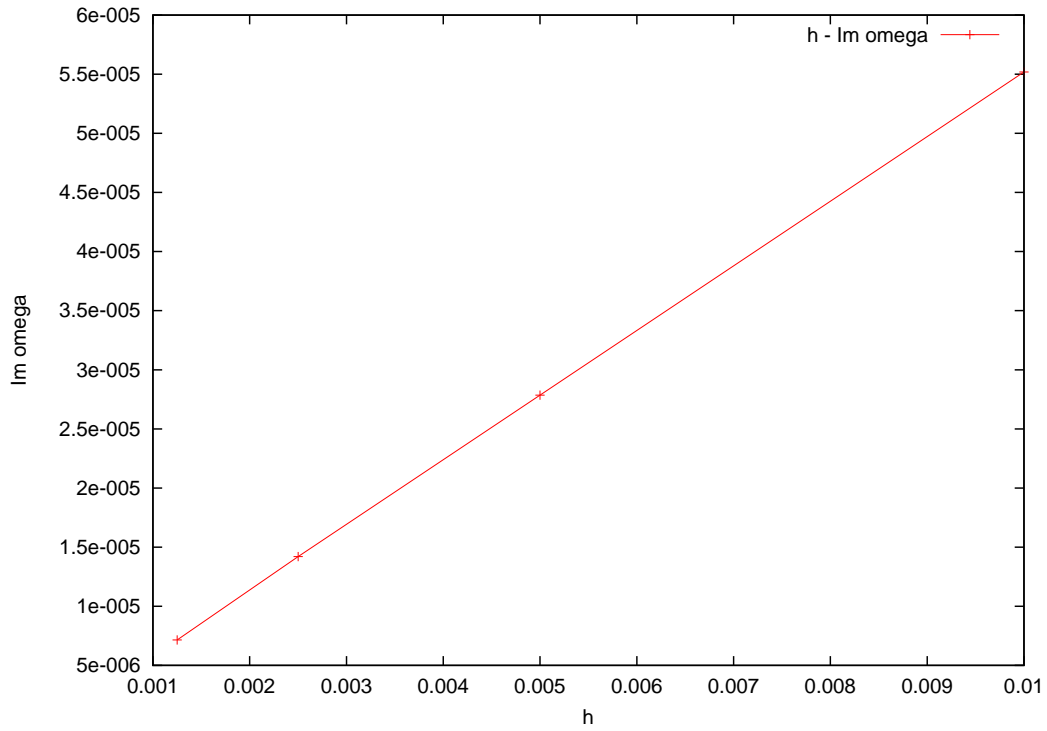


図 3.5: $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-4}$ の場合の最大成長率の h 依存性

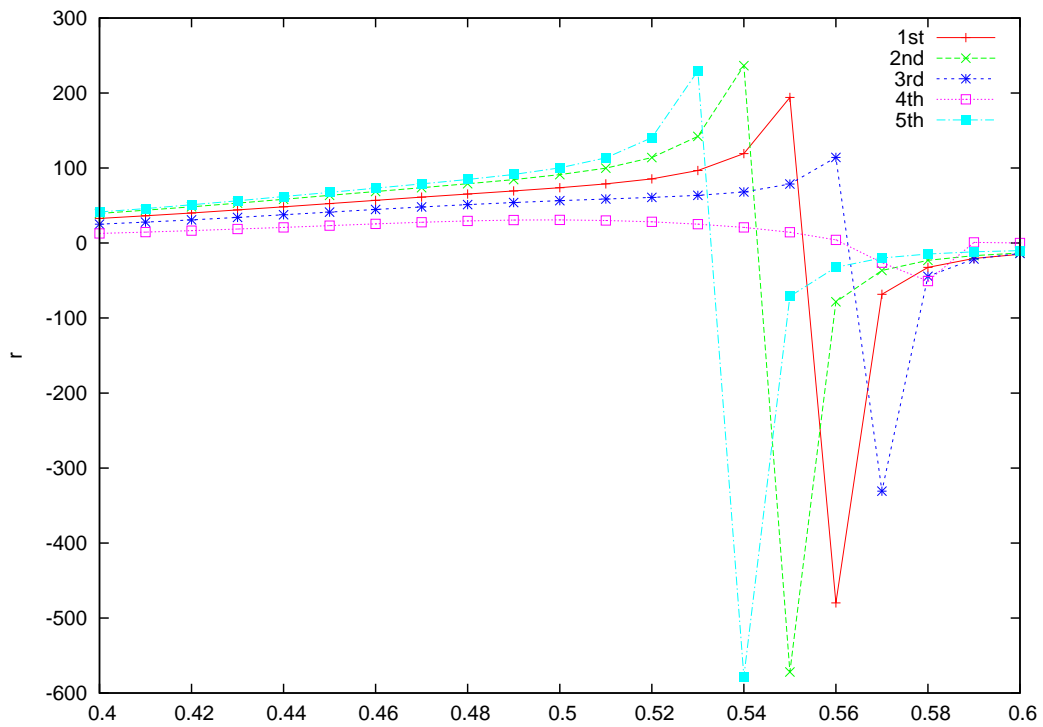


図 3.6: $N_r = 100$ の場合の、固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部

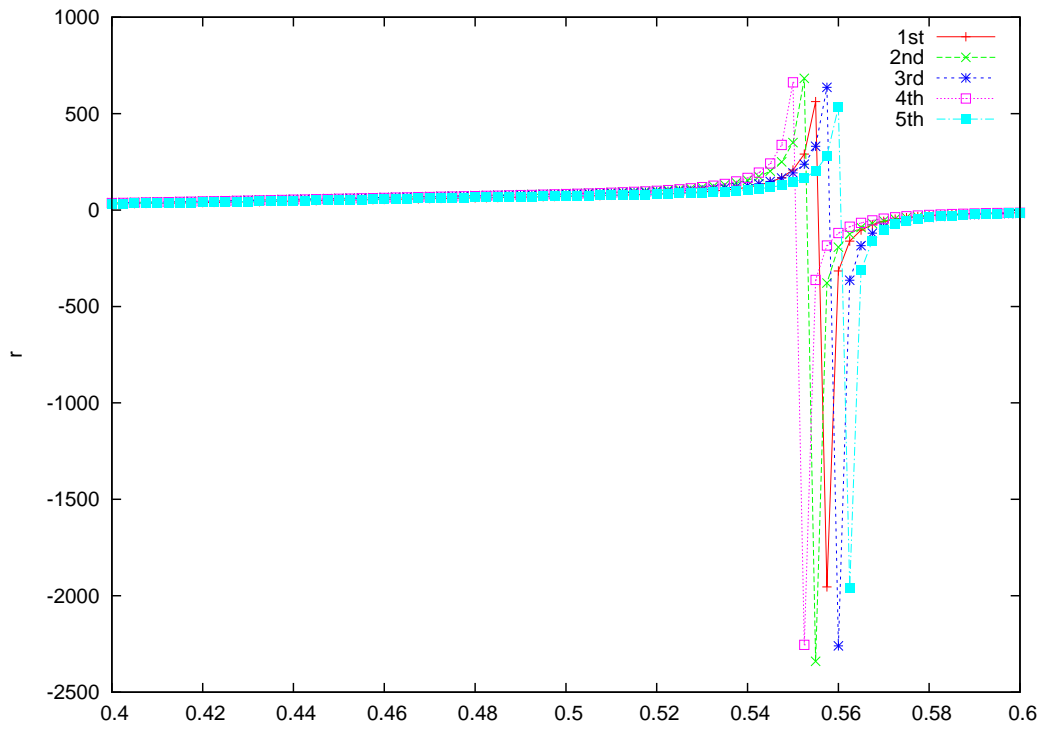


図 3.7: $N_r = 400$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部

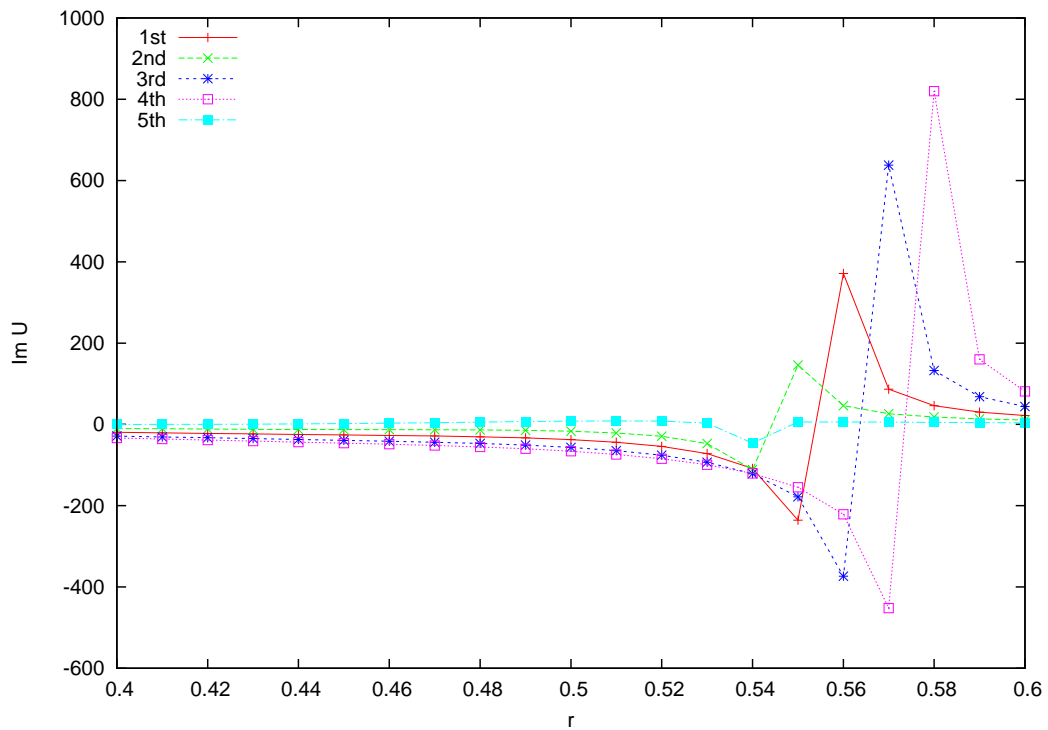


図 3.8: $N_r = 100$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部

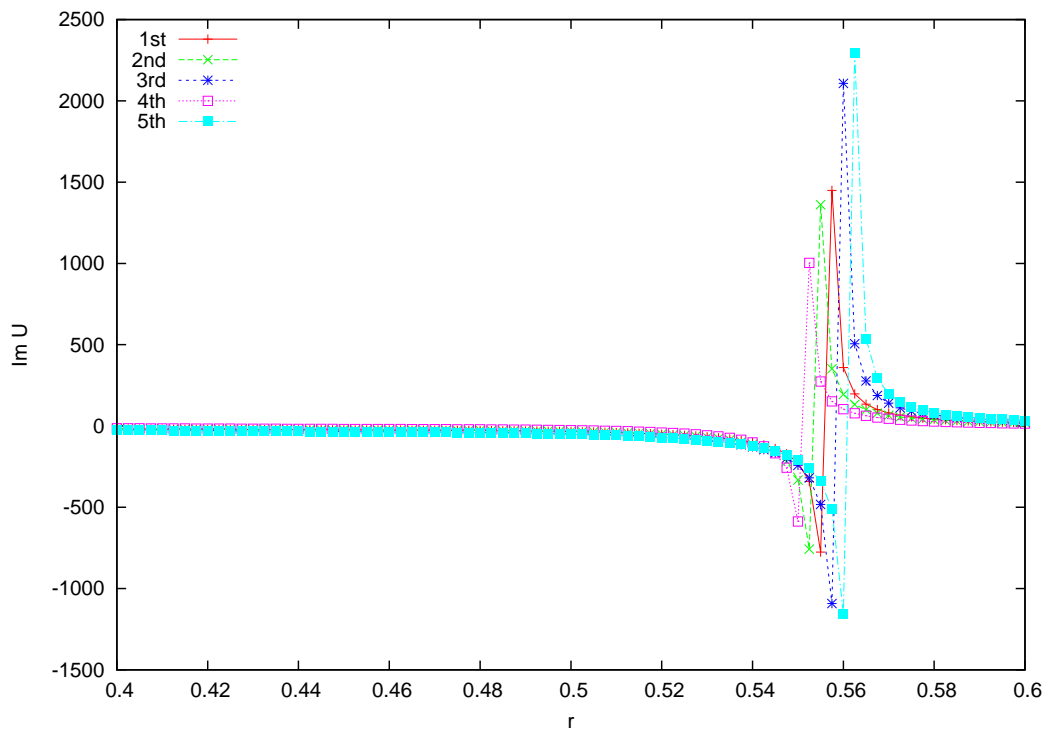


図 3.9: $N_r = 400$ の場合の, 固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部

第4章 非物理的不安定性のモデル解析

4.1 モデル化

非物理的な不安定性がもつ性質を損なわないよう、抵抗性簡約化 MHD 方程式から非物理的な不安定性を示す固有値の簡易モデルを開発する。

非物理的な不安定性がもつ性質は以下のようなものである。

- 特異点近傍で固有値の成長率が正となり不安定性を示す。
- 不安定性の成長率が空間刻み幅 h に比例する。
- 不安定性の成長率がプラズマ電気抵抗率 η の負のべき乗に比例する。
- 不安定性の成長率のテアリングモードパラメータに対する依存性はない。

非物理的な不安定性は、固有関数の特異性が原因であるため、その特異性の部分のみを切り出したモデルで非物理的な不安定性を再現できると考えられる。線形簡約化 MHD 方程式 (2.1) を有理面近傍における式に書き換える。有理面の位置を $r = r_s$ とし、有理面まわりで Taylor 展開する：

$$-i(\tilde{\omega} - Bx) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -iAx \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

$$-i(\tilde{\omega} - Bx)\psi = -iAx\varphi + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (4.2)$$

ここでは、もっとも簡単な場合を考え、有理面近傍では摂動量の r 方向の変化が激しいとして、 $\nabla_1^2 \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ とした。また、 $x := r - r_s$ は有理面からの距離を表し、一次までとし

た. ここで, さらに, $U'_0 = J'_0 = 0$ とした. $\tilde{\omega}$, A , B は以下のように定義した:

$$\tilde{\omega} := \omega - \frac{m}{r_s} v_{\theta s}, \quad (4.3)$$

$$A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q} \right)'_s, \quad (4.4)$$

$$B := \frac{m}{r_s} \left(-\frac{v_{\theta s}}{r_s} + v'_{\theta s} \right). \quad (4.5)$$

ここで添え字の s は有理面における物理量であることを表す. 図 4.1 に半径 r , 有理面からの距離 x および非物理的な不安定性が生じている点のグリッド番号 j の位置関係を示す.

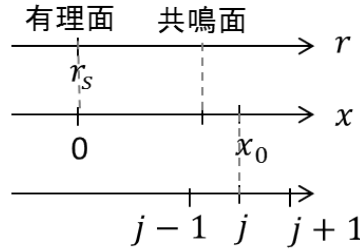


図 4.1: 半径, 有理面, およびグリッド番号の位置関係.

本研究では, (φ_j, ψ_j) を固有ベクトルとする一点モデルを考えることにする. 差分表現を用いると,

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \simeq \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2}, \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_j \simeq \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} \quad (4.7)$$

なので, あるグリッド点のみで閉じた形にするためには, $\varphi_{j\pm 1}, \psi_{j\pm 1}$ を φ_j, ψ_j で表す必要がある. その場合, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ は, パラメータ C_1, C_2 を用いて,

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \simeq \frac{1}{h^2} (-2 + C_1) \varphi_j \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_j \simeq \frac{1}{h^2} (-2 + C_2) \psi_j \quad (4.9)$$

のように表すことになるだろう。差分表現と比較すると、 $C_1 = \frac{\varphi_{j+1} + \varphi_{j-1}}{\varphi_j}$, $C_2 = \frac{\psi_{j+1} + \psi_{j-1}}{\psi_j}$ という対応になる。これらのパラメータを用いて方程式を行列の形で書き換えると、

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\omega} - Bx)(-2 + C_1) & -Ax(-2 + C_2) \\ -Ax & (\tilde{\omega} - Bx) - i\frac{\eta}{h^2}(-2 + C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \psi_j \end{bmatrix} = 0$$

となる。この方程式から計算される固有値は、

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = \left(1 - \frac{C_1}{2}\right) \left[-i\frac{\eta}{h^2} \pm \sqrt{-\frac{\eta}{h^2} + (Ax_0)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{C_1}{2}\right)\left(1 - \frac{C_2}{2}\right)}}\right] \quad (4.10)$$

となる。ここで添え字の0は、非物理的な不安定性が生じる点における物理量であることを意味する。さらに、 $x_0 \ll \eta/h^2$ と近似すると、

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = \begin{cases} \left(1 - \frac{C_1}{2}\right) \left(-\frac{2\eta}{h^2}\right) + \frac{i h^2}{2 \eta} \frac{(Ax_0)^2}{\left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \\ -\frac{i h^2}{2 \eta} \frac{(Ax_0)^2}{\left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \end{cases} \quad (4.11)$$

となり、二つの固有値を得る。二つ目の固有値については、共鳴面近傍で不安定固有値となっていることを次節に示す。

4.2 数値解を用いてモデル化した固有値の評価

前節のモデルから得られる固有値(4.11)において、 C_1, C_2 という二つのパラメータを含む $\left(1 - \frac{C_1}{2}\right), \left(1 - \frac{C_2}{2}\right)$ という項が、成長率のパラメータ依存性および成長率の符号の決定要因となっている。そこで、非物理的な不安定性が生じている数値解から、共鳴面近傍におけるこれらの h 依存性および符号を計算する。以下では、 $v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$, $\eta = 10^{-4}$ の場合の数値解を用いる。

現在, U_j, φ_j とは以下の関係にある :

$$U_j = (\nabla_{\perp}^2 \varphi)_j \simeq \frac{1}{h^2}(-2 + C_1)\varphi_j, \quad (4.12)$$

$$J_j = (\nabla_{\perp}^2 \psi)_j \simeq \frac{1}{h^2}(-2 + C_2)\psi_j. \quad (4.13)$$

従って, $(1 - \frac{C_1}{2}), (1 - \frac{C_2}{2})$ は,

$$1 - \frac{C_1}{2} = -\frac{h^2 U_j}{2 \varphi_j}, \quad (4.14)$$

$$1 - \frac{C_2}{2} = -\frac{h^2 J_j}{2 \psi_j} \quad (4.15)$$

となる. $U_j, J_j, \varphi_j, \psi_j$ は非物理的な不安定性が生じている数値解を用いる.

共鳴面では渦度 U が発散しているが, 数値解において, $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点と負に発散する点の二点を共鳴面近傍の値として用いる.

モデル固有値 $(1 - \frac{C_1}{2}) \left(-\frac{2\eta}{h^2}\right) + \frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta (1 - \frac{C_1}{2})}$ の評価

・ $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点

まず, 一つ目の固有値の成長率の符号を計算する.

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = \left(1 - \frac{C_1}{2}\right) \left(-\frac{2\eta}{h^2}\right) + \frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta \left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \quad (4.16)$$

$v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}, \eta = 10^{-4}, N_r = 200$ のとき

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = 3710 - 546.9i, \quad (4.17)$$

$$\frac{J_j}{\psi_j} = -46.10 - 75.72i \quad (4.18)$$

である．簡単のため4桁のみ用いた．このとき， $(1 - \frac{C_1}{2})$ ， $(1 - \frac{C_2}{2})$ は，

$$1 - \frac{C_1}{2} = -\frac{h^2}{2}(3710 - 546.9i), \quad (4.19)$$

$$1 - \frac{C_2}{2} = -\frac{h^2}{2}(-46.10 - 75.72i) \quad (4.20)$$

となる．従ってモデル固有値 (4.16) は，

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = \left(1 - \frac{C_2}{2}\right) \left(-\frac{2\eta}{h^2}\right) + \frac{i h^2}{2 \eta} \frac{(Ax_0)^2}{\left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \quad (4.21)$$

$$= \eta(-46.10 - 75.72i) - \frac{i}{\eta}(Ax_0)^2 \frac{3710 + 546.9i}{3710^2 + 546.9^2} \quad (4.22)$$

となる．この固有値の成長率は以下である：

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) = -75.72\eta - \frac{1}{\eta}(Ax_0)^2 \frac{3710}{3710^2 + 546.9^2}. \quad (4.23)$$

$\left(\frac{1}{q}\right)'_s$ のオーダーを $\left(\frac{1}{q}\right)'_s \sim 1$ とすると， $A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q}\right)'_s \left(\frac{1}{q}\right)'_s \approx 2 \times \frac{1}{10} \times 1 = 0.2$ となる．また，非物理的な不安定性 (特異性) が生じる点は $x_0 \approx 0.03$ ， $\eta = 10^{-4}$ なのでこれらの値を代入すると，

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) \approx -7.667 \times 10^{-3} < 0 \quad (4.24)$$

となり，成長率が負である減衰解となる．

・ $\text{Re}(U/\varphi)$ が負に発散する点

$v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$ ， $\eta = 10^{-4}$ ， $N_r = 200$ のとき，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = -1680 + 638.0i, \quad (4.25)$$

$$\frac{J_j}{\psi_j} = -46.83 - 84.85i \quad (4.26)$$

である。簡単のため4桁のみ用いた。このとき、 $(1 - \frac{C_1}{2}), (1 - \frac{C_2}{2})$ は、

$$1 - \frac{C_1}{2} = -\frac{h^2}{2}(-1680 + 638.0i), \quad (4.27)$$

$$1 - \frac{C_2}{2} = -\frac{h^2}{2}(-46.83 - 84.85i) \quad (4.28)$$

となる。従ってモデル固有値 (4.16) は、

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = \left(1 - \frac{C_2}{2}\right) \left(-\frac{2\eta}{h^2}\right) + \frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta \left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \quad (4.29)$$

$$= \eta(-46.83 - 84.85i) - \frac{i}{\eta}(Ax_0)^2 \frac{-1680 - 638.0i}{1680^2 + 638.0^2} \quad (4.30)$$

となる。この固有値の成長率は以下である：

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) = -84.85\eta + \frac{1}{\eta}(Ax_0)^2 \frac{1680}{1680^2 + 638.0^2}. \quad (4.31)$$

$A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q}\right)'_s \approx 2 \times \frac{1}{10} \times 1 = 0.2$ および $x_0 \approx 0.03$, $\eta = 10^{-4}$ を代入すると、

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) \approx -8.152 \times 10^{-3} < 0 \quad (4.32)$$

となり、成長率が負である減衰解となる。

以上より、固有値 (4.16) については、 $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点、 $\text{Re}(U/\varphi)$ が負に発散する点いずれにおいても減衰解となることが明らかになった。

モデル固有値 $-\frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta (1 - \frac{C_1}{2})}$ の評価

・ $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点

次に，二つ目の固有値の成長率の符号を計算する．

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = -\frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta (1 - \frac{C_1}{2})} \quad (4.33)$$

$v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}, \eta = 10^{-4}, N_r = 200$ のとき，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = 3710 - 546.9i \quad (4.34)$$

である．簡単のため4桁のみ用いた．このとき， $(1 - \frac{C_1}{2})$ は，

$$1 - \frac{C_1}{2} = -\frac{h^2}{2}(3710 - 546.9i) \quad (4.35)$$

となる．従ってモデル固有値 (4.33) は，

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = -\frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta (1 - \frac{C_1}{2})} \quad (4.36)$$

$$= \frac{i}{\eta} (Ax_0)^2 \frac{3710 + 546.9i}{3710^2 + 546.9^2} \quad (4.37)$$

となる．この固有値の成長率は以下である：

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) = \frac{1}{\eta} (Ax_0)^2 \frac{3710}{3710^2 + 546.9^2}. \quad (4.38)$$

$A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q}\right)'_s \approx 2 \times \frac{1}{10} \times 1 = 0.2$ および $x_0 \approx 0.03$ ， $\eta = 10^{-4}$ を代入すると，

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) \approx 9.540 \times 10^{-5} > 0 \quad (4.39)$$

となり，成長率が正である不安定固有値となる．

・ $\text{Re}(U/\varphi)$ が負に発散する点

$v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}, \eta = 10^{-4}, N_r = 200$ のとき，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = -1680 - 638.0i \quad (4.40)$$

である．簡単のため4桁のみ用いた．このとき， $(1 - \frac{C_1}{2})$ は，

$$1 - \frac{C_1}{2} = -\frac{h^2}{2}(-1680 + 638.0i) \quad (4.41)$$

となる．従ってモデル固有値 (4.33) は，

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = -\frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta (1 - \frac{C_1}{2})} \quad (4.42)$$

$$= \frac{i}{\eta} (Ax_0)^2 \frac{-1680 - 638.0i}{1680^2 + 638.0^2} \quad (4.43)$$

となる．この固有値の成長率は以下である：

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) = -\frac{1}{\eta} (Ax_0)^2 \frac{1680}{1680^2 + 638.0^2}. \quad (4.44)$$

$A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q}\right)'_s \approx 2 \times \frac{1}{10} \times 1 = 0.2$ および $x_0 \approx 0.03$ ， $\eta = 10^{-4}$ を代入すると，

$$\text{Im}(\tilde{\omega} - Bx_0) \approx -3.329 \times 10^{-3} < 0 \quad (4.45)$$

となり，成長率が負である減衰解となる．以上より，モデル固有値 (4.33) は， $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点で不安定固有値に， $\text{Re}(U/\varphi)$ が負に発散する点で減衰解になることが明らかになった．

・ $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点における, $\text{Re}(U/\varphi)$ の空間刻み幅依存性

モデル固有値の成長率を数値解から評価し, モデル固有値 (4.33) は, $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点で不安定固有値となることを確認した. 次いで, $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点における $\text{Re}(U/\varphi)$ の空間刻み幅依存性を計算する.

図 4.2 は, $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点における $\text{Re}(U_j/\varphi_j)$ を縦軸に, 横軸に h をプロットしたものである. また図 4.3 は同様のグラフを対数目盛においてプロットしたものである. 最小二乗法を用いてフィッティングを行うと,

$$\text{Re}\left(\frac{U_j}{\varphi_j}\right) = 15.706 \times h^{-1.029} \quad (4.46)$$

となり, 共鳴面近傍では $\text{Re}(U_j/\varphi_j)$ は h^{-1} に比例していると考えられる. つまり, 共鳴面近傍で $\text{Re}\left(1 - \frac{C_1}{2}\right)$ は h に比例する. 従って, モデル固有値は (4.33) は共鳴面近傍で h^1 に比例する.

以上より, モデル固有値 (4.33) は, 非物理的な不安定性がもつ以下の性質を満たす.

- 不安定性の成長率が正となり不安定性を示す.
- 不安定性の成長率が空間刻み幅 h に比例する.
- 不安定性の成長率がプラズマ電気抵抗率 η の負のべき乗に比例する.
- 不安定性の成長率のテアリングモードパラメータに対する依存性はない.

4.3 モデルの定量性に関する考察

本モデル化の妥当性を確かめるために, モデル固有値のオーダーと数値計算による固有値のオーダーを比較する. 数値計算による固有値では, 実部はポロイダル回転の増加とと

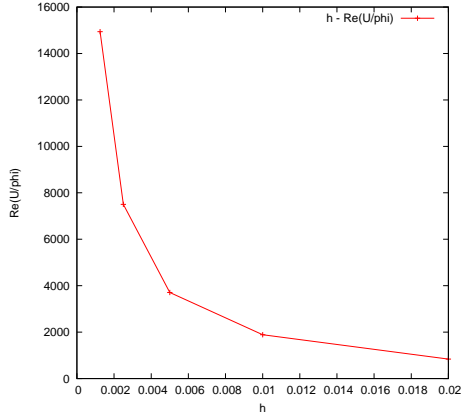


図 4.2: $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点における $\text{Re}(U_j/\varphi_j)$ の h 依存性.

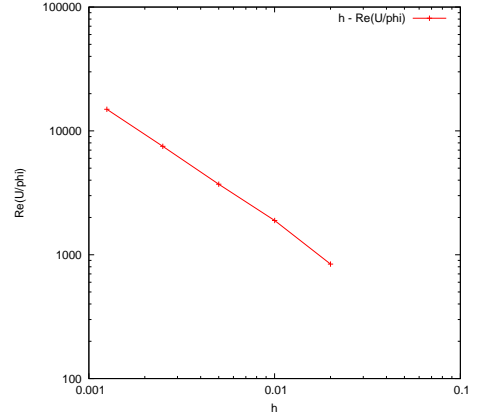


図 4.3: $\text{Re}(U/\varphi)$ が正に発散する点における $\text{Re}(U_j/\varphi_j)$ の h 依存性 (対数目盛).

もに Doppler シフトする. これは, モデル固有値における左辺の $\tilde{\omega}$ 中の $\frac{mv_{\theta s}}{r_s}$ に相当するものである. そこで, モデル固有値の右辺の実部が Doppler シフトのオーダーに対して十分小さくなっていることを確かめる. また, 虚部 (成長率) については, モデル固有値のオーダーと数値計算による固有値のオーダーが一致することを確認する.

$N_r = 200$, $v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$, $\eta = 10^{-4}$ の場合で比較する. このとき, 数値計算による固有値の実部は 10^{-2} のオーダーで, 虚部は 10^{-5} のオーダーである. 一方, モデル固有値のオーダーは, $A := m\varepsilon \left(\frac{1}{q}\right)'_s \approx 2 \times \frac{1}{10} \times 1 = 0.2$ および $x_0 \approx 0.03$, $\eta = 10^{-4}$ を用いると

$$\tilde{\omega} - Bx_0 = -\frac{i h^2 (Ax_0)^2}{2 \eta \left(1 - \frac{C_1}{2}\right)} \quad (4.47)$$

$$\approx 1.406 \times 10^{-5} + 9.540 \times 10^{-5}i \quad (4.48)$$

となる. 従って, 実部は Doppler シフトのオーダーに比べて十分に小さく, 虚部のオーダーは一致する. 結果を以下の表 4.1 にまとめた.

	数値計算における固有値	本モデルによる固有値
実部	10^{-2}	$(10^{-2}+)10^{-5}$
虚部	10^{-5}	10^{-5}

表 4.1: 数値計算における固有値と本モデルによる固有値のオーダーの比較.

4.4 外部解を用いたモデル化した固有値の評価

モデル固有値 (4.33) において, $(1 - \frac{C_1}{2})$ という項が, 成長率のパラメータ依存性および成長率の符号の決定要因となっている. 4.2, 4.3 節ではこの項について数値解を用いて評価を行った. 一方, 共鳴面の近傍を除いた外部領域では, 慣性や電気抵抗を無視することができ, その近傍で外部解と呼ばれる解析解をもつ. そこで外部解を用いた評価により, 非物理的な不安定性について定性的な理解を深める.

共鳴面の近傍を除いた外部領域では, 慣性や電気抵抗を無視することができ, その近傍で外部解と呼ばれる解析解をもつ. $(1 - \frac{C_1}{2})$ について外部解を用いた評価を行った.

共鳴面の近傍を除いた外部領域では, 慣性や電気抵抗を無視することができる. 線形化した抵抗性簡約化 MHD 方程式において, $\omega = 0, \eta = 0$ とすると,

$$-\frac{im}{r}(v_\theta \nabla_\perp^2 - U'_0)\varphi + -im\varepsilon \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{q}\right) \nabla_\perp^2 - \frac{imJ'_0}{r} = 0, \quad (4.49)$$

$$-im\varepsilon \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{q}\right) \varphi - \frac{imv_\theta}{r}\psi = 0 \quad (4.50)$$

となる. 共鳴条件 $q = -\frac{n}{m}$ を満たす点は確定特異点であり, その近傍で Frobenius 級数解を構成でき, 外部解と呼ばれている:

$$\psi = 1 + (\psi_1 + \frac{1}{r_t})y \ln |y| + \cdots + A^\pm(y + \psi_1 y^2 + \cdots), \quad (4.51)$$

$$\varphi = \varphi_0 \left[1 + (\psi_1 + \frac{1}{r_t})y \ln |y| + \cdots + A^\pm(y + \psi_1 y^2 + \cdots) \right]. \quad (4.52)$$

ここで $y := r - r_t$ であり，添え字の t は共鳴面における物理量であることを表す．また， $\varphi_0, \varphi_1, \psi_1$ は，平衡量のみから決まる定数となる．図 4.4 に半径 r ，有理面からの距離 x ，共鳴面からの距離 y および非物理的な不安定性が生じている点のグリッド番号 j の位置関係を示す．

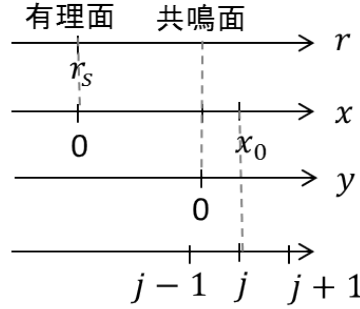


図 4.4: 半径，有理面，共鳴面およびグリッド番号の位置関係．

外部解を用いて，モデル固有値の成長率および符号を評価する． $U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \left(\frac{m}{r} \right)^2 \varphi$ より，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = \frac{(\psi_1 + \frac{1}{r_t}) \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{r_t} (\ln |y| + 1) \right] + \frac{A^\pm}{r_t} - \left(\frac{m}{r_t} \right)^2}{1 + (\psi_1 + \frac{1}{r_t}) y \ln |y| + A^\pm y} \quad (4.53)$$

となる．共鳴面近傍を考えているので， $|y| \ll 1$ とすると，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = \frac{1}{y} \left(\psi_1 + \frac{1}{r_t} \right) \quad (4.54)$$

と近似できる．離散化した場合を考えると y を $|h|$ に書き換えることができるので，

$$\frac{U_j}{\varphi_j} = \frac{1}{|h|} \left(\psi_1 + \frac{1}{r_t} \right) \quad (4.55)$$

となる．式 (4.33) より非物理的な不安定性の成長率は，外部解を用いて評価を行った場合でも h に比例することがわかる．このことは高次の差分近似を用いて計算した場合で

も、非物理的な不安定性の成長率は h に比例することを意味している。付録 B において四次の中心差分を用いた計算を行い、非物理的な不安定性が h に比例することを確認した。

以上のように、渦度が粘性なし外部解のように振る舞っているとすると、 U_j/φ_j は (4.55) 式のように $1/|h|$ という依存性をもつことがわかり、一点モデルおよび数値解から評価した $1 - C_1/2$ による非物理的な不安定性の h 依存性と整合していると言える。

第5章 結論

先行研究 [5] により見出された非物理的な不安定性について、以下の二点を柱に研究を行った。

1. 非物理的な不安定性の性質を数値計算によって明らかにする。
2. 非物理的な不安定性の性質を再現する簡易モデルを開発することで、非物理的な不安定性について定性的な理解を得る。

1については、グリッド数を変化させた場合およびプラズマ電気抵抗率を変化させた場合の計算を行い、空間刻み幅依存性、プラズマ電気抵抗率依存性を調べた。その結果、

- 不安定性の成長率が空間刻み幅 h に比例する。
- 不安定性の成長率がプラズマ電気抵抗率 η の負のべき乗に比例する。

が明らかになった。また、非物理的な不安定性が、流れがない場合に物理的なテアリングモードが不安定であることが必要なのか、そうでないのかを確認するために、平衡ポロイダル回転がないとき、つまり $\Delta' < 0$ の場合の固有モード解析を行った。その結果、非物理的な不安定性はテアリングモードパラメータが主要な役割を果たしている現象ではないことを明らかにした。

2に関して、1点モデルを開発した。このモデルから得られる固有値は、数値計算により得られる非物理的な不安定性の定性的傾向およびある程度の定量的な値を捉えることに成功した。

また，外部解を用いて1点モデルから得られる固有値を評価した．その結果， U_j/φ_j は $1/|h|$ という依存性をもつことがわかり，一点モデルおよび数値解から評価した $1 - C_1/2$ による非物理的不安定性の h 依存性と整合していると言える．

付録 A 非物理的な固有値と真の固有値の相互 影響

流れがあるプラズマ中の揺らぎは、非エルミート作用素で記述されるため、モードの直交性が必ずしも保証されない。そのため、モードは独立ではなく、相互に影響を与えている可能性がある。非物理的な不安定固有値が真の不安定固有値に影響を与えてしまっているのかを、不安定固有値の最大成長率の h 依存性から考察する。

ポロイダル回転速度は、非物理的な不安定性と真の不安定性が混ざり合う付近の $v_{\theta s} = 1.7 \times 10^{-3}, 1.8 \times 10^{-3}$ とした。また、比較のため真の不安定固有値 (点スペクトル, $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-4}$) と非物理的な不安定固有値 (連続スペクトル, $v_{\theta s} = 4 \times 10^{-3}$) の h 依存性も示す。いずれの場合も $\eta = 10^{-4}$ とした。これまでの計算結果から、非物理的な不安定固有値の成長率は h^1 に比例し (図 A.5)、真の不安定固有値は h^2 に比例することがわかっている (図 A.6)。 $v_{\theta s} = 1.7 \times 10^{-3}$ の場合の結果を図 A.1, A.2 に示す。図 A.1 は横軸に h を、図 A.2 は横軸に h^2 をとっている。また、 1.8×10^{-3} の場合の結果を図 A.3, A.4 に示す。図 A.3 は横軸に h を、図 A.4 は横軸に h^2 をとっている。図 A.1 - A.4 から、真の不安定固有値と非物理的な不安定固有値が混ざり合う付近では成長率が h や h^2 に比例しないことがわかる。点スペクトルが h^1 に比例し、連続スペクトルが h^2 に比例するため、これらが混ざり合う付近では、 $h^a, 1 \leq a \leq 2$ となると予想されたが、必ずしもそうはならないようである。しかし、 $v_{\theta s} = 1.7 \times 10^{-3}, 1.8 \times 10^{-3}$ の不安定固有値の成長率は h にも h^2 にも比例しないため、混ざり合う付近では、真の固有値は非物理的な不安定固有値による影響を受けていると考えられる。

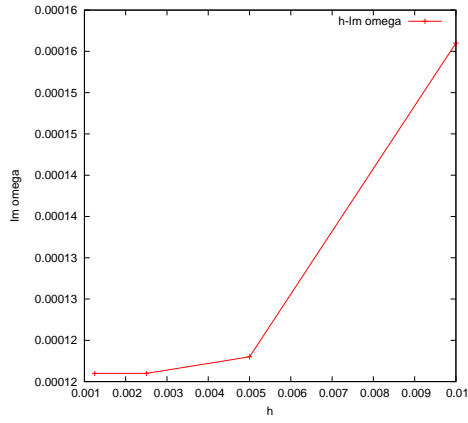


図 A.1: $v_{\theta_s} = 1.7 \times 10^{-3}$, 横軸 h .

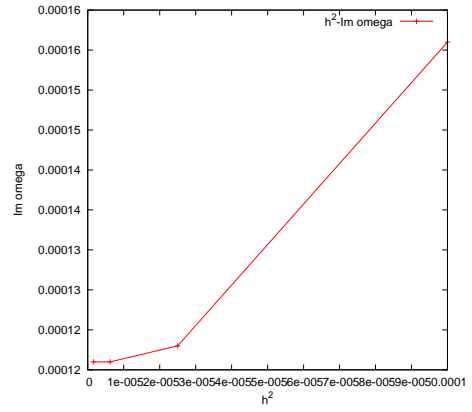


図 A.2: $v_{\theta_s} = 1.7 \times 10^{-3}$, 横軸 h^2 .

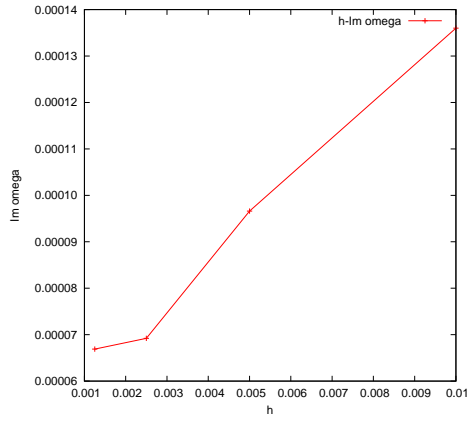


図 A.3: $v_{\theta_s} = 1.8 \times 10^{-3}$, 横軸 h .

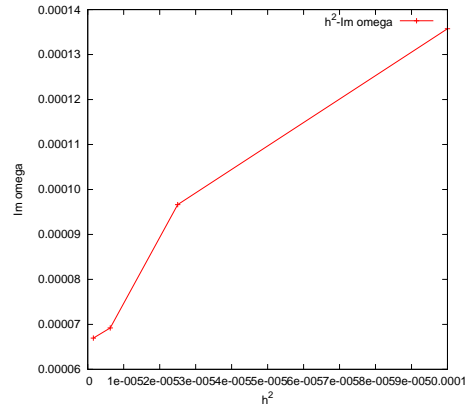


図 A.4: $v_{\theta_s} = 1.8 \times 10^{-3}$, 横軸 h^2 .

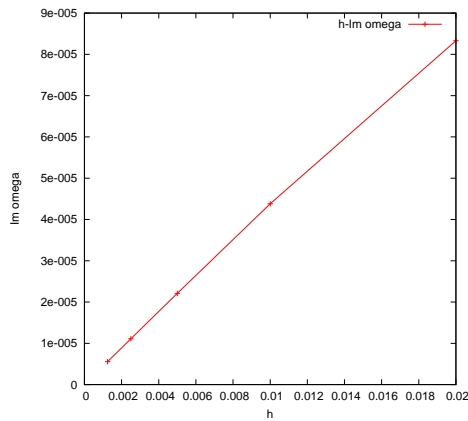


図 A.5: $v_{\theta_s} = 4 \times 10^{-3}$, 横軸 h .

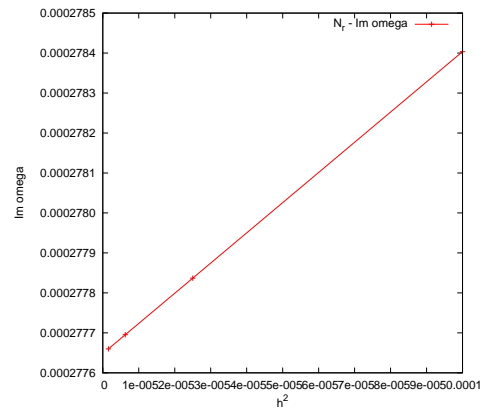


図 A.6: $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-4}$, 横軸 h^2 .

付 録 B 高次の差分近似を用いた固有モード解析

4.4 節における外部解を用いた、モデル固有値の評価で、非物理的な不安定性の精度は、たとえ高次の差分近似を用いても改善されないことが予測された。そこで、四次の中心差分近似を用いて離散化し同様に固有モード解析を行って、本当にそうかを確かめた。

まず、固有値の分布を図 C.1 に示す。小半径方向のグリッド数 $N_r = 200$ 、プラズマ電気抵抗率 $\eta = 10^{-4}$ とした。第二章と同様に、ほぼ実軸に沿った形で分布している固有値のうち、 $\text{Re } \omega = 0.08$ 辺りまで分布しているのがポロイダル回転による連続スペクトルであると考えられる。

次に、 $\omega = 0$ 付近を拡大したグラフを図 C.2 に示す。 $v_{\theta s}$ を増加させると、 $v_{\theta s} = 0$ のときに $\text{Im } \omega < 0$ の領域にあった固有値が、実部を持つようになり、虚部が正の領域へはみ出してくる。今回生じた不安定固有値についても、ポロイダル回転による連続スペクトルと関係しているように見える。従って、グリッド数 N_r を変えた場合の渦度の固有関数を見てみる。 $v_{\theta s} = 5 \times 10^{-3}$ とした。図 C.3, C.4 は、虚部が大きい順番に 1-5 番目の固有値に対する $N_r = 100$ および $N_r = 400$ とした場合の渦度の実部をプロットしたものである。また、図 C.5, C.6 は、 $N_r = 100$ および $N_r = 400$ とした場合の渦度の虚部をプロットしたものである。実部、虚部いずれの場合も $N_r = 100$ のときは、跳びの位置の分布がまばらなのに対し、 $N_r = 400$ のときは密になっている。これはグリッド数によって決まっているものであり、今回計算された固有値も、微分方程式では連続スペクトルになっていると考えられる。

次に、真の不安定固有値と非物理的な不安定固有値の h 依存性を調べる。真の不安定固

有値については、 $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-4}$ のとき、非物理的な不安定固有値については $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-3}$ のときの h 依存性を調べた。図 C.7 は、 $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-4}$ の場合の、つまり真の固有値の成長率の h 依存性であるが、4次精度で計算したため、 h^4 で真の値に収束している。一方で、図 C.7 は、 $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-3}$ の場合の、つまり非物理的な固有値の成長率の h 依存性であるが、4次精度で計算したにも関わらず、 h で収束している。これは、外部解から予測された通りの結果であり、非物理的な不安定性の成長率の精度は、たとえ高次の差分近似を用いても改善されないことが明らかになった。

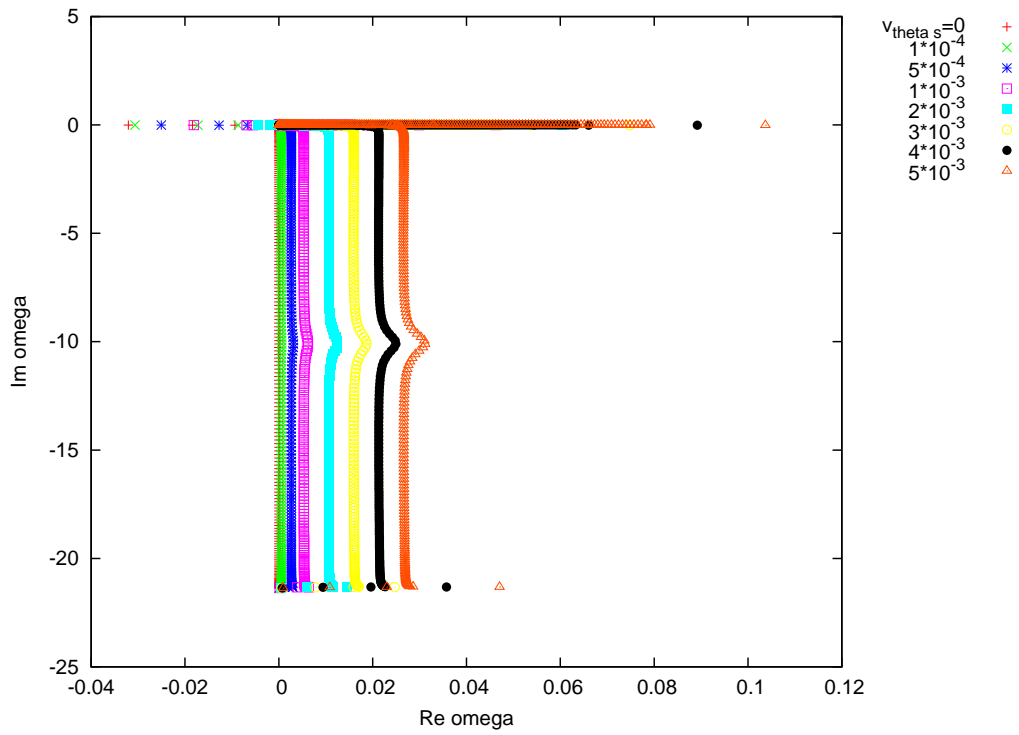


図 B.1: 固有値の分布

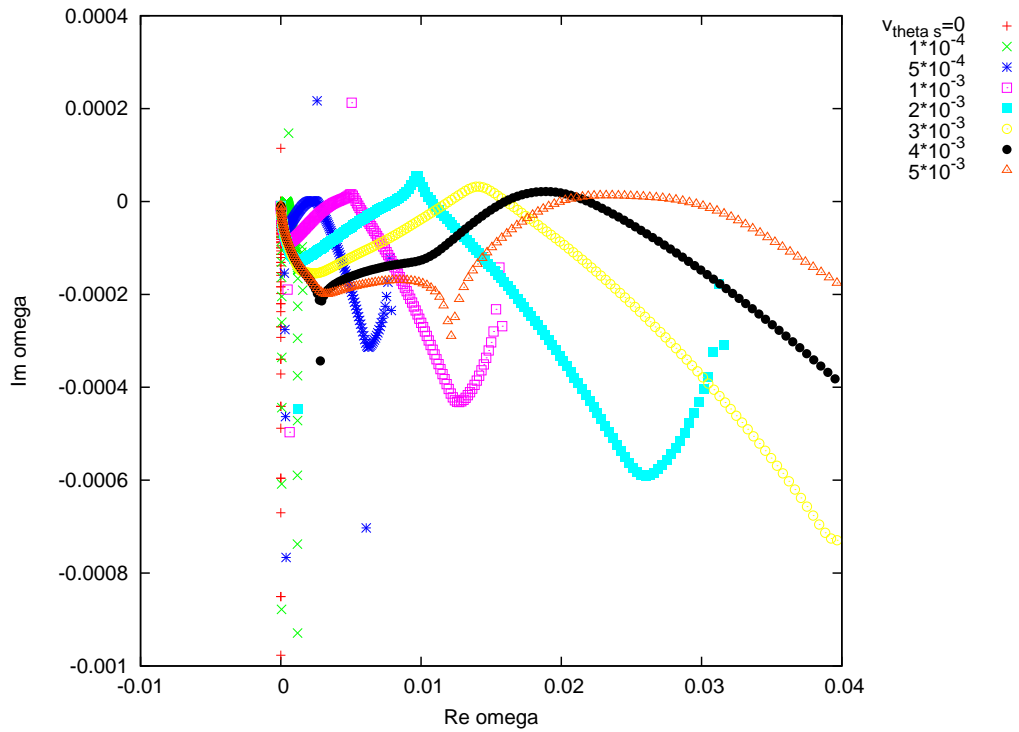


図 B.2: 固有値の分布 (拡大)

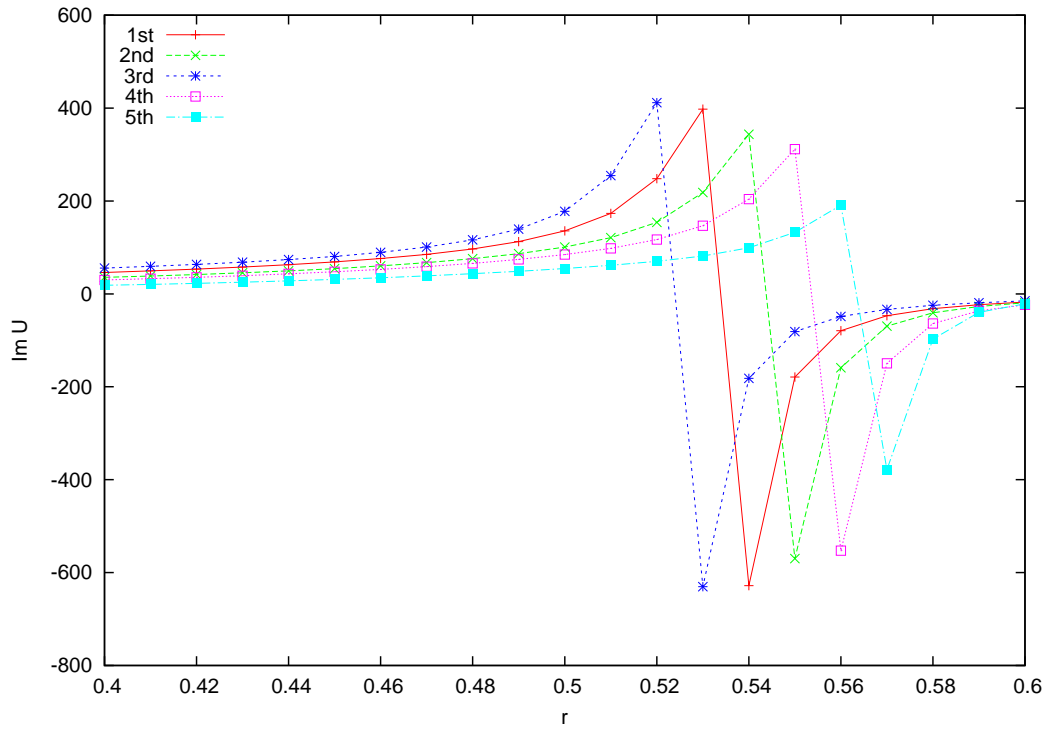


図 B.3: $N_r = 100$ の場合の、固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部

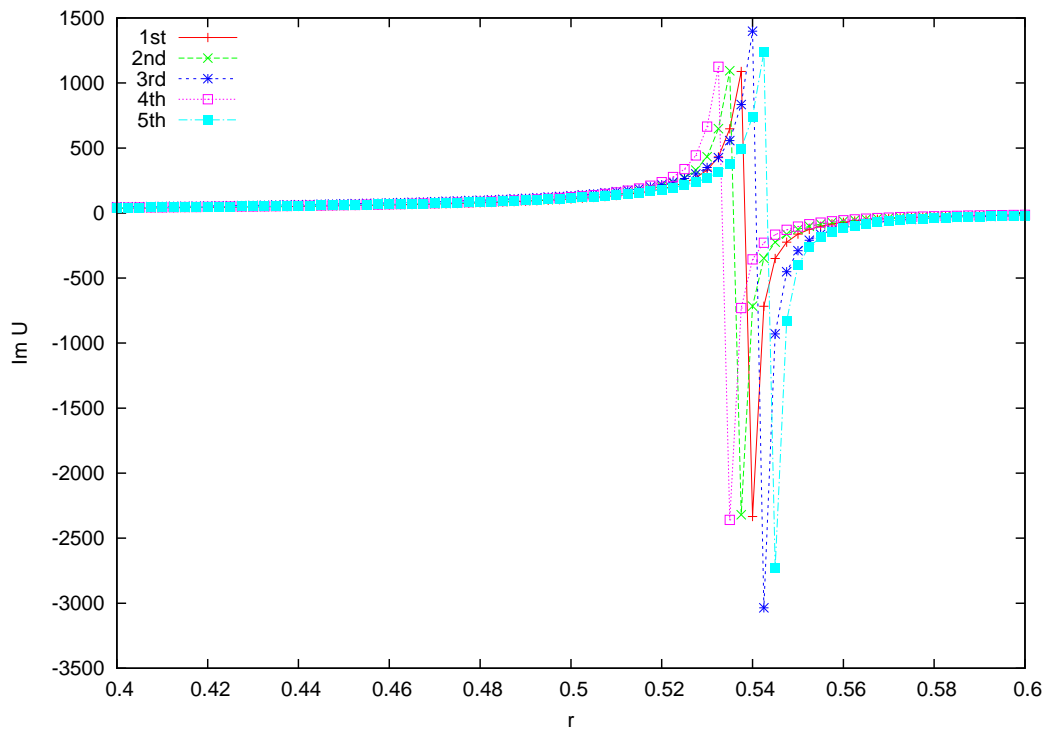


図 B.4: $N_r = 400$ の場合の、固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の実部

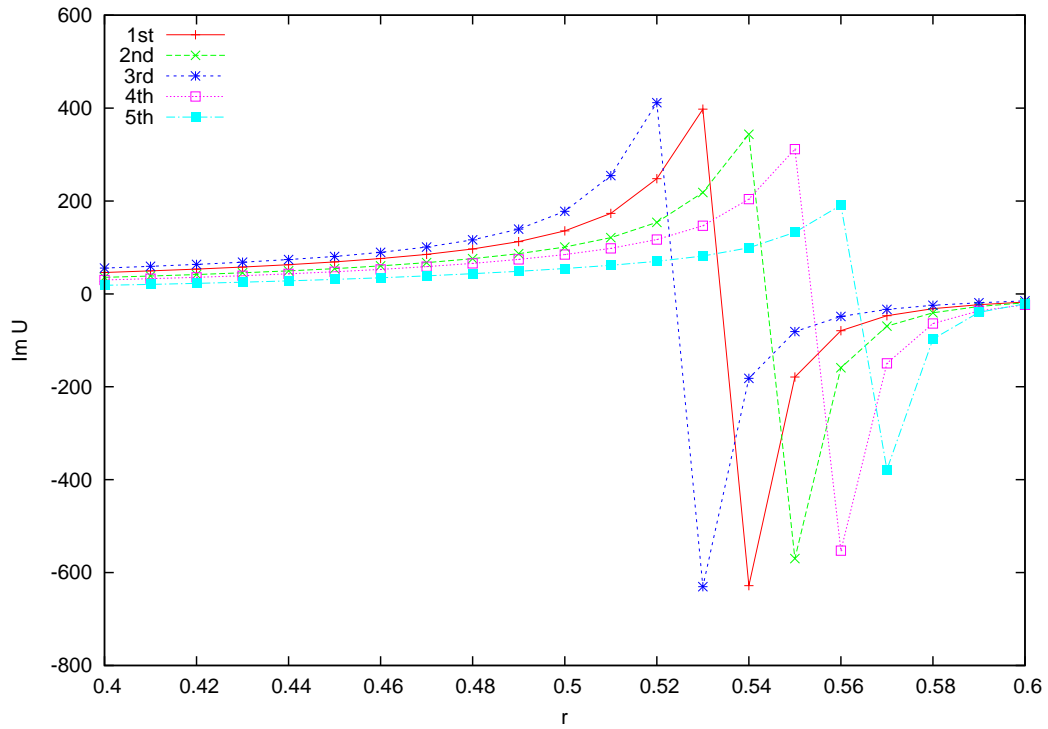


図 B.5: $N_r = 100$ の場合の、固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部

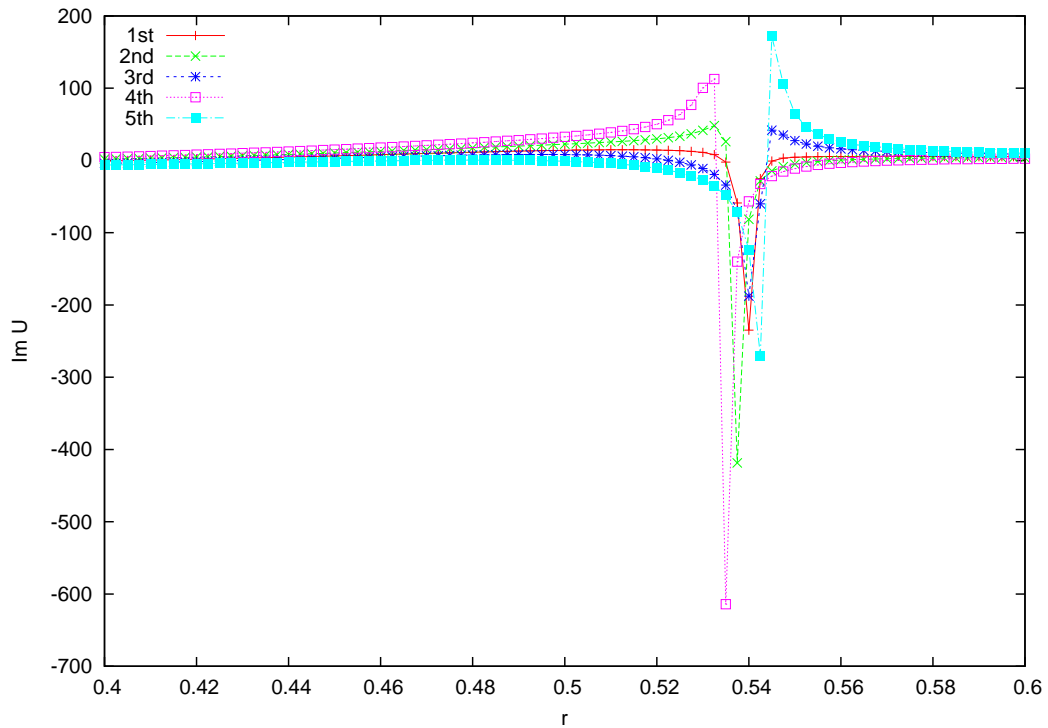


図 B.6: $N_r = 400$ の場合の、固有値の虚部が大きい順に 1-5 番目の固有値に対する渦度の虚部

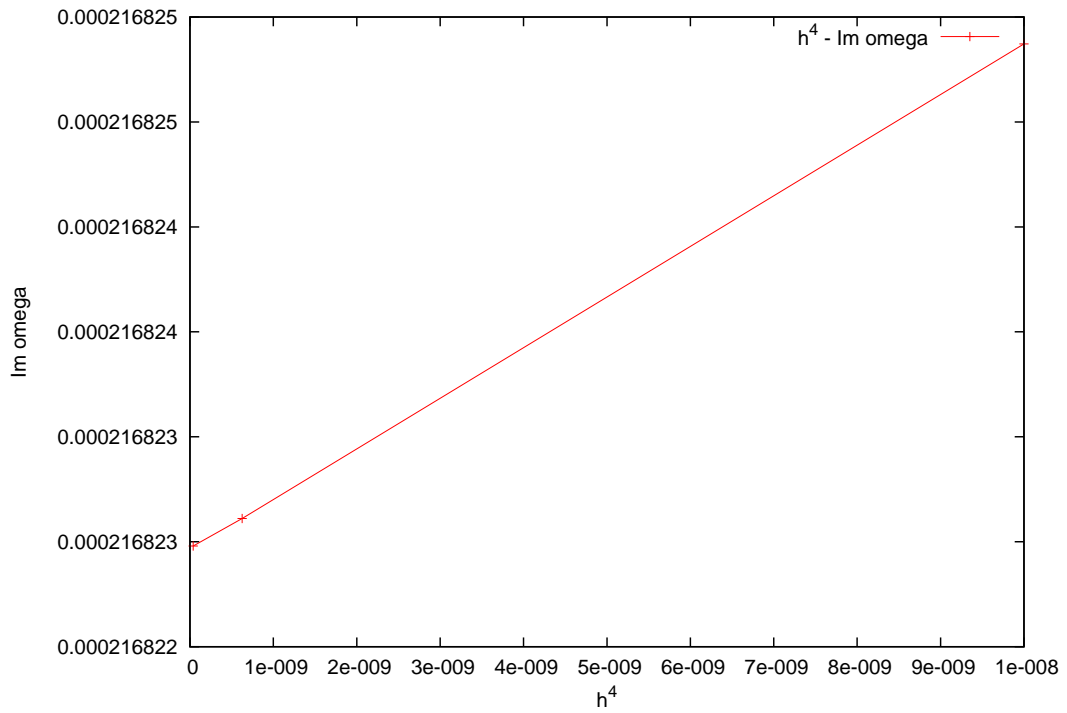


図 B.7: $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-4}$ の場合の最大成長率の h 依存性, 横軸 h^4

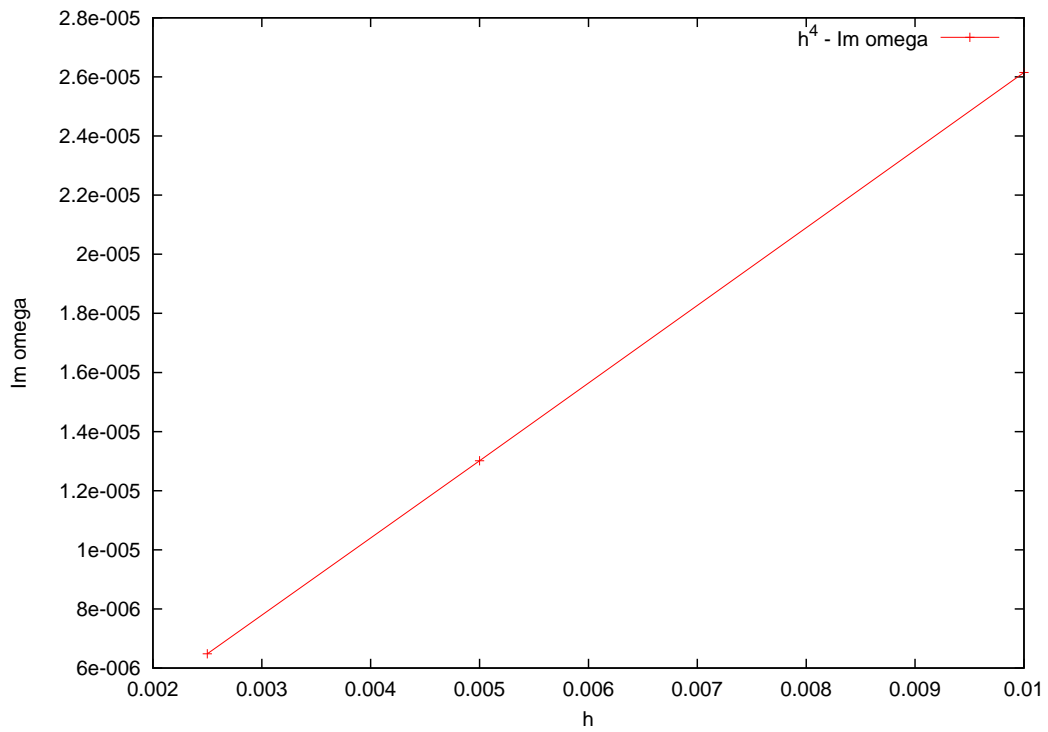


図 B.8: $v_{\theta_s} = 5 \times 10^{-3}$ の場合の最大成長率の h 依存性, 横軸 h

参考文献

- [1] 龍野 智哉, “流れと非エルミート性”, プラズマ・核融合学会誌 **78**, 930-934 (2002).
- [2] 吉田 善章, “流れのある平衡・安定性理論の課題”, プラズマ・核融合学会誌 **86**, 209-219 (2010).
- [3] W. A. Cooper, *Plasma Physics and Control Fusion* **30**, 1805 (1988).
- [4] M. Furukawa, Y. Nakamura, S. Hamaguchi and M. Wakatani, *Phys. Plasmas* **8**, 4889 (2001).
- [5] X. L. Chen and P. J. Morrison, *Phys. Fluids B* **2**, 495 (1990).
- [6] R. B. Paris, A. D. Wood and S. Stewart, *Phys. Fluids B* **5**, 1027 (1993).
- [7] R. Coelho and E. Lazzaro, *Phys. Plasmas* **14**, 012101 (2007).
- [8] 古川 勝, “流れのあるプラズマにおける MHD 不安定性の理論モデルに関する研究- 固有モードおよび初期値問題による理論解析 -”, 日本原子力機構受託研究報告書 (2008).
- [9] R. Gruber, *Computer Physics Reports* **6** (1987) 299.
- [10] E. Ahusborde, R. Gruber, M. Azaiez and M. L. Sawley, *PHYSICAL REVIEW E* **75**, 056704 (2007).
- [11] H. R. Strauss, *Phys. Fluids* **19**, 134 (1976).

- [12] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma confinement* (Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2003).
- [13] J. Wesson, *Tokamaks FORTH EDITION*, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS(2011).
- [14] R. J. Goldston, P. H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, Institute of Physics Publishing (1995).
- [15] H. P. Furth, J. Killeen and M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids* **6**, 459 (1963).
- [16] 中津 智世, “流れのあるプラズマにおけるテアリングモード安定性の漸近接続法による解析”, 修士論文, 東京大学 (2009).
- [17] F. F. Chen, プラズマ物理入門, 丸善株式会社 (1974).

謝辞

本研究に取り組むにあたり，研究室の皆様には大変お世話になりました．この場を借りて深く感謝の意を表させていただきます．

古川勝准教授には，親切丁寧にご指導いただきました．学部における専門と異なる分野での研究であったため，苦勞することも多く，また，古川先生にもご迷惑をおかけすることがありました．この場をかりてお詫びするとともに，心より感謝いたします．修士一年の冬学期からは，古川先生が鳥取大学に着任され，直接顔を合わせる機会が少なくなり寂しくなりましたが，テレビ会議での古川研ゼミやメールでの研究相談で丁寧かつ適切なご指導をいただきました．古川先生に根気強く，丁寧に指導していただいたおかげで，形だけでも修士論文を書き上げることができたと思います．言葉では言い表せないほどの感謝でいっぱいです．

吉田善章教授には，発表練習等において，研究に対する適切な指摘やご助言をいただきました．ご助言により研究テーマに関する新たな理解を得たこともありました．深く感謝いたします．

森川先生，齋藤先生，矢野さん，西浦先生には研究の面で直接お話しをする機会はありませんでしたが，大型の実験装置を用いて最先端の研究を行われている先生方には尊敬の気持ちを持っていました．

秘書の北山さんには，一階にコピーに降りた際によく声をかけていただき元気ができました．ありがとうございます．

研究室の先輩方である，川面さん，金子さん，江本さん，若林さん，Hamdi さん，後藤

さん、坂本さん、笠岡さんには親切にしてください、また色々なことを教わりました。特に先輩方の研究に対する姿勢からは多くのことを学びました。

また、同期の近末君、大野君、野上君、佐藤君にもお世話になりました。一緒に食事をしたり、研究以外の話なども気兼ねなくできたりと、大学院生活において欠かせない存在だったと思います。ありがとうございます。

後輩である、山崎さん、種橋くんには先輩として何もできてませんでした。申し訳ありません。今後の充実した研究生生活を期待しています。

最後になりますが、皆様のおかげで充実した二年間を過ごすことができました。心から感謝いたします。

佐々木悠大

学会発表等

1. 平成 25 年度 NIFS 共同研究 研究会 口頭発表

「シア流にまつわるスペクトル汚染のモデル解析と解法に関する研究」

佐々木悠大, 古川勝

2. 日本物理学会 2014 年春季大会 口頭発表 (予定)

「シア流に関連するスペクトル汚染のモデル解析」

佐々木悠大, 古川勝