

2013 年度 修士論文

板状部材の遮音性能の数値予測に関する研究
-試料設置及び支持条件のモデル化-

Numerical prediction of sound insulation performance
of plate-like Members
- Modeling of sample mounting and edge support system

清家 剛

SEIKE Tsuyoshi

2014 年 1 月 27 日

東京大学大学院 新領域創成科学研究科
社会文化環境学専攻

Institute of Environmental Studies,
Graduate School of Frontier science, the University of Tokyo

余白

目次

第 1 章	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	関連の既往研究	4
1.3	既存の数値解析手法	5
1.4	研究の目的	7
1.5	論文の構成	7
第 2 章	数値解析の基礎理論	9
2.1	音場の数値解析理論	10
2.1.1	音場の基礎方程式	10
2.1.2	音場の境界条件	10
2.1.3	有限要素法による音場の定式化	11
2.1.4	境界要素法による音場の定式化	17
2.1.5	有限要素法と境界要素法の結合	23
2.2	弾性体振動場の数値解析理論	27
2.2.1	弾性体振動場の基礎方程式	27
2.2.2	有限要素法による弾性体振動場の解析	28
2.3	板振動場の数値解析理論	33
2.3.1	板振動場の基礎方程式	33
2.3.2	有限要素法による板振動場の解析	35
2.4	音響振動連成系の取扱い	41
2.4.1	音場-弾性体振動場の結合	41
2.4.2	音場-板振動場の結合	43
2.4.3	弾性体振動場-弾性体振動場の結合	45
2.4.4	弾性体振動場-板振動場の結合	46
2.5	要素積分の評価	48
2.5.1	内挿関数とその微分形	48
2.5.2	Gauss-Legendre 積分による面積分・体積分の評価	54
第 3 章	試料設置条件に関する検討	60

3.1	はじめに	60
3.2	ニッシュ深さの影響	65
3.2.1	板試料厚	66
3.2.2	入射条件	68
3.2.3	板端部の支持条件	71
3.2.4	透過損失の変化量	74
3.2.5	放射効率による検討	75
3.3	試料設置位置の影響	77
3.3.1	垂直入射条件	77
3.3.2	ランダム入射条件	79
3.4	まとめ	83
第 4 章	試料周辺支持材に関する検討	84
4.1	はじめに	84
4.2	垂直入射振動エネルギー吸収率の算出	88
4.2.1	解析手法	88
4.2.2	解析条件	90
4.2.3	適合条件による影響	91
4.2.4	寸法による影響	97
4.2.5	支持材物性による影響	101
4.3	音響透過損失値に与える影響	104
4.3.1	解析条件	104
4.3.2	変位適合条件	105
4.3.3	支持材寸法	107
4.3.4	支持材物性	110
4.3.5	支持材位置	113
4.4	損失係数同定に関する検討	115
4.4.1	損失係数の算出法	117
4.4.2	内部損失係数の同定による解析条件の検討	121
4.4.3	端部損失係数の同定	125
4.4.4	音響放射の損失係数の同定	130
4.4.5	ランダム入射振動エネルギー吸収率による検討	132
4.5	まとめ	134
第 5 章	総括	135
	参考文献	138

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

種々の産業において個々人の生活の質の向上が目指されている。中でも空気，熱，光，音といった環境要因の向上は建築分野のみならず生活圏に関わるあらゆる側面において重要であり，それら環境要因に関する社会的要求も年々高まっているといえる。また，科学技術の発展により，環境設計の対象範囲拡大や設計環境の大型化，設計要求の高水準化・複雑化等，様々な要請が生じている。音環境に関しても同様に，外部騒音伝搬等の騒音の制御に加えスピーチプライバシー，情報伝達などの観点による要求水準の高まり，そして高層建築や自動車・航空機といった輸送機器内環境など音響設計の範囲拡大がみられる。それらの音環境設計実現にあたり，各種材料の高性能化・多機能化・低コスト化は必須であるといえる。

建築分野における音環境の設計は騒音振動制御と残響音の制御に大別され，吸音材や遮音材，拡散体といった音響材料を利用してその設計が行われている。遮音材料に顕著にみられるように，これら音響材料は構造部材としての機能や他の環境要因に対する機能，意匠設計上の機能等を兼ねている場合がほとんどであり，特に複層防音材料などの利用による軽量で吸遮音性能の高い材料の開発が盛んに行われている。

音響材料開発は，性能を予測する段階，材料を作成する段階，材料を試験し評価する段階に大別され，そのサイクルを繰り返し製品としての設計を行っている。そのため，それぞれの段階における精度を向上させサイクルをなるべく短くすることが，製品の高性能化やコストの削減につながると考えられる。製品の試作には経済的コストや熟練技師など多くのコストがかかることから，製品の性能予測と性能評価における精度の向上は材料開発の高性能化・低コスト化に必要不可欠であるといえる。

音響材料開発における性能予測手法は，理論解析とコンピュータシミュレーションによる数値解析に大別される。理論解析は一般に無限大面積の試料を想定し性能予測を行う手法であり，物性値分布や形状等，適用範囲が限定的であることから，材料開発という観点ではその予測精度が不十分な場合が多く現実に即した性能を得ることが難しい場合も多い。一方，仮想的に設定した無限空間や有限空間での物理シミュレーションである数値解

析は、有限サイズ試料の性能が算出可能である点や物性値分布を与えることができる点などから、設計自由度が高く現実在即した性能を得ることが容易な手法といえる。計算コストが増加することがデメリットであるといえるが、今後は計算機能力の向上や解析手法の整備が予想され、より発展の見込まれる分野であるといえる。

一方、音響材料開発における性能評価は主に実験室実験により行われるが、測定の精度や再現性、周辺環境による変動が問題となる。実験室形状その他の実験室の特性、試料の設置条件や支持条件等多くの変動要因についてその検討がなされてきており種々の測定手法の規格化もなされているものの、同一実験室における変動、実験施設間における変動、実験室実験と現場における性能変動、各現場における変動など、あらゆる場面において測定結果の乖離が存在し、材料開発・運用における重要な課題となっている。材料製作側が部材性能として提供したデータを運用側が独自で補正する例も散見され、性能評価における信頼性が損なわれる原因の一つとなっている。

1.2 関連の既往研究

音響性能の一つである遮音性能の予測については古くから研究が行われてきており、理論的な予測として A.London は、無限大単層壁や無限大中空二重壁の乱入射透過損失に関する理論を示した [1, 2]。さらに Cremer はコインシデンス効果を理論的に示した [11]。これらは今日の透過損失予測の基礎として確立されている。さらに、有限板の遮音性能として、Sewell は矩形板振動のモード理論を用いた理論を示し [6]、Donato は二重壁について低周波数での透過損失の補正を行うなど [14]、古くから多くの研究がなされてきた。

建築部材の遮音性能の数値予測に関する研究として、SEA 法を用いた手法が比較的古くから行われてきた [32, 43]。また、モード展開法を用いた検討として川井は平面波が円形板へ垂直入射したときの音響透過に関して検討を行った [31]。また、高崎ら、大鶴らは有限要素法を用いて板の遮音特性を求めた [39, 28]。さらに佐久間らは有限要素法を境界要素法の音響振動連成解析により板材や膜材の遮音性能に関する研究を行った [34]。

本研究に関連する既往研究の詳細は三章および四章冒頭で述べることとするが、音響材料性能測定において頻繁に取り上げられている性能評価の変動要因に関する研究について、音響管計測における垂直入射吸遮音率測定や、音響透過損失測定において測定試料が弾性を持つ場合の側壁での支持条件の影響が報告されている [41, 48]。また、遮音性能評価に関し、遮音性能評価における種々の不確かさの要因に関する調査がまとめられている [55]。詳細な検討例も多々報告されており、試料サイズや支持材に着目した実験的検討や [47, 10]、実験室間の壁体の厚みに着目した実験的検討が行われた [46]。

1.3 既存の数値解析手法

音場，振動場の予測手法はこれまでに数多くの研究が行われており，一般に既往の音場解析手法は音の波動性を無視した幾何音響的手法と音場，振動場の偏微分方程式に基づく波動音響学的手法に大別される。

幾何音響学的手法は鏡像法，音線法に代表される。前述の通り，音波が持つ散乱，回折などの波動的性質を無視し，幾何学的反射のみで音波のエネルギーが伝搬されると仮定し，エネルギーの次元で過渡応答を算出するものである。近年では壁面の乱反射率 (Scattering coefficient) に応じて拡散反射や端部散乱を模擬する方法や，デジタルフィルタによる周波数依存性の考慮なども提案され予測精度，適用範囲の向上が見られる。鏡像法，音線法は後述の波動論的手法と異なり，対象波長に応じて空間を要素分割する必要がない。そのため大スケールの空間や高周波数の解析においても計算負荷への影響は小さく計算時間が高速であることから商用ソフトなども多く，実務での利用が盛んである。

波動音響学的手法としては，理論解析を始め，近年の急速な計算機資源の増加に伴って数値解析が行われるようになった。音響分野に限らず，数値解析手法は有限差分法，有限要素法，境界要素法の3手法が主な手法となっている。以下では音響問題に関するそれぞれの特徴を簡単に述べる。

音響分野において有限差分法は，時間領域有限差分法 (Finite Differential Time Domain Method: FDTD 法) と呼ばれる，時間領域における過渡応答を算出する方法が一般的である。Fig.1.1(a) に示すように，FDTD 法における空間離散は多くの場合直交格子によるため，曲面で構成される境界は階段近似により表すこととなる。コンピュータのメモリ上で階段状のようなデータ構造とする事は計算上必ずしも効率的であるとは言えず，汎用性の観点から対象空間を内包するような矩形領域としてメモリを確保することとなる。また，空

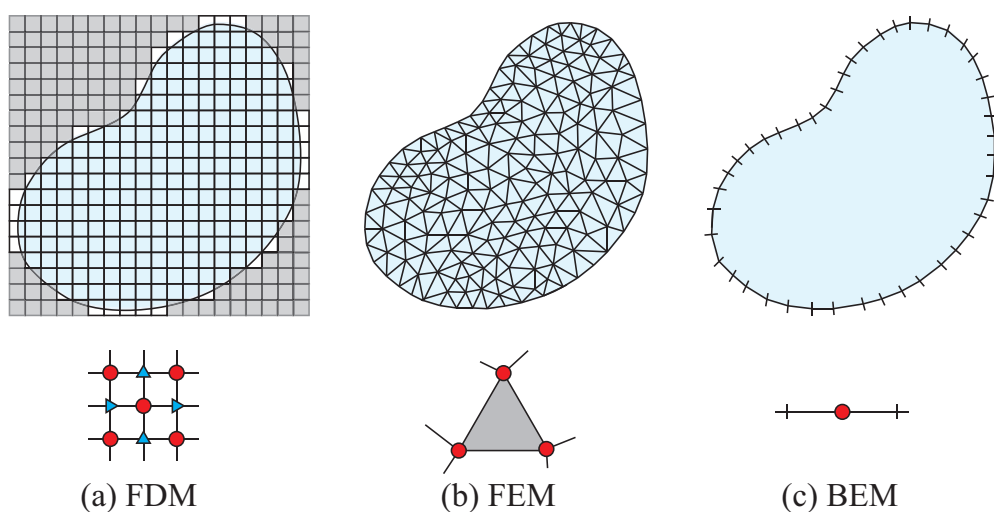


Fig. 1.1: Schematics of Numerical method.

間全体を離散化する必要がある事から、基本的には閉空間が解析対象となる。解法自体は微分を差分に置き換えると言う非常に単純な方法であるため、コード化は容易であり、音響・振動連成問題など広い適用範囲を持っている。

有限要素法 (Finite Element Method: FEM) は空間を比較的単純な形状の要素により分割し、弱形式化された支配方程式を離散化することで、対象となる物理場の近似解の算出を連立一次方程式を解く問題へと帰着させる手法である。Fig.1.1(b) に空間離散化の概念を示す。有限要素法ではメッシュに用いる形状は任意であるが、解析精度がメッシュに大きく依存するため、空間の特性に応じた均等な要素分割が望ましい。また FDTD 法と同様に、空間全体を離散化する必要がある事から、基本的には閉空間が解析対象となる。FEM における係数行列は多くの場合対称であり、大半の成分が 0 となる疎行列 (Sparse matrix) である。コード化においては、これらの性質を利用した行列成分の格納方法及び、連立一次方程式の解法がメモリ使用率・計算時間の効率化において非常に重要であるため、ノウハウが多い手法であるとも言える。FEM は時間・周波数領域の両方の応答が算出可能である。音響・振動問題の多くに適用可能であり、それらの連成も容易であるため、オープンソースや商用ソフトが多いことも特徴と言える。

境界要素法 (Boundary Element Method : BEM) は空間領域の境界を要素に分割し、境界積分方程式を離散化することで、対象となる物理場の近似解の算出を連立一次方程式を解く問題へと帰着させる手法である。BEM も時間・周波数領域の両方の応答が算出可能であるが、周波数領域解析が主流となっている。Fig.1.1(c) に境界離散化のイメージを示す。境界積分方程式によれば任意の点における物理量は、直接波及び全境界面上の物理量の寄与による和として表す事ができる。この時、無限遠方における境界からの寄与は Sommerfeld の放射条件に基づき無視する事ができるため、開空間 (無限遠方で区切られた空間) を効率的に解析する事が可能である。弾性振動解析などにも適用可能であるが、弾性振動問題は有限である場合が多く、解析効率の面から FEM が有利であることから、BEM は音響問題における適用が主流であると言える。BEM においては境界にのみ未知数が設定されるため、自由度数は FDTD, FEM に比べ少ない。しかし、係数行列が一般に非対称、密行列となるため、計算機資源の観点から必ずしもメリットが多いとは言えない。さらに、BEM 固有の問題として、係数行列の対角成分を算出する際に特異積分を行う必要があること、開空間における散乱問題において係数行列にランク不足が生じる場合があること、不均質媒質の取り扱いが複雑であることなどが挙げられ、特別な配慮が必要である。BEM を用いるメリットは開空間の解析や、注目する領域に対して遠方に音源がある場合の解析が容易である事、また反射音のみを抽出できる事が挙げられる。

1.4 研究の目的

上述したように数値解析による音響指標算出手法は数多くの報告例が存在するが、近年開発が進められている複層音響材料や厚みのある音響部材に十分対応できる音響性能予測手法は未だ未整備の段階にあり、また音響性能測定における変動要因の解明という観点からもより現実に応じた解析手法の確立、運用が求められている。そこで本研究では、部材遮音性能の数値予測における精度向上と部材の遮音性能評価における変動要因の解明を目指し、有限要素法と境界要素法を用いた音響振動連成解析による部材遮音性能の数値予測を行う。本研究で検討行う項目を以下のように設定する。

- 部材の設置位置等の実験条件に関し、解析モデルの検討を通し音響透過損失の算出結果に与える影響を解明すること
- 部材の支持材に関し、解析モデルの検討を通し音響透過損失測定や物性測定における精度向上のための知見を得ること

現実に応じた解析モデルによる詳細な現象把握を通し、試験室測定間や試験室性能と *in situ* 性能の乖離を明らかにし、変動要因に対する補正や計測手法へのフィードバックのための基礎的知見を得る。ひいては音響材料開発における時間・経済・環境的コストの削減、材料の高性能に寄与するものであると考えている。

1.5 論文の構成

以下に論文の構成を示す。

第一章では、研究の背景、既往関連研究及び既存の数値解析手法の概観を行った上で、本研究の目的について述べる。また、本論文の構成について示す。

第二章では、本研究の基礎となる音場・振動場解析の基礎理論について述べる。第一節では音場の数値解析理論について、第二節では弾性体振動場の数値解析理論について、第三節では板振動場の数値解析理論について述べる。第四節では音響振動連成系の取り扱いについて述べる。第五章では要素積分の評価について述べる。

第三章では、試料設置条件に関する検討を行う。第一節で試料設置条件に関する変動要因についての既往研究とともに概説し、第二節で解析モデルにおける音響透過損失の算出法について述べる。試料設置条件に関する具体的な問題として第三節では実験室間の壁厚に関する考察を、第四節では試料設置位置に関する考察を行う。

第四章では、端部支持材に関する検討を行う。第一節では端部支持条件に関する変動要因について既往研究とともに概説し、さらに既往研究における支持条件の理論を述べ、本研究で用いるモデル化手法について紹介する。第二節では支持材のエネルギー損失に関する検討として垂直入射振動エネルギー吸収率に関して考察する。第三節では支持モデルの違いが音響透過損失算出値に与える影響について考察する。第四節では系の損失係数同定

に関する考察を行う。第五節は音響透過損失測定設備を利用した物性同定法について基礎的検討を行う。

第五章では得られた知見を整理し、今後の展望を述べる。

第 2 章

数値解析の基礎理論

積分方程式導出のための基礎事項

時間因子と空間微分に関する演算子

本論文では定常状態における音場・振動場の解析を行う。この時、時間因子は一貫して $\exp(j\omega t)$ を採用することとした。

スカラー場 B に対する勾配及びベクトル場 $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$ の発散をあらわす演算をそれぞれ以下のように書く

$$\text{grad}B = \nabla B = \frac{\partial B}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial B}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.2)$$

ただし、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。

発散定理

境界 ∂D で区切られる領域 D におけるベクトル場 \mathbf{A} において、以下の発散定理が成り立つ。

$$\int_D \text{div}\mathbf{A}dV = \oint_{\partial D} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \quad (2.3)$$

ただし、 \mathbf{n} は境界における外向き法線方向ベクトルである。発散定理の意味するところは、領域内における湧き出しの総和は境界における流出の和に等しい、ということである。

発散定理において $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$ とおくと、Green の第一恒等式は次式のようにかける。

$$\int_D (\text{grad}\phi \cdot \text{grad}\psi + \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial D} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (2.4)$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界における法線方向微分を表す。また、同様に発散定理において $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$ とおくと、Green の第二恒等式は次式のようにかける。

$$\int_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_{\partial D} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (2.5)$$

2.1 音場の数値解析理論

2.1.1 音場の基礎方程式

均質かつ粘性の無い空気中を音波が伝搬する時、以下の連続の式及び運動方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p \quad (2.7)$$

ただし、 p :音圧、 \mathbf{v} :粒子速度ベクトル、 κ :体積弾性率、 ρ :空気密度である。これより、音圧に関して以下の波動方程式が成り立つ。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

空気中の音速 c は $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ で表される。

ここで、調和振動を仮定すると、流体中の Helmholtz 方程式が以下のように書ける。

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.9)$$

2.1.2 音場の境界条件

空気中の定常音場において粒子速度 \mathbf{v} は運動方程式, Eq.(2.7) より以下のようにかける。

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{j\omega\rho} (\operatorname{grad} p) \quad (2.10)$$

この時、 \mathbf{r} 方向への粒子速度は次のように表される。

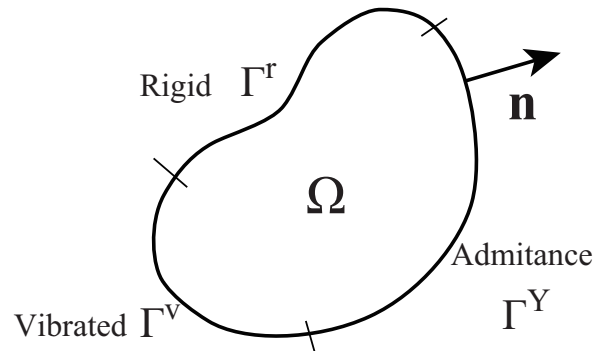


Fig. 2.1: Analytical model for acoustic field.

$$\begin{aligned}
v_r &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \\
&= -\frac{1}{j\omega\rho}(\text{grad}p) \cdot \mathbf{r} \\
&= -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

音場の境界では局所作用が成り立つものとし、実際の音場との対応から境界 Γ について剛壁境界 Γ^r , アドミッタンス境界 Γ^Y , 振動境界 Γ^v の3種類を考慮する。各々の境界では境界面外向き法線方向の粒子速度 v_n が以下の式を満たすものとする。

$$v_n = \begin{cases} -v^f & (\text{on } \Gamma^v) \\ \beta p & (\text{on } \Gamma^Y) \\ 0 & (\text{on } \Gamma^r) \end{cases}$$

ただし、 v^f : 内向き法線方向振動速度、 β : 法線方向音響アドミタンスである。これより、境界面における音圧の法線方向傾度について各々の境界条件は以下のようにかける。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \begin{cases} j\omega\rho v^f & (\text{on } \Gamma^v) \\ -jk\beta_n p & (\text{on } \Gamma^Y) \\ 0 & (\text{on } \Gamma^r) \end{cases} \tag{2.12}$$

β_n は空気のアドミタンスで基準化した法線方向音響アドミタンスである。

2.1.3 有限要素法による音場の定式化

Helmholtz 方程式の弱形式化

ここでは重み付き残差法に基づき、支配方程式を弱形式に変形する。Eq.(2.9) に重み関数 δp を乗じ、領域内部全体で積分する。

$$\int_{\Omega} \delta p (\nabla^2 p + k^2 p) dV = 0 \tag{2.13}$$

上式第一項は、Green の第一恒等式を適用し下式のように変形できる。

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla^2 p dV = - \int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV + \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \tag{2.14}$$

Eq.(2.14) を Eq.(2.13) に代入すると以下のように弱形式の積分方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV - \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \tag{2.15}$$

さらに上式第三項に境界条件 Eq.(2.12) を適用すると、非連成音場について以下の積分方程式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV + jk\beta_n \int_{\Gamma_Y} \delta p p dS - j\omega\rho_0 \int_{\Gamma_v} \delta p v^f dS = 0 \tag{2.16}$$

積分方程式の離散化

ここでは Eq.(2.16) にガラーキン法を適用し、数値的に解くことができる形式に変形する過程を示す。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(2.16) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、ある要素内の任意点で音圧 p は要素節点における値 p_i と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$p = \sum_i N_i p_i \quad (2.17)$$

ここで $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{p}_e\}$ なるベクトルを次式のように定義する。

$$\{\mathbf{N}\} = \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_I\} \quad (2.18)$$

$$\{\mathbf{p}_e\} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_I\}^T \quad (2.19)$$

これらを用いると、Eq.(2.17) は次式のようにベクトルの内積として表すことができる。

$$p = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{p}_e\} \quad (2.20)$$

さらに、ガラーキン法では重み関数 δp の内挿を試験関数と同一にとる。

$$\delta p = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\delta \mathbf{p}_e\} \quad (2.21)$$

以上の関係を用い、Eq.(2.16) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

まず、ある要素 e について Eq.(2.16) の第一項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \delta p \cdot \nabla p dV &= \int_{\Omega_e} \nabla \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \nabla \left(\sum_j N_j p_j \right) dV \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} p_j + \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} p_j + \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial z} p_j \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{K}_e^a] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。ここで、 $[\mathbf{B}^a]$ 及び $[\mathbf{K}_e^a]$ はそれぞれ歪みマトリックス、剛性マトリックスと呼ばれ、以下のように定義される。

$$[\mathbf{B}^a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[\mathbf{K}_e^{\mathbf{a}}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^{\mathbf{a}}]^T [\mathbf{B}^{\mathbf{a}}] dV \quad (2.24)$$

続いて、Eq.(2.16) 第二項における積分項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta p p dV &= \int_{\Omega_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \left(\sum_j N_j p_j \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{M}_e^{\mathbf{a}}] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。ここで、 $[\mathbf{M}_e^{\mathbf{a}}]$ は慣性マトリックスと呼ばれ、以下のように定義される。

$$[\mathbf{M}_e^{\mathbf{a}}] = \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \quad (2.26)$$

次に、Eq.(2.16) 第三項はインピーダンス境界に関する項であり、

$$\begin{aligned} \beta_0 \int_{\Gamma_e} \delta p p dS &= \int_{\Gamma_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \left(\sum_j N_j p_j \right) dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \beta_0 \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{C}_e^{\mathbf{a}}] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

と表せる。ここで、 $[\mathbf{C}_e^{\mathbf{a}}]$ は一般に減衰マトリックスと呼ばれ、以下のように定義される。

$$[\mathbf{C}_e^{\mathbf{a}}] = \beta_0 \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dS \quad (2.28)$$

最後に第四項は振動境界に対する項であり、外力条件や弾性体、板などの変位や速度により記述される振動場との連成条件を表す項である。ここでは一定速度 $v(\Gamma_e)$ で駆動される境界を考える。この時、第四項における積分項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \delta p v^f dS &= \int_{\Gamma_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) dS v(\Gamma_e) \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T v(\Gamma_e) dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_e) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ここで、ベクトル $\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\}$ は以下のように定義される。

$$\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\} = \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T dS \quad (2.30)$$

振動場との連成問題における第四項は適合マトリックス $[\mathbf{Q}]$ として表される。各種媒質境界面における適合マトリックスは 2.4 節においてまとめて示すこととする。

本論文では Eq.(2.24),(2.26),(2.28),(2.30) は数値積分により評価する。数値積分の具体的な手順は 2.5 節においてまとめて示す。

全体マトリックスの構築

有限要素法においては領域を N 個の要素に分割し、定義領域全体での積分を各要素に対して領域区分した積分の総和として評価する。この時、Fig.2.2 に示すようなモデルケースを想定し、要素マトリックスを重ね合わせて全体マトリックスを構築する手順を具体的に示す。

$$\int_{\Omega} dV = \sum_n \int_{\Omega_n} dV \quad (2.31)$$

要素 Ω_1, Ω_2 に対し、Eq.(2.22) がそれぞれ次のように得られるとする。

$$\{\delta \mathbf{p}_e^1\}^T [\mathbf{K}_1^a] \{\mathbf{p}_e^1\} = \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\{\delta \mathbf{p}_e^2\}^T [\mathbf{K}_2^a] \{\mathbf{p}_e^2\} = \begin{Bmatrix} \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

全節点音圧ベクトル $\{\mathbf{p}\}$ を $\{\mathbf{p}\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ を用いると、上に示した 2 式はそれぞれ次式と同値である。

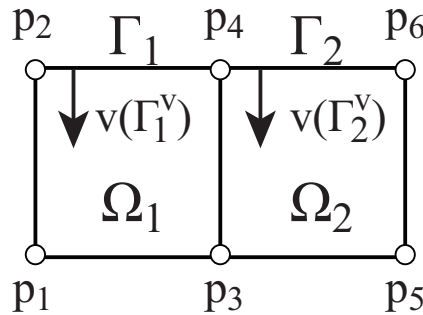


Fig. 2.2: A model case for the assembly step in FEM.

$$\{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_1] \{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_2] \{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

以上の関係から、領域全体の積分を以下のようにマトリックス形式で表す事ができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \nabla p dV &= \int_{\Omega_1} \nabla \delta p \cdot \nabla p dV + \int_{\Omega_2} \nabla \delta p \cdot \nabla p dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e^1\}^T [\mathbf{K}^{\mathbf{a}}_1] \{\mathbf{p}_e^1\} + \{\delta \mathbf{p}_e^2\}^T [\mathbf{K}^{\mathbf{a}}_2] \{\mathbf{p}_e^2\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_1] \{\mathbf{p}\} + \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_2] \{\mathbf{p}\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T ([\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_1] + [\mathbf{K}'^{\mathbf{a}}_2]) \{\mathbf{p}\} \\ &= \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{K}^{\mathbf{a}}] \{\mathbf{p}\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

このように、部分剛性マトリックス $[\mathbf{K}^{\mathbf{a}}_1], [\mathbf{K}^{\mathbf{a}}_2]$ より、全体剛性マトリックス $[\mathbf{K}^{\mathbf{a}}]$ を構築する際には、それぞれの部分マトリックスにおいて共通する節点に対応する成分を加算すればよい事がわかる。

次に、要素 Γ_1^v, Γ_2^v に対し、Eq.(2.29) がそれぞれ次のように得られるとする。

$$\{\delta \mathbf{p}_e^1\}^T \{\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}_1\} v(\Gamma_1^v) = \begin{Bmatrix} \delta p_2 \\ \delta p_4 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix} v(\Gamma_1^v) \quad (2.37)$$

$$\{\delta \mathbf{p}_e^2\}^T \{\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}_1\} v(\Gamma_2^v) = \begin{Bmatrix} \delta p_4 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} v(\Gamma_2^v) \quad (2.38)$$

全節点音圧ベクトル $\{\mathbf{p}\}$ を用いると、上に示した 2 式はそれぞれ次式と同値である。

$$\{\delta \mathbf{p}\}^T \{\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}_1\} v(\Gamma_1^v) = \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1^1 \\ 0 \\ q_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v(\Gamma_1^v) \quad (2.39)$$

$$\{\delta \mathbf{p}\}^T \{\mathbf{Q}_1^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_2^{\mathbf{v}}) = \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1^2 \\ 0 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} v(\Gamma_2^{\mathbf{v}}) \quad (2.40)$$

以上の関係から、振動境界全体での積分を以下のようにマトリックス形式で表す事ができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{\mathbf{v}}} \delta p v^{\mathbf{f}} dS &= \int_{\Gamma_1^{\mathbf{v}}} \delta p v^{\mathbf{f}} dS + \int_{\Gamma_2^{\mathbf{v}}} \delta p v^{\mathbf{f}} dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e^1\}^T \{\mathbf{Q}_1^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_1^{\mathbf{v}}) + \{\delta \mathbf{p}_e^2\}^T \{\mathbf{Q}_2^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_2^{\mathbf{v}}) \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T (\{\mathbf{Q}_1^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_1^{\mathbf{v}}) + \{\mathbf{Q}_2^{\mathbf{a}}\} v(\Gamma_2^{\mathbf{v}})) \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T [\{\mathbf{Q}_1^{\mathbf{a}}\}, \{\mathbf{Q}_2^{\mathbf{a}}\}] \{v(\Gamma_1^{\mathbf{v}}), v(\Gamma_2^{\mathbf{v}})\}^T \\ &= \begin{Bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_1^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ q_2^1 & q_1^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(\Gamma_1^{\mathbf{v}}) \\ v(\Gamma_2^{\mathbf{v}}) \end{Bmatrix} \\ &= \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}] \{\mathbf{v}^{\mathbf{f}}\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、境界面振動速度ベクトル $\{\mathbf{v}^{\mathbf{f}}\}$ を $\{\mathbf{v}^{\mathbf{f}}\} = \{v(\Gamma_1^{\mathbf{v}}), v(\Gamma_2^{\mathbf{v}})\}^T$ と定義した。

同様に慣性・減衰マトリックスについても共通成分を重ね合わせると、音場のみの非連成系において、Eq.(2.16) はマトリックス形式で以下のように書く事が出来る。

$$\{\delta \mathbf{p}\}^T (([\mathbf{K}^{\mathbf{a}}] - k^2[\mathbf{M}^{\mathbf{a}}] + jk[\mathbf{C}^{\mathbf{a}}]) \{\mathbf{p}\} - j\omega\rho[\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}]\{\mathbf{v}^{\mathbf{f}}\}) = 0 \quad (2.42)$$

上式が $\{\delta \mathbf{p}\}$ にらず解を持つためには

$$([\mathbf{K}^{\mathbf{a}}] - k^2[\mathbf{M}^{\mathbf{a}}] + jk[\mathbf{C}^{\mathbf{a}}]) \{\mathbf{p}\} = j\omega\rho[\mathbf{Q}^{\mathbf{a}}]\{\mathbf{v}^{\mathbf{f}}\} \quad (2.43)$$

が要求される。

プライム'に関する注意

以降の章節では、マトリックスに対するプライム $[\cdot]'$ は上述のように、 $[\cdot]'$ と全節点ベクトルにより表される二次形式（ベクトル・マトリックス・ベクトル積）が、要素マトリックス $[\cdot]$ と要素節点ベクトルの二次形式と同値になるように無関係な成分に 0 が埋められたマトリックスであることを意味することとする (Eq.(2.34) 及び (2.35))。 $\{\cdot\}'$ についても同様であり、ベクトル・ベクトル積が同値となるように 0 パディングを行うことを意味する (Eq.(2.39) 及び (2.40))。ただし、これは数式の表現上の暗黙のルールを少なくするための記述であり、有限要素法のコード化においてこのステップをとる必要はないことを強調しておく。

このような仮定をする事で、同様の手順で全体マトリックスを構築する場合、次式のよう
に書く事ができる。

$$[\mathbf{K}^a] = \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{K}_e'^a] \quad (2.44)$$

2.1.4 境界要素法による音場の定式化

境界積分方程式の導出

Helmholtz 方程式 Eq.(2.9) に試験関数 G を掛け、領域にわたる積分を考える。

$$\int_{\Omega} (G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \nabla^2 p(\mathbf{r}_q) + k^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) p(\mathbf{r}_q)) dV_q = 0 \quad (2.45)$$

試験関数は任意の観測点 \mathbf{p} とソース点 \mathbf{q} に関して、次式を満たす基本解を与える。

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) + k^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = -\delta(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|) \quad (2.46)$$

δ は Dirac のデルタ関数であり、3次元領域における基本解は次式で表される。

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|)}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|} \quad (2.47)$$

Eq.(2.45) 第一項に Green の第二恒等式を適用すると次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p(\mathbf{r}_q) (\nabla^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) + k^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)) dV_q \\ + \int_{\Gamma} \left(G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n} - p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} \right) dS_q = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

さらに、基本解が Eq.(2.46) を満たすことから以下のように展開される。

$$p(\mathbf{r}_p) + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS_q = 0 \quad (2.49)$$

ここで、Eq.(2.46) 右辺における負符号が反映されている点に注意されたい。また、基本解 G の方向微分は下式のように表される。

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} = -\frac{1 + jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|^2} \frac{(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{n}_q}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|} \exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|) \quad (2.50)$$

境界上の観測点周辺の特異性 観測点 \mathbf{p} が境界上に有り、この観測点から領域を見込む角度が $\theta(\mathbf{r})$ であるとする。この時、観測点のまわりに微小半径 ε の球状の境界面 Γ^1 を境界をくりぬくように設け、 Γ^1 からの寄与を考える。まず、球の半径が微小と考えているため、境界面 Γ^1 上における音圧 p 、及びその法線方向傾度 $\frac{\partial p}{\partial n}$ は観測点 \mathbf{p} における値と等しく、一定値であると考えられる。また、境界が観測点を中心とした球形であることから、外向き法線方向微分は球の半径方向への微分である。さらに、球面上の積分であることから、微小面積は $dS = \varepsilon^2 d\omega$ とおける。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma^1} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n} \right) dS_q \\
&= \int_{\Gamma^1} \left(p(\mathbf{r}_p) \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial r} - G(\varepsilon) \frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial r} \right) dS_q \\
&= \int_{\Gamma^1} \left(-p(\mathbf{r}_p) \frac{1 + jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2} \exp(-jk\varepsilon) - \frac{\exp(-jk\varepsilon)}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial r} \right) \varepsilon^2 d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(-p(\mathbf{r}_p)(1 + jk\varepsilon) \exp(-jk\varepsilon) - \varepsilon \exp(-jk\varepsilon) \frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial r} \right) \int_{\Gamma^1} d\omega \\
&= \frac{4\pi - \theta(\mathbf{r})}{4\pi} \left(-p(\mathbf{r}_p)(1 + jk\varepsilon) \exp(-jk\varepsilon) - \varepsilon \exp(-jk\varepsilon) \frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial r} \right) \quad (2.51)
\end{aligned}$$

上式で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、以下のようにかける。

$$\int_{\Gamma^1} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n} \right) dS_q = -\frac{4\pi - \theta(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}_p) \quad (2.52)$$

これより、Eq.(2.49) を境界上を含む領域内全ての観測点に一般化すると、以下のよう
に書くことができる。

$$e(\mathbf{r}_p) p(\mathbf{r}_p) + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS_q = p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \quad (2.53)$$

$e(\mathbf{r})$ は観測点から領域を見込む割合であり、次式で与えられる。

$$e(\mathbf{r}) = \frac{\theta(\mathbf{r})}{4\pi} \quad (2.54)$$

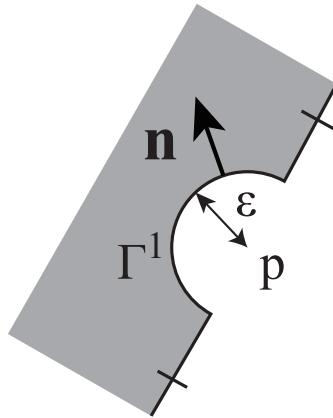


Fig. 2.3: Avoidance of the singularity around observation point.

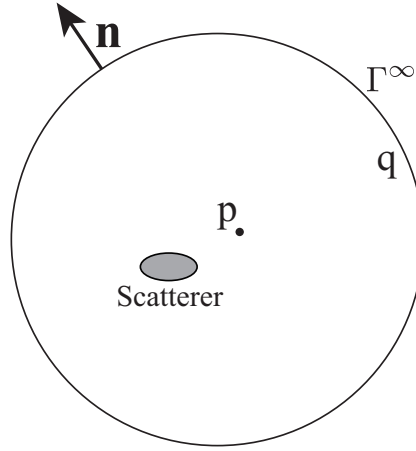


Fig. 2.4: Schematic of the sommerfeld condition..

無限遠方における境界からの寄与 観測点 p に対し球面上の境界 Γ^∞ が十分遠方に存在する場合を考える。この時、境界が十分遠方に存在する事から、観測点との距離 R は $R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| \approx |\mathbf{r}_q|$ で一定値と考えられる。これは、観測点を中心とした、球面を考える事に相当する。従って、ここでも同様に、外向き法線方向微分は球の半径方向への微分であり、球面上の積分であることから、微小面積は $dS = R^2 d\omega$ とおくことができる。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma^\infty} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n} \right) dS_q \\
 &= \int_{\Gamma^\infty} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(R)}{\partial r} - G(R) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial r} \right) dS_q \\
 &= \int_{\Gamma^\infty} \left(-p(\mathbf{r}_q) \frac{1 + jkR}{4\pi R^2} \exp(-jkR) - \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial r} \right) R^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma^\infty} \left(-p(\mathbf{r}_q)(1 + jkR) \exp(-jkR) - R \exp(-jkR) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial r} \right) d\omega \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma^\infty} \left\{ p(\mathbf{r}_q) + R \left(\frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial r} + jkp(\mathbf{r}_p) \right) \right\} \exp(-jkR) d\omega
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

ここで、Sommerfeld の減衰条件、及び放射条件によると [7] 次の条件が成り立つ。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} p(R) = 0 \tag{2.56}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial p(R)}{\partial n} + jkp(R) \right) = 0 \tag{2.57}$$

これより、 $R \rightarrow \infty$ の条件下では Eq.(2.55) の積分項の内部が 0 になることは明らかである。従って、以下の式が成り立つ。

$$\int_{\Gamma^\infty} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n} \right) dS_q = 0 \tag{2.58}$$

これは無限遠方における境界からの寄与は考慮する必要がないことを意味している。開空間は無限遠方に境界を有する空間と考えられるが、境界要素法で解析上この境界を設定する必要すらなく、厳密に散乱、放射問題を取り扱う事ができる。

積分方程式の離散化

Eq.(2.12) による各境界条件を適用すると、Eq.(2.53) は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{r}_p)p(\mathbf{r}_p) + \int_{\Gamma} p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} dS_q + jk \int_{\Gamma^Y} \beta_0(\mathbf{r}_q)p(\mathbf{r}_q)G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)dS_q \\ = j\omega\rho \int_{\Gamma^V} v^f(\mathbf{r}_q)G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)dS_q + p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Eq.(2.59) は境界上における音圧、粒子速度が既知であれば、音場内における任意の点での音圧が算出可能である事を意味している。Eq.(2.59) における境界積分を処理するにあたり、境界を N 個の要素に分割し、各要素の積分の総和として評価する。

$$\int_{\Gamma} dS = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} dS_n \quad (2.60)$$

また、音圧、粒子速度及びアドミタンスは各要素について重心 ($\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$) における値で、要素内にわたって一定値であるという仮定を導入する。従って、Eq.(2.59) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{r}_p)p(\mathbf{r}_p) + \sum_{n \in \Gamma} p(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} dS_q + \sum_{n \in \Gamma^Y} jk\beta_0(\mathbf{r}_n)p(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n^Y} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)dS_q \\ = \sum_{n \in \Gamma^V} j\omega\rho v^f(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n^V} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)dS_q + p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \end{aligned} \quad (2.61)$$

上式は、境界における音圧や粒子速度を未知係数とした線形和の形式となっている。これらを求めるため、観測点 \mathbf{r}_p を各境界上の未知数の定義点（要素の重心）に設置する。即ち、上式に $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_m (m = 1, \dots, N)$ を代入して N 個の線形方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(\mathbf{r}_1) + \sum_{n \in \Gamma} p(\mathbf{r}_n)H_{1n} + \sum_{n \in \Gamma^Y} jkp(\mathbf{r}_n)G_{1n}^Y &= \sum_{n \in \Gamma^v} j\omega\rho v^f(\mathbf{r}_n)G_{1n}^v + p_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_s) \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}p(\mathbf{r}_m) + \sum_{n \in \Gamma} p(\mathbf{r}_n)H_{mn} + \sum_{n \in \Gamma^Y} jkp(\mathbf{r}_n)G_{mn}^Y &= \sum_{n \in \Gamma^v} j\omega\rho v^f(\mathbf{r}_n)G_{mn}^v + p_D(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_s) \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}p(\mathbf{r}_N) + \sum_{n \in \Gamma} p(\mathbf{r}_n)H_{Nn} + \sum_{n \in \Gamma^Y} jkp(\mathbf{r}_n)G_{Nn}^Y &= \sum_{n \in \Gamma^v} j\omega\rho v^f(\mathbf{r}_n)G_{Nn}^v + p_D(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_s)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$e(\mathbf{r}_m)$ は \mathbf{r}_m が平らな境界面上であることから、 $1/2$ となっていることに注意されたい。
また、 $H_{mn}, G_{mn}^Y, G_{mn}^v$ は以下のように定義される。

$$H_{mn} = \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} dS_q \tag{2.63}$$

$$G_{mn}^Y = \begin{cases} \beta_0(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n^Y} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_q) dS_q & (n \in \Gamma^Y) \\ 0 & (n \notin \Gamma^Y) \end{cases} \tag{2.64}$$

$$G_{mn}^v = \begin{cases} \int_{\Gamma_n^v} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_q) dS_q & (n \in \Gamma^v) \\ 0 & (n \notin \Gamma^v) \end{cases} \tag{2.65}$$

最終的に、Eq.(2.62) はマトリックス形式で以下のように表す事ができる。

$$\left(\frac{1}{2}[\mathbf{I}] + [\mathbf{H}] + jk[\mathbf{G}^Y]\right) \cdot \{\mathbf{p}\} = j\omega\rho[\mathbf{G}^v]\{\mathbf{v}^f\} + \{\mathbf{p}_D\} \tag{2.66}$$

$[\mathbf{I}]$ は単位行列、 $[\mathbf{H}], [\mathbf{G}^Y], [\mathbf{G}^v]$ の m 行 n 列の成分はそれぞれ、Eq.(2.63), (2.64), (2.65) で表される。ただし、Eq.(2.63), (2.64), (2.65) は多くの場合解析的に算出することが難しいため、数値積分により算出する事となる。また、混乱を避けるため強調するが、添字 m は m 番目の境界上の未知数であることを表し、添字 n は n 番目の境界からの寄与であることを表している。

ここで、境界における振動速度が所与である場合、Eq.(2.66) は境界面上の音圧に関する連立一次方程式となる。これを解く事で得られる境界面上の音圧、所与の境界面の振動速度を Eq.(2.61) へ代入する事で、領域内の任意点における音圧が得られる。

また、多孔質材内部など、異種媒質の内部音場を考慮する際には、結合面上では音圧・粒子速度共に未知数と考え、媒質間の音圧・粒子速度の連続条件を適用する事で連成を行う。

半自由空間を含む音場の解析

半自由空間の解析は、散乱体及び音源の対称面に対する鏡像を考慮する事で行われる。このような音場の解析例としては防音塀や、建物群を対象とした屋外騒音伝搬の解析例がある。さらなる応用として、領域分割に基づき、無限大剛平面下に空間を有するような音場の解析を行う事ができる。このような解析例としては掘割道路からの騒音伝搬や、開放窓を経由する側路伝搬の解析などが行われている。ここでは後者のような音場について、無限大剛平面より上部の空間に関する定式化を行う。

半自由空間においては、Eq.(2.46) の基本解は下式で与えられる。

$$G^{\text{inf}}(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) + G(\mathbf{r}_{p'}, \mathbf{r}_q) \quad (2.67)$$

ここで、 G は自由空間における基本解 Eq.(2.47) であり、 p' は観測点 p の無限大剛平面に対する鏡像点である。上式を試験関数とすると、半自由空間における境界積分方程式が次式で得られる。

$$p(\mathbf{r}_p) + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G^{\text{inf}}(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G^{\text{inf}}(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS_q = 0 \quad (2.68)$$

対称面上で、 $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q, \mathbf{r}_{p'} - \mathbf{r}_q$ は法線方向に対して逆向きであり、 $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| = |\mathbf{r}_{p'} - \mathbf{r}_q|$ である。従って、 $q \in \Gamma$ では常に $\partial G^{\text{inf}} / \partial n_q = 0$ である。さらに、観測点が対称面上に存在する場合、観測点 p とその鏡像点 p' は一致し、 $G^{\text{inf}}(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = 2G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ となる。以上のことから、Eq.(2.68) は以下のように展開される。

$$p(\mathbf{r}_p) - 2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS_q = 0 \quad (2.69)$$

2.1.4 項における 4π 空間の定式化に見られた、境界上での観測点の特異性は、基本解の一階微分により生じたものである。従って、対称面上の境界においては特異点が生じず、音場の見込み角に関する項は生じない。

境界 Γ は無限大平面下の空間との連成面であることを考慮し、音源項を付加すると最終的に下式が得られる。

$$p(\mathbf{r}_p) - 2j\omega\rho \int_{\Gamma} v^f(\mathbf{r}_q) G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dS_q = p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \quad (2.70)$$

2.1.4 項と同様に、境界を N 個の要素に分割し、各要素の積分の総和として境界積分を評価する。またその時、重心で音圧・粒子速度が一定であると仮定する。

$$p(\mathbf{r}_p) - 2j\omega\rho \sum_{n \in \Gamma} v^f(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dS_q = p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \quad (2.71)$$

さらに、観測点を各境界の重心に設置し ($\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_m (m = 1, \dots, N)$)、 N 個の線形方程式

を得る。

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}_1) - 2j\omega\rho \sum_{n \in \Gamma} v^f(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_q) dS_q &= p_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_s) \\
 &\vdots \\
 p(\mathbf{r}_m) - 2j\omega\rho \sum_{n \in \Gamma} v^f(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_q) dS_q &= p_D(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_s) \\
 &\vdots \\
 p(\mathbf{r}_N) - 2j\omega\rho \sum_{n \in \Gamma} v^f(\mathbf{r}_n) \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_q) dS_q &= p_D(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_s)
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

最終的に Eq.(2.72) をマトリックス形式で以下のように表すことができる。

$$[\mathbf{I}]\{\mathbf{p}\} - 2j\omega\rho[\mathbf{G}^{\text{IF}}]\{\mathbf{v}^f\} = \{\mathbf{p}_D\} \tag{2.73}$$

$[\mathbf{I}]$ は単位行列, $[\mathbf{G}^{\text{IF}}]$ の m 行 n 列は次式で得られる。

$$G_{mn}^{\text{IF}} = \int_{\Gamma_n^{\text{IF}}} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_q) dS_q \tag{2.74}$$

2.1.5 有限要素法と境界要素法の結合

前節までに有限要素法 (FEM) 及び境界要素法 (BEM) の定式化に関して述べたが、ここでは両手法の結合方法を具体的に述べる。前項では要素重心で音圧・粒子速度が一定という仮定（一定要素）に基づき境界要素法の定式化を行った。他の定式化として、ここでは詳細は省略するが、有限要素法と同様に要素節点に音圧・粒子速度の未知数を定義し、要素内は節点値から内挿する方法を考えることもできる。ただし、最終的に得られるマトリックス方程式は Eq.(2.66), (2.73) と同様の形式であり、異なるのは未知数の定義点が要素節点上であることだけである。この場合、有限要素法との境界面において、節点音圧、節点粒子速度について共通の未知数を用いるだけで連続条件を課す事が可能である。この時、BEM と FEM で音圧・粒子速度の内挿関数は、計算の都合上は、必ずしも同一のものを必要はない（要素内で適合していなくても良い）。ただし、厳密には要素内部で不連続を生じていることとなり、適合している場合よりも細かい要素分割が要求される。

一方、BEM において一定要素を用いる場合、未知数の定義点が FEM と BEM で異なるため、連成境界面上で面的な適合条件を考える事となる。本論文では、結合要素面における音圧・粒子速度に関し以下のような仮定を行う。

- FEM において要素内の音圧は節点値より内挿
- BEM において要素内の音圧は重心における値で要素にわたり一定
- FEM・BEM とともに要素内の粒子速度は重心における値で要素にわたり一定

以上の仮定を踏まえ、以下の関係式を要素毎に適用する。

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} p_{Be} dS = \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} p_{Fe} dS & (p \in \Gamma^{\text{IF}}) \\ v_{Be}^f = -v_{Fe}^f & (v^f \in \Gamma^{\text{IF}}) \end{cases} \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

Eq.(2.75) は面に加わる力の連続、Eq.(2.76) は面内での粒子速度の連続を意味する。

はじめに、ある結合要素 e に対し、Eq.(2.75) を考える。Eq.(2.75) 左辺は境界要素が一定要素を仮定している事から次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} p_{Be} dS &= \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} dS p_{Be} \\ &= \Delta_{\Gamma_e^{\text{IF}}} p_{Be} \end{aligned} \quad (2.77)$$

ただし、 $\Delta_{\Gamma_e^{\text{IF}}}$ は結合要素の面積である。一方、Eq.(2.75) 右辺は節点値による内挿を仮定している事から次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} p_{Fe} dS &= \int_{\Gamma_e^{\text{IF}}} \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_{Fe}\} \\ &= \{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\}^T \{\mathbf{p}_{Fe}\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

ここで、 $\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\}$ は Eq.(2.30) で定義される。以上の関係から、Eq.(2.75) はある要素について下式のように書ける。

$$\begin{aligned} p_{Be} &= \frac{1}{\Delta_{\Gamma_e^{\text{IF}}}} \{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\}^T \{\mathbf{p}_{Fe}\} \\ &= \{\mathbf{F}_e^{\mathbf{a}}\} \{\mathbf{p}_{Fe}\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

ただし、 $\{\mathbf{F}_e^{\mathbf{a}}\}$ を以下のように定義する。

$$\{\mathbf{F}_e^{\mathbf{a}}\} = \frac{1}{\Delta_{\Gamma_e^{\text{IF}}}} \{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{a}}\}^T \quad (2.80)$$

同様に Γ^{IF} 上の全 N 個の要素について Eq.(2.75) を考えると、 N 本の音圧の適合に関する式が得られる。

$$\begin{aligned} p_{B1} &= \{\mathbf{F}_1^{\mathbf{a}}\} \{\mathbf{p}_{F1}\} \\ &\vdots \\ p_{Bm} &= \{\mathbf{F}_m^{\mathbf{a}}\} \{\mathbf{p}_{Fm}\} \\ &\vdots \\ p_{BN} &= \{\mathbf{F}_N^{\mathbf{a}}\} \{\mathbf{p}_{FN}\} \end{aligned} \quad (2.81)$$

境界要素領域の全境界面音圧ベクトル $\{\mathbf{p}_B\}$ 、有限要素領域の全節点音圧ベクトル $\{\mathbf{p}_F\}$

を用いると上式は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\{0, \dots, 1\}}_{p_B \notin \Gamma_1^{\text{IF}}} \underbrace{\{0, \dots, 0, \dots\}}_{p_B \in \Gamma_1^{\text{IF}}} \{ \mathbf{p}_B \} = \{ \mathbf{F}_1^{\text{a}} \} \{ \mathbf{p}_F \} \\
 & \vdots \\
 & \underbrace{\{0, \dots, 0, \dots\}}_{p_B \notin \Gamma_m^{\text{IF}}} \underbrace{\{1, \dots, 0, \dots\}}_{p_B \in \Gamma_m^{\text{IF}}} \{ \mathbf{p}_B \} = \{ \mathbf{F}_m^{\text{a}} \} \{ \mathbf{p}_F \} \\
 & \vdots \\
 & \underbrace{\{0, \dots, 0, \dots, 0, \dots\}}_{p_B \notin \Gamma_N^{\text{IF}}} \underbrace{\{1, \dots\}}_{p_B \in \Gamma_N^{\text{IF}}} \{ \mathbf{p}_B \} = \{ \mathbf{F}_N^{\text{a}} \} \{ \mathbf{p}_F \}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

$\{ \mathbf{F}_e^{\text{a}} \}$ は 2.1.3 項に示したように、 $\{ \mathbf{F}_e^{\text{a}} \} \{ \mathbf{p}_F \} = \{ \mathbf{F}_e^{\text{a}} \} \{ \mathbf{p}_{F_e} \}$ となるように、0 を埋めたベクトルである。これらの関係をマトリックス形式で以下のように書くことができる。

$$[\mathbf{T}] \{ \mathbf{p}_B \} = [\mathbf{F}^{\text{a}}] \{ \mathbf{p}_F \} \tag{2.83}$$

$[\mathbf{T}]$ は要素選定マトリックスであり、各行の成分は Eq.(2.82) 左辺のベクトルに示すように、対象とする音圧に対応する列で 1、それ以外で 0 をとる。

以上の関係から、境界要素領域、有限要素領域の音響-音響連成系の全体マトリックスを具体的に示す。有限要素領域では Eq.(2.43) から次式が成り立つ。

$$[\mathbf{A}^{\text{F}}] \{ \mathbf{p}_F \} - j\omega\rho[\mathbf{Q}_C^{\text{a}}] \{ \mathbf{v}_{\text{FC}}^{\text{f}} \} = j\omega\rho[\mathbf{Q}_F^{\text{a}}] \{ \mathbf{v}_F^{\text{f}} \} \tag{2.84}$$

ただし、 $[\mathbf{A}^{\text{F}}] = [\mathbf{K}^{\text{a}}] - k^2[\mathbf{M}^{\text{a}}] + jk[\mathbf{C}^{\text{a}}]$, $\{ \mathbf{p}_F \}$ は全節点音圧ベクトル, $\{ \mathbf{v}_{\text{FC}}^{\text{f}} \}$ は連成境界面上の粒子速度ベクトル, $\{ \mathbf{v}_F^{\text{f}} \}$ は有限要素領域の境界面での粒子速度ベクトルである。

一般的な境界要素領域との結合

一般的な境界要素領域では Eq.(2.66) から次式が成り立つ。

$$[\mathbf{A}^{\text{B}}] \{ \mathbf{p}_B \} - j\omega\rho[\mathbf{G}_C^{\text{v}}] \{ \mathbf{v}_{\text{BC}}^{\text{f}} \} = j\omega\rho[\mathbf{G}_B^{\text{v}}] \{ \mathbf{v}_B^{\text{f}} \} + \{ \mathbf{p}_D \} \tag{2.85}$$

ただし、 $[\mathbf{A}^{\text{B}}] = \frac{1}{2}[\mathbf{I}] + [\mathbf{H}] + jk[\mathbf{G}^{\text{Y}}]$, $\{ \mathbf{p}_B \}$ は全境界面音圧ベクトル, $\{ \mathbf{v}_{\text{BC}}^{\text{f}} \}$ は連成境界面上の粒子速度ベクトル, $\{ \mathbf{v}_B^{\text{f}} \}$ は境界要素領域の境界面での粒子速度ベクトル, $\{ \mathbf{p}_D \}$ は外力ベクトルである。

Eq.(2.84), (2.85), (2.83), (2.76) より、境界要素領域、有限要素領域の音響-音響連成系の全体マトリックスは以下のように得られる。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{\text{F}}] & [\mathbf{0}] & -j\omega\rho[\mathbf{Q}_C^{\text{a}}] \\ [\mathbf{F}^{\text{a}}] & -[\mathbf{T}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{A}^{\text{B}}] & j\omega\rho[\mathbf{G}_C^{\text{v}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \mathbf{p}_F \} \\ \{ \mathbf{p}_B \} \\ \{ \mathbf{v}_{\text{FC}}^{\text{f}} \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j\omega\rho[\mathbf{Q}_F^{\text{a}}] \{ \mathbf{v}_F^{\text{f}} \} \\ \{ \mathbf{0} \} \\ j\omega\rho[\mathbf{G}_B^{\text{v}}] \{ \mathbf{v}_B^{\text{f}} \} + \{ \mathbf{p}_D \} \end{Bmatrix} \tag{2.86}$$

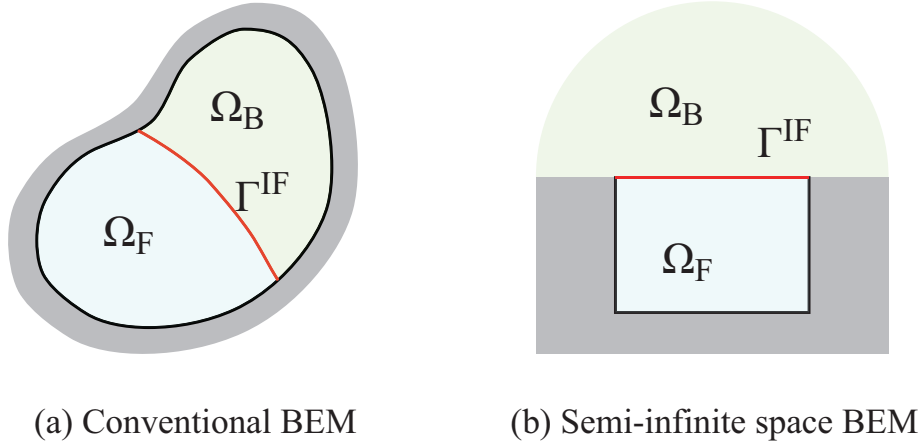


Fig. 2.5: Coupling models of BEM and FEM.

半自由空間を記述する境界要素領域との結合

半自由空間中の境界要素領域では Eq.(2.73) から次式が成り立つ。

$$[\mathbf{I}]\{\mathbf{p}_B\} - 2j\omega\rho[\mathbf{G}_C^v]\{\mathbf{v}_{BC}^f\} = \{\mathbf{p}_D\} \quad (2.87)$$

ただし, $\{\mathbf{p}_B\}$ は全境界面音圧ベクトル, $\{\mathbf{v}_{BC}^f\}$ は連成境界面上の粒子速度ベクトル, $\{\mathbf{p}_D\}$ は外力ベクトルである。

またこのような半自由空間に対しては, Eq.(2.83) における要素選定マトリックスは単位行列として表す事ができ, Eq.(2.83) は以下のように簡略化される。

$$[\mathbf{I}]\{\mathbf{p}_B\} = [\mathbf{F}^a]\{\mathbf{p}_F\} \quad (2.88)$$

Eq.(2.84), (2.87), (2.88), (2.76) より, 境界要素領域, 有限要素領域の音響-音響連成系の全体マトリックスは以下のように得られる。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^F] & -j\omega\rho[\mathbf{Q}_C^a] \\ [\mathbf{F}^a] & 2j\omega\rho[\mathbf{G}_C^v] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}_F\} \\ \{\mathbf{v}_{FC}^f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j\omega\rho[\mathbf{Q}_F^a]\{\mathbf{v}_F^f\} \\ \{\mathbf{p}_D\} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

2.2 弾性体振動場の数値解析理論

2.2.1 弾性体振動場の基礎方程式

均質かつ等方的な弾性体中を振動が伝搬する時、弾性体中の微小部分で、各方向について内力と慣性力の釣り合いが以下のように書く事が出来る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} - \rho_s \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.90}$$

ここで、 $\sigma_{..}$ は微小部分に働く応力を表す。下付き添字について、一つ目は応力の働く面、二つ目は応力の働く方向を表している。また、 ρ_s は物質の密度である。これらの応力成分を 2 階のテンソル $\underline{\underline{\sigma}}^s$ として表記し、上の 3 式をまとめると下式のように書く事が出来る。

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^s - \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0\tag{2.91}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^s &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\}^T\end{aligned}\tag{2.92}$$

また、歪み-応力関係式はそれぞれ次式のように書ける。

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \lambda \text{div} \mathbf{u} \mathbf{1} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}^s\tag{2.93}$$

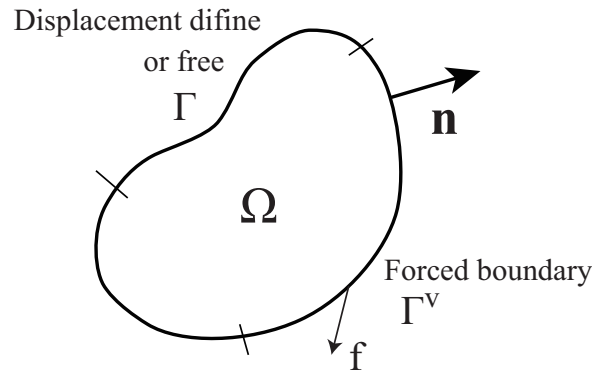


Fig. 2.6: Analytical model for elastic body field.

ここで, λ, μ はそれぞれ lame の第一, 第二係数であり, ヤング率 E 及びポアソン比 ν を用いて以下のように書ける。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.94)$$

$\underline{\underline{1}}$ は単位テンソル, $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ は歪みテンソルであり各成分は次式で定義される。

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.95)$$

ここで, 調和振動を仮定すると, 定常状態における弾性体振動場の基礎方程式は以下のよう書ける。

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^s + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.96)$$

2.2.2 有限要素法による弾性体振動場の解析

偏微分方程式の弱形式化

Eq.(2.96) の両辺に仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を掛け, 定義領域 Ω 中で積分することで次式が得られる。

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^s + \rho_s \omega^2 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV = 0 \quad (2.97)$$

上式, 第一項は以下のように変形することができる。($i, j = x, y, z$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^s dV &= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial i} dV \\ &= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial i} (\delta u_j \cdot \sigma_{ij}^s) - \frac{\partial \delta u_j}{\partial i} \sigma_{ij}^s \right\} dV \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial i} (\delta u_j \cdot \sigma_{ij}^s) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_j}{\partial i} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial j} \right) \sigma_{ij}^s \right\} dV \quad (2.99)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^s) - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s : \underline{\underline{\sigma}}^s \right) dV \quad (2.100)$$

$$= \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s : \underline{\underline{\sigma}}^s dV \quad (2.101)$$

Eq. (2.98) から Eq. (2.99) の変形では応力テンソルの対称性を利用している。さらに, Eq. (2.100) から Eq. (2.101) の変形では Eq. (2.100) の第一項に発散定理を適用している。また, Eq. (2.101) における $:$ は行列の内積を表す演算子である。

以上の関係から, Eq.(2.97) は弱形式として下式で表される。

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s : \underline{\underline{\sigma}}^s dV - \rho_s \omega^2 \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.102)$$

積分方程式の離散化

ここでは、Eq.(2.102) にガラーキン法を適用し、数値的に解く事ができる形式に変形する事を考える。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(2.102) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、ある要素内の任意点で変位 $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ を要素節点における値 $\mathbf{u}^i = \{u_x^i, u_y^i, u_z^i\}^T$ と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$\mathbf{u} = \sum_i N_i \mathbf{u}^i \quad (2.103)$$

ここで $[\mathbf{N}]$ なるマトリックス、 $\{\mathbf{u}_e\}$ なるベクトルをそれぞれ次式のように定義する。

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

$$\{\mathbf{u}_e\} = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, \dots, u_x^I, u_y^I, u_z^I\}^T \quad (2.105)$$

これらを用いると、Eq.(2.103) は次式のようにマトリックス・ベクトル積として表すことができる。

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}_e\} \quad (2.106)$$

さらに、ガラーキン法では仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ を試験関数と同一にとる。

$$\delta\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (2.107)$$

以上の関係を用い、Eq.(2.102) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに、ある要素 e について Eq.(2.102) の第一項を考える。ここでは均質、等方性の媒質を考えているため、応力テンソル、歪みテンソルは対称テンソルである。従って、9つの成分のうち独立な成分は6つであり、Eq.(2.102) 第一項におけるマトリックスの内積は次式のように書く事ができる。

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\underline{\underline{\sigma}}} &= \delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + \delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + \delta\varepsilon_{yz}\sigma_{yz} + \delta\varepsilon_{zx}\sigma_{zx} \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yx}\sigma_{yx} + \delta\varepsilon_{zy}\sigma_{zy} + \delta\varepsilon_{xz}\sigma_{xz} \\ &= \delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{yz}\sigma_{yz} + 2\delta\varepsilon_{zx}\sigma_{zx} \\ &= \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \end{aligned} \quad (2.108)$$

ここで、応力テンソル、歪みテンソルに対し、以下のようなベクトル表記を導入した。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}\}^T \quad (2.109)$$

$$\{\delta\epsilon\} = \{\delta\epsilon_{xx} \quad \delta\epsilon_{yy} \quad \delta\epsilon_{zz} \quad 2\delta\epsilon_{xy} \quad 2\delta\epsilon_{yz} \quad 2\delta\epsilon_{zx}\}^T \quad (2.110)$$

Eq.(2.110) は Eq.(2.95) より以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \delta\epsilon_{xx} \\ \delta\epsilon_{yy} \\ \delta\epsilon_{zz} \\ 2\delta\epsilon_{xy} \\ 2\delta\epsilon_{yz} \\ 2\delta\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\delta u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial\delta u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial\delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial\delta u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial\delta u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\delta u_z}{\partial x} + \frac{\partial\delta u_x}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

さらにある要素 e の内部で変位を Eq.(2.106) により近似することから、

$$\begin{Bmatrix} \delta\epsilon_{xx} \\ \delta\epsilon_{yy} \\ \delta\epsilon_{zz} \\ 2\delta\epsilon_{xy} \\ 2\delta\epsilon_{yz} \\ 2\delta\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (2.112)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (2.113)$$

$$= [\mathbf{B}]\{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (2.114)$$

と書く事が出来る。ここで、 $[\mathbf{B}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

次に、Eq.(2.93) の関係をベクトル表記で表すと下式のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.116)$$

同様にある要素 e については以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}_e\} \quad (2.117)$$

ここで, $[\mathbf{D}]$ は弾性マトリックスであり, 以下のように定義した。

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

以上の関係から, Eq.(2.102) の第一項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^s dV &= \int_{\Omega} \{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}\}^T \cdot \{\underline{\underline{\sigma}}\} dV \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{u}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{K}_e^s] \{\mathbf{u}_e\} \end{aligned} \quad (2.119)$$

となる。ここで, $[\mathbf{K}_e^s]$ は要素剛性マトリックスであり, 以下のように定義した。

$$[\mathbf{K}_e^s] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (2.120)$$

続いて, Eq.(2.102) の第二項は, 同様に要素内で変位を Eq.(2.106) で近似していることから,

$$\begin{aligned} \rho_s \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV &= \rho_s \int_{\Omega_e} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}_e\} dV \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{M}_e^s] \{\mathbf{u}_e\} \end{aligned} \quad (2.121)$$

と書く事ができる。ここで要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^s]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^s] = \rho_s \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (2.122)$$

最後に, Eq.(2.102) の第三項は境界における減衰や加振, 異種媒質との連続条件を表す項である。ここではある力 $\mathbf{f}_e = \{f_x, f_y, f_z\}$ により加振される境界を考える。即ち, 境界において $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_e$ が規定され, 要素にわたって一定値であるとする。この時, Eq.(2.102) の第三項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e^v} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{g}}^s \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_e^v} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}_e\} dS \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^s] \{\mathbf{f}_e\} \end{aligned} \quad (2.123)$$

と書くことが出来る。ここで、外力ベクトル $[\mathbf{Q}_e^s]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{Q}_e^s] = \int_{\Gamma_e^v} [\mathbf{N}]^T dS \quad (2.124)$$

各種媒質境界面における連続条件及び、その時の Eq.(2.102) 第三項は 2.4 節においてまとめて示すこととする。

全体マトリックスの構築

音響系と同様に、要素マトリックスを重ね合わせ、全体剛性、慣性マトリックスを以下のように与える。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^s] &= \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{K}_e^{/s}] \\ [\mathbf{M}^s] &= \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{M}_e^{/s}] \end{aligned}$$

また、外力条件も同様に以下のようなマトリックス・ベクトル積の形式で与える。

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma^v} \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}_e\} dS &= \begin{bmatrix} [\mathbf{Q}_1^s] & [\mathbf{Q}_2^s] & \dots & [\mathbf{Q}_e^s] & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_1^s\} \\ \{\mathbf{f}_2^s\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{f}_e^s\} \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ &= [\mathbf{Q}^s] \{\mathbf{f}^s\} \end{aligned} \quad (2.125)$$

ここで、 $\{\mathbf{f}^s\}$ は振動境界の要素数 $\times 3$ 自由度分の長さを持つ全境界面外力ベクトルである。 $[\mathbf{Q}^s]$ は境界上の外力に関する全体適合マトリックスである。

全節点仮想変位ベクトル $\{\delta \mathbf{u}\}$ 、全節点変位ベクトル $\{\mathbf{u}\}$ を用いると、Eq.(2.102) はマトリックス形式で以下のように書く事が出来る。

$$\{\delta \mathbf{u}\}^T (([\mathbf{K}^s] - \omega^2 [\mathbf{M}^s]) \{\mathbf{u}\} - [\mathbf{Q}^s] \{\mathbf{f}^s\}) = \{0\} \quad (2.126)$$

仮想変位によらず上式が成立する為には

$$([\mathbf{K}^s] - \omega^2 [\mathbf{M}^s]) \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{Q}^s] \{\mathbf{f}^s\} \quad (2.127)$$

が要求される。

2.3 板振動場の数値解析理論

2.3.1 板振動場の基礎方程式

板振動場としてここでは Kirchhoff の薄板理論について定式化を行う。平板が $z = 0$ の xy 平面上にあるものとする。Mindlin の厚板や Kirchhoff の薄板における仮定を 4 つ以下に示す。

1. 板厚は波長に比べて十分小さい。
2. z 方向の変位は z に依存しない。
3. 中立面の変位は z 方向にのみ生じる。
4. z 方向に対する垂直応力は生じない。

さらに Kirchhoff の薄板理論では次のような仮定を行う。

5. 中立面に対する垂線は、変形後も中立面に垂直である。

仮定 1, 2, 3 は、弾性体振動場の条件として次式で書ける。

$$u_\alpha(x, y, z) = \Psi_\alpha(x, y)z \quad (\alpha = x, y) \quad (2.128)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.129)$$

ここで、 Ψ_α は αz 平面における平板の回転角、 w は平板の面外方向変位である (Fig.2.7)。さらに、仮定 5 より面外方向変位と回転角の間には次式の関係が成立する。

$$\Psi_\alpha(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (\alpha = x, y) \quad (2.130)$$

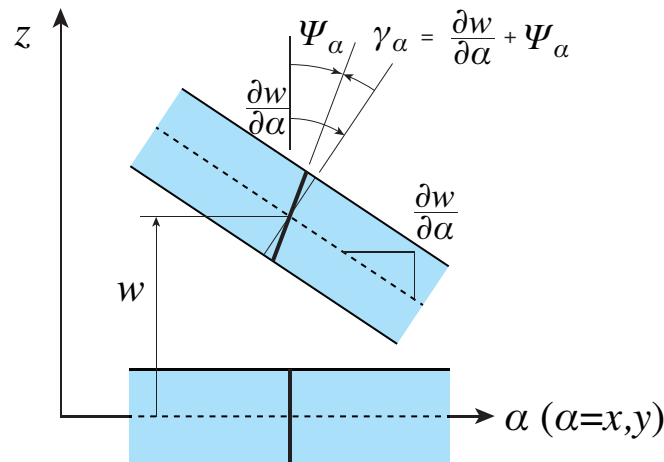


Fig. 2.7: Plate kinematics and definition of rotations.

よって、Fig.2.7 よりせん断ひずみ成分 γ_α は 0 となり、歪みテンソルの各成分 ε_{ij}^p は Eq. (2.95) に Eq. (2.128), Eq. (2.129) を用いて次式のように書くことができる。

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^p = -z \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \varepsilon_{\alpha z}^p = \varepsilon_{z\alpha}^p = 0, \quad \varepsilon_{zz}^p = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\alpha, \beta = x, y) \quad (2.131)$$

ここで、仮定 2 から導き出された上式の ε_{zz}^p は仮定 4 と明らかに矛盾することから、仮定 4 をもとに ε_{zz}^p を差し替える。Eq. (2.93) の σ_{zz}^s に 0 を代入し、 ε_{zz}^s について解くことで次式が導出される。

$$\varepsilon_{zz}^p = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p) \quad (2.132)$$

これをさらに Eq. (2.93) に代入することで、 $(i, j = x, y, z)$ としたとき応力テンソルの各成分 σ_{ij}^p は次式で表される。

$$\sigma_{ij}^p = 2\mu \varepsilon_{ij}^p + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p) \delta_{ij} \quad (i, j) \neq (z, z) \quad (2.133)$$

これが Kirchhoff の平板理論における歪み-応力関係式である。

次に、支配方程式の導出をモーメントを用いて行う。Fig2.8 のような向きのモーメントテンソルの各成分 $M_{\alpha\beta}$ は応力 $\sigma_{\alpha\beta}^p$ を板厚方向に積分し、次式で与えられる $(\alpha, \beta = x, y)$ 。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^p z dz \quad (2.134)$$

ここで、 h を平板の板厚とする。なお、Eq.(2.131), Eq.(2.133), Eq.(2.134) より、モーメントテンソルの各成分は変位 w を用いて次式で表される。

$$M_{\alpha\beta} = \mu \frac{h^3}{12} \left\{ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (2.135)$$

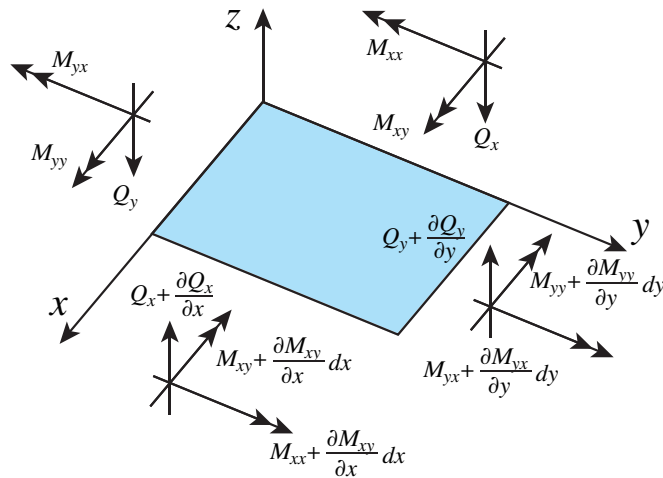


Fig. 2.8: Stresses on infinitesimal element.

一方、矩形要素の角運動量の効果が小さく無視できるとき、モーメントとせん断力に関し下式のようなつり合いの式が x , y , z の各方向に得られる。

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.136)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + h\rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z \quad (2.138)$$

ここで、 f_z は単位面積あたりに働く外力の z 方向成分、 ρ_p は平板材料の密度である。

よって、調和振動を仮定し Eq. (2.136), Eq. (2.137), Eq. (2.138) より Q_x , Q_y を消去すると、定常状態における板振動場の基礎方程式は以下の様に見える。

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - f_z - h\rho_p \omega^2 w = 0 \quad (2.139)$$

2.3.2 有限要素法による板振動場の解析

偏微分方程式の弱形式化

Eq.(2.139) の両辺に仮想変位 δw を掛け、定義領域 Γ 中で積分することで次式が得られる。 $(\alpha, \beta = x, y)$

$$\int_{\Gamma} \left\{ \delta w \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \delta w f_z - \delta w h\rho_p \omega^2 w \right\} dS \quad (2.140)$$

上式、第一項は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta w \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) dS \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\delta w \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right\} dS \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\delta w \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} M_{\alpha\beta} \right) + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right\} dS \quad (2.142)$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha\beta} \right) dL + \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right) dS \quad (2.143)$$

Eq. (2.142) から Eq. (2.143) の変形では Eq. (2.142) の第一項、第二項に発散定理を適用している。

以上の関係から、Eq.(2.140) は弱形式として下式で表される。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha \beta} \right) dS - h \rho_D \omega^2 \int_{\Gamma} \delta w w dS - \int_{\Gamma} \delta w f_z dS \\
& + \int_{\partial \Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha \beta} \right) dL
\end{aligned} \tag{2.144}$$

積分方程式の離散化

ここでは、Eq.(2.144) にガラーキン法を適用し、数値的に解くことができる形式に変形することを考える。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(2.144) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、要素節点 i における変位ベクトルを次式のように板の面外変位とたわみ角で定義する。なおここでは右手系座標系を用い、各軸の右ねじ方向を回転角の正方向とし定式化を行う。

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x (= \partial w / \partial y) \\ \theta_y (= -\partial w / \partial x) \end{Bmatrix} \tag{2.145}$$

ある要素内の任意点での変位 w を要素節点における変位ベクトル $\mathbf{w}^i = \{w^i, \theta_x^i, \theta_y^i\}^T$ と内挿関数近似 $N_w^i, N_{\theta_x}^i, N_{\theta_y}^i$ を用いて次式で近似する。

$$w = \sum_i (N_w^i w^i + N_{\theta_x}^i \theta_x^i + N_{\theta_y}^i \theta_y^i) \tag{2.146}$$

ここで $\{\mathbf{N}^P\}$ なるベクトル、 $\{\mathbf{w}_e\}$ なるベクトルをそれぞれ次式のように定義する。

$$\{\mathbf{N}^P\} = \{N_w^1 \quad N_{\theta_x}^1 \quad N_{\theta_y}^1 \quad \dots \quad N_w^I \quad N_{\theta_x}^I \quad N_{\theta_y}^I\} \tag{2.147}$$

$$\{\mathbf{w}_e\} = \{w^1, \theta_x^1, \theta_y^1, \dots, w^I, \theta_x^I, \theta_y^I\}^T \tag{2.148}$$

これらを用いると、Eq.(2.146) は次式のようにベクトル積として表すことができる。

$$w = \{\mathbf{N}^P\} \{\mathbf{w}_e\} \tag{2.149}$$

さらに、ガラーキン法では仮想変位 δw を試験関数と同一にとる。

$$\delta w = \{\mathbf{N}^P\} \{\delta \mathbf{w}_e\} \tag{2.150}$$

以上の関係を用い、Eq.(2.144) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに、ある要素 e について Eq.(2.144) の第一項を考える。ここでは均質、等方性の平板を考えているため、モーメントテンソルの4つの成分のうち独立な成分は3つであ

り, Eq.(2.144) 第一項の積は次式のように書く事ができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha \beta} &= \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} M_{xx} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x y} M_{xy} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y x} M_{yx} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_{yy} \\ &= M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_{xy} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y x} 2M_{yx} \\ &= \{\delta R\}^T \cdot \{M\} \end{aligned} \quad (2.151)$$

ここで, 以下のようなベクトル表記を導入した。

$$\{\delta R\} = \left\{ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x y} \right\}^T \quad (2.152)$$

$$\{M\} = \{M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy}\}^T \quad (2.153)$$

さらにある要素 e の内部で変位を Eq.(2.149) により近似することから,

$$\{\delta R\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} [N_w^1 \quad N_{\theta_x}^1 \quad N_{\theta_y}^1 \quad \dots \quad N_w^I \quad N_{\theta_x}^I \quad N_{\theta_y}^I] \{\delta \mathbf{w}_e\} \quad (2.154)$$

$$= [\mathbf{B}] \{\delta \mathbf{w}_e\} \quad (2.155)$$

と書くことができる。ここで, $[\mathbf{B}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_w^1 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_x}^1 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_y}^1 & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_w^I & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_x}^I & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_y}^I \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_w^1 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_x}^1 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_y}^1 & \dots & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_w^I & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_x}^I & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_y}^I \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_w^1 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_x}^1 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_y}^1 & \dots & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_w^I & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_x}^I & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_y}^I \end{array} \right] \quad (2.156)$$

次に, Eq.(2.135) の関係を Eq.(2.95) を用いてベクトル表記で表すと下式のように書ける。

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E_p(1+j\eta_p)h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_p)/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (2.157)$$

同様にある要素 e については以下のように書ける。

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{w}_e\} \quad (2.158)$$

ここで, $[\mathbf{D}]$ は弾性マトリックスであり, 以下のように定義した。

$$[\mathbf{D}] = \frac{E_p(1+j\eta_p)h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_p)/2 \end{array} \right] \quad (2.159)$$

以上の関係から、Eq.(2.144) の第一項は

$$\int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \partial \beta} M_{\alpha\beta} \right) dS = \{\delta R\}^T \cdot \{M\} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS \{\mathbf{w}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{K}_e^{\mathbf{P}}] \{\mathbf{w}_e\} \end{aligned} \quad (2.161)$$

となる。ここで、 $[\mathbf{K}_e^{\mathbf{P}}]$ は要素剛性マトリックスであり、以下のように定義した。

$$[\mathbf{K}_e^{\mathbf{P}}] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS \quad (2.162)$$

続いて、Eq.(2.144) の第二項は、同様に要素内で変位を Eq.(2.149) で近似していることから、

$$\begin{aligned} h\rho_p \int_{\Gamma_e} \delta w \cdot w dS &= h\rho_p \int_{\Gamma_e} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} \{\mathbf{w}_e\} dS \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{M}_e^{\mathbf{P}}] \{\mathbf{w}_e\} \end{aligned} \quad (2.163)$$

と書く事ができる。ここで要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^{\mathbf{P}}]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^{\mathbf{P}}] = h\rho_p \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} dS \quad (2.164)$$

次に、Eq.(2.144) の第三項は平板に加わる面的な外力をあらわす項である。単位面積あたり f_z の力による板表面への加振を考える。この時、Eq.(2.144) の第三項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta w f_z dS &= \int_{\Gamma} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \{\mathbf{f}_e\} dS \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\mathbf{P}}] \{\mathbf{f}_e\} \end{aligned} \quad (2.165)$$

と書くことが出来る。ここで、外力ベクトル $\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{P}}\}$ は以下のように定義した。

$$\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{P}}\} = \int_{\Gamma} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T dS \quad (2.166)$$

最後に、Eq.(2.144) の第四項は境界における減衰や加振、異種媒質との連続条件を表す項である。 x, y 方向の微分を垂直な方向 n と境界に平行な方向 s に分解すると、以下のよ

うに変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha\beta} \right) dL \\ &= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n + \frac{\partial \delta w}{\partial s} M_s - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (\delta w M_s) \right\} dL \quad (2.168)$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) \right\} dL + \int_{\partial\partial\Gamma} \{ \delta w n_s M_s \} dP \quad (2.169)$$

ここで、 $M_n = M_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta} \mathbf{n}_{\alpha}$ 、 $M_s = M_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta} \mathbf{s}_{\alpha}$ である。また、Eq. (2.168) から Eq. (2.169) の変形では Eq. (2.168) の第三項に発散定理を適用している。この式により、境界積分項は境界上での変位 δw と境界線に対する法線方向の回転角のみに依存していることがわかる。なお、 $(\partial M_n / \partial n + 2 \partial M_s / \partial s)$ の項は Kirchhoff のせん断条件 [19] に帰着する有効せん断力をあらわしている。

ここで、境界における減衰条件として境界線上の変位と回転角に対し有効せん断力を $Z_Q w$ 、境界に垂直な方向の曲げモーメントを $Z_M (\partial w / \partial n)$ と与える。ここで Z_Q をは並進運動の機械インピーダンス、 Z_M はモーメントインピーダンスである。このとき、(2.144) の第四項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Gamma} \left(\delta w Z_Q w + \frac{\partial \delta w}{\partial n} Z_M \frac{\partial w}{\partial n} \right) dL \\ &= \int_{\partial\Gamma_e} \left(Z_Q \{ \delta \mathbf{u}_e \}^T \{ \mathbf{N}^p \}^T \{ \mathbf{N}^p \} \{ \mathbf{u}_e \} + Z_M \{ \delta \mathbf{u}_e \}^T \frac{\partial}{\partial n} \{ \mathbf{N}^p \}^T \frac{\partial}{\partial n} \{ \mathbf{N}^p \} \{ \mathbf{u}_e \} \right) dL \\ &= \{ \delta \mathbf{u}_e \}^T [\mathbf{Z}_e^p] \{ \mathbf{u}_e \} \end{aligned} \quad (2.170)$$

ここで、境界条件に関するマトリックス $[\mathbf{Z}_e^p]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{Z}_e^p] = \int_{\partial\Gamma} \left(Z_Q \{ \mathbf{N}^p \}^T \{ \mathbf{N}^p \} + Z_M \frac{\partial}{\partial n} \{ \mathbf{N}^p \}^T \frac{\partial}{\partial n} \{ \mathbf{N}^p \} \right) dL \quad (2.171)$$

全体マトリックスの構築

要素マトリックスを重ね合わせ、全体剛性、慣性マトリックスを以下のように与える。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^p] &= \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{K}_e^p] \\ [\mathbf{M}^p] &= \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{M}_e^p] \\ [\mathbf{Q}^p] &= [\mathbf{Q}_e^p] \{ \mathbf{f}_e^p \} \\ [\mathbf{Z}^p] &= \sum_{e \in \Omega} [\mathbf{Z}_e^p] \end{aligned}$$

全節点仮想変位ベクトル $\{\delta \mathbf{u}\}$, 全節点変位ベクトル $\{\mathbf{u}\}$ を用いると, Eq.(2.102) はマトリックス形式で以下のように書く事が出来る。

$$\{\delta \mathbf{w}\}^T ([\mathbf{K}^P] + [\mathbf{Z}^P] - \omega^2 [\mathbf{M}^P]) \{\mathbf{w}\} - [\mathbf{Q}^P] \{\mathbf{f}^P\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.172)$$

仮想変位によらず上式が成立する為には

$$([\mathbf{K}^S] + [\mathbf{Z}^P] - \omega^2 [\mathbf{M}^S]) \{\mathbf{w}\} = [\mathbf{Q}^S] \{\mathbf{f}^S\} \quad (2.173)$$

が要求される。

板曲げ要素

本研究では Adini-Clough-Melosh の非適合長方形要素を用いる [3, 16]。3つの自由度をもつ節点が長方形要素の場合4つのあるため、各要素における自由度は12である。ここで、長方形の各辺を x 軸もしくは y 軸に平行になるようにとり、要素内の面外変位を近似する12項の4次多項式として w を次式で与える、

$$w \equiv \{\mathbf{P}\}^T \{\alpha\} \quad (2.174)$$

ただし、

$$\{\mathbf{P}\}^T = \{ 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 \} \quad (2.175)$$

$$\{\alpha\}^T = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} \} \quad (2.176)$$

である。

したがって回転角 θ_x, θ_y は以下のように表される。

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + 2\alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy \quad (2.177)$$

$$+ 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \quad (2.178)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x - \alpha_5 y - 3\alpha_7 x^2 - 2\alpha_8 xy \quad (2.179)$$

$$- \alpha_9 y^2 - 3\alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} y^3 \quad (2.180)$$

α_1 から α_{12} までの定数を求めるため、節点 i の座標値 (x_i, y_i) を代入し連立方程式を立てる。これら12個すべての方程式は、まとめて以下のようなマトリクスとベクトルにより表現できる。

$$\{\mathbf{w}_e\} = [\mathbf{C}] \{\alpha\} \quad (2.181)$$

ただし、 $[\mathbf{C}]$ は節点座標の値により決まる 12×12 のマトリクスである。ここで Eq. (2.174) は次式のように表せる。

$$w \equiv \{\mathbf{P}\}^T \{\alpha\} = \{\mathbf{P}\}^T [\mathbf{C}]^{-1} \{\mathbf{w}_e\} = \{\mathbf{N}^P\} \{\mathbf{w}_e\} \quad (2.182)$$

$$\{\mathbf{N}^P\} = \{\mathbf{P}\}^T [\mathbf{C}]^{-1} \quad (2.183)$$

$\{\mathbf{N}^P\}$ は要素内 z 方向変位 w のための内挿関数マトリックスである。

2.4 音響振動連成系の取扱い

本節では，空気伝搬音による音響系と固体伝搬音による振動系の連成方法を具体的に述べる。

2.4.1 音場-弾性体振動場の結合

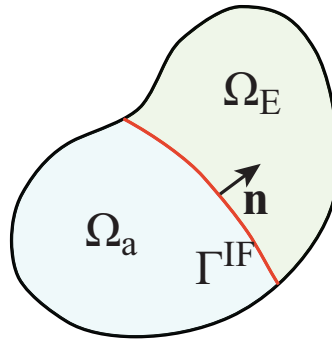


Fig. 2.9: The notation on the acoustic elastic coupling problem.

音場と弾性体振動場の境界面では以下のような音圧-応力及び法線方向音圧傾度-振動変位の連続条件が満たされなければならない。

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \omega^2 \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.184)$$

$$(2.185)$$

また，音場，弾性体振動場における弱形式の積分方程式 Eq.(2.15) 及び Eq.(2.102) を再掲する。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV - \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (2.15)$$

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^s : \underline{\sigma}^s dV - \rho_s \omega^2 \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.102)$$

ここで，Eq.(2.15),(2.102) 共に，境界積分項は発散定理を適用した事により生じた項であるため，法線方向は領域に対し外向きに定義している。ここでは法線方向を音場に対して外向きに統一し，境界積分項を評価することを考える。はじめに，Eq.(2.15) 第三項に

Eq.(2.185) を代入し、全要素について総和をとると以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS &= \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{N}] dS \{\mathbf{u}_e\} \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{as}}] \{\mathbf{u}_e\} \\
 &= \omega^2 \rho \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{Q}^{\text{as}}] \{\mathbf{u}\}
 \end{aligned} \tag{2.186}$$

である。ここで要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{as}}]$, 全体適合マトリックス $[\mathbf{Q}^{\text{as}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{as}}] = \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{N}] dS \tag{2.187}$$

$$[\mathbf{Q}^{\text{as}}] = \sum_{e \in \Gamma} [\mathbf{Q}_e^{\text{as}}] \tag{2.188}$$

次に、Eq.(2.184) を Eq.(2.102) 第三項に代入し全要素について総和をとると以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s dS &= - \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n}^s dS \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n}^a dS \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{n}^{aT} \cdot \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{sa}}] \{\mathbf{p}_e\} \\
 &= \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{Q}^{\text{sa}}] \{\mathbf{p}\}
 \end{aligned} \tag{2.189}$$

ここで、 $\mathbf{n}^s, \mathbf{n}^a$ はそれぞれ弾性体振動場、音場に対する外向き法線ベクトルであり、要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{sa}}]$, 全体適合マトリックス $[\mathbf{Q}^{\text{sa}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{sa}}] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{n}^{aT} \cdot \{\mathbf{N}\} dS \tag{2.190}$$

$$[\mathbf{Q}^{\text{sa}}] = \sum_{e \in \Gamma} [\mathbf{Q}_e^{\text{sa}}] \tag{2.191}$$

音場及び弾性体振動場のマトリックス方程式にそれぞれ上述の境界積分項を加え連立させる事で、以下のように、連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \omega^2} ([\mathbf{K}^a] - k^2 [\mathbf{M}^a] + jk [\mathbf{C}^a]) & -[\mathbf{Q}^{\text{as}}] \\ -[\mathbf{Q}^{\text{sa}}] & [\mathbf{K}^s] - \omega^2 [\mathbf{M}^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{u}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^a] \{\mathbf{v}^f\} \\ [\mathbf{Q}^s] \{\mathbf{f}^s\} \end{Bmatrix} \tag{2.192}$$

要素適合マトリックス Eq.(2.187) と Eq.(2.190) を比較すると, $[\mathbf{Q}_e^{\text{sa}}] = [\mathbf{Q}_e^{\text{as}}]^T$ であることがわかる。従って, 全体適合マトリックスについても $[\mathbf{Q}^{\text{sa}}] = [\mathbf{Q}^{\text{as}}]^T$ であり, Eq.(2.192) の係数行列も対称行列となっている。

2.4.2 音場-板振動場の結合

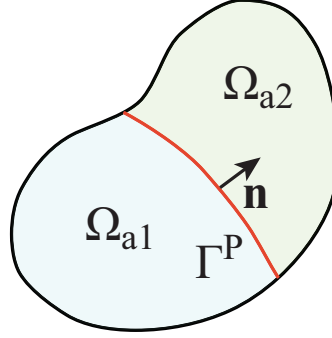


Fig. 2.10: The notation on the acoustic plate coupling problem.

音場と板振動場の境界面では以下のような音圧-外力及び法線方向音圧傾度-振動変位の連続条件が満たされなければならない。

$$\begin{cases} f_z = -p \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \omega^2 \rho w \end{cases} \quad (2.193)$$

$$(2.194)$$

また, 音場, 板振動場における弱形式の積分方程式 Eq.(2.15) 及び Eq.(2.144) を再掲する。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV - \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \partial \beta} M_{\alpha \beta} \right) dS - h \rho_p \omega^2 \int_{\Gamma} \delta w w dS - \int_{\Gamma} \delta w f_z dS \\ + \int_{\partial \Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha \beta} \right) dL \end{aligned} \quad (2.144)$$

ここでは法線方向を音場に対して外向きに統一し, 音場の境界積分項と振動場の外力項を評価することを考える。はじめに, Eq.(2.15) 第三項に Eq.(2.194) を代入し, 全要素に

ついて総和をとると以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS &= \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta p w dS \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{N}^p] dS \{\mathbf{w}_e\} \\
 &= \omega^2 \rho \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}] \{\mathbf{w}_e\} \\
 &= \omega^2 \rho \{\delta \mathbf{p}\}^T [\mathbf{Q}^{\text{ap}}] \{\mathbf{w}\}
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

である。ここで要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}]$, 全体適合マトリックス $[\mathbf{Q}^{\text{ap}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{as}}] = \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{N}^p] dS \tag{2.196}$$

$$[\mathbf{Q}^{\text{ap}}] = \sum_{e \in \Gamma} [\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}] \tag{2.197}$$

次に, Eq.(2.184) を Eq.(2.102) 第三項に代入し全要素について総和をとると以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \delta w f_z dS &= \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta w f_z dS \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \int_{\Gamma_e} \delta w p dS \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}^p\}^T \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\
 &= \sum_{e \in \Gamma} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{pa}}] \{\mathbf{p}_e\} \\
 &= \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{Q}^{\text{pa}}] \{\mathbf{p}\}
 \end{aligned} \tag{2.198}$$

要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{pa}}]$, 全体適合マトリックス $[\mathbf{Q}^{\text{pa}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{pa}}] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{N}\} dS \tag{2.199}$$

$$[\mathbf{Q}^{\text{pa}}] = \sum_{e \in \Gamma} [\mathbf{Q}_e^{\text{pa}}] \tag{2.200}$$

音場及び弾性体振動場のマトリックス方程式にそれぞれ上述の境界積分項を加え連立させる事で, 以下のように, 連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \omega^2} ([\mathbf{K}^a] - k^2 [\mathbf{M}^a] + jk [\mathbf{C}^a]) & -[\mathbf{Q}^{\text{ap}}] \\ -[\mathbf{Q}^{\text{pa}}] & [\mathbf{K}^p] - \omega^2 [\mathbf{M}^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^a] \{\mathbf{v}^f\} \\ [\mathbf{Q}^p] \{\mathbf{f}^p\} \end{Bmatrix} \tag{2.201}$$

要素適合マトリックス Eq.(2.196) と Eq.(2.199) を比較すると, $[\mathbf{Q}_e^{\text{pa}}] = [\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}]^T$ であることがわかる。従って, 全体適合マトリックスについても $[\mathbf{Q}^{\text{pa}}] = [\mathbf{Q}^{\text{ap}}]^T$ であり, Eq.(2.201) の係数行列も対称行列となっている。

さらに, 音場 1-板振動場-音場 2 の適合を行う場合には, 以下のように, 連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{\text{a1}}] & [\mathbf{Q}^{\text{a1p}}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{Q}^{\text{pa1}}] & [\mathbf{A}^{\text{p}}] & [\mathbf{Q}^{\text{pa2}}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}^{\text{a2p}}] & [\mathbf{A}^{\text{a2}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}^1\} \\ \{\mathbf{w}\} \\ \{\mathbf{p}^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{\text{a1}}] \{\mathbf{v}^{\text{f1}}\} \\ [\mathbf{Q}^{\text{p}}] \{\mathbf{f}^{\text{p}}\} \\ -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{\text{a2}}] \{\mathbf{v}^{\text{f2}}\} \end{Bmatrix} \quad (2.202)$$

ただし, $[\mathbf{A}^{\text{a}}] = \frac{1}{\rho\omega^2}([\mathbf{K}^{\text{a}}] - \omega^2[\mathbf{M}^{\text{a}}] + jk[\mathbf{C}^{\text{a}}])$, $[\mathbf{A}^{\text{p}}] = [\mathbf{K}^{\text{p}}] - \omega^2[\mathbf{M}^{\text{p}}]$ である。

2.4.3 弾性体振動場-弾性体振動場の結合

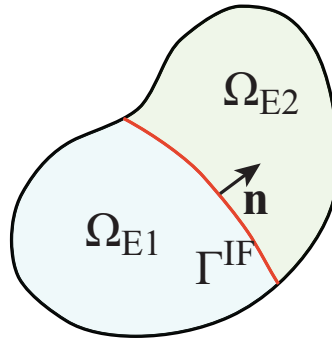


Fig. 2.11: The notation on the elastic elastic coupling problem.

弾性体振動場同士の境界面では以下のような応力及び振動変位の連続条件が満たされなければならない。

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{s1}} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{s2}} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^{\text{s1}} = \mathbf{u}^{\text{s2}} \end{cases} \quad (2.203)$$

$$\mathbf{u}^{\text{s1}} = \mathbf{u}^{\text{s2}} \quad (2.204)$$

また, 弾性体振動場における弱形式の積分方程式 Eq.(2.102) を再掲する。

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{s}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\text{s}} dV - \rho_s \omega^2 \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\text{s}} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.102)$$

ここでは法線方向を弾性体振動場 1 に対して外向きに統一し, 境界積分項を評価することを考える。弾性体振動場 1 及び 2 の境界積分項の値をそれぞれ I_1, I_2 とし, その和を考える。

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^{s1} \cdot \underline{\sigma}^{s1} \cdot \mathbf{n}^{s1} dS + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^{s2} \cdot \underline{\sigma}^{s2} \cdot \mathbf{n}^{s2} dS \\
&= \int_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}^{s1} \cdot \underline{\sigma}^{s1} \cdot \mathbf{n}^{s1} + \delta \mathbf{u}^{s2} \cdot \underline{\sigma}^{s2} \cdot \mathbf{n}^{s2}) dS \\
&= \int_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}^{s1} \cdot \underline{\sigma}^{s1} \cdot \mathbf{n}^{s1} - \delta \mathbf{u}^{s2} \cdot \underline{\sigma}^{s2} \cdot \mathbf{n}^{s1}) dS \tag{2.205}
\end{aligned}$$

上式に連続条件 Eq.(2.203) 及び Eq.(2.204) を代入すると $I_1 + I_2 = 0$ が得られる。これは弾性体同士の境界上で応力の連続は自然に達成される事を意味している。また、変位の連続条件 Eq.(2.204) はマトリックスの成分を重ね合わせ、共通の未知数を用いることで達成される。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{CC}^{s1}] & [\mathbf{A}_{CF}^{s1}] & [0] \\ [\mathbf{A}_{FC}^{s1}] & [\mathbf{A}_{FF}^{s1}] + [\mathbf{A}_{FF}^{s2}] & [\mathbf{A}_{FC}^{s2}] \\ [0] & [\mathbf{A}_{CF}^{s2}] & [\mathbf{A}_{CC}^{s2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}^{s1}\} \\ \{\mathbf{u}^{s12}\} \\ \{\mathbf{u}^{s2}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{Q}^{s1}] \{\mathbf{f}^{s1}\} \\ \{0\} \\ [\mathbf{Q}^{s2}] \{\mathbf{f}^{s2}\} \end{Bmatrix} \tag{2.206}$$

ただし、 $[\mathbf{A}^s] = [\mathbf{K}^s] - \omega^2 [\mathbf{M}^s]$ である。

2.4.4 弾性体振動場-板振動場の結合

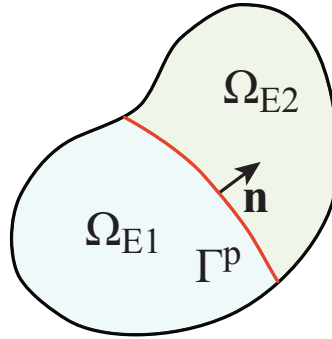


Fig. 2.12: The notation on the elastic plate coupling problem.

弾性体振動場と板振動場の境界面の適合条件として、弾性体に加わる垂直応力と平板の面外方向に加わる単位面積あたりの外力の連続条件が満たされなければならない。

$$\mathbf{n}^T \cdot (\underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) = -f_z \tag{2.207}$$

さらに、境界面での面外・面内変位の適合条件として以下のような振動変位の連続条件を与える。

$$\begin{cases} u_n^s = w \\ u_b^s = -\frac{1}{2} h \theta_x \\ u_t^s = \frac{1}{2} h \theta_y \end{cases} \tag{2.208}$$

また，境界面での面外変位の適合条件として以下のような振動変位の連続条件を与える。

$$u_n^s = w \quad (2.209)$$

弾性体場の連成と同様に，法線方向を弾性体振動場対して外向きに統一し，弾性体場の境界積分項と板振動場の面的な外力項を評価することを考える。平板の面外方向の応力に関する弾性体振動場の境界積分および板振動場の面的外力積分値をそれぞれ I_1, I_2 とし，その和を考える。

$$I_1 + I_2 = \int_{\Gamma} \delta u_n^s \mathbf{n}^{sT} \cdot (\underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) dS + \int_{\Gamma} \delta w f_z dS \quad (2.210)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma} (\delta u_n^s \mathbf{n}^{sT} \cdot (\underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) + \delta w f_z) dS \\ &= \int_{\Gamma} \{ \delta u_n^s \mathbf{n}^{sT} \cdot (\underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) - \delta u_n^s \mathbf{n}^{sT} \cdot (\underline{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) \} dS \end{aligned} \quad (2.211)$$

上式より $I_1 + I_2 = 0$ が得られる。これは弾性体の境界上で応力と平板の連続は面外変位の連続条件のもと自然に達成される事を意味している。変位の連続条件 Eq.(2.208)，Eq.(2.209) はマトリックスの成分を重ね合わせ，共通の未知数を用いることで達成される。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{CC}^s] & [\mathbf{A}_{CF}^s] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{A}_{FC}^s] & [\mathbf{A}_{FF}^s] + [\mathbf{A}_{FF}^p] & [\mathbf{A}_{FC}^p] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{A}_{CF}^p] & [\mathbf{A}_{CC}^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}^s\} \\ \{\mathbf{u}^{sp}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{Q}^s] \{\mathbf{f}^s\} \\ \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{Q}^p] \{\mathbf{f}^p\} \end{Bmatrix} \quad (2.212)$$

ただし， $[\mathbf{A}^s] = [\mathbf{K}^s] - \omega^2 [\mathbf{M}^s]$ ， $[\mathbf{A}^p] = [\mathbf{K}^p] - \omega^2 [\mathbf{M}^p]$ である。

2.5 要素積分の評価

ここでは前節までに述べてきた内挿関数 N_i について詳しく述べる。本論文では三次元空間に対する要素分割に六面体，境界の分割に四角形要素を用いることとする。

2.5.1 内挿関数とその微分形

四辺形要素

内挿関数

Fig.2.13 に示すように，3次元空間上の四辺形を局所空間に射影すること考える。この時，任意の四辺形面内の実空間座標 (x, y, z) は局所空間の座標 (ξ, η) を用いて次式のように表す事ができる。

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad z = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i \quad (2.213)$$

ただし， (x_i, y_i, z_i) は i 番目の節点の座標， $N_i(\xi, \eta)$ は i 番目の節点の内挿関数であり以下のように表される。

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.214)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (2.215)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (2.216)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.217)$$

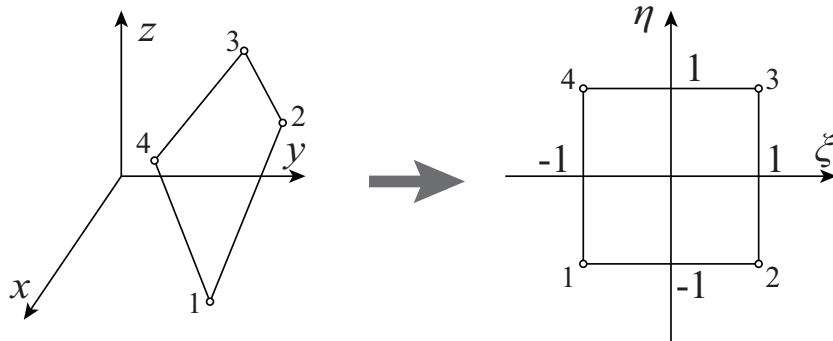


Fig. 2.13: Schematic of quadrangle interpolation function.

内挿関数の微分形

以上の内挿関数は局所座標を用いて表されている。前節までに示した要素剛性マトリックスの計算には、内挿関数の全体座標系での空間偏微分値 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を算出する必要がある。しかし、この値は陽な形で表示することは大変な労力であり、有限要素法のプログラムを構築する際に必ずしも効率的であるとは限らない。ここでは内挿関数の全体座標系での空間偏微分値と局所座標系での空間偏微分値を対応づける方法を説明する。

合成関数の偏微分に関するチェインルールより以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}$$

上式をマトリックス形式で表すと、以下のように書く事ができる。

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &= [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (2.218)$$

従って、内挿関数の全体座標系での空間偏微分は以下のように表す事ができる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}\quad (2.219)$$

ここで、 $[\mathbf{J}]$ は座標変換に関するヤコビ行列であり以下のように定義される。

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.220)$$

以上の関係から、内挿関数の局所座標系での偏微分値及び節点の座標より、内挿関数の全体座標系での偏微分値を算出する事が可能である。

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (2.221)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (2.222)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (2.223)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (2.224)$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (2.225)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (2.226)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (2.227)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (2.228)$$

六面体要素

内挿関数

Fig.2.14 に示すように、3次元空間上の六面体を局所空間に射影すること考える。この時、任意の六面体内部の実空間座標 (x, y, z) は局所空間の座標 (ξ, η, ζ) を用いて次式のよ

うに表す事ができる。

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (2.229)$$

ただし、 (x_i, y_i, z_i) は i 番目の節点の座標、 $N_i(\xi, \eta)$ は i 番目の節点の内挿関数であり

以下のように表される。

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad (2.230)$$

$$N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad (2.231)$$

$$N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (2.232)$$

$$N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (2.233)$$

$$N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad (2.234)$$

$$N_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad (2.235)$$

$$N_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (2.236)$$

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (2.237)$$

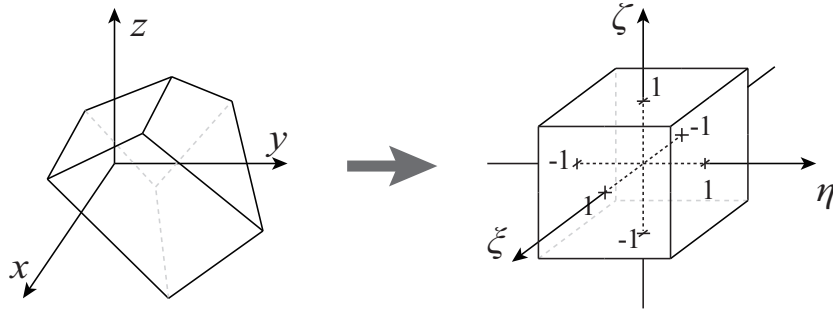


Fig. 2.14: Schematic of hexahedron interpolation function.

内挿関数の微分形

ここでは内挿関数の全体座標系での空間偏微分値と局所座標系での空間偏微分値を対応づける方法を説明する。合成関数の偏微分に関するチェインルールより以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

上式をマトリックス形式で表すと、以下のように書く事ができる。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \\
&= [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.238}$$

従って、内挿関数の全体座標系での空間偏微分は以下のように表す事ができる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{2.239}$$

ここで、 $[\mathbf{J}]$ は座標変換に関するヤコビ行列であり以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.240}$$

以上の関係から、内挿関数の局所座標系での偏微分値及び節点の座標より、内挿関数の全体座標系での偏微分値を算出する事が可能である。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta) \\
\frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta) \\
\frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) \\
\frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) \\
\frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}$$

2.5.2 Gauss-Legendre 積分による面積分・体積分の評価

Gauss-Legendre 積分について

Gauss-Legendre 積分は数値積分法の一つであり、積分値を総和の形式で得る手法である。Gauss-Legendre 積分では $\xi \in [-1, 1]$ に正規化された区間における積分に対し、積分区間内における評価点 ξ_i 及びその点における重み w_i が与えられ、任意の関数 $f(x)$ の積分を以下のような総和で表すことができる。

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_i f(\xi_i) w_i \quad (2.241)$$

また、任意の積分区間については座標変換を行い、積分区間を $x \in [-1, 1]$ に正規化することで表す事ができる。

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(x) dx &= \frac{a-b}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi)) d\xi \\
&= \frac{a-b}{2} \sum_i f(x(\xi_i)) w_i
\end{aligned} \quad (2.242)$$

さらに、多次元化することも可能であり、任意の四辺形領域に対する面積分、及び任意の六面体領域に対する体積分について以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
&= \sum_i \sum_j f(x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j)) |\mathbf{J}| w_i w_j
\end{aligned} \quad (2.243)$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), z(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)) |\mathbf{J}| w_i w_j w_k
\end{aligned} \tag{2.244}$$

ただし、 $|\mathbf{J}|$ は座標変換によるヤコビ行列の行列式の値である。

境界要素法における境界積分の評価

境界要素法においては以下の積分を評価する必要がある。

$$G = \int \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|)}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|} dS_q \tag{2.245}$$

$$H = \int -\frac{1 + jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|^2} \frac{(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{n}_q}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|} \exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|) dS_q \tag{2.246}$$

ここで、観測点 \mathbf{r}_p が積分領域内に含まれる時、即ち係数行列の対角成分に対する境界積分を評価する時、 $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| = 0$ となる特異点が被積分関数に生じる。そのため、境界要素法では一般に非対角成分の算出には通常の面積分に対する Gauss-Legendre 積分、対角成分には特異性を緩和した上で線積分に対する Gauss-Legendre 積分を適用することで境界積分を評価する。以下ではそれらの手順を具体的に示す。

非対角成分における境界積分の評価

Gauss-Legendre 積分を適用すると、 G, H は以下のように総和の形で表される。

$$G = \sum_i \sum_j \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|)}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|} |\mathbf{J}| w_i w_j \tag{2.247}$$

$$H = \sum_i \sum_j \left(-\frac{1 + jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|^2} \frac{(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}) \cdot \mathbf{n}_q^{ij}}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|} \exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q^{ij}|) \right) |\mathbf{J}| w_i w_j \tag{2.248}$$

ただし、境界上における (i, j) 番目の積分点 \mathbf{r}_q^{ij} の全体座標系における座標は、Eq.(2.213) 及び局所座標における積分点の座標 (ξ_i, η_j) より、以下のように与えられる。

$$\mathbf{r}_q^{ij} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi_i, \eta_j) x_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi_i, \eta_j) y_{\alpha}, \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi_i, \eta_j) z_{\alpha} \right\} \tag{2.249}$$

また平面上の要素を仮定すると、 \mathbf{n}_q^{ij} は要素内で一定方向である。

対角成分における境界積分の評価

観測点 \mathbf{r}_p が積分要素内部にあることから、 $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q$ は常に要素面内のベクトルである。従って、要素の法線方向ベクトルとの内積 $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{n}_q$ は積分区間内で常に直交する。そのため、対角成分については H の被積分関数が常に 0 であり、 $H = 0$ である。ただし、 $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| = 0$ なる特異点は存在し、その取り扱いについては 2.1.4 項、境界上の観測点周辺の特異性において述べた通りである。

次に G の特異性を緩和するために、Fig.2.16(a) に示すように、観測点を極とした極座標系を考える。

$$\begin{aligned}
 G &= \int \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|)}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|} dS_q \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \exp(-jkr) dr d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi jk} \int_0^{2\pi} (1 - \exp(-jkR(\theta))) d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi jk} \left(2\pi - \int_0^{2\pi} \exp(-jkR(\theta)) d\theta \right) \quad (2.250)
 \end{aligned}$$

Eq.(2.250) の積分項は、四辺形をさらに 4 つの三角形要素に分割し、各三角形要素につい

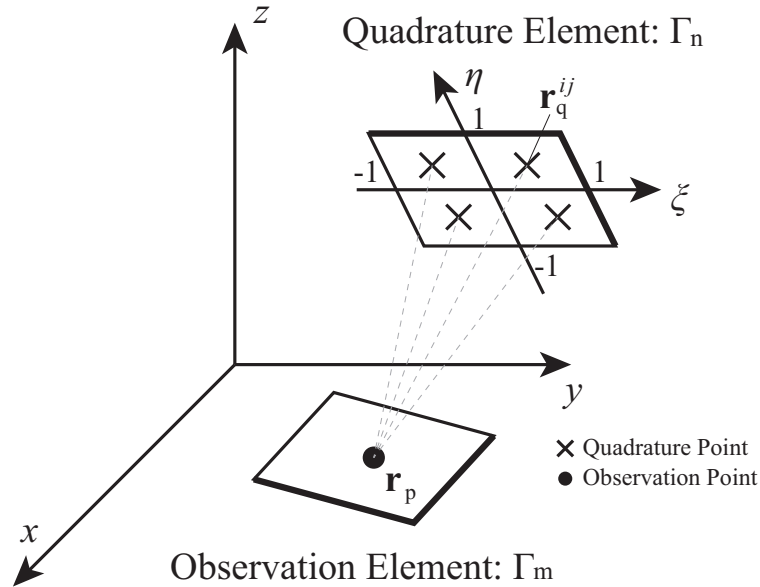


Fig. 2.15: Schematic of normal integral.

て始線を極から各節点に対する方向に設定し、それぞれの線積分を評価する (Fig.2.16(b))。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(-jkR(\theta))d\theta &= \int_0^{\theta_{12}} \exp(-jkR(\theta_1))d\theta_1 + \int_0^{\theta_{23}} \exp(-jkR(\theta_2))d\theta_2 \\ &\quad + \int_0^{\theta_{34}} \exp(-jkR(\theta_3))d\theta_3 + \int_0^{\theta_{41}} \exp(-jkR(\theta_4))d\theta_4 \end{aligned} \quad (2.251)$$

上式の右辺第一項に Gauss-Legendre 積分を適用すると以下のように書ける。

$$\int_0^{\theta_{12}} \exp(-jkR(\theta_1))d\theta_1 = \frac{\theta_{12}}{2} \sum_i \exp(-jkR(\theta_i))w_i \quad (2.252)$$

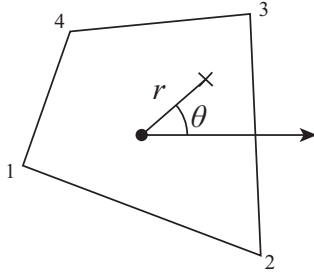
ただし、Fig.2.16(c) に示すような幾何学的関係から $R(\theta)$ は以下のように表す事ができる。

$$R(\theta) = \frac{L_1 L_2 \sin(\theta_{12})}{L_2 \sin \theta + L_1 \sin(\theta_{12} - \theta)} \quad (2.253)$$

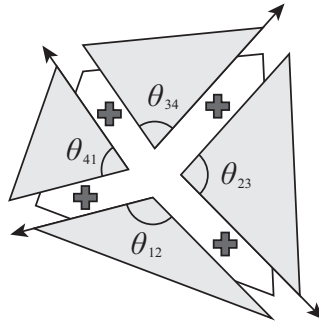
また、局所座標 ξ_i に対応する全体座標 θ_i は次式で書ける。

$$\theta_i = \frac{1 + \xi_i}{2} \theta_{12} \quad (2.254)$$

(a) Polar coordinate in a element



(b) Parting into four sub-triangles



(c) $R(\theta)$ for a triangle

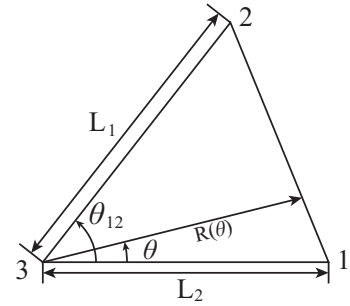


Fig. 2.16: Schematic of Singular integral.

有限要素法における要素積分の評価

Gauss-Legendre 積分では局所座標系での積分点を規定している。前節において、内挿関数及びその全体座標系における偏微分形は、局所座標における座標値及び全体座標系における節点の座標値から算出される事を示した。従って、有限要素法における数値積分は非常に単純なものとなる。

音場・弾性体振動場における要素積分の評価

音場における要素剛性マトリックス Eq.(2.24) に Gauss-Legendre 積分を適用すると以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e^a] &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k [\mathbf{B}_{ijk}^a]^T [\mathbf{B}_{ijk}^a] |\mathbf{J}| w_i w_j w_k \end{aligned} \quad (2.255)$$

ここで, $[\mathbf{B}_{ijk}^a]$ は Eq.(2.23) より以下のように表すことができる。

$$[\mathbf{B}_{ijk}^a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & \frac{\partial N_2(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & \frac{\partial N_2(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.256)$$

各成分は, Eq.(2.239) 及び Eq.(2.240) より算出可能である。

また, 音場における要素慣性マトリックス Eq.(2.26) に Gauss-Legendre 積分を適用すると以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_e^a] &= \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \{\mathbf{N}_{ijk}\}^T \{\mathbf{N}_{ijk}\} |\mathbf{J}| w_i w_j w_k \end{aligned} \quad (2.257)$$

ここで, $\{\mathbf{N}_{ijk}\}$ は Eq.(2.18) より以下のように表すことができる。

$$\{\mathbf{N}_{ijk}\} = \{N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad N_2(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad \cdots \quad N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\} \quad (2.258)$$

各成分は Eq.(2.230)~(2.237) より算出可能である。

弾性体振動場における要素剛性マトリックス Eq.(2.120) もほぼ同様に計算する事が出来る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e^s] &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^a] dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k [\mathbf{B}_{ijk}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_{ijk}] |\mathbf{J}| w_i w_j w_k \end{aligned} \quad (2.259)$$

ここで, $[\mathbf{B}_{ijk}]$ は Eq.(2.115) より以下のように表すことができる。

$$[\mathbf{B}_{ijk}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} \\ \dots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} & 0 \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial y} \\ \dots & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.260)$$

第 3 章

試料設置条件に関する検討

3.1 はじめに

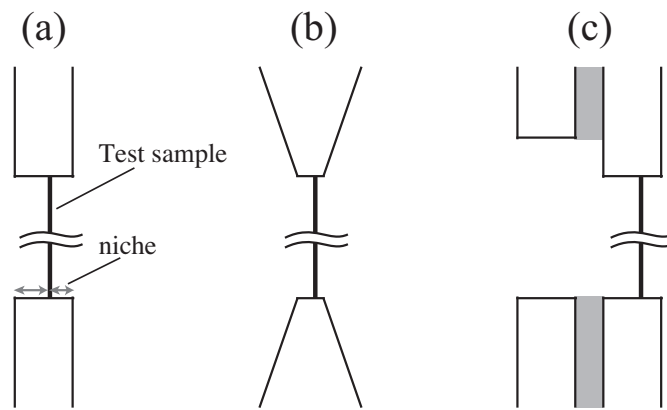


Fig. 3.1: Examples of niche.

音響透過損失測定における試料設置条件に関する変動要因としてニッシェ効果と呼ばれる現象が知られている。ニッシェとは、Fig.3.1 のように二つの実験室間の開口部に試料を設置した際に音源室・受音室の壁厚分だけ試料の両側にできる凹みのことをいう。音響透過損失測定の開口部は段差のあるスタガードニッシェ (Fig.3.1(c)) の場合が多い。このニッシェの深さや開口部の試料設置位置が音響透過損失の測定値に及ぼす変動がニッシェ効果と呼ばれている。

ニッシェ効果に関する実験的検討として、Kihlman *et al.* [20] は試料設置条件の異なる実験室実験による検討、Guy *et al.* [18] は試料寸法と設置位置の差異による効果の基本的傾向に関する基本的考察を行っている。ただし、試料設置位置に関する透過損失の変動に関する実験は比較的容易であるのに対し、ニッシェ深さに関する対照実験は実験施設上非常に困難である。また、Vinokur [15] による理論的検討、また Kim *et al.* [4] による数値的検討がなされているが、検討に際して2次元音場を仮定し、さらに開口内部では一次元音響伝搬を仮定している等の大幅なモデル化が行われている点、試料の支持やその他の細か

な条件設定ができないといった点から、現実には予測や詳細な現象説明には至っていないといえる。

一方でニッシェ深さに関する検討方法として、Guy *et al.* [17], 吉村ら [46] はニッシェを模擬した庇を試料両側に設置した張り出し型ニッシェ (Fig.3.2(b)) について、それらの寸法の差異による影響の検討を行っている。また、Sakuma *et al.* [22] は張り出し型ニッシェに関して3次元の音響振動連成解析を行い詳細な検討を行っている。実際の音響透過損失測定の際にもニッシェが小さい場合には張り出し型ニッシェを設置することがあるため、その有効性を含めたこれらの検討は非常に有用であるといえる。しかし、開口部に試料を設置するような一般的なニッシェとの対応関係は明らかになっておらず、また複雑なニッシェ形状に対応が出来ない点などの問題点も多い。

そこで、本章では開口にニッシェをとりつけた凹み型ニッシェのモデル化を行い、ニッシェ寸法やニッシェタイプが音響透過損失に及ぼす影響についての数値的検討を行い、さらに佐久間らの行った張り出し型ニッシェによる数値解析結果との比較検討を行う。

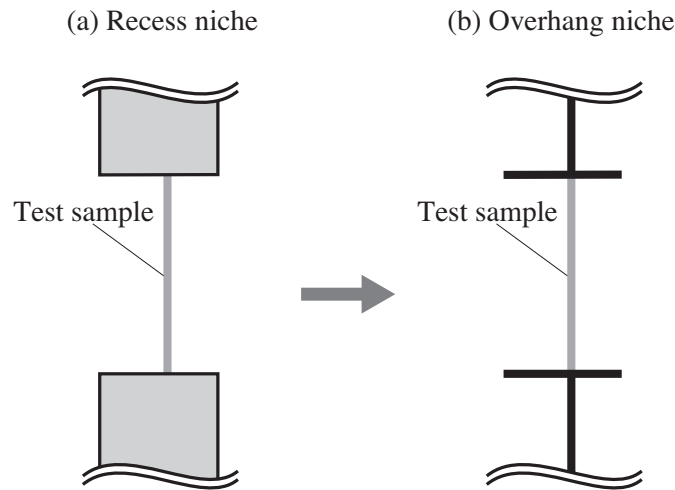


Fig. 3.2: Modeling of overhang niche.

張り出し型ニッシェの解析モデル

薄い無限大剛バフル中の板試料四周を剛な薄板で囲ったモデルを想定する (Fig.3.3)。板振動場の解析には有限要素法を適用する。音場の解析には入射、透過側各領域で鏡像を考慮した境界要素法を適用する。薄い物体に対する取り扱いとして、物体の厚みを極限的に0と仮定した縮退境界を導入し、弾性薄板との連成には基本型を、ニッシェ相当部分には法線方向微分形の境界要素法を適用する。

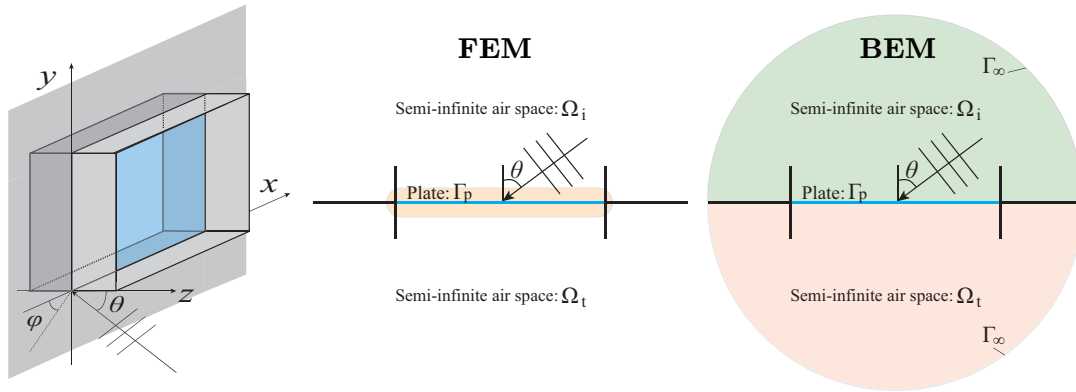


Fig. 3.3: Analytical models of overhang niche.

凹み型ニッシェの解析モデル

厚みのある無限大剛バフルの開口に試料を設置したモデルを想定する (Fig.3.4)[22]。開口内部の音場・板振動場には有限要素法を、入射側・透過側のバフル外部の音場には境界要素法を適用し、境界面で連成する。

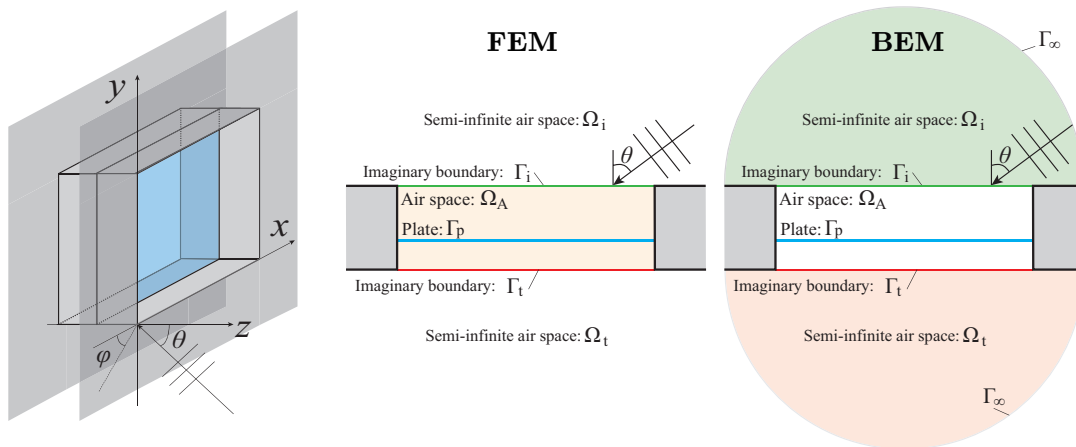


Fig. 3.4: Analytical models of recess niche.

音響透過損失の算出

天頂角 θ_l から面積 S の開口へ平面波入射を仮定した場合 (Fig.3.5), 幾何学的入射パワー $W_{\text{inc},l}$ は次式で表される。

$$W_{\text{inc},l} = \frac{k_o^2 \rho_0 c_0}{2} S \cos \theta_l \quad (3.1)$$

ネット透過パワー $W_{\text{trans},l}$ はバフル内外の境界面 Γ_t 上のアクティブインテンシティ $\mathbf{I}_{n,l}$ から次式で算出される。

$$W_{\text{trans},l} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{I}_{n,l} dS \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}_{n,l} = \frac{1}{2} \text{Re} [p_l v_l^{f*}] \quad (3.3)$$

これらを用いて斜め入射透過率 $\tau(\theta_l, \phi_l)$ は次式で表される。

$$\tau(\theta_l, \phi_l) = \frac{W_{\text{trans},l}}{W_{\text{inc},l}} \quad (3.4)$$

最終的に, 入射角による重み付けを考慮し, 次式により統計入射値を算出する。

$$\tau_{\text{stat}} = \frac{\sum_l \tau(\theta_l, \phi_l) w_l}{\sum_l w_l} \quad (3.5)$$

$$w_l = \sin \theta_l \cos \theta_l \Delta \theta_l \Delta \phi_l \quad (3.6)$$

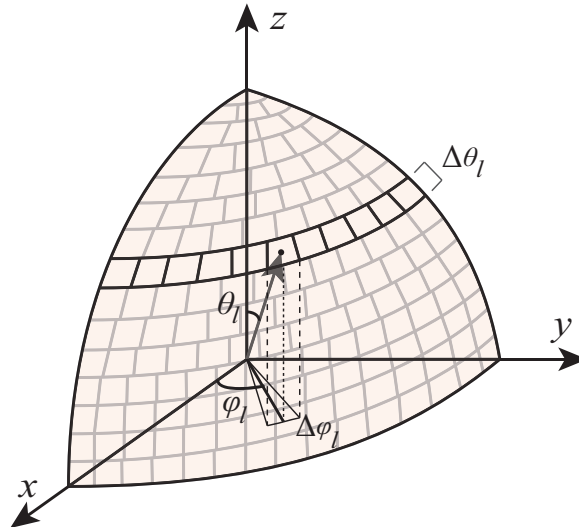


Fig. 3.5: Equi-solid angle discretization of incidence space for the calculation of transmission loss.

準備的検討

本研究で用いる薄板要素 (Adini-Clough-Melosh の非適合長方形要素) の計算精度の確認としての共振周波数について検討を行う。0.9 × 0.9 m, 厚さ 10 mm のガラスに相当する物性を与えた薄板を単純支持し, 板サイズに対し有理数比にならないよう音源・受音点を設け各周波数における変位を算出した。結果を Fig.3.6 に示す。併せて, 1000 Hz 以下の板振動モード共振周波数の理論値を示す。高周波数になるにつれ共振の生じる周波数に乖離がみられるが, 低域では概ね共振周波数を捉えている。

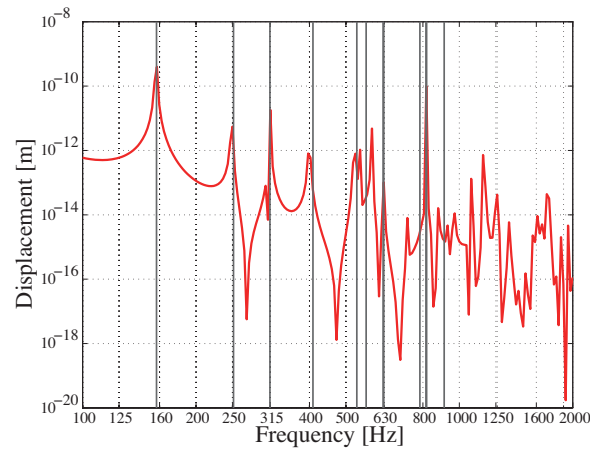


Fig. 3.6: An example of plate displacement magnitude.

次に, 音響振動連成の計算精度の確認として, 音響管を用いた音響透過損失の算出を行う。薄板には厚さ 10 mm のガラスを想定し音響管として一辺 50 mm の正方形管を用いた。Fig.3.7 に結果を示す。解析結果より, 薄板と空気の連成について本検討で行う解析周波数において十分な精度が確認された。

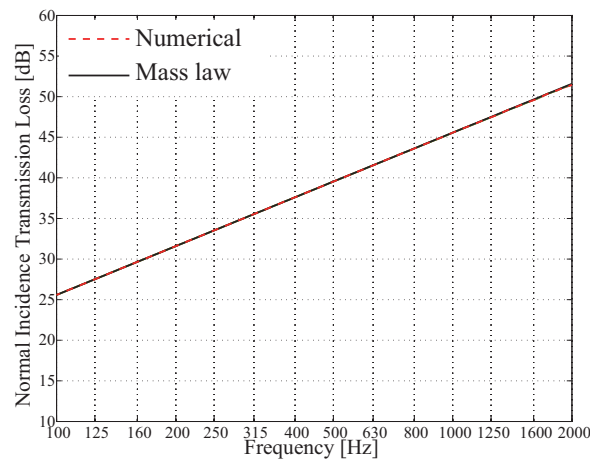


Fig. 3.7: Comparison between numerical and theoretical values of mass-law.

3.2 ニッシェ深さの影響

本検討ではニッシェ効果に関する基礎的知見を得ることを目的とするため、検討を行うニッシェ形状は試料四周に対し垂直に設置されたフラットニッシェを対象とする。JIS A 1416:2000 では空気遮断性能測定時のニッシェ厚を 0.5 m 以内としているため、本研究で検討を行うニッシェ深さを 0 mm, 150 mm, 300 mm, 450 mm と段階的に変化させ、音響透過損失の算出を行う。検討を行う板試料として 0.9 m × 0.9 m のガラスを想定した物性値を与える。

Tab. 3.1: Physical properties and directions of the plate.

Size	0.9 × 0.9 [m ²]
Thickness	0.01[m]
Young's module	7.5×10^{10} [N/m ²]
Density	2500 [kg/m ³]
Poisson's ratio	0.22
Loss factor	0.002

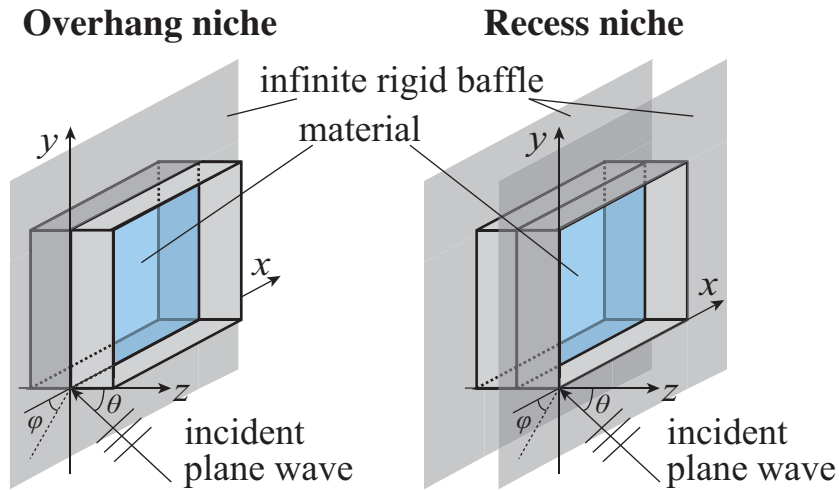


Fig. 3.8: Schematic of niche models.

3.2.1 板試料厚

二つのニッシェタイプについて、ガラスの板厚を 5 mm, 10 mm, 15 mm に変化させたときのランダム入射音響透過損失を Fig.3.10 に示す。併せて、質量則と単純支持の有限板理論式である Sewell の式 [6] を示す。いずれの場合でも板共振により音響透過損失にディップが生じており、その周波数は板厚により異なる。また、ニッシェが浅い場合モデル・板厚に依らず非共振周波数で概ね Sewell の理論式に従う傾向が確認できる。しかしニッシェが深くなるにつれてコインシデンス限界周波数 (f_c) 以下の非共振周波数においていずれの板厚においても透過損失の低下がみられ、Sewell の理論式による値から乖離していく傾向を示す。この傾向はニッシェ効果に関する従来知見と一致しているが、凹み型ではより顕著となり、特に低周波数において低下量大きい。

ここで板共振によるディップについてより詳細な検討を行うため、板厚 10 mm 時の 250 Hz ((2,2) モード) 付近について、1/768 オクターブ中心周波数おきに検討を行った。結果を Fig.3.9 に示す。1/24 オクターブバンド中心周波数おきの計算ではニッシェによりディップが浅くなっているように見えるものの、解析周波数を細かく設定した場合には大きくディップが浅くなるのではなく、ニッシェ深さの増加とともに共振周波数がより低域にシフトしていることがわかる。これは、ニッシェが深くなることに伴い音響付加が増加していることを意味している。なお、このときの真空中の板の共振周波数の理論値は 251.5 Hz である。

ただし、張り出し型と比較し凹み型はディップの生じる周波数の低下がより顕著であることがわかる。板振動による音響放射時に凹み型がより音響負荷が大きくなっていることが推察される。

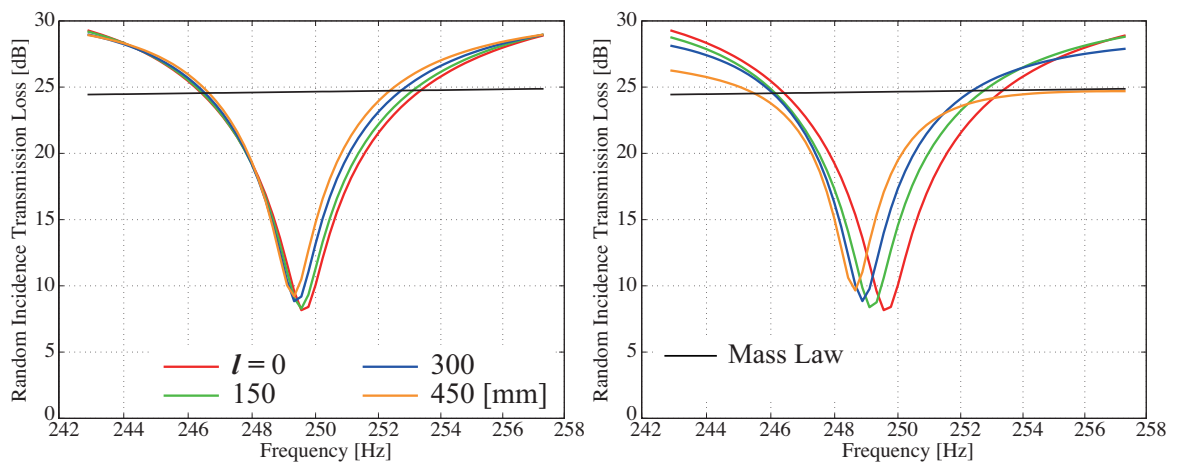


Fig. 3.9: Comparison between different depths of niche at resonant frequency. Left: Overhang niche, Right: recess niche.

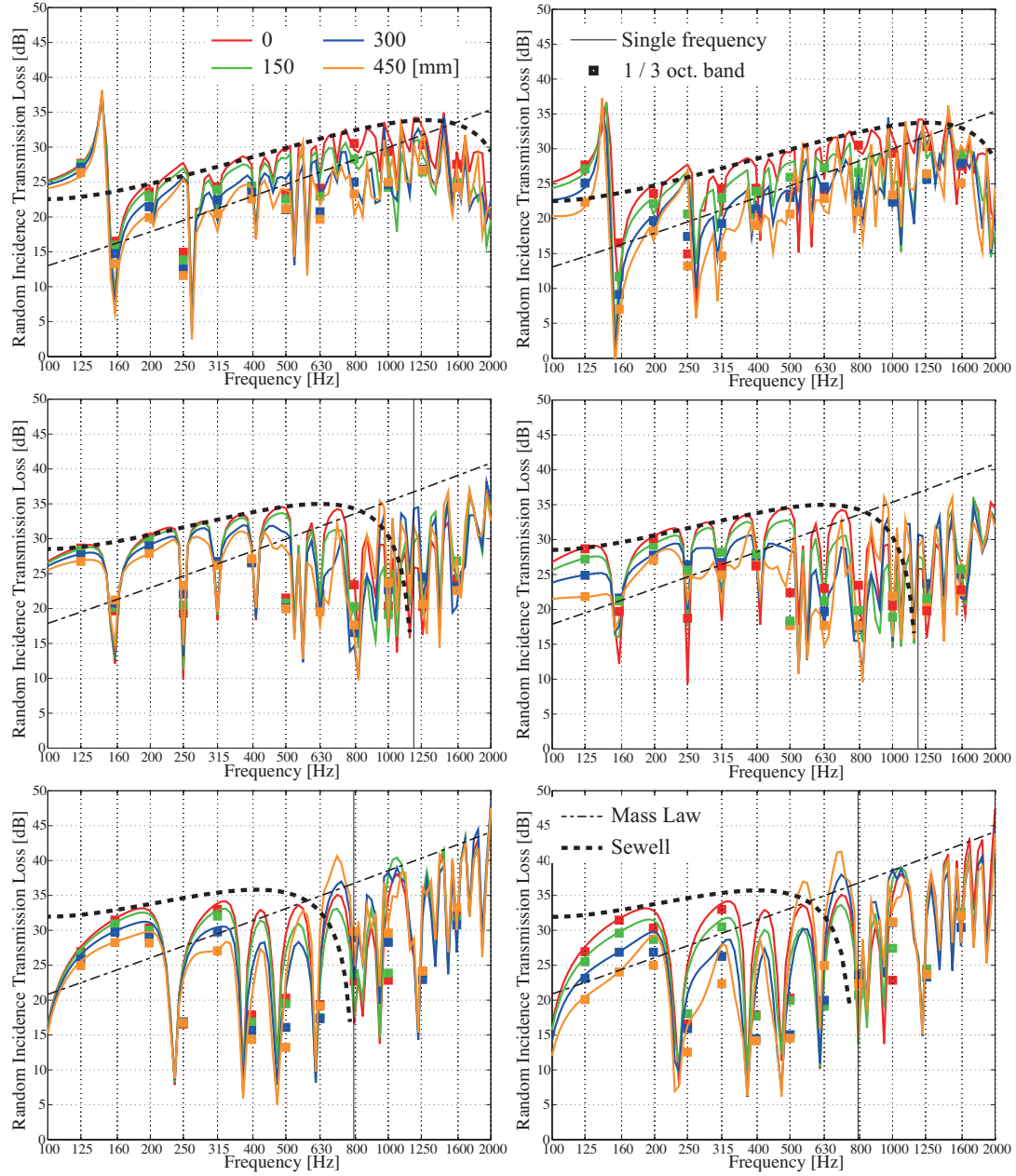


Fig. 3.10: Comparison between different depths of overhang niche (left) and recess niche(right). Plate thicknesses are 5 mm (top), 10 mm (middle) and 15 mm (bottom).

3.2.2 入射条件

厚さ 10 mm のガラス板を単純支持板したときの垂直入射条件，ランダム入射条件，音場入射条件における音響透過損失の値を Fig.3.11 に示す。

垂直入射条件では，板に加わる音圧の対称性により板の奇数モードのみ励起され音響透過損失が低下するが，ニッシュが浅い場合，非共振周波数では概ね質量則に伴う傾向にある。また，低周波数域では試料の有限性の影響により音響透過損失が質量則よりも大きな値となるが，ニッシュが深くなるにつれ値の低下がみられ，かつ 280 Hz 付近において反共振による透過損失の上昇がみられる。この傾向は凹み型ニッシュが顕著である。さらに，凹み型ニッシュではニッシュが深くなるにつれ 430 Hz 付近でディップが生じている。

ランダム入射条件では，全ての板振動モードが励起されるため垂直入射条件に比べディップが多くなるが，ニッシュが浅い場合には非共振周波数で概ね Sewell の理論式に伴う傾向が確認できる。音場入射条件はランダム入射条件と同様の傾向がみられるが，全体的にランダム入射よりも 1,2 dB 程度大きな値を示している。これは，擦過入射角付近の音響透過損失が低い値となることを示している。

ここで，単純支持条件における斜め入射透過損失分布を Fig.3.12 に示す。それぞれの周波数において，左上がニッシュなし，右上が深さ 450 mm ・中央試料設置時の張り出し型ニッシュ，右下が同条件の凹み型ニッシュの算出である。多くの周波数で擦過入射付近では音響透過損失の低下がみられ，音場入射条件における検討と同様の傾向を示す。250 Hz, 1000 Hz, 200 Hz 付近の周波数では板共振が生じており複雑な分布を示していることから，共振が生じているときには透過損失の入射角依存性が強いことが確認できる。また，非共振時にはニッシュタイプによる分布の違いは比較的少ないものの，共振時には明確な相違がみられ，張り出し型ニッシュにおいて擦過入射角付近でも高い透過損失を示す傾向にある。

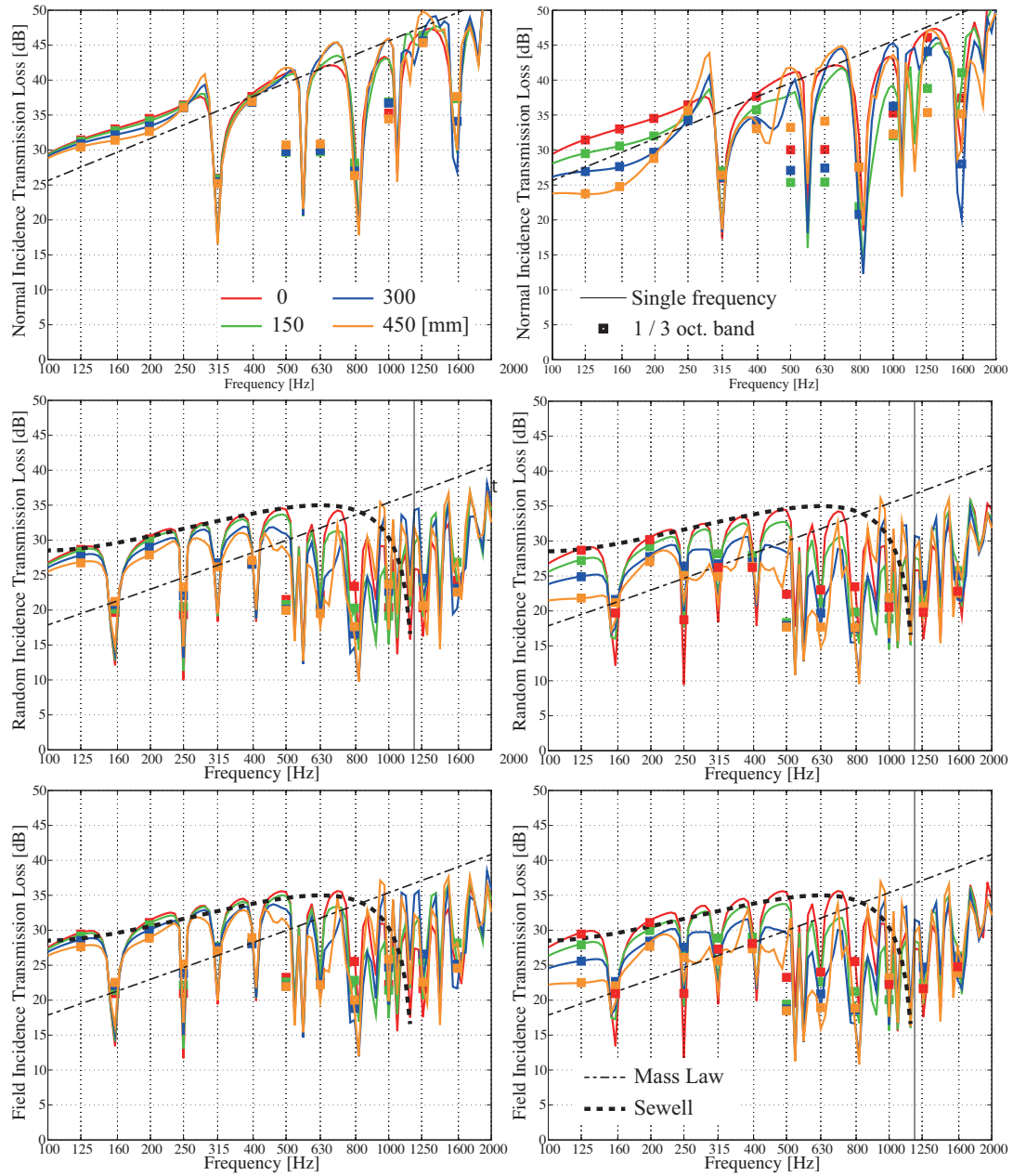


Fig. 3.11: Comparison between different depths of overhang niche (left) and recess niche(right). Top: normal incidence, Middle: random incidence, Bottom : field incidence.

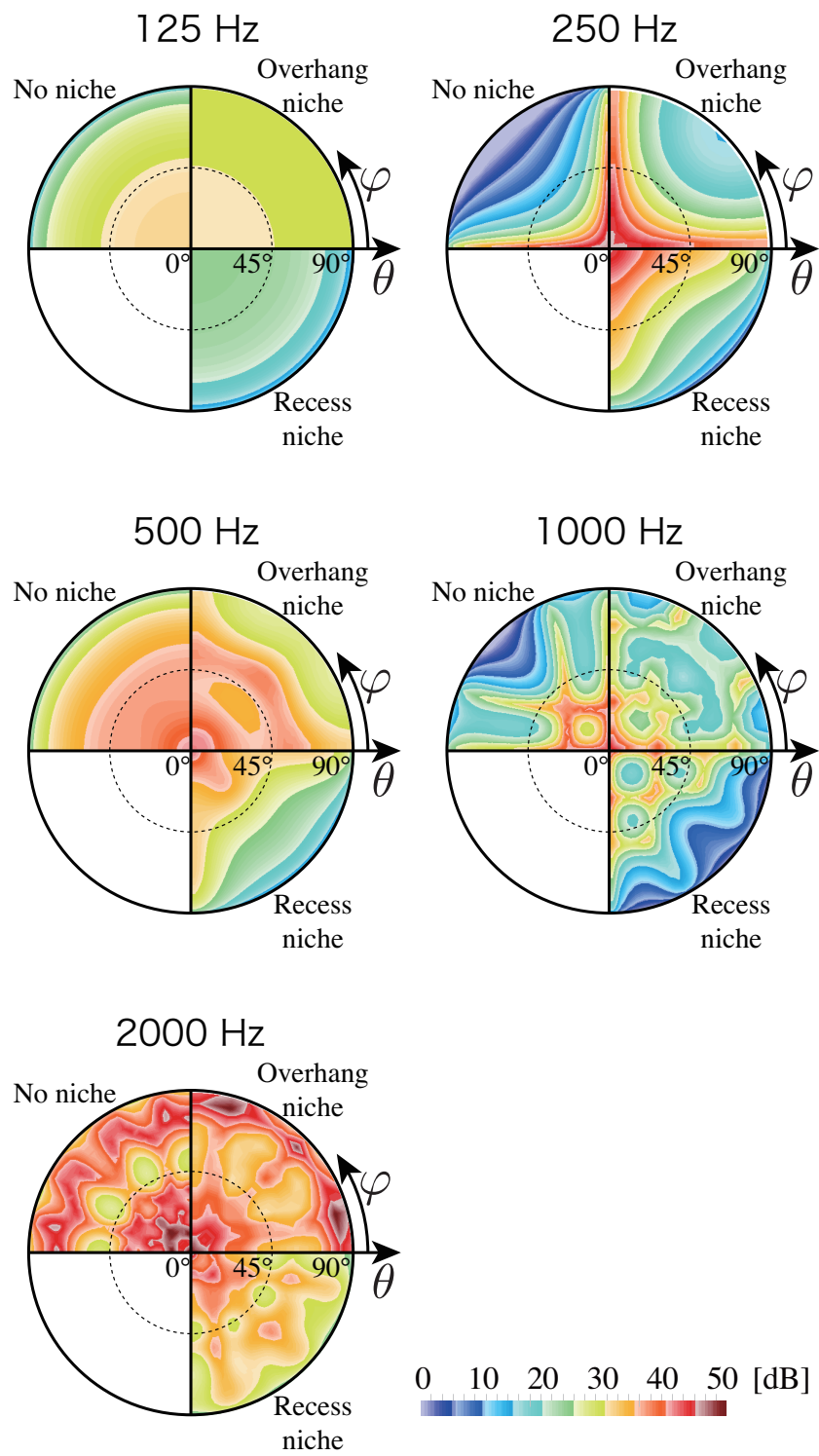


Fig. 3.12: Distributions of oblique incidence transmission losses (Simply supported).

3.2.3 板端部の支持条件

厚さ 10 mm のガラス板の支持方法として、端部のエネルギー損失の無い単純支持・固定支持と、端部でのエネルギー損失を考慮した集中バネ支持モデルでそれぞれ求めたランダム入射音響透過損失を Fig.3.13 に示す。集中バネモデルについては次章で詳細な検討を行うが、本検討ではパテ支持を想定し Tab.3.2 の物性値を与える。

単純支持と固定支持は共振周波数が異なるものの、ニッシェ効果による非共振周波数での透過損失の低下に関して概ね同様の傾向にあることがわかる。集中バネ支持モデルの共振周波数は単純支持に近いが、端部損失により板共振によるディップが浅くなる。これは、ガラス板の内部損失が小さく共振時に周辺支持部の損失による影響が現れるためである。1/3 オクターブバンド換算する際には各単一周波数での解析結果をエネルギー平均するため、共振によるディップが急峻な場合ニッシェ効果による透過損失の低下の影響は比較的観察されにくい。

一方、端部損失のある場合、ディップが浅くなることにより相対的にニッシェ効果による透過損失の低下が 1/3 オクターブバンド換算値で顕著に観察される。特に低周波数域では凹み型でその傾向が顕著である。

さらに斜め入射音響透過損失の分布を Fig.3.14 に示す。単純支持における分布と比較し、非共振周波数である 125 Hz や 500 Hz やコインシデンス限界周波数以上の 2000 Hz における分布は同様の傾向を示す。一方、共振周波数である 250 Hz, 1000 Hz のにおいて単純支持条件と大きく異なっており、特に張り出し型ニッシェにおいて擦過入射時の値は小さくなっている。

Tab. 3.2: Physical properties and directions of the support material.

Thickness	5 mm
Connected width	15 mm
Young's module	$1.0 \times 10^8 [\text{N/m}^2]$
Density	$1000 [\text{kg/m}^3]$
Loss factor	0.5

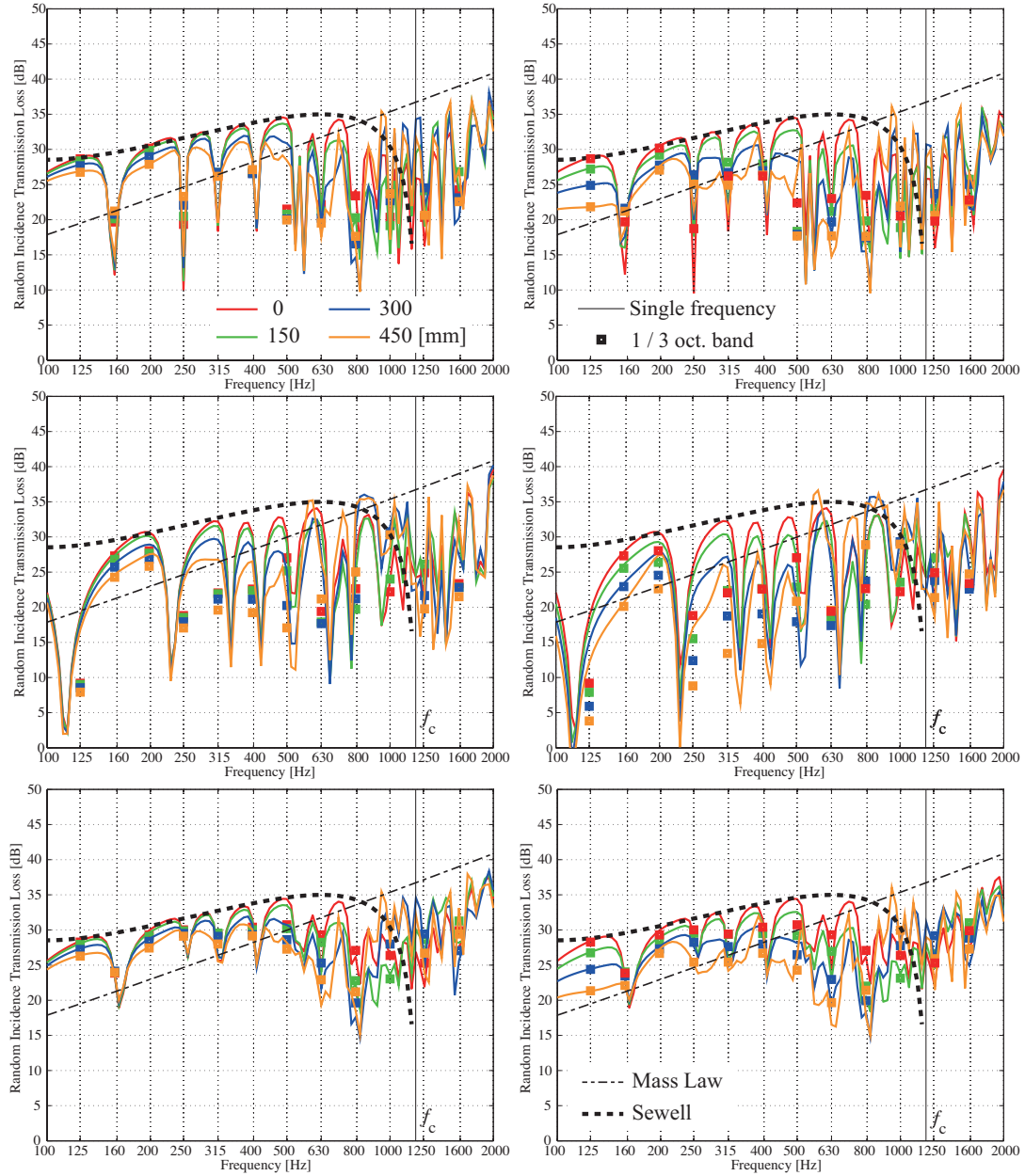


Fig. 3.13: Comparison between different depths of overhang niche (left) and recess niche(right). Top: simple support, Middle: fixed support, Bottom : Spring model supported.

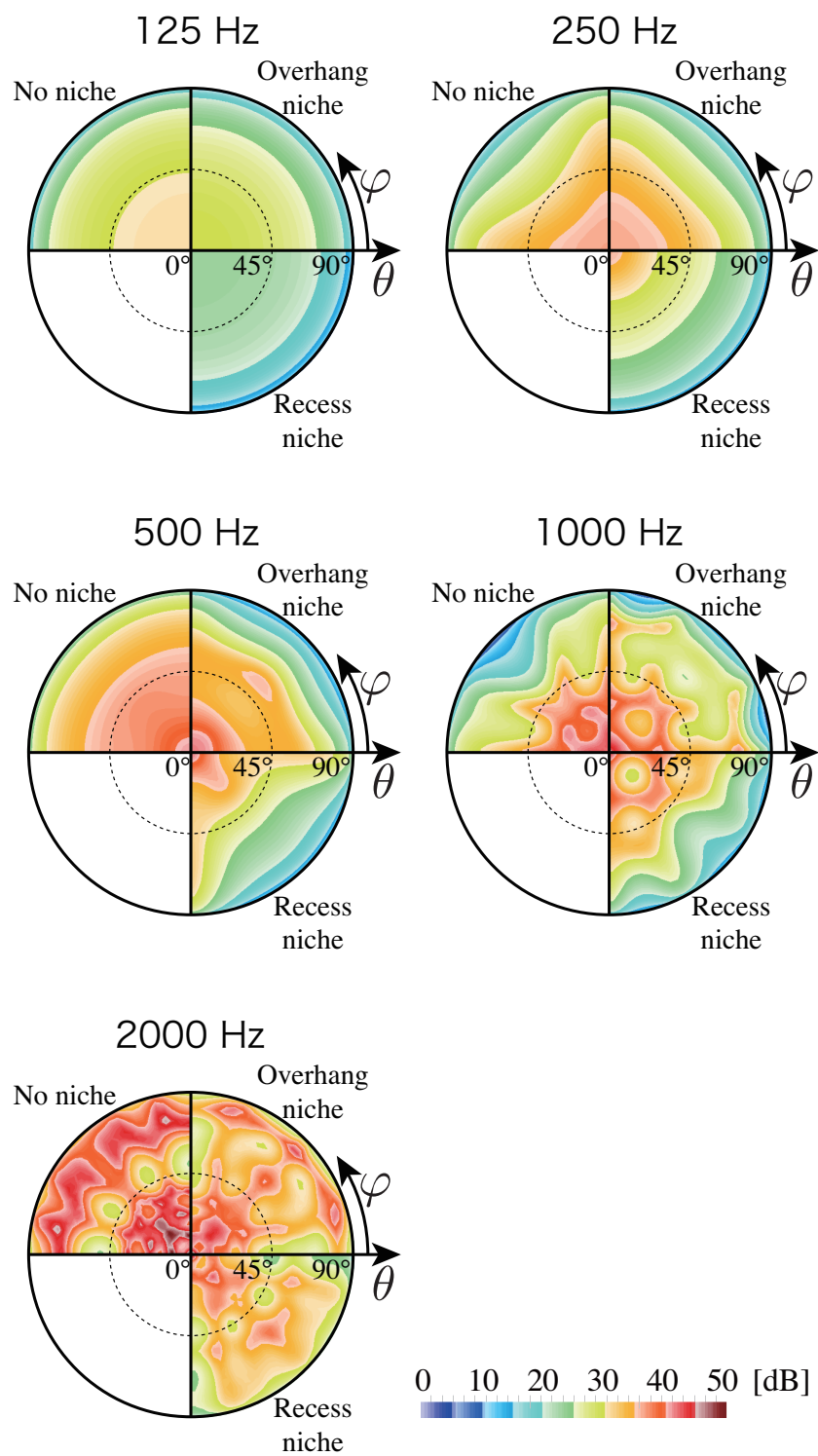


Fig. 3.14: Distributions of oblique incidence transmission losses(Spring model supported).

3.2.4 透過損失の変化量

端部損失のある集中バネ支持モデルにおいて、ニッシェ深さ増加による音響透過損失の変化量を観察する。Fig.3.15 に、横軸にニッシェ深さ、縦軸にニッシェ深さ 0 mm に対する各ニッシェ深さでの透過損失の差を示す。計算は 1/3 オクターブバンドごとに行う。中域、低域に関してはニッシェが深さの増加に伴う音響透過損失の低下が確認できるが、いずれの場合でもその効果量はニッシェ深さに比例せず、また共振によるディップの影響から各周波数帯域ごとに低下量が異なることがわかる。しかし概ね凹み型が概ね変化量が大きいと言える。

一方、高周波数域になると透過損失の変化量はより複雑な変化を示し、透過損失の上昇もみられる。高周波数におけるニッシェタイプによる効果の差は比較的小さい。

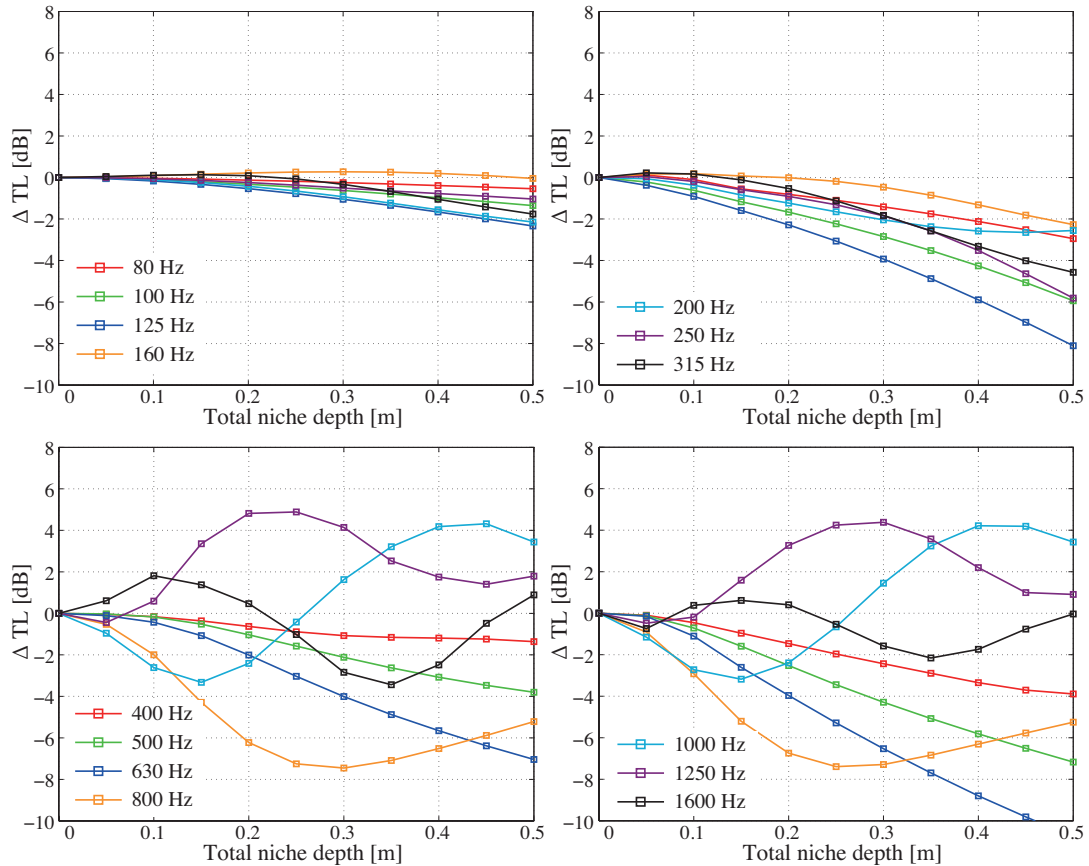


Fig. 3.15: Amount of change by niche depth from niche depth = 0. Upper : lower frequency, Lower : higher frequency, Left: overhang niche, Right: recess niche.

3.2.5 放射効率による検討

これまで示してきた結果から、ニッシェが深くなるにつれ板の非共振周波数で音響透過損失が低下することが確認された。このようなニッシェ効果の生じる仕組みについては不明な点が多く、Vinokur[15] は板と開口面の空気を質量、開口内部の空気をバネとしたモデル化を行いニッシェ内部の一次元音響伝搬を仮定することでニッシェ効果を説明しているが、開口面積がニッシェ深さに対して大きいときに特にニッシェ効果による音響透過損失の低下量が大きい点などから、そのモデル化の妥当性には疑問が残る。ここでは板面における放射効率 (放射係数) の算出・比較を行う。

放射効率 σ は物体の振動による音の放射の効率を表す量のことで、板状の振動体の場合には次式で表される [56]。

$$\sigma = \frac{P}{\rho c_0 v_e^2 S} \quad (3.7)$$

ただし、 P は放射される音響パワー、 ρc_0 は空気の固有音響インピーダンス、 S は振動面の面積、 v_e^2 は振動面の振動速度の実効値の面全体についての平均値である。この式からわかるとおり、無限大の板が振動速度 (実効値) v_e で同位相で振動し平面波を放射している場合に面積 S の部分から放射されている音響パワーに対する実際に放射される音響パワーが放射効率である。無限大平板の曲げ振動ではコインシデンス限界周波数以下で0、コインシデンス限界周波数で無限大となり、その後1に収束するような挙動を示すことが知られている [8]。

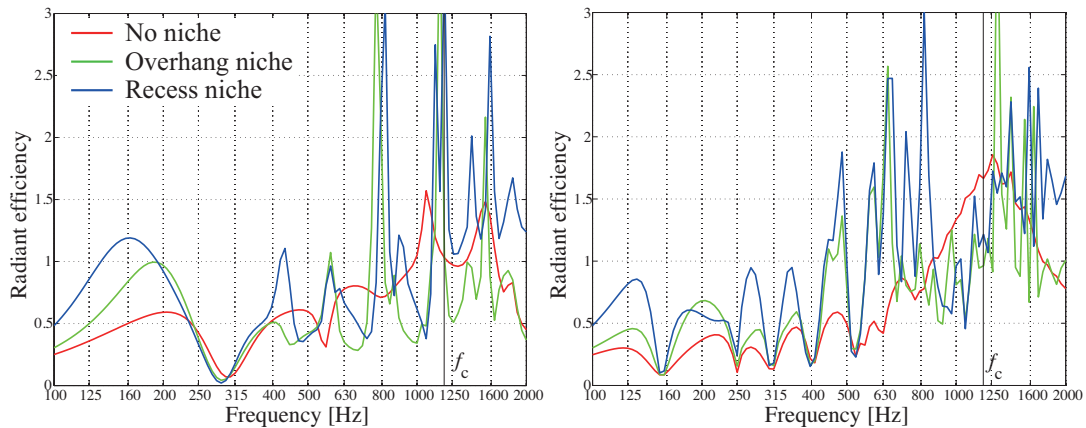


Fig. 3.16: Radiant efficiency compared between niche types. Left: normal incidence , Right: random incidence

ニッシェ無し、ニッシェ深さ 450 mm としたときの張り出し型ニッシェ、凹み型ニッシェについて垂直入射・ランダム入射時の放射効率の算出結果を Fig.3.16 に示す。なお、板端部は単純支持条件とし、板材の厚みは 10 mm とした。その他の解析条件はこれまでの検討における条件と同様とする。いずれの条件においてもコインシデンス限界周波数以下で 0 とはならないが、これは板材の有限性に起因するものである。また、垂直入射条件において板の共振周波数よりわずかに低い周波数の放射効率にディップが生じている。これは反共振現象と呼ばれ [40, 37], 低周波数域で音響透過損失に生じるピークはこの反共振現象によるものである。これらから、垂直入射・ランダム入射のいずれの場合でもニッシェを設置することで非共振周波数における放射効率が上昇し音響透過の低下が生じやすくなっていることがわかる。また、その傾向は凹み型ニッシェが顕著である。ニッシェ効果のひとつの要因は、ニッシェ設置により放射効率が変わったためであるといえる。

入射側音場や透過側音場にとって、ニッシェタイプの違いは剛バフル面の高さの違いに等しい。ニッシェ開口面の振動方向の拘束が凹み型が強いためインピーダンスは大きな値となり、実質的に入射するパワーは凹み型がより大きくなると考えられる。

3.3 試料設置位置の影響

前節ではニッシェ深さに関する傾向について基礎的検討を行った。本節では，試料設置の位置による音響透過損失の変動について検討する。ニッシェの深さを 450 mm に固定し，開口部における試料設置位置を変化させる。なお，張り出し型ニッシェの剛バフルは常に板試料と同一平面内にあるものとする。用いる板試料は前検討と同様に $0.9 \times 0.9 \text{ m}^2$ のガラス板とする。端部支持条件として，全節と同様の物性・サイズの支持材を想定した集中バネ支持モデルを用いる。

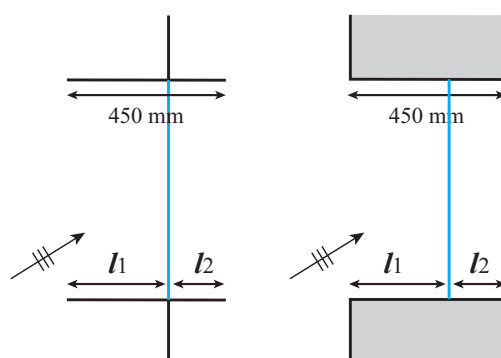


Fig. 3.17: Schematic models of installation location of plate.

3.3.1 垂直入射条件

ガラスの板厚を 5 mm，10 mm，15 mm に変化させたときの垂直入射音響透過損失を Fig.3.18 に示す。非共振周波数では概ね質量則に従う傾向がみられる。試料設置位置による値の変動がみられ，特に，試料を入射音場側近くに設置した場合，各共振周波数に対しより低周波数では値が大きくなる傾向がみられる。これにより，垂直入射時には試料が入射側に近い場合に音響放射の反共振が生じやすいことがわかる。また，反共振の周波数以外ではそれぞれ設置位置に応じ値の乖離がみられるが，設置位置に応じた傾向は認められない。

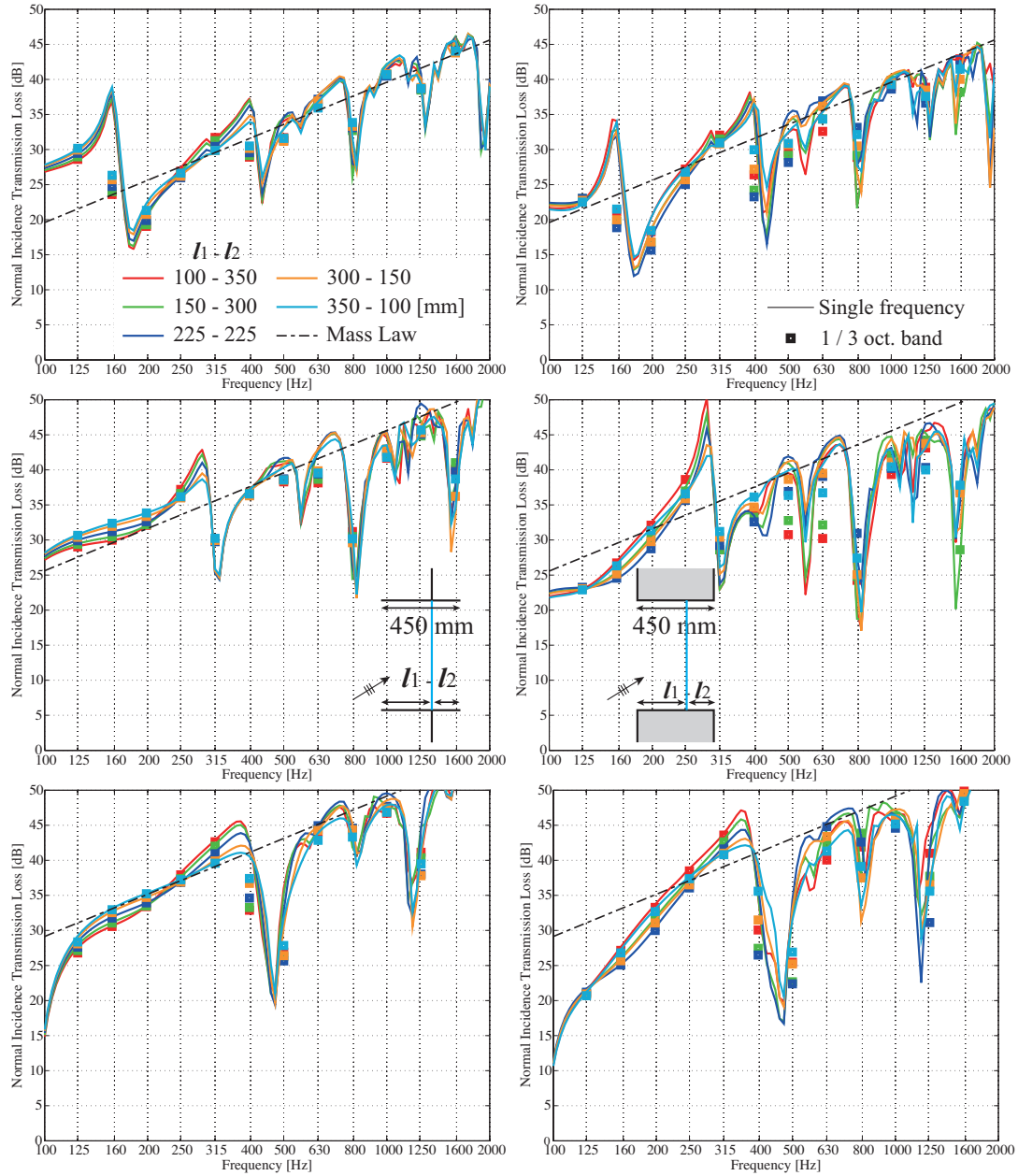


Fig. 3.18: Comparison between different locations of overhang niche (left) and recess niche (right). Top: normal incidence, Middle: 10 mm, random incidence, Bottom : field incidence.

3.3.2 ランダム入射条件

二つのニッシュタイプについて、ガラスの板厚を 5 mm, 10 mm, 15 mm に変化させたときのランダム入射音響透過損失を示す。音響透過損失の変動は凹み型の中音域において最も顕著である。また、張り出し型は低音域における変動はみられないのに対し、凹み型は設置位置による変化がみられる。また、ランダム入射条件においては入射側および透過側のニッシュ深さについて低音域で相反則が成り立つことが確認され、試料が中央にあるとき、最も透過損失が小さくなる傾向がみられる。

Fig.3.20 に、ニッシュ設置位置を入射側から 100 mm, 透過側から 100 mm に設置したときの斜め入射音響透過損失の分布を示す。入射角度ごとにみた場合には試料設置位置に対する相反性は認められない。これは入射側音場と透過側音場の統計平均により相反性が成立していることがわかる。

次に、試料設置位置による透過損失の変化量について検討を行う。Fig.3.21 は横軸にニッシュ深さに対する入射側のニッシュ開口からの距離の比、縦軸に各試料設置位置における透過損失と中央設置時の透過損失の 1/3 オクターブバンド換算値における差を示す。多くの周波数帯域で中央設置時に最も音響透過損失が小さい値となる。低域では入射側、透過側付近と中央付近において変化率が小さく、1/3 や 2/3 付近において変化率の大きい傾向にあることから、ニッシュ全体の 1/3 や 2/3 地点において設置位置依存性が高くなっていることがわかる。

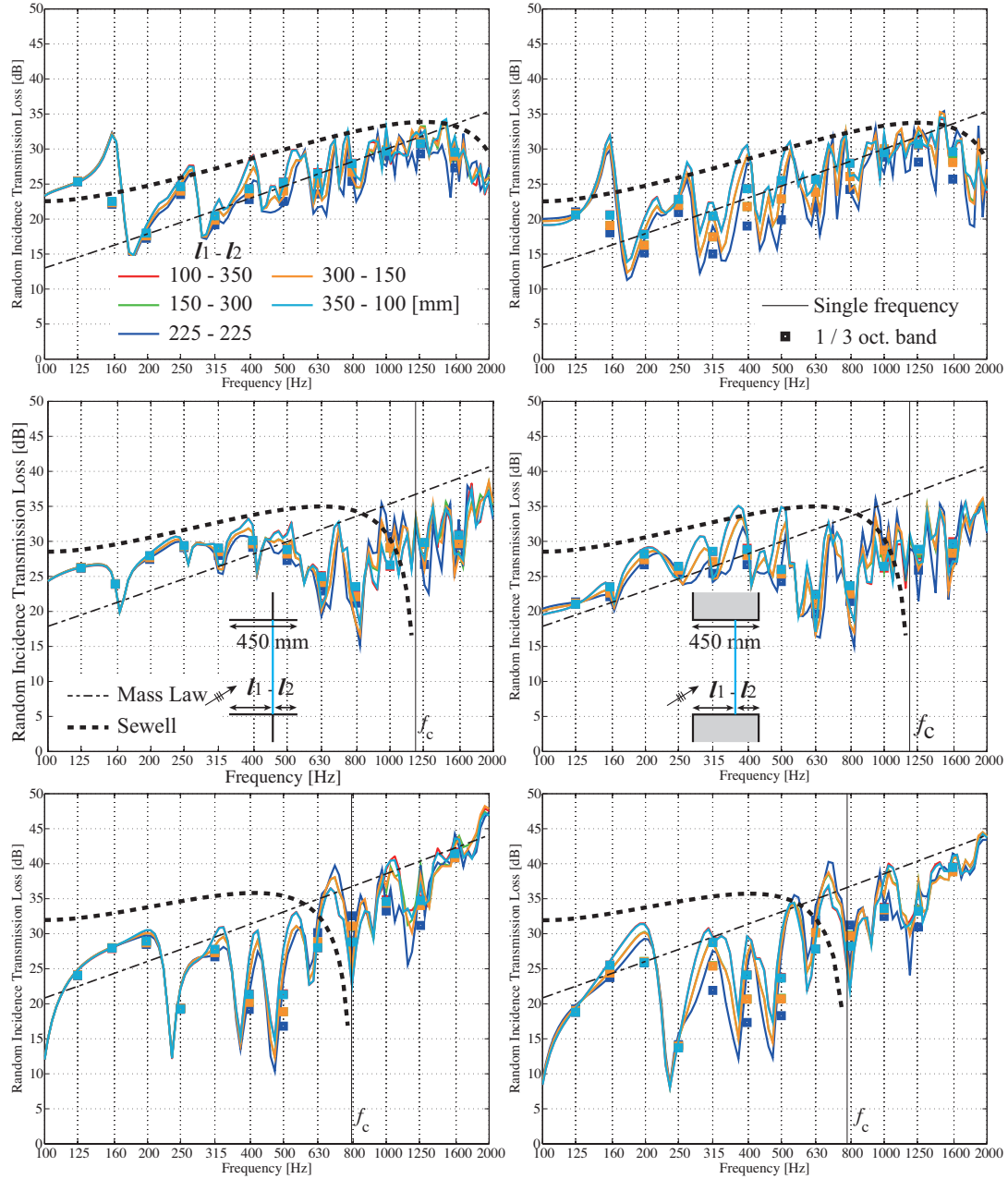


Fig. 3.19: Comparison between different locations of overhang niche (left) and recess niche(right). Plate thicknesses are 5 mm (top), 10 mm (middle) and 15 mm (bottom).

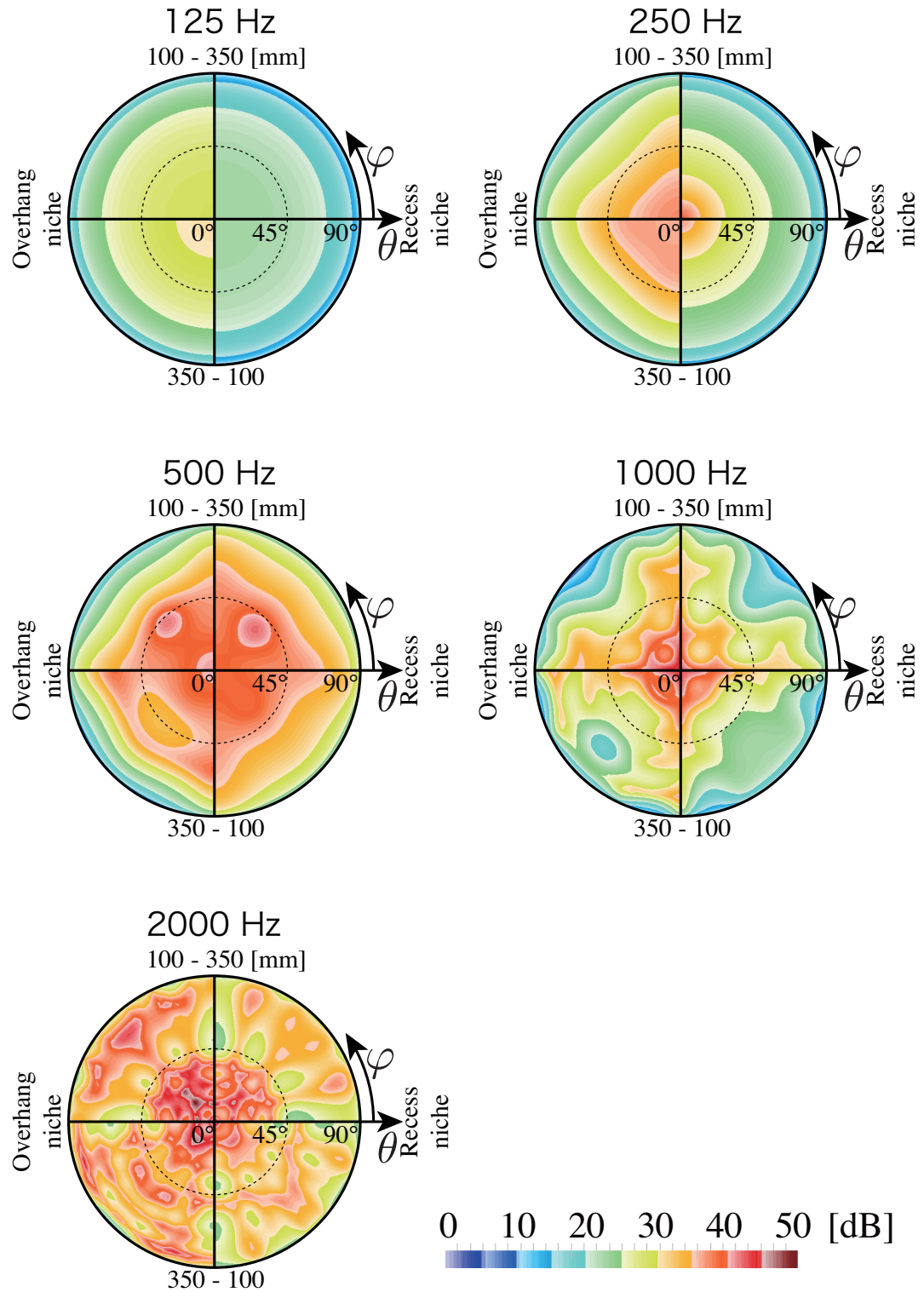


Fig. 3.20: Comparison between the distributions of oblique incidence transmission losses (Spring model supported).

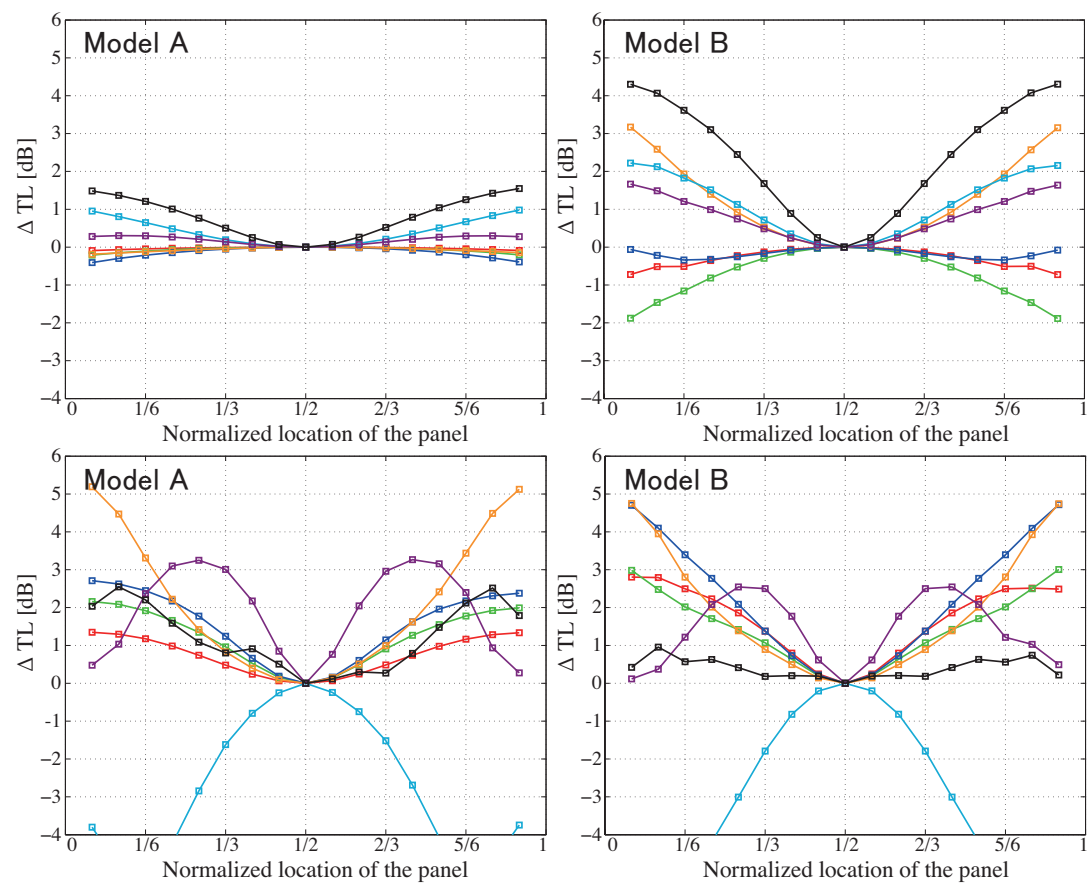


Fig. 3.21: Amount of change by location of plate from center placing. Upper : lower frequency, Lower : higher frequency, Left: overhang niche, Right: recess niche.

3.4 まとめ

本章では、試料設置条件としてニッシェの深さとニッシェにおける試料設置位置による音響透過損失の変動について検討した。その結果、既往の知見に一致する傾向が数値解析上も確認でき、さらにニッシェのタイプによる透過損失の乖離も確認された。遮音性能測定において凹み型ニッシェの代替として張り出しニッシェを設置することは、特に周波数域に関しては効果が薄いといえる。

空気遮断性の実験室測定法に関して JIS には壁の厚さを 50 cm 以下とすることが規定されているが、特に壁厚が薄い場合には数 cm の壁厚の違いや試料設置位置の違いが測定結果に影響を及ぼしかねないため、実験室性能と現場性能の乖離の原因の一つとなりえる。現場における試料設置条件は様々であるが、例として実験室における壁体よりも厚い壁に窓ガラス等を設置した場合には実験室性能より低い性能となる危険性がある。また逆に薄い壁に取り付ける場合にはオーバースペックとなる可能性があり、材料開発のみならず施工側にとっても適切な部材選択が望まれる。

また、JIS 1416: 2000 には試料設置位置は両側のニッシェが異なる深さになるようにし、望ましくはその比がほぼ 2:1 となるようにするとの記載があるが、本研究ではそのような位置の場合に最も位置依存性が高くなり誤差が生じやすい結果となった。

第 4 章

試料周辺支持材に関する検討

4.1 はじめに

音響透過損失測定時、板試料のモード共振周波数において透過損失にディップが生じることは前章で既に明らかになっている。一方、音響透過損失を帯域換算値で評価する際には帯域内に含まれる透過パワーを平均するため、対象周波数帯域内に透過率の大きな周波数が存在すると音響透過損失の値はディップに伴い大きく低下する。よって、試料の共振周波数やその際の音響透過損失値の設計は、部材の遮音性能評価のみならず部材を利用した現場性能設計において考慮すべき重要な要素の一つである。

一般に、共振の大きさはその振動系の粘性抵抗が制御しており、粘性抵抗の大きな系では共振は抑えられる。しかし一般的な開口部に取り付けるようなガラスや輸送機器等に用いられる金属といったような材料は内部のエネルギー損失が非常に小さいため、試料そのものの損失よりも材料を支持している支持材の損失特性が抵抗制御時の主体的な役割を担っている。よって、音響透過損失測定に関しても支持材や支持方法といった支持条件の違いが結果に与える影響は大きいといえる。

音響透過損失測定における支持条件の検討として、吉村らは支持材が音響透過損失に与える影響の検討とともに、ガラスの内部損失、支持材による端部損失、音響放射損失を含む試料の総合損失の実験的測定法を開発し、これら影響の検討を行っている [47, 9, 10]。数値解析による検討例として、黒木らは損失係数を SEA 法に反映させた解析を行っている [33, 49]。佐久間らや朝倉らは周辺支持材による支持条件について試料端部の板面外変位と試料の回転角にそれぞれ機械インピーダンスとモーメントインピーダンスを与えたモデルを導入し境界要素法と有限要素法や時間領域有限要素法を用いた音響振動連成解析を行っている [21, 23]。ただし、佐久間らや朝倉らの用いたモデルは板周辺部における局所作用を仮定しており、支持材の運動伝搬や板の面内方向の変位を考慮していない。さらに、想定する支持材の形状等が制限されており、適用条件や板材サイズの定義等、不明な点も多い。そこで本章では、より現実にもっとも試料端部の支持条件として、3次元弾性体要素で薄板を面的に支持したモデルを導入し、佐久間らの既往研究内容との対応を含め試料端部のエネルギー損失が音響透過損失に与える影響等の検討を行う。

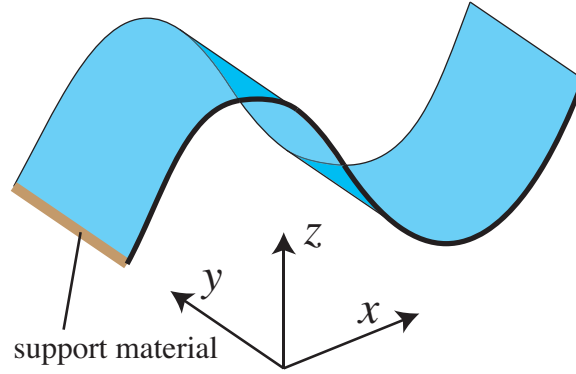


Fig. 4.1: Schematic of propagation of bending plate .

集中バネ支持モデル

佐久間らは、端部のインピーダンスの与え方として各節点に並進バネ、回転バネのみ導入したモデルや、更に支持材の等価質量、板の面外方向における支持材の一次元縦振動モードを考慮したモデル (弾性連続体モデル) 化を行い検討を行った [21, 23]。

以下に、各モデルにおける板端部に与えるインピーダンスについて示す。算出において、

- Fig.4.1 のように無限大板の y 方向には変位が全て等しく、曲げ波が x 方向のみに一次元伝搬している
- 板は接合面において変位と回転角が生じているが、接合面内では平面を保ち曲げは生じていない。
- 支持材には板の面外方向への垂直歪みのみがはたらき、せん断歪みや面内方向への歪みは生じない

という仮定がなされている。

並進バネは、支持材をバネとし、支持材との接合板面全体の面外方向変位に対してバネが作用することとする (Fig.4.2(a))。さらに、板とその両面に接合された支持材において板の面外変位が一様であることを想定する。このとき、並進バネによる仕事 W_{trans} と支持材内部 W_{in} が行う仕事を以下の様に定義する。

$$W_{\text{trans}} = \frac{1}{2} k_{\text{trans}} w^2 \quad (4.1)$$

$$W_{\text{in}} = \int_0^w \overline{E_s} d_s \frac{w}{h_s} dw \quad (4.2)$$

ここで、 $\overline{E_s}$ は支持材の複素ヤング率、 d_s は支持材の設置幅、 h_s は支持材の厚さ、並進バネ定数を k_{trans} とする。これらの仕事釣り合う条件から、並進バネによる機械インピーダンス $Z_{\text{trans}} = 2k_{\text{trans}}/j\omega$ は次式のように導出される。

$$Z_{\text{trans}} = \frac{2\overline{E_s} d_s}{j\omega h_s} \quad (4.3)$$

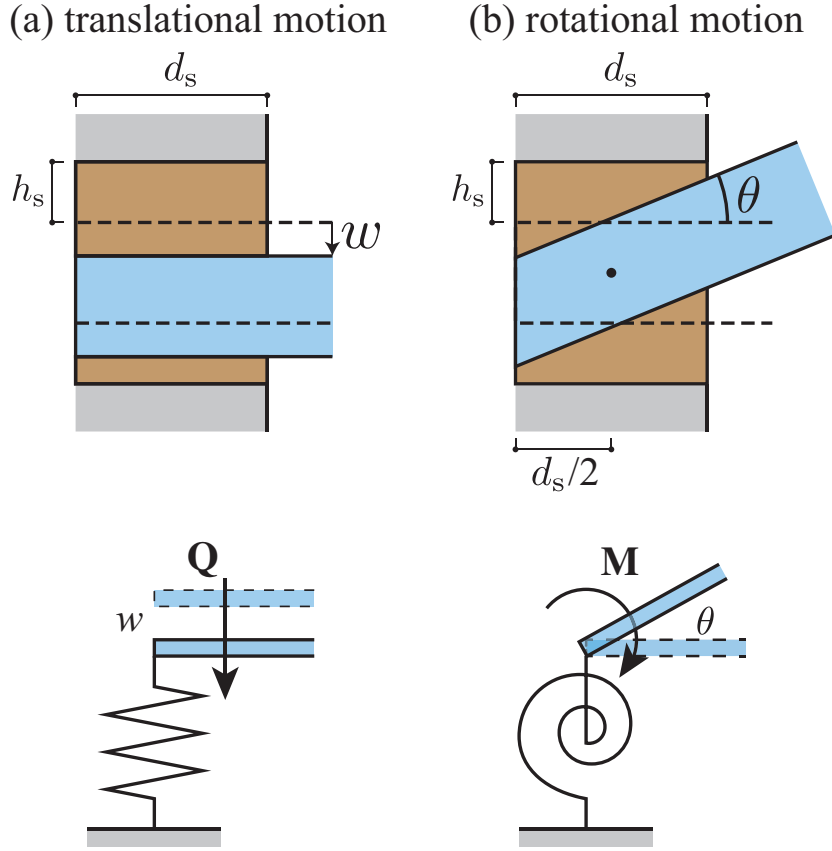


Fig. 4.2: Numerical models of edge support systems: (a) translational spring, (b) rotational spring.

回転バネは、境界を軸とした回転角 θ に対して作用することとする。板端部における回転角はその支持材内部で一定とし、回転による板の面外変位により支持材が板の面外方向へ伸長、圧縮することによる垂直応力を想定する (Fig.4.2(b))。このとき、並進バネによる仕事 W_{rot} と回転による支持材内部 W_{in} が行う仕事を以下の様に定義する。

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} k_{\text{rot}} \theta^2 \quad (4.4)$$

$$W_{\text{in}} = \int_0^w \int_{-d_s/2}^{d_s/2} \overline{E_s} d_s \frac{\theta x}{h_s} dx dw \quad (4.5)$$

ここで、並進バネ定数を k_{rot} とする。これらの仕事が釣り合う条件から、回転バネによるモーメントインピーダンス $Z_{\text{rot}} = 2k_{\text{rot}}/j\omega$ は次式のように導出される。

$$Z_{\text{rot}} = \frac{\overline{E_s} d_s^3}{6j\omega h_s} \quad (4.6)$$

上記二つのモデルは支持材をバネ、板を質量としたモデル化であるが、さらに支持材の質量が板の質量に付加するモデル化を行う。板に変位が生じることによって支持材の質量

が垂直方向に行う仕事 W_{trans} と支持材内部の変位を押し戻す仕事 W_{in} を以下の様に定義する。

$$W_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m_{\text{trans}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^2 \quad (4.7)$$

$$W_{\text{in}} = \frac{1}{2} \rho_s d_s \int_0^{h_s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{z}{h_s} \right)^2 dz \quad (4.8)$$

ここで、 ρ_s は支持材の密度、 m_{trans} は並進運動の等価質量とする。これらの仕事釣り合う条件から、並進運動の等価質量による機械インピーダンス $Z_{\text{trans}} = j\omega 2m_{\text{trans}}$ は次式のように導出される。

$$Z_{\text{trans}} = j\omega \frac{2\rho_s d_s h_s}{3} \quad (4.9)$$

板に回転角が生じることによって支持材の質量が垂直方向に行う仕事 W_{rot} と支持材内部の変位を押し戻す仕事 W_{in} を以下の様に定義する。

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_{\text{rot}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)^2 \quad (4.10)$$

$$W_{\text{in}} = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^{h_s} \int_{-d_s/2}^{d_s/2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \frac{zx}{h_s} \right)^2 dx dz \quad (4.11)$$

ここで、 m_{rot} は回転運動の等価質量とする。これらの仕事釣り合う条件から、並進運動の等価質量による機械インピーダンス $Z_{\text{rot}} = j\omega 2m_{\text{rot}}$ は次式のように導出される。

$$Z_{\text{rot}} = j\omega \frac{\rho_s d_s^3 h_s}{18} \quad (4.12)$$

また、実際の支持材は支持材をバネとした共振のみならず、支持材自体の様々なモードによる共振も生じると考えられる。そこで、弾性連続体モデルは、支持材に生じる共振のなかでも影響の大きいと考えられる板の面外方向における支持材の一次元縦振動を想定し、定式化を行う。並進バネと同様に板の面外変位が接合面で一様であり、支持材内部に純縦波が生じるものとしたとき、支持材の一次元縦振動による板端部での機械インピーダンスは次式の様に導出される [21]。

$$Z_{\text{trans}} = \frac{2\rho_s \bar{c}_s d_s}{j \tan(\omega h_s / \bar{c}_s)} \quad (4.13)$$

ここで、 \bar{c}_s は支持材を伝搬する縦波の複素位相速度とする。

4.2 垂直入射振動エネルギー吸収率の算出

本節では板端部のエネルギー減衰に関する基礎的検討を行う。音響材料性能測定の際には音響管を用いた垂直入射吸音率・透過率の測定が広く行われている。ここでは垂直入射吸音率測定手法を数値解析上で薄板の曲げ波に応用し、曲げ波が垂直に入射した際に吸収される振動エネルギーの吸収率を垂直入射振動エネルギー吸収率と定義する。これを用いて音響透過損失予測に用いる支持材の解析モデルについて基礎的検討を行う。

4.2.1 解析手法

音響管による吸音率測定法として、伝達関数法 (2 マイクロホン法) による測定が広く行われている。これは、入射波と反射波を2本のマイクロホン間の伝達関数を用いて分離し、複素音圧反射係数から垂直入射吸音率を求める手法である。ここでは、垂直入射振動エネルギー吸収率算出にあたり、曲げ波の伝搬について伝達関数法を応用する。

まず、十分に細いリボン状の薄板を想定する (Fig.4.3)。この板における曲げ波の伝搬は、梁の曲げ波と同様に伝搬方向 x のみに関する4階の偏微分方程式で表され、一般解は曲げ波における波数 k_B を用いて下式のように与えられる (時間項を省略)。

$$w = A_1 e^{-jk_B x} + A_2 e^{jk_B x} + A_3 e^{-k_B x} + A_4 e^{k_B x} \quad (4.14)$$

ここで、 k_B は曲げ波の波数である。前の2項はそれぞれ正負方向に伝搬する進行波を表し、後ろの2項は境界近傍に存在する境界近接波を表す。よって、各点 x_i における変位を w_i とするとき、 $\{\mathbf{A}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ は以下のように求めることができる。

$$\{\mathbf{A}\} = [\mathbf{D}]^{-1} \{\mathbf{w}\} \quad (4.15)$$

ここで、 $\{\mathbf{w}\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ とし、 $[\mathbf{D}]$ は以下のように表されるものとする。

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} e^{-jk_B x_1} & e^{jk_B x_1} & e^{-k_B x_1} & e^{k_B x_1} \\ e^{-jk_B x_2} & e^{jk_B x_2} & e^{-k_B x_2} & e^{k_B x_2} \\ e^{-jk_B x_3} & e^{jk_B x_3} & e^{-k_B x_3} & e^{k_B x_3} \\ e^{-jk_B x_4} & e^{jk_B x_4} & e^{-k_B x_4} & e^{k_B x_4} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

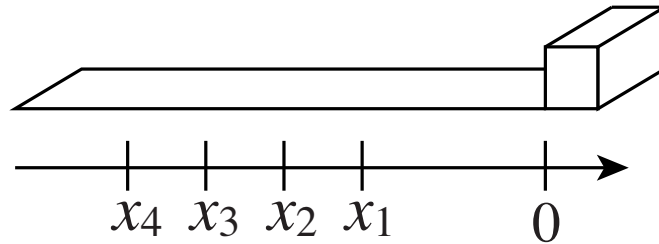


Fig. 4.3: Schematic of analytical model.

これを解き，複素音圧反射率 $r = A_1/A_2$ を用いてエネルギー吸収率 α_n は次式で求められる。

$$\alpha_n = 1 - \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^2 \quad (4.17)$$

検討にあたり，リボン状の薄板の振動解析を行い4点の変位を求めることでベクトル $\{\mathbf{A}\}$ を求め垂直入射エネルギー吸収率の算出を行う。なお，集中バネ支持モデルによる支持の場合は端部の機械インピーダンスとモーメントインピーダンスを板要素に局所的に与えるため，そのときの垂直入射振動エネルギー吸収率は解析的に求めることができる[21]。

ここで，この算出手法の妥当性の検討として，Fig.4.4 に集中バネ支持モデルを用いた数値解析結果から上記算出手法を用いて算出した垂直入射振動エネルギー吸収率(赤破線)と数式的に算出した垂直入射振動エネルギー吸収率(黒実線)の算出例を示す。集中バネ支持モデルとして弾性連続体モデルを用いた。200 Hz 付近の極大点は板を質量，支持材をバネとした共振を表し，1600 Hz，3200 Hz 付近の極大値は支持材の縦波によるモードを示す。極大点付近，極小点付近ともに両者は良い対応を示し，板サイズの有限性の影響や要素分割による数値誤差は非常に小さく一次元伝搬しているものと言える。

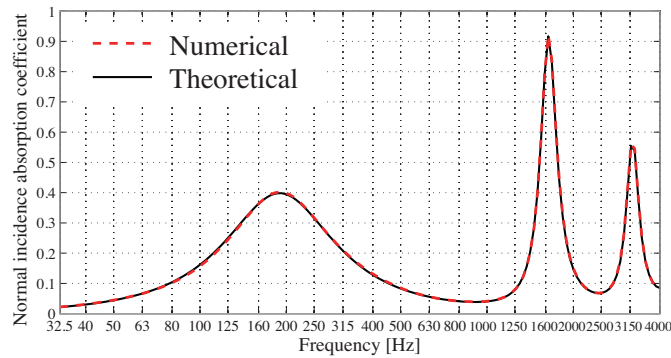


Fig. 4.4: Comparison between numerical model and theoretical.

4.2.2 解析条件

1 m × 20 mm のリボン状の板材の一方の端辺を周波数で一定の加振力により振動させ、他方の端部両面には支持材を適合させ、さらに支持材の対面を拘束するモデルを想定する (Fig.4.5)。用いる板材として、厚さ 10 mm のガラスに相当する物性値を与え、支持材として三次元弾性体にパテを想定した物性値を与える。基本的な物性値は Tab.4.1 のとおりとし、JIS A 1416:2000 に規定されているパテ支持に関する記述を参考に支持材厚さ 5 mm、接合幅 (支持材充填部の深さ) 15 mm を基本的寸法とした。また、集中バネ支持モデルによる理論値の算出には連続弾性体モデルを採用した。

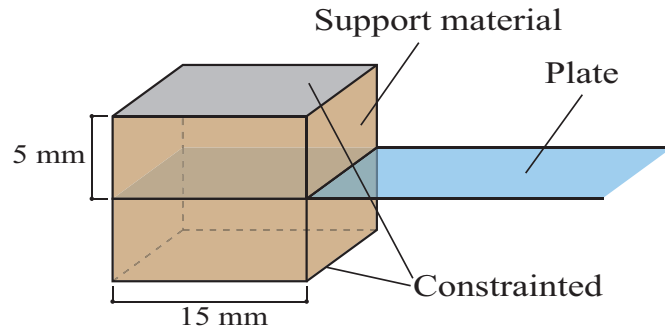


Fig. 4.5: Default settings of the analytical model.

Tab. 4.1: Physical properties and directions of the plate and the support material.

Plate	Size	2 m × 20 [mm]
	Thickness	0.01[m]
	Young's module	7.5×10^{10} [N/m ²]
	Density	2500 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.22
	Loss factor	0
Support material	Young's module	1.0×10^6 [N/m ²]
	Density	1000 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.25
	Loss factor	0.5

4.2.3 適合条件による影響

変位適合条件

三次元弾性体と板の変位適合条件に関する検討を行う。Fig.4.10 に、板の面外変位と面内変位の適合 (Fixed), 板の面外変位のみの適合 (Slip), 集中バネ支持モデルの計算結果に相当する理論値 (Spring) を示す。ただし、三次元弾性体の板との適合面の対面の拘束条件として、面外・面内変位を適合させた条件においては固定支持とし、面外変位のみを適合させた条件においては板の面外方向変位のみ拘束した。

両適合条件とも、板を質量、支持材をバネとしたバネマス共振に伴う低周波数での吸収率の増加と、支持材の縦波モードの共振による高周波数域での吸収率の増加をよく捉えているといえ、概ね集中バネ支持モデルと対応している。板の面外変位の運動によるエネルギー損失が支配的となっていることがわかる。

ただし、バネマス共振の周波数は両適合条件とも集中バネ支持モデルよりわずかに上昇し、ピークが急峻となっている。これは、並進運動に対する垂直の方向に生じるひずみによる見かけ上の並進バネ定数の増加によるものであると考えられる。また、支持材の縦波のモード共振によるエネルギー吸収率は集中バネ支持モデルよりも低下している。集中バネ支持モデルは並進運動時の変位が適合面において一定の分布をもっていると仮定しているのに対し、実際の弾性支持では曲げ波の波長や回転運動により変位の分布が生じているためであると考えられる。

ここで、各共振の生じている周波数における振動姿態を把握するため、それぞれの適合条件により片面のみ接合させた三次元弾性体と平板の振動変位例を Fig.4.6, Fig.4.7, Fig.4.8, Fig.4.9 に示す。一自由度のバネマス共振周波数付近である 200 Hz と、支持材のモード共振周波数付近である 4000 Hz の振動分布であり、色付けは変位の絶対値を示している。なお、振動姿態の可視化のため変位は支持材寸法に対して 200 Hz では 10 倍に、4000 Hz では 1000 倍にそれぞれ拡大している。200Hz 振動時の変位をみると、いずれの振動姿態も、板面外方向の伸縮に加え面内方向への変位も観察されるが、概ね面外方向に変位の分布がみられる。また、面外方向変位のみ適合させた Slip 条件では拘束面における変位が確認できる。4000 Hz の振動分布をみると、拘束面に垂直な辺がいずれも概ね逆位相で振動していることからモードが生じていることが確認できるが、集中バネ支持モデルでは表現出来ない非常に複雑な振動姿態となっていることが観察される。

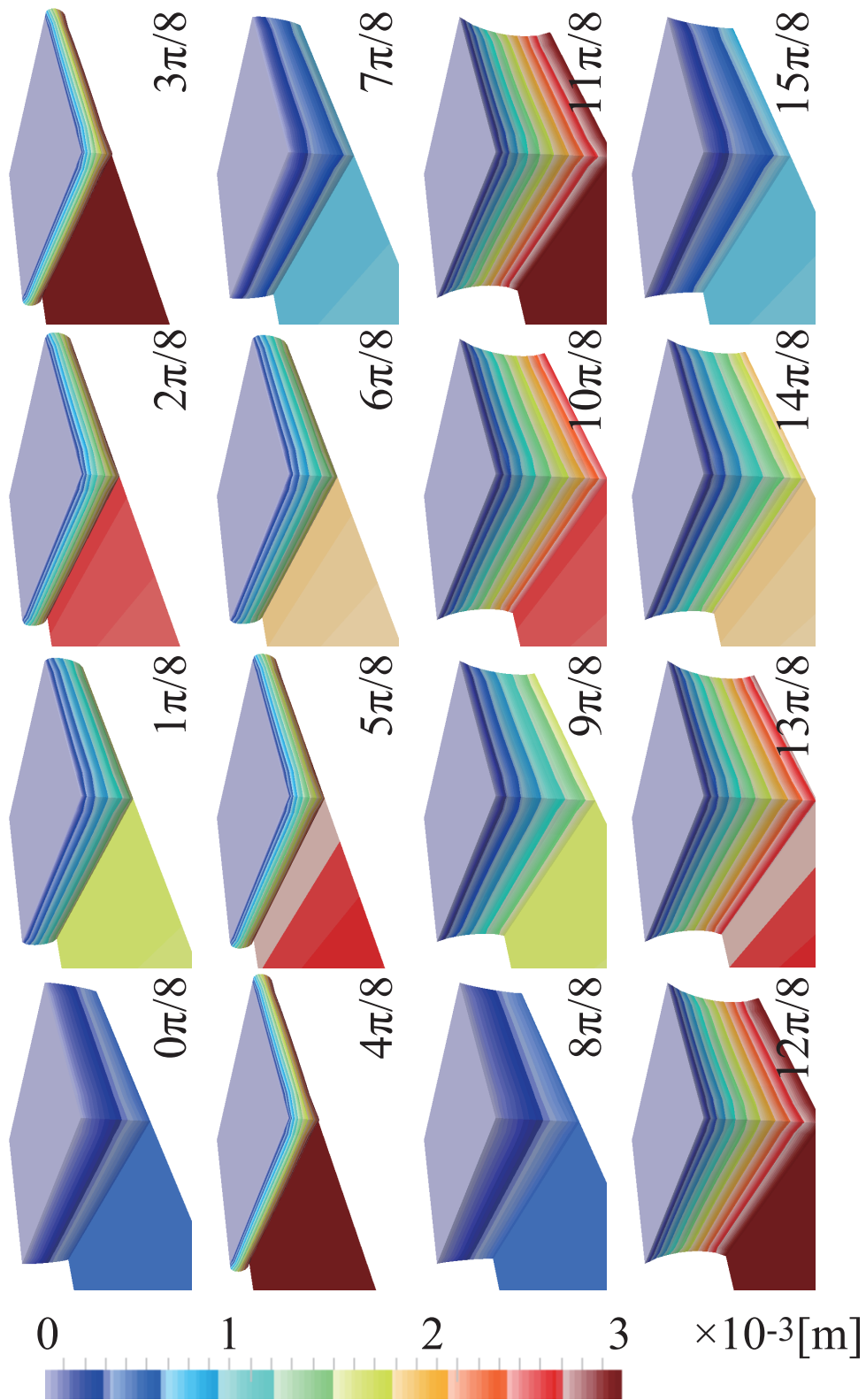


Fig. 4.6: Displacement field of three-dimensional elastic material and plate at 200 Hz. Jointed for out-of-plane displacement and in-plane displacement.

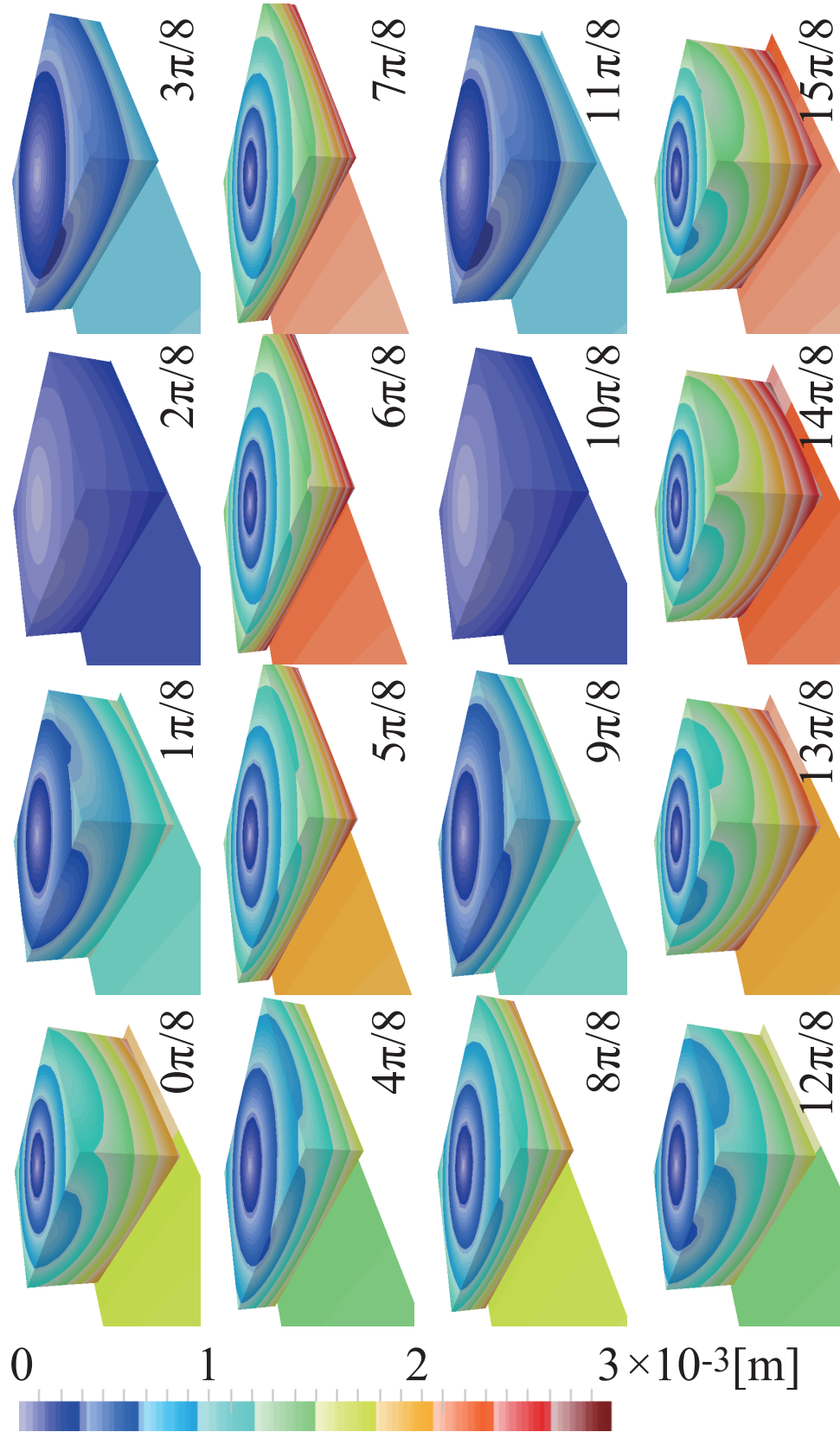


Fig. 4.7: Displacement field of three-dimensional elastic material and plate at 200 Hz. Jointed for out-of-plane displacement.

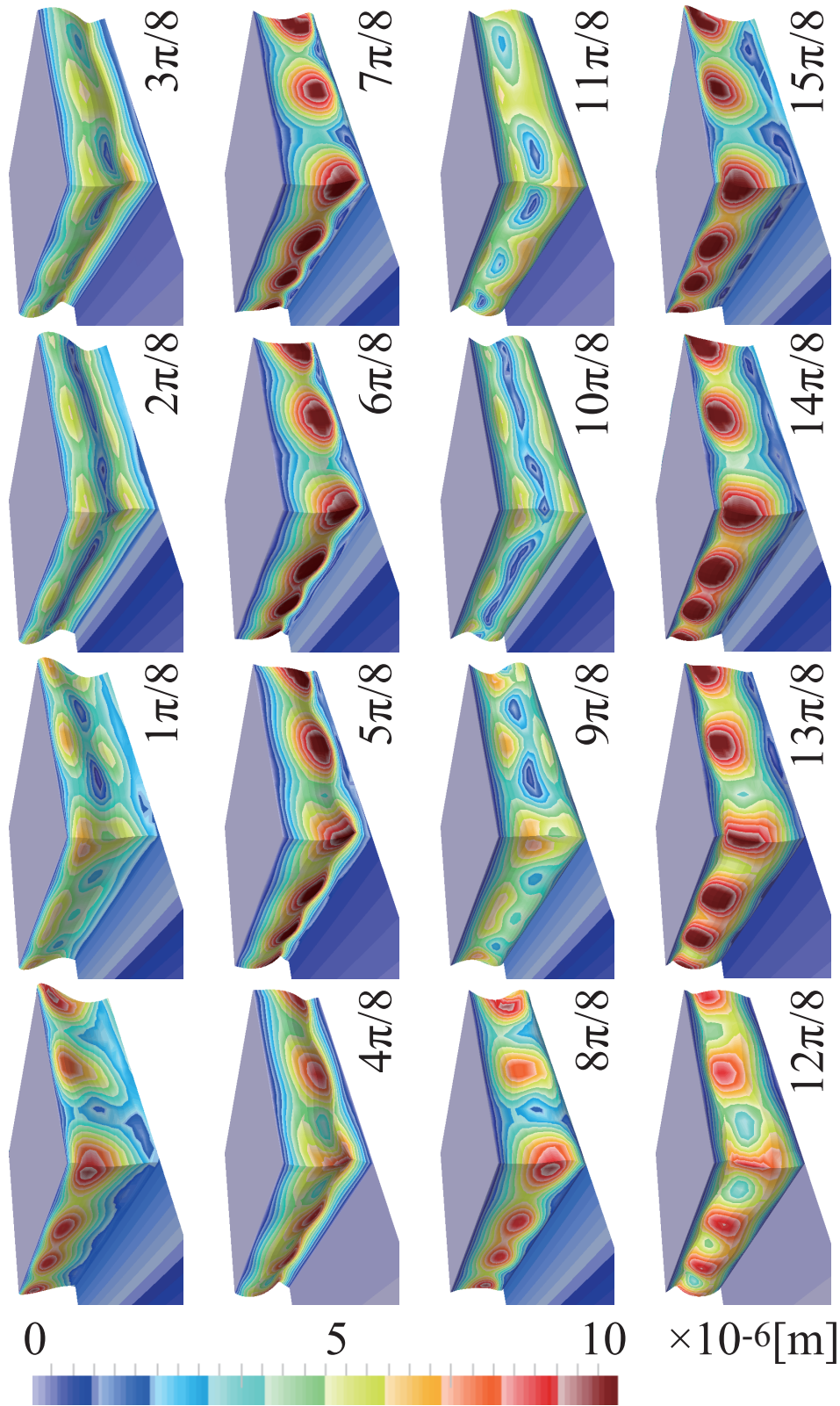


Fig. 4.8: Displacement field of three-dimensional elastic material and plate at 4000 Hz. Jointed for out-of-plane displacement and in-plane displacement.

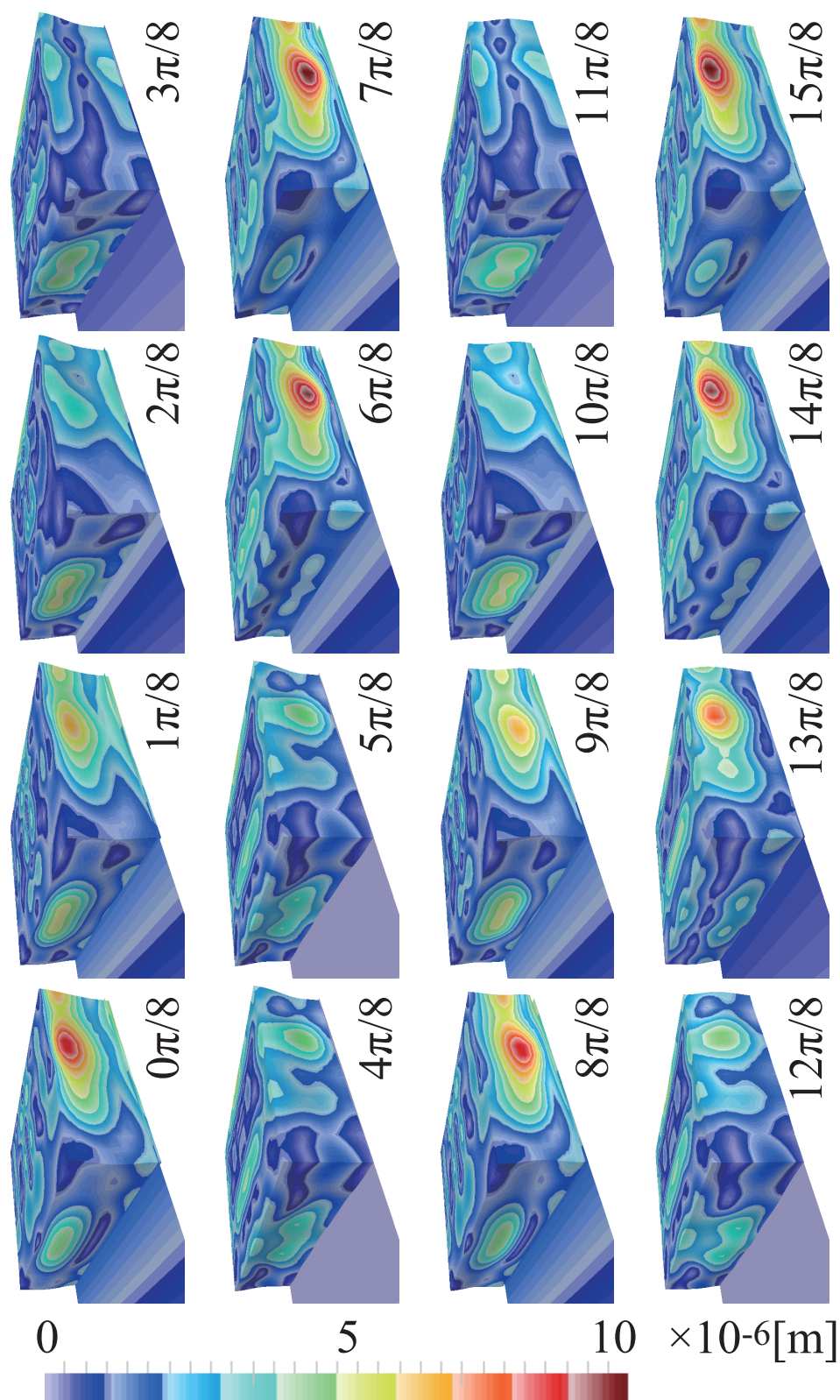


Fig. 4.9: Displacement field of three-dimensional elastic material and plate at 4000 Hz. Jointed for out-of-plane displacement.

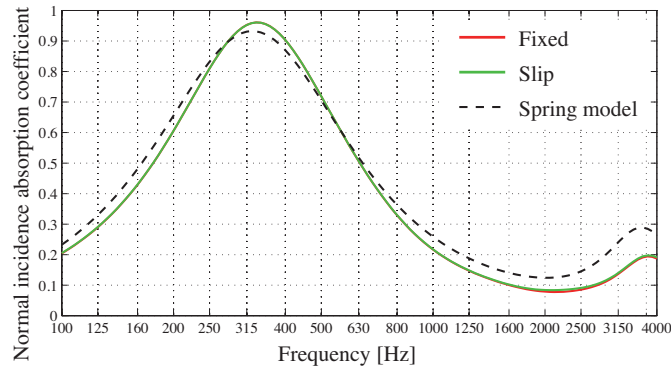


Fig. 4.10: Comparison between coupling conditions. The value for a spring model is also shown as a reference.

板の片側 / 両側の適合

支持材を板の片面に適合させた場合と両面に適合させた場合について Fig.4.11 に示す。破線は集中バネ支持モデルによる理論値を示す。片面に適合させた場合と比較し、両面に適合させると板を質量、支持材をバネとしたときのバネマス共振の周波数が異なっていることがわかる。これは、両面適合の場合には質量に対し二つのバネが取り付けられていることに相当するためである。よって、バネマス共振のピークは概ね片面適合の $\sqrt{2}$ 倍となっている。

また、支持材自体のもつモードは変化しないため高周波数域のモード共振の周波数には大きな影響を与えないが、板に作用するエネルギー減衰の効果は両面適合の場合、2 倍近い値となっている。

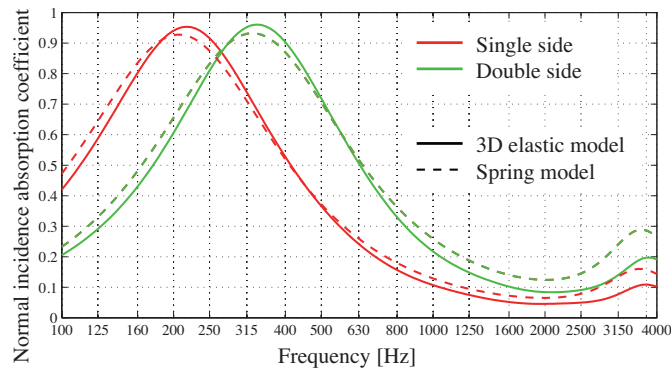


Fig. 4.11: Comparison between single-side and double-side support conditions.

4.2.4 寸法による影響

板材の厚み

寸法による影響の検討として、まずガラスの厚みによる影響を検討したエネルギー吸収率を Fig.4.12 に示す。板厚の増加に伴い、板材を質量、支持材をバネとしたバネマスの一自由度共振系の質量が増加することによる共振周波数の低下がみられる。また、板厚が大きくなるにつれ、支持材のモードによる共振に伴うエネルギー吸収率は小さくなる傾向を示す。支持材のモード共振による損失エネルギーは板厚に依らないのに対し、板材の運動エネルギーは板が厚くなるにつれ増加するため、減衰が生じにくくなっているものと考えられる。ただし、三次元弾性体支持の場合には先述のように板の面外方向に対する縦波の一次元的伝搬がくずれるため、集中バネ支持モデルよりもエネルギー吸収率は小さくなる。

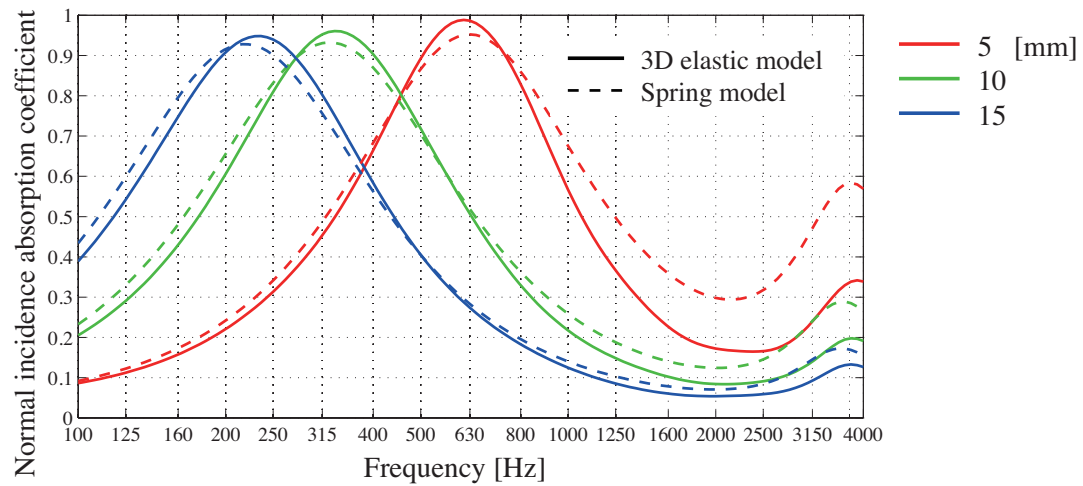


Fig. 4.12: Effects of the plate thicknesses.

支持材の厚み

支持材の厚みを変化させたときのエネルギー吸収率の変化を Fig.4.13 に示す。厚みの増加に伴い、バネマス共振におけるバネの機械インピーダンスが低下し、バネマス共振の周波数が低下している様子がわかる。また、支持材の厚み方向に生じるモードの周波数も厚み増加に伴い低下するが、その際、エネルギー吸収率は厚い程増加している。これらの傾向は支持モデル間で概ね一致している。

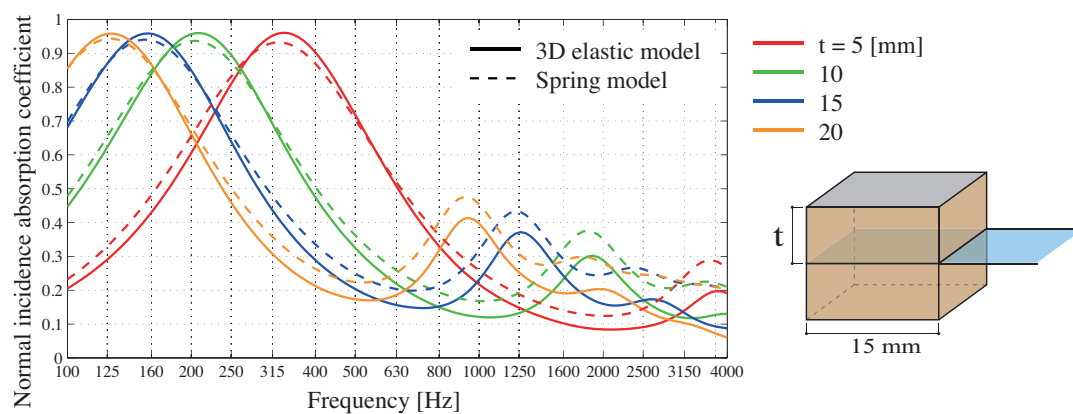


Fig. 4.13: Effects of the thicknesses of the support material.

支持材の接合幅

支持材の接合幅を変化させたときのエネルギー吸収率の変化を Fig.4.14 に示す。接合幅の増加に伴い、並進運動のバネマス共振の生じる周波数や支持材のモード共振時のエネルギー吸収率に関し、集中バネ支持モデルと三次元弾性体支持モデルで大きく傾向が異なることがわかる。ここで、接合幅を 60 mm としたときの 4000 Hz における一周期での変位分布を Fig.4.15 に示す。試料曲げ波の波長と支持材の接合幅の関係により、接合領域の端部において逆相に近い振動分布をもっていることがわかる。集中バネ支持モデルでは 4000 Hz 付近において一定の面外方向変位をもった縦振動による共振を仮定しているため接合幅増加に伴うエネルギー吸収率の増加が三次元弾性体支持モデルでは小さくなっている。

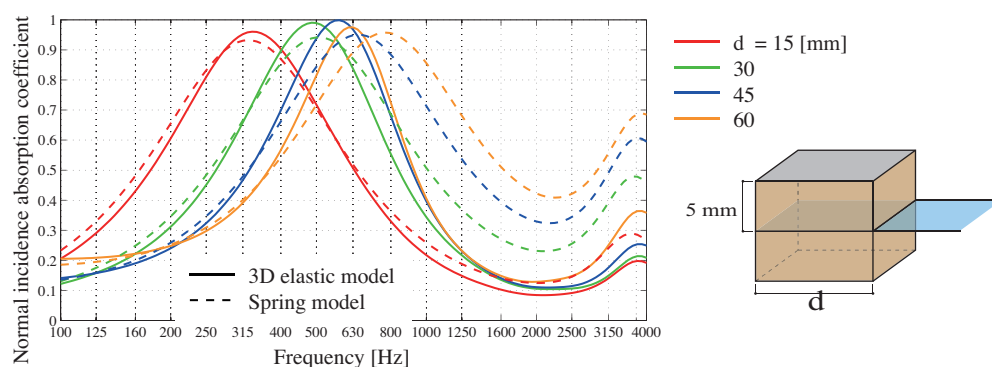


Fig. 4.14: Effect of connected widths of the support material.

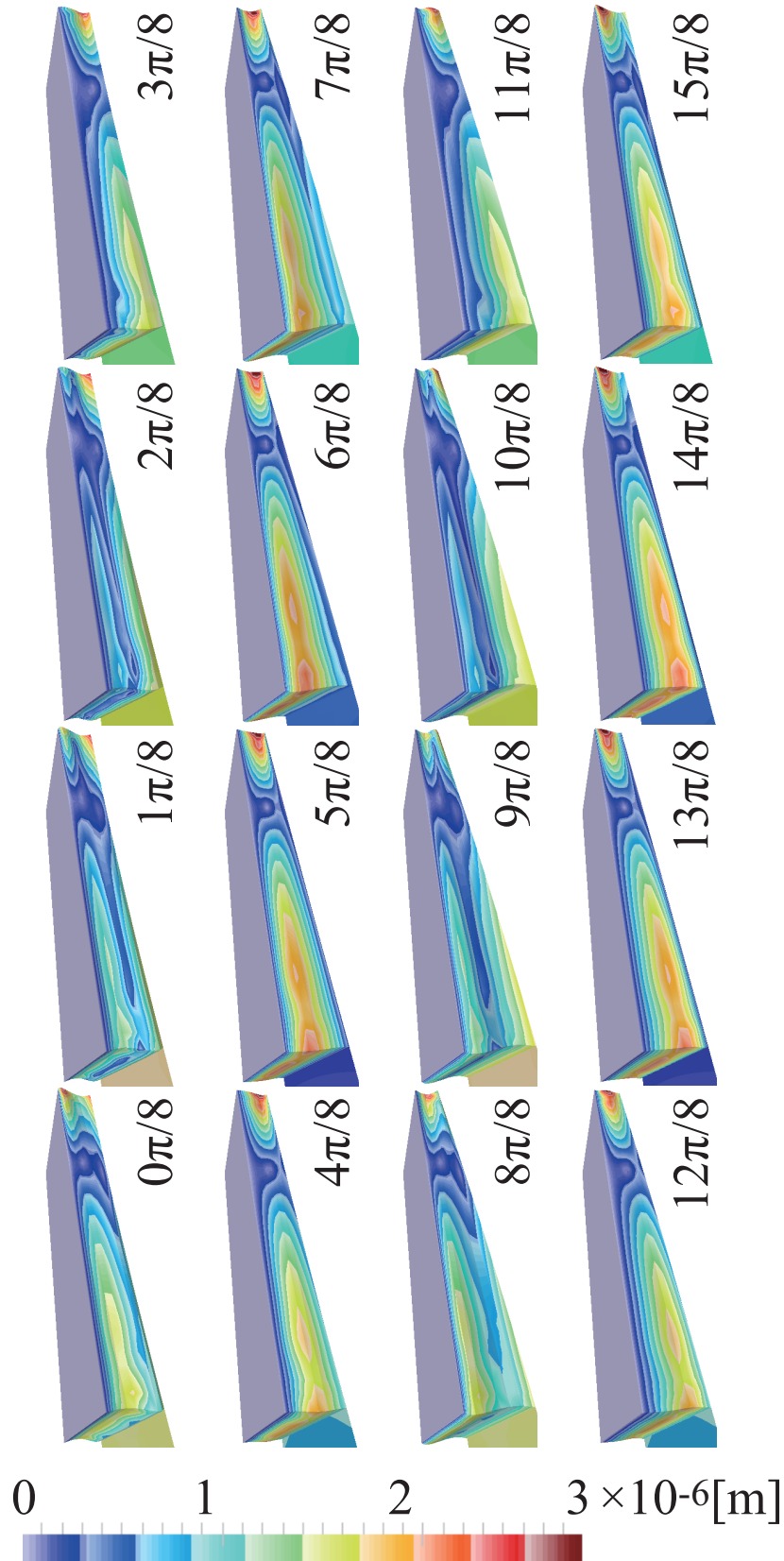


Fig. 4.15: Displacement field of three-dimensional elastic material and plate at 4000 Hz.

4.2.5 支持材物性による影響

ヤング率

支持材のヤング率を変化させたときのエネルギー吸収率を Fig.4.16 に示す。

ヤング率の増加に伴う並進運動のバネマス共振周波数の増加が確認できる。また、ヤング率が 10^8 や 10^9 N/m^2 の並進バネ共振以下の低周波数域において集中バネ支持モデルのエネルギー吸収率は 0.1 以上となっているが、これは回転バネによる共振の影響である。三次元弾性体支持モデルの場合も回転バネ相当の吸音エネルギーの増加が確認できるが、その値は集中バネ支持モデルと異なり、特にヤング率 10^8 N/m^2 の場合に乖離が大きい。また、ヤング率 10^9 N/m^2 でも回転バネによる共振周波数が一致していない。集中バネ支持モデルの導出にあたっては板の面外方向の縦歪みによる応力のみ考慮しているのに対し、三次元弾性体支持モデルでは弾性体のせん断力が作用し、また面内方向への運動もみられることによりこれら吸収率の乖離が生じているものと考えられる。

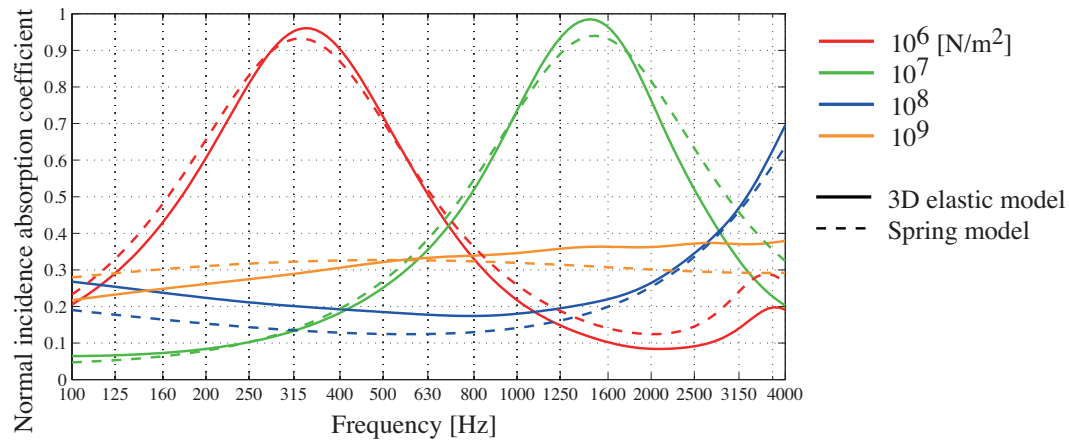


Fig. 4.16: Effects of young's moduli of the support material.

損失係数

支持材の損失係数を変化させたときのエネルギー吸収率を Fig.4.17 に示す。並進運動のバネマス共振において、損失係数が増加することによりエネルギー吸収率が増加するとともに共振周波数が若干上昇する。さらに、損失係数が小さい場合には支持材のモードによる共振のピークが鋭く現れる。ただし、その周波数は集中バネ支持モデルよりも高い。縦振動を想定している集中バネ支持モデルとの乖離が損失係数の小さい場合には顕著に現れることがわかる。

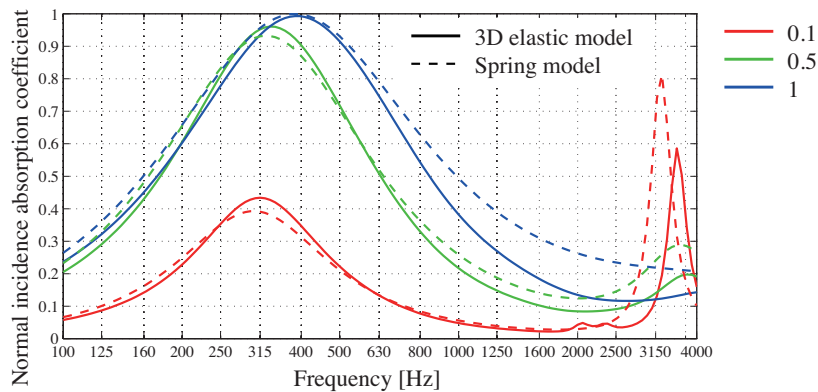


Fig. 4.17: Effects of damping coefficients of the support material.

密度

支持材の密度を変化させたときのエネルギー吸収率を Fig.4.18 に示す。ガラスのもつ質量と比較し支持材のもつ質量が小さいため、並進運動のバネマス共振には影響はほとんどみられない。一方で、支持材のモードによるピークに対する影響は大きく、密度の大きい場合により低い周波数で高い値となるピークが生じる。

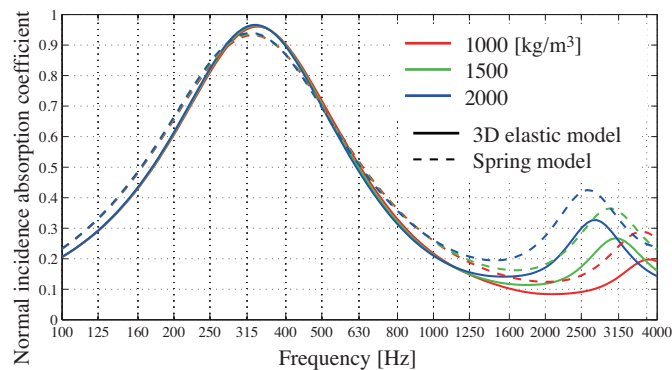


Fig. 4.18: Effects of densities of the support material.

ポアソン比

支持材のポアソン比を変化させたときのエネルギー吸収率を Fig.4.19 に示す。なお、集中バネ支持モデルでは板の面内方向への歪みを仮定していないためポアソン比は考慮されない。集中バネ支持モデルによる理論値を黒破線で示す。

ポアソン比が 0.5 に近づくにつれ急激に並進運動のバネマス共振の上昇がみられるが、これは並進運動に対する垂直の方向に生じるひずみが増加することによる見かけ上の並進バネ定数の増加によるものである。本研究における支持材のポアソン比は 0.25 としたが、この場合には集中バネ支持モデルの共振周波数と概ね一致していることがわかる。

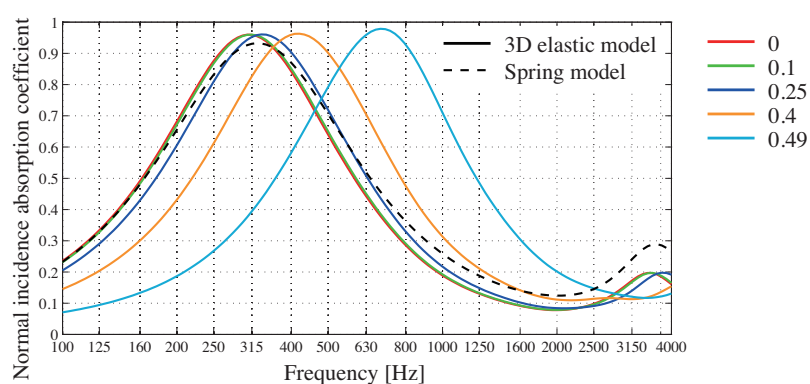


Fig. 4.19: Effects of poisson's ratios of the support material.

4.3 音響透過損失値に与える影響

本節では、集中バネ支持モデルによる支持と三次元弾性体支持モデルによる支持について、算出される音響透過損失の比較検討を行う。

4.3.1 解析条件

$900 \times 900 \text{ mm}^2$ の開口部に試料を設置したモデルを想定する (Fig.4.20)。ニッシェは深さ 100 mm のフラットニッシェとし、ニッシェ中央に試料を設置する。ここで、試料サイズは、基本的に空気と接触している面を一定の $900 \times 900 \text{ mm}^2$ とし内法を固定した条件で検討を行う。よって、三次元弾性体支持の場合本検討ではバフルの壁内に試料の一部が埋め込まれるような形を想定する。

板周辺部の端 15 mm の接合幅、厚さ 5 mm をもった支持材として両面の四周に適合させる。三次元弾性体支持モデルでは、一面を薄板と適合させ (Fig.4.21)、その対面を剛壁を固定とする。他の面についての拘束は行わないため、三次元弾性体の外側に空隙がある状態をモデル化している。なお、三次元弾性体と空気の連成は行わない。解析に用いる板材として厚さ 10 mm のガラスを想定し、支持材としてパテ、ガスケット支持を想定した物性値を与える (Tab.4.2)。集中バネ支持モデルに関しては、連続弾性体モデルを採用し解析を行う。

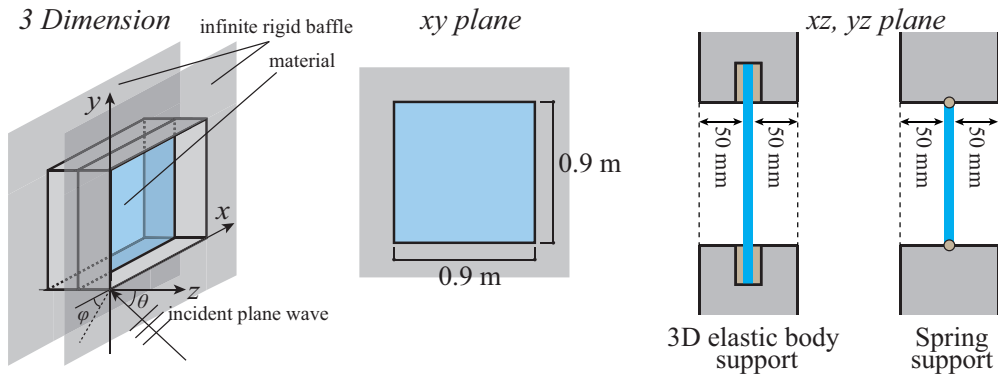


Fig. 4.20: Schematics of the numerical models.

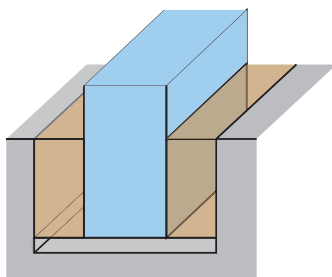


Fig. 4.21: A schematic of three-dimensional support model.

Tab. 4.2: Physical properties and directions of the plate and the support material.

Plate	Size	$0.9 \times 0.9 \text{ [m}^2\text{]}$
	Thickness	0.01 [m]
	Young's modules	$7.5 \times 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$
	Density	$2500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
	Poisson's ratio	0.22
	Loss factor	0.002
Support material	Young's modules	$1.0 \times 10^8 \text{ [N/m}^2\text{]}$
	Density	$1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
	Poisson's ratio	0.25
	Loss factor	0.5

4.3.2 変位適合条件

面外変位と面内変位を適合させた支持条件を Fixed，面外変位のみ適合させた条件を Slip とする。これら二つの変位適合条件および集中バネ支持モデルにより算出したの垂直入射・ランダム入射音響透過損失を Fig.4.22 に，また 1/3 オクターブバンド換算値を Fig.4.23 に示す。

非共振周波数において，垂直入射時は質量則に，ランダム入射時は Sewell の理論式の値に従う傾向にあり，また板共振によりディップの生じる周波数に関してもよく対応している。ただし，端部のエネルギー損失に影響を与える共振時のディップの深さに関しては若干の差がみられ，中低域の多くの周波数において Fixed 条件が最もディップが浅く，次いで Slip 条件，そして集中バネ支持モデルが最もディップが深い傾向にあることがわかる。これらの影響により，1/3 オクターブ換算値では中低音域の多くの周波数で 1 dB 程度の差が生じている。

そこで，系の内部エネルギー吸収率を Fig.4.24 に示す。内部エネルギー吸収率は吸音率から透過率を引いた値として表される。集中バネ支持モデルが最も急峻な吸収率をもっていることから減衰が小さく，Fixed 条件で最も減衰が大きいといえる。三次元弾性体支持では板の面内変位方向にも運動が生じることによる影響が Fixed 条件で顕著に表れているといえる。

なお，現実の支持条件を踏まえ，以降の検討では Fixed 条件を用いることとする。

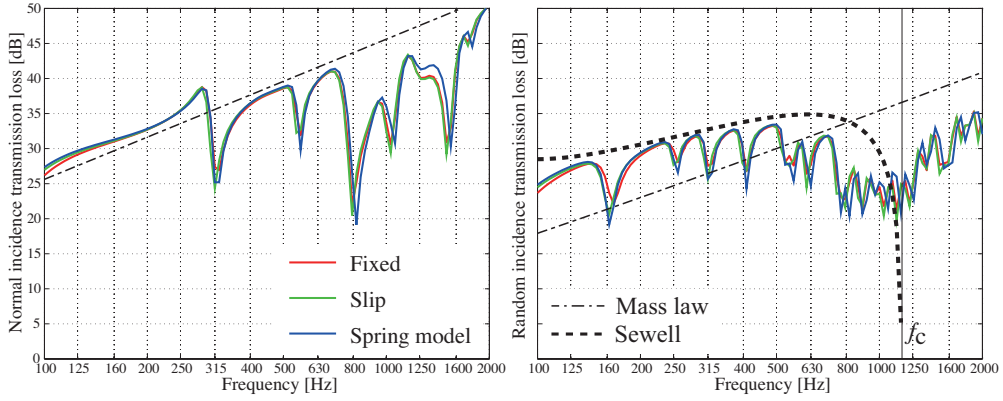


Fig. 4.22: Comparison between two support models : three dimensional elastic model and spring model at 1/24 oct. center frequency.

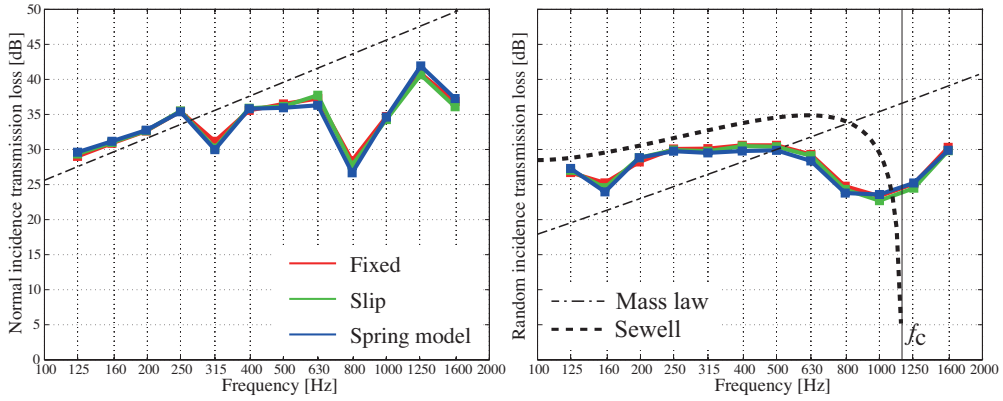


Fig. 4.23: 1/3 oct. band values are calculated by averaging the 1/24 oct. values.

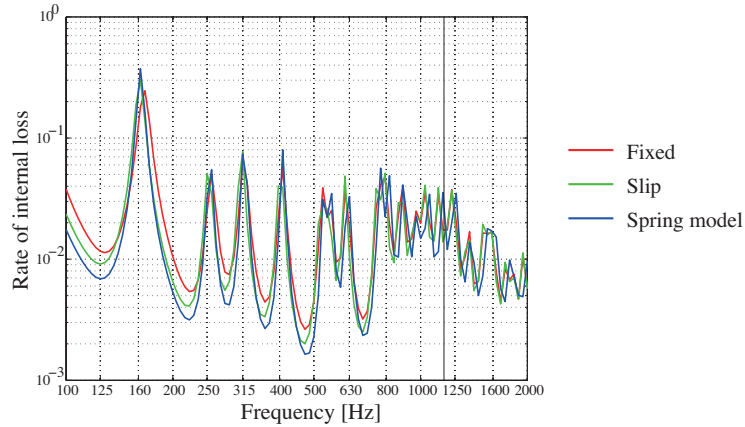


Fig. 4.24: Comparison of internal losses between three-dimensional elastic model and spring model. In 3D-elastic model, two coupling conditions are considered.

4.3.3 支持材寸法

支持材の厚み

支持材の厚みを変化させたときの音響透過損失の変化を Fig.4.25 に示す。いずれの厚み、モデルにおいても Sewell の理論式の値に従う傾向が確認されるが、高周波数域では厚みの増加に伴い透過損失の増加がみられる。これは、Fig.4.26 に示す支持材の垂直入射振動エネルギー吸収率の理論値でわかる通り、高周波数域でエネルギー吸収が生じやすいためである。さらに、三次元弾性体支持モデルでは中低音域のディップが集中バネ支持モデルよりも浅くなっていることが先程の検討と同様に確認できる。また、高周波数域でのモデル間での差は小さい。いずれのモデルでも支持材の厚みが増加すると並進インピーダンスの低下による共振周波数のわずかな低下が確認できるが、その傾向は三次元弾性体支持条件で顕著である。また、厚みの増加に伴い集中バネ支持モデルの共振周波数に一致する傾向にあることから、支持材が厚い場合には並進方向の運動による影響がより支配的となることが考えられる。

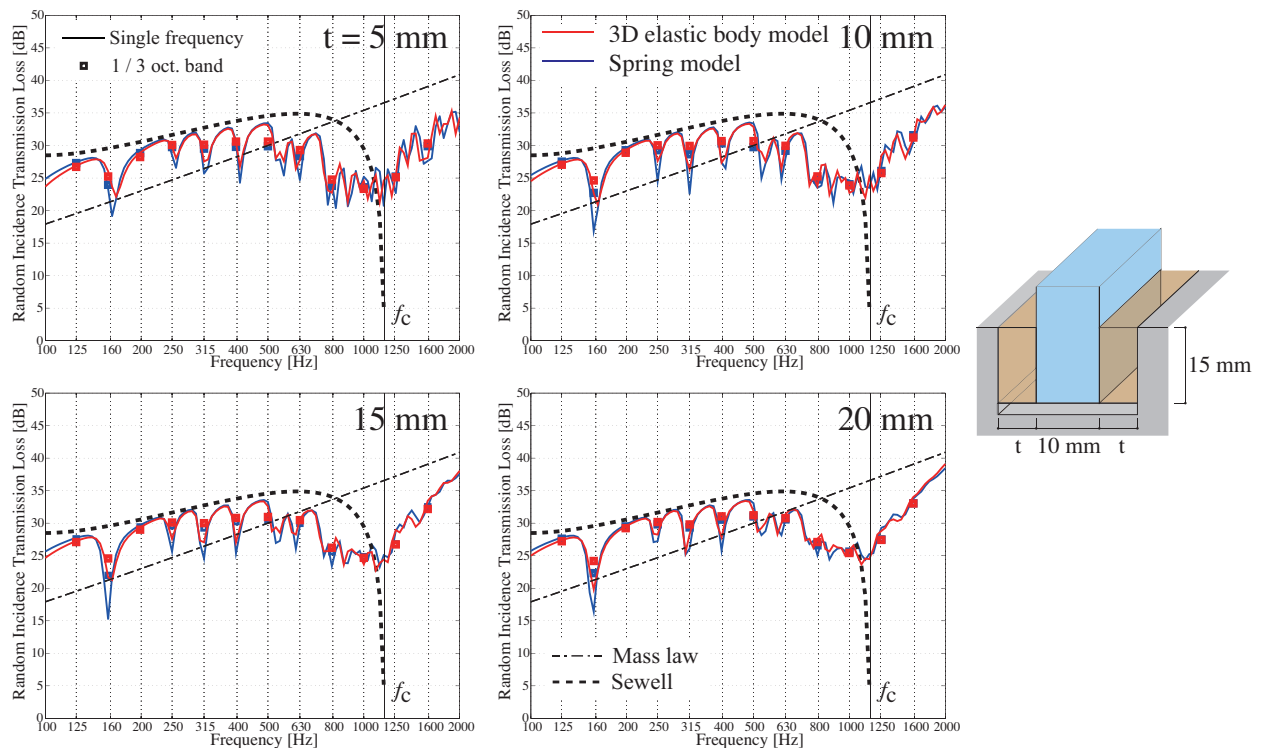


Fig. 4.25: Comparison between support models with different thicknesses of the support material.

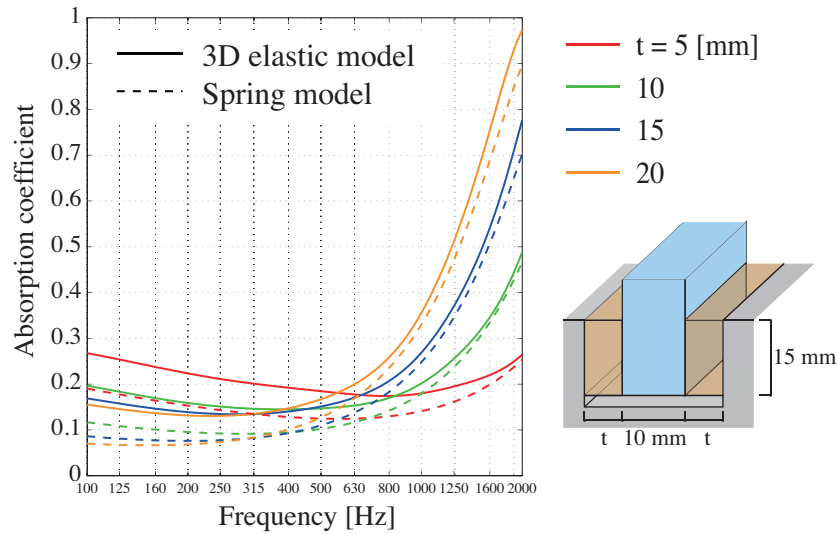


Fig. 4.26: Comparison of normal-incidence absorption coefficients with different thicknesses of the support material.

支持材の接合幅

支持材の接合幅を変化させたときの音響透過損失の変化を Fig.4.27 に示す。なお、このときの垂直入射エネルギー吸収率を Fig.4.28 に示す。接合幅が小さい場合には集中バネ支持モデルと三次元弾性体支持モデルで比較的良好な対応を示しているのに対し、接合幅が大きくなるとディップの生じる周波数に乖離が生じ、三次元弾性体支持モデルがより低い周波数で板共振が生じていることがわかる。これは、モデル化に伴う板試料の実質的なサイズの違いに起因しているものと考えられる。つまり、集中バネ支持モデルは板試料のサイズが常に一定であるのに対し、三次元弾性体支持モデルでは接合幅分板サイズが増加するようなモデルを想定しているため、板サイズの増加により共振周波数の低下が起こっているものと推察される。

音響透過損失測定において測定する板材によっては接合幅を大きくとる場合もあるため、このような解析モデルによる算出結果の違いは重要な検討項目であるといえる。そこで、接合幅について次々項でより詳細な検討を行うこととする。

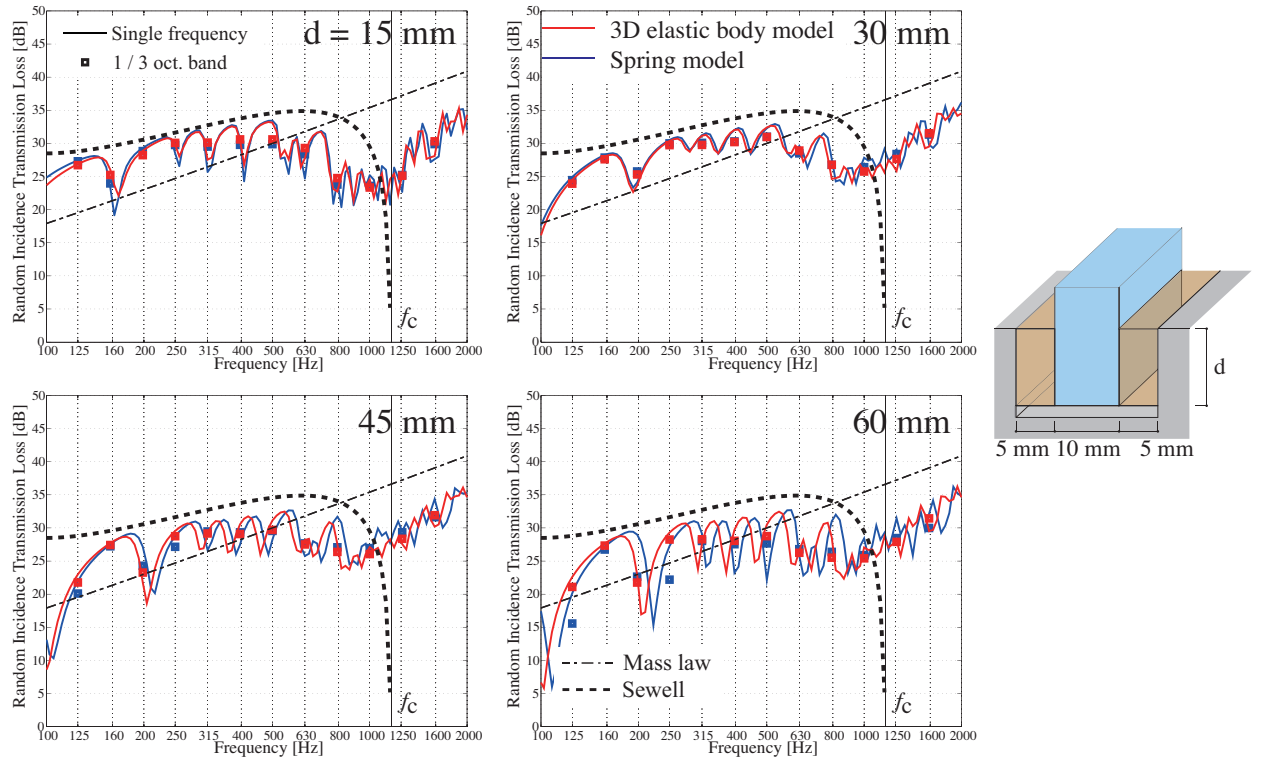


Fig. 4.27: Comparison between two support models with different connected widths of the support material.

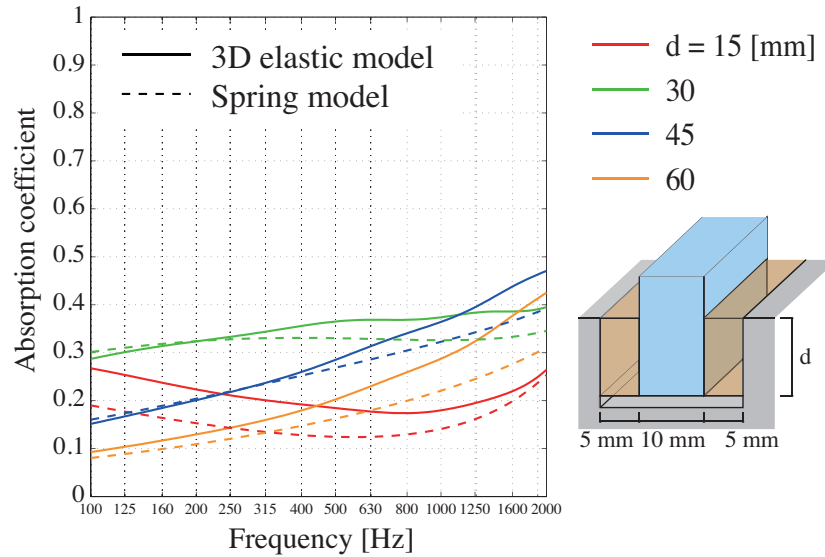


Fig. 4.28: Comparison of normal-incidence absorption coefficients with different connected widths of the support material.

4.3.4 支持材物性

支持材のヤング率

支持材のヤング率を変化させたときの音響透過損失の変化を Fig.4.29 に示す。両モデルとも、ヤング率が小さくなるにつれ端部損失の影響が大きくなり共振によるディップが浅くなることがわかる。また、ヤング率が小さい場合にはコインシデンス効果の生じる周波数が上昇する。山口の行った支持材の物性値測定結果 [44, 45] からパテやシリコンのヤング率はこのオーダーの物性値の変化は十分に考えられる。支持材のヤング率は音響透過損失測定結果に与える影響は大きいため、支持材のヤング率の精度良い同定は数値解析、実験の両面において重要といえる。

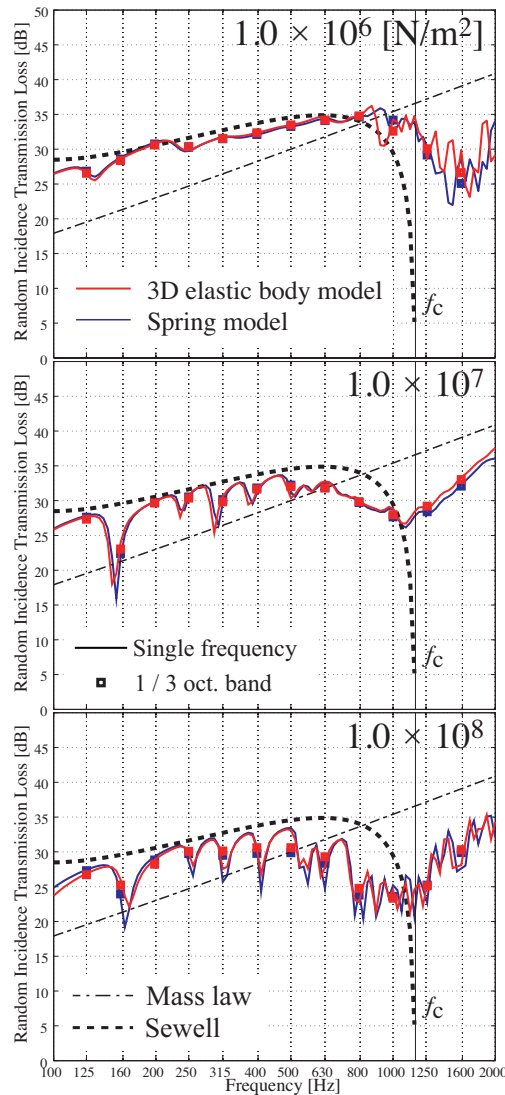


Fig. 4.29: Effects of young's moduli of the support material.

支持材の損失係数

支持材の損失係数を変化させたときの音響透過損失の変化を Fig.4.30 に示す。いずれのモデルに関しても、損失係数の増加によりディップが浅くなることがわかるが、損失係数が小さいときモデル間でディップの深さが乖離する傾向にある。これは損失係数が小さいときその急峻なディップをどの程度捉えているかに依存するものと考えられる。また、非共振周波数において損失係数が音響透過損失算出値に与える影響は両モデルとも小さい。また、損失係数が高い場合には抵抗制御により振動変位が小さくなるため、内部損失によるエネルギー吸収は比較的小さくなる (Fig.4.31)。

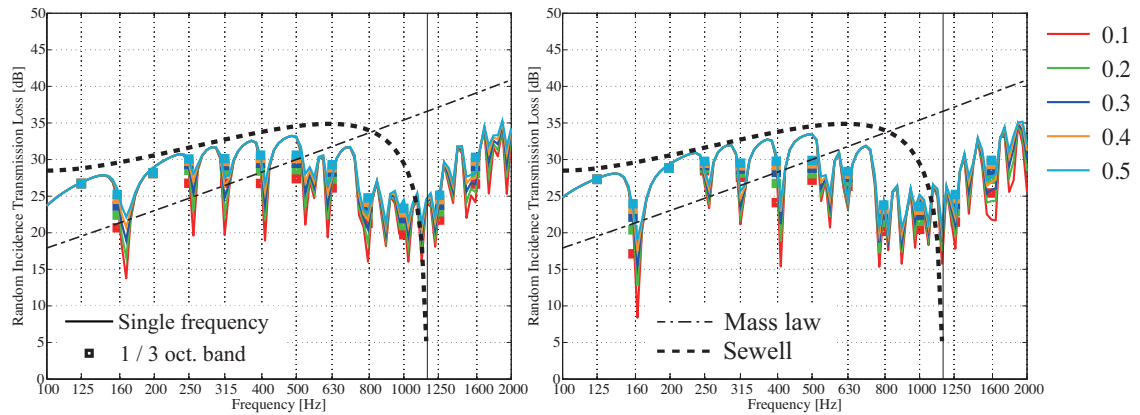


Fig. 4.30: Effects of loss factors of the support material. Left: 3D elastic material support model, Right: Spring model.

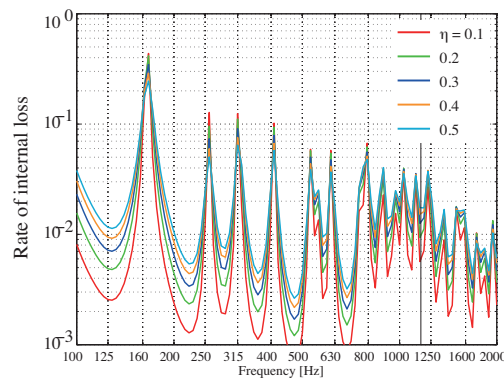


Fig. 4.31: Comparison of rate of internal losses between different loss factors. 3D elastic material support model is adopted for the edge support.

支持材の密度

支持材の密度を変化させたときの音響透過損失の変化を Fig.4.32 に示す。本検討における支持材の質量は板材の質量と比較し十分大きく板材と支持材のバネマス共振における支持材の密度の影響は非常に小さいため、音響透過損失算出結果に関しても影響はみられない。また、支持材のモードによる共振周波数に関しては支持材の密度の影響が大きいですが、本検討の解析周波数外の高周波数域であるため、その影響も観察されない。

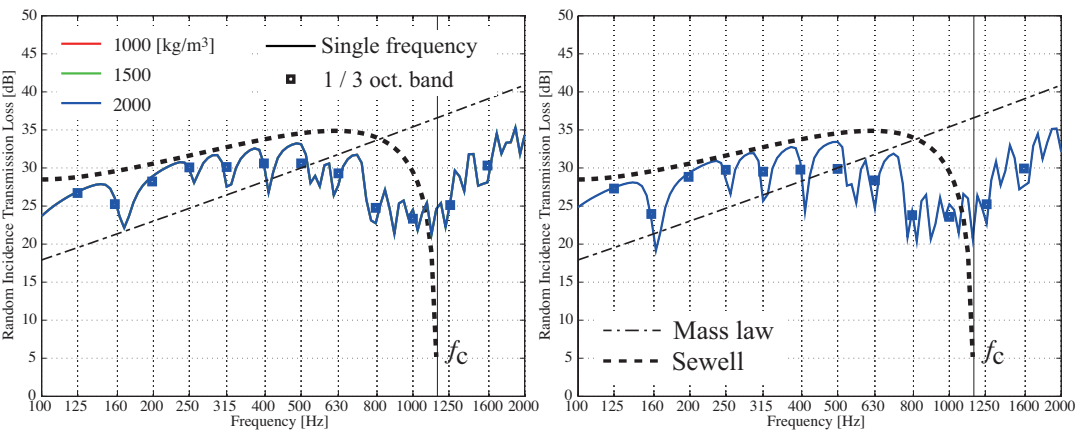


Fig. 4.32: Effects of densities of the support material. Left: 3D elastic material support model, Right: Spring model.

4.3.5 支持材位置

先述の支持材の適合幅の検討の際、実質的な板のサイズがモデル間で異なることにより音響透過損失のディップの生じる周波数に際がみられることを明らかにした。三次元弾性体支持モデルではより現実に近い予測が可能であると考えられるが、一方で解析モデル作成の簡便さや計算負荷など、端部にインピーダンスを与える集中バネ支持モデルのメリットも大きい。適切な位置にインピーダンスを与えることで三次元弾性体支持モデルと一致した共振周波数を得られると考えられるため、集中バネモデルでのインピーダンスを与える辺の場所について実質的な板試料サイズを固定し検討を行う。

本検討では実質的な試料サイズを固定することを考え、Fig.4.33 のように支持材から板をはみ出させ、板の周辺は自由端としたモデルを想定する。空気と接している面はこれまでの検討と同様に $0.9 \times 0.9 \text{ m}^2$ とし、三次元弾性体支持条件においてはそのすぐ外側に三次元弾性体を適合させる。集中バネ支持モデルに関しては、Fig.4.33(b) の緑線のようにインピーダンスを与える辺を空気と接している正方形の四辺とした (これを支持材内法と表記する) 場合と、Fig.4.33:b の青線三次元弾性体との接合幅の中央となるよう接合幅の半分だけ外側に正方形とした (支持材中央と表記する) 場合の2種類について検討を行う。

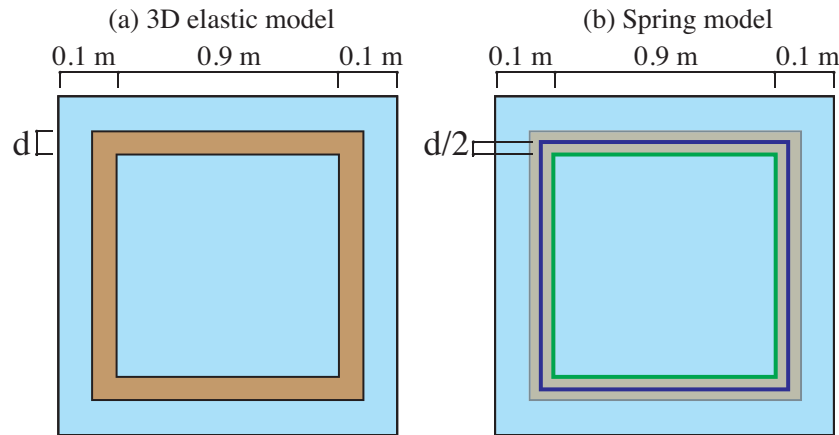


Fig. 4.33: Dimensions of a plate and a support material.

Fig.4.34 に、接合幅 d が 15 mm , 60 mm のときの各モデルにおける音響透過損失値を示す。三次元弾性体による適合を赤とし、緑と青はそれぞれ 4.33 の色に対応し、内法を緑、中央を青で示す。

接合幅の小さい場合には3つの接合パターンは良い対応を示しているが、接合幅が厚い場合には共振周波数が一致していない。三次元弾性体支持条件と比較し、集中バネ支持モデルにおいてインピーダンスを支持材内法に与えた場合にはより高周波数側に、支持材中央に与えた場合にはより低周波数側にそれぞれ板共振が生じていることがわかる。さらに、集中バネ支持モデルの場合は非共振周波数で透過損失の値が異なり、ディップの深さにも違いがみられる。これは、局所的に与えたインピーダンスによる板端部への振動伝搬の低下や振動エネルギーの吸収率の低下を表している。よって、支持材と試料の接合幅が広い場合にはインピーダンスを与える辺を調整し共振周波数を一致させた場合でも集中バネ支持モデルによる音響透過損失の予測精度が低下してしまう可能性がある。

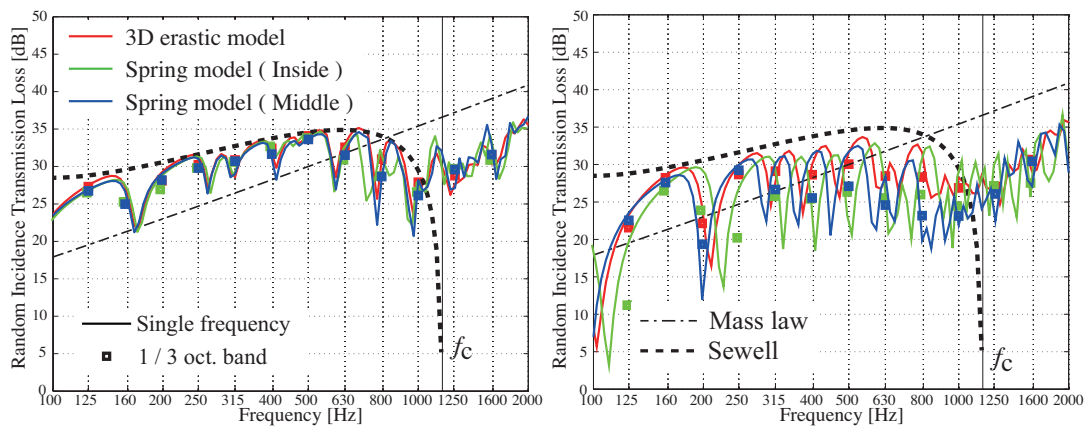


Fig. 4.34: Comparison between support models and conditions. Left: Support width of the support material is 15 mm , Right: 60 mm.

4.4 損失係数同定に関する検討

音響性能の解析・予測を行う際には解析対象の物性や性状を入力する必要がある。これまでの検討で、音響透過損失の数値予測に関してもそれら物性による算出結果の変化を示してきた。これらより、入力する物性値の精確な同定は精確な遮音性能予測を行う上で必要不可欠であるといえる。

材料の物性の同定方法に関しては、様々な材料や条件に対応した検討や規格化が行われてきた。そのなかで、吉村らは音響透過損失測定施設を利用し、系としての損失係数を求める手法を開発した [48]。更に、朝倉はその測定結果をもとに板材と支持材の損失係数やその他の物性に相当するパラメータの推定を行い、数値解析上の入力パラメータとしている [48]。

しかし、実験においてエネルギーの損失は系のあらゆる場所で生じ、実験による損失係数の推定ではこれらを分離し検討を行うことが非常に困難である。そこで本節では、吉村らの行った実験を数値解析上で再現し、その結果から測定系の損失係数やエネルギー吸収特性について検討を行うことで、材料の物性の推定精度向上に向けた基礎的検討を行う。

損失係数について

損失係数とは、振動系に蓄えられているエネルギーに対する、振動系の1周期の間に消費されるエネルギーの比であり [56]、Fig.4.35 に示すような振動波形において、応答振幅の各極大値を X_n とし損失係数を η とすると、以下の式のように単位ラジアン当たりの値として表される。

$$\eta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{X_n}{X_{n+1}} \quad (4.18)$$

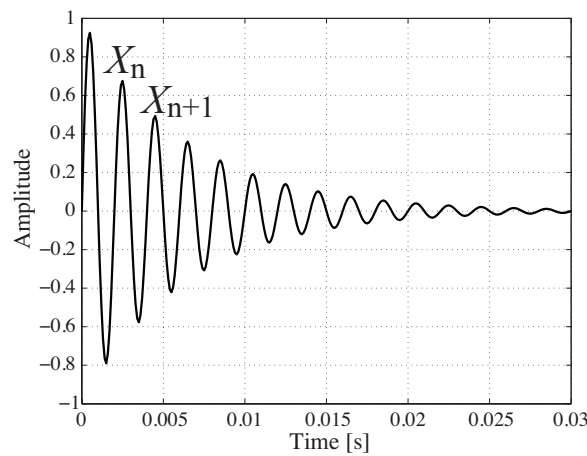


Fig. 4.35: An example of maximum amplitude of decay wave.

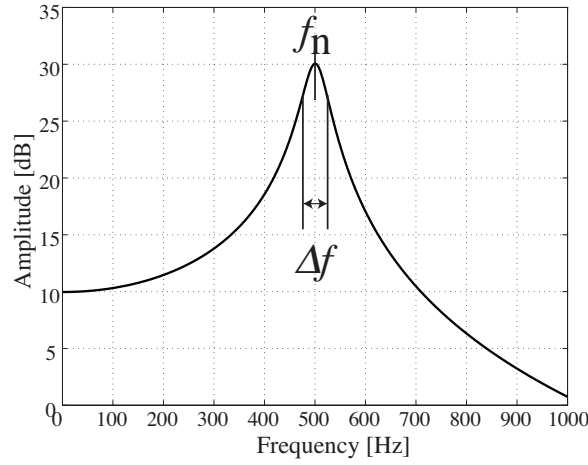


Fig. 4.36: An example half width of the peak of spectrum .

このとき、1自由度減衰波形 $x(t)$ は、以下の式で表される。

$$x(t) = A \sin(\omega t) e^{-\frac{\eta}{2} \omega t} \quad (4.19)$$

また、周波数スペクトル上では半値幅 Δf を用いて次式のように表される (Fig.4.36)。

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_n} \quad (4.20)$$

ここで、 f_n は注目モードの固有周波数である。

音響透過損失の測定時、振動パワーは大きく分けて板試料の内部損失、音響放射、および板端部における損失に変換される。このとき、系としての総合損失係数 η_{total} は以下の様に表現できる。

$$\eta_{\text{total}} = \eta_{\text{int}} + \eta_{\text{rad}} + \eta_{\text{bound}} \quad (4.21)$$

ここで、 η_{int} を内部損失、 η_{rad} を放射損失、 η_{bound} を端部損失とする。

4.4.1 損失係数の算出法

材料の損失係数の同定手法として JIS G 0602 には、制振鋼板の振動減衰特性試験方法に関し、応答変位もしくは応答速度の極大値を読み取る減衰法と、伝達関数の周波数応答特性により求める半値幅法による損失係数の算出方法が規定されている [52]。しかし、薄い材料の音響透過損失測定に影響するエネルギー損失は先にも述べたとおり端部支持材による損失に大きく起因しており、支持材の損失係数の同定精度向上が重要となる。

また、これらの手法は 1 自由度振動系の減衰を前提としているため、音響透過損失測定施設を用いたエネルギー損失の同定という観点では、高周波数でモード密度が高く適しているとは言えない。そこで、支持材のエネルギー損失に関する検討として、ヒルベルト変換を用いた手法や拡散振動法と呼ばれる手法が用いられる [23, 47]。これらは各周波数帯域ごとの評価が可能であると考えられるため、モード密度の高い高周波数での評価に適していると言える。また着目モードの恣意性も排除し算出を行うことが可能である。しかし、これらの手法の算出に適する条件や精度に関して不明な点が散見されたため、数値解析による理想化・単純化された条件でこれらの手法の有効性について検討を行う。

ヒルベルト変換法

ヒルベルト変換を用いた手法 (ヒルベルト変換法) は減衰波形の包絡線をヒルベルト変換により求め、その傾きから損失係数を算出する手法で、一般的には注目モードの減衰波形から算出するが、1/3 オクターブバンドごとの評価例もみられる。理想的な一自由度の指数減衰波形の場合、ヒルベルト変換し求めた解析信号の絶対値をとることで包絡線を求め、デシベル表示すると、Fig.4.37 の左のような減衰曲線を得る。この傾き D から次式を用いて損失係数を算出する。

$$\eta = \frac{\ln 10}{20\pi} \frac{D}{f_n} \quad (4.22)$$

ここで f_n は注目モードの固有周波数であり、帯域ごとの評価ではその分析帯域中心周波数とした。また、 $D[\text{dB/sec}]$ は包絡線の減衰率である。

拡散振動法

拡散振動場を仮定し、時系列応答の逆二乗積分することで減衰曲線を求める [23]。Fig.4.37 の右に、理想的な一自由度の指数減衰波形より求めた減衰曲線を示す。この傾きから残響時間を求め、次式を用いて算出される。

$$\eta = \frac{2.2}{fT} \quad (4.23)$$

ここで、 T は測定系の残響時間、 f は分析帯域の中心周波数である。

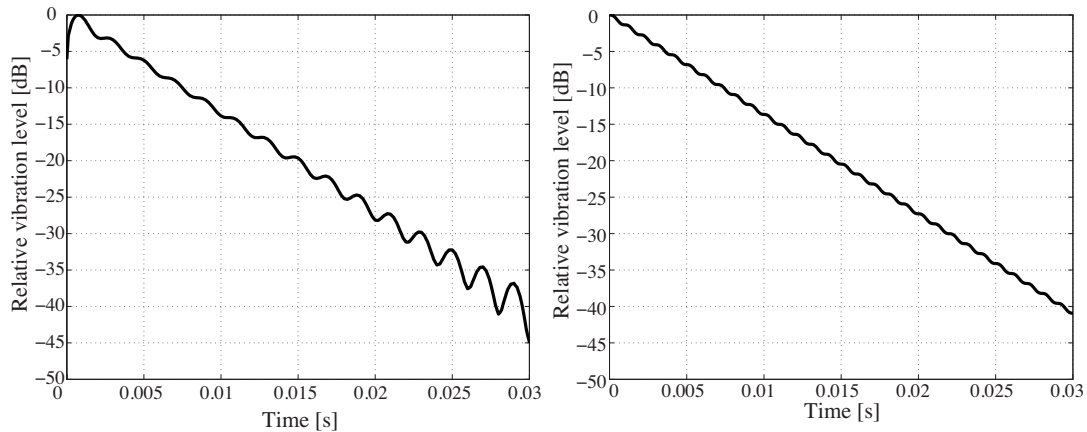


Fig. 4.37: Examples of calculated decay curve. Left: hilbert transform method. Right: difused vibration method.

指数減衰白色雑音による検討

理想的な一自由度の指数減衰波形より各手法で損失係数を算出したところ、ヒルベルト変換法での誤差は 1.5 % 程度、拡散振動法では 0.1 % 程度と概ね一致していることが確認された。しかし、周波数帯域ごとの評価を行うためには信号波形をバンドパスフィルタによる帯域分割を行う必要があるため、その際のフィルタの特性が算出結果に及ぼす影響についての事前検討が必要であると考えられる。

吉村らや朝倉らは振動波形の残響時間に対してフィルタの残響時間が十分小さいことを確認し実測による損失係数算出を行ったとしている。ただし、板の振動減衰は測定条件により大きく減衰量が変化し、また損失係数を一定値としたときの系の残響時間は周波数によって異なることから、フィルタの残響による影響が無視できかつなるべく高い次数のフィルタを用いることが望ましい。

そこで、指数減衰する白色雑音において、ヒルベルト変換法と拡散振動法を用いて残響時間の算出を行った。Fig.4.38 に、フィルタ次数と信号の減衰量を変化させ x 軸に原波形の残響時間に対するフィルタの残響時間の長さを、 y 軸に原波形の残響時間に対する各帯域分割後の残響時間をプロットしたグラフを示す。このプロットの色は各周波数帯域である。拡散振動法はフィルタの残響が原波形の残響より長い場合、算出される残響時間はフィルタの残響時間に一致するが、この傾向は既往の知見と同様である。一方、ヒルベルト変換法はフィルタ残響が長い場合でもそのばらつきは原信号の残響時間を中心としており、測定した波形の残響時間が短く拡散振動法でのフィルタによる帯域分割が困難な場合のヒルベルト変換法の有効性が示唆される。ただし、ヒルベルト変換法は拡散振動法と比較しいずれの次数でも残響時間のばらつきが大きい傾向がみられた。これは、Fig.4.39 に示すように、ヒルベルト変換法は一自由度振動系とみなすことができない信号の場合深いディップが生じ、包絡線を捉えることができていないためである。

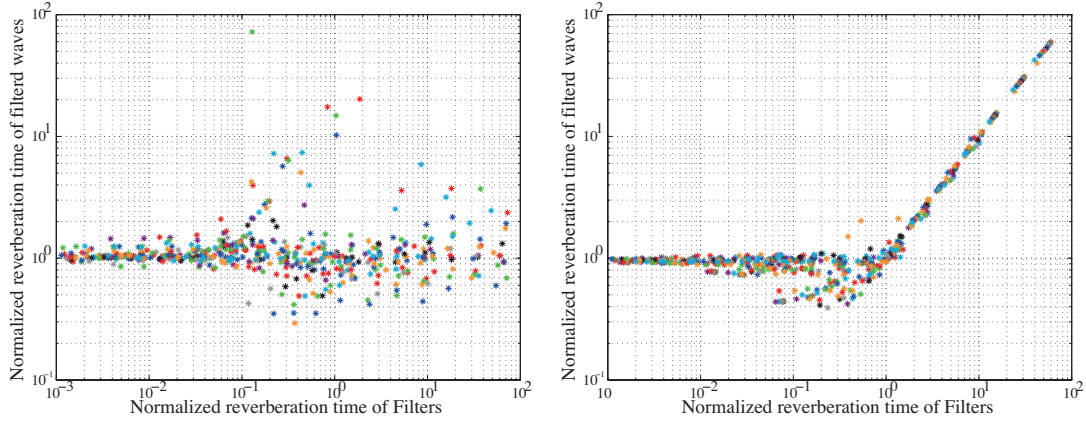


Fig. 4.38: Normalized reverberation time of white noise. Left: hilbert transform method. Right: diffused vibration method.

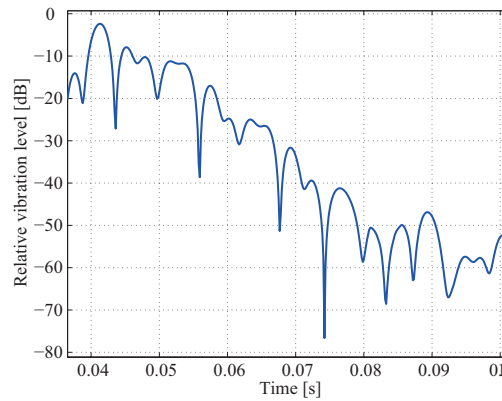


Fig. 4.39: An example of the decay curve calculated by hilbert transform method.

拡散振動法は信号の残響時間がフィルタの残響時間よりも長い場合に有効であることが確認されたため、次に損失係数推定に用いるフィルタの次数に関する検討を行う。本章で用いるフィルタはハミング窓を用いた FIR フィルタであり、各周波数帯域での遮断特性を概ね一定とするため 1 オクターブ低い周波数帯域の分析ではフィルタ次数を 2 倍としている (Tab.4.3)。また、式 (4.23) より、損失係数が全周波数で一定の系ではその残響時間は高周波数ほど短くなる特徴がある。

Tab. 4.3: An example of filter’s order using at the analysis

frequency	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600
order	512	512	512	256	256	256	128	128	128	64	64	64	32

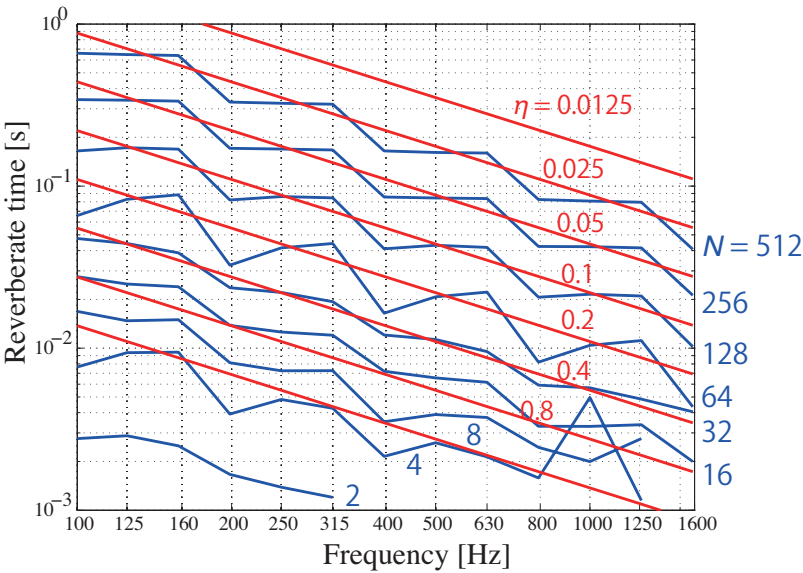


Fig. 4.40: Reverberation times of the filters and the damping systems.

Fig.4.40 に、損失係数を一定値としたときの各周波数での残響時間を赤線で示す。さらに、1000 Hz におけるフィルタ次数を N としたときの各周波数帯域での残響時間を青線で示す。前検討より拡散振動法では、求めたい損失係数の残響時間よりもフィルタの残響時間が小さくなくてはならない。例として、総合損失係数が概ね 0.1 前後の系に関し拡散振動法で同定を行う場合には、1000 Hz でのフィルタ次数を 64 次以下としないといえる。

4.4.2 内部損失係数の同定による解析条件の検討

振動の周波数領域解析結果から損失係数の同定手法について検討を行う。薄板の周波数解析を行い、一定加振力による板の各受振点における加速度を算出し、IFFT することで振動減衰波形を求める。本検討のサンプリング周波数は 4000 Hz とし、解析にあたっては減衰が十分にとれるよう必要に応じ周波数分解能の調整を行う。得られた振動減衰波形をもとにヒルベルト変換法と拡散振動法を用いて減衰曲線を求め、損失係数を算出する。なお、同定区間は -5 から -25 dB とする。

解析対象として Fig.4.41 のように端部を単純支持したガラス板を想定し、吉村らの既往研究 [48] をもとに試料サイズ、音源・受振点を設定した。5 点の受振点についてそれぞれ残響時間を求め平均した値を用いて損失係数の算出を行う。

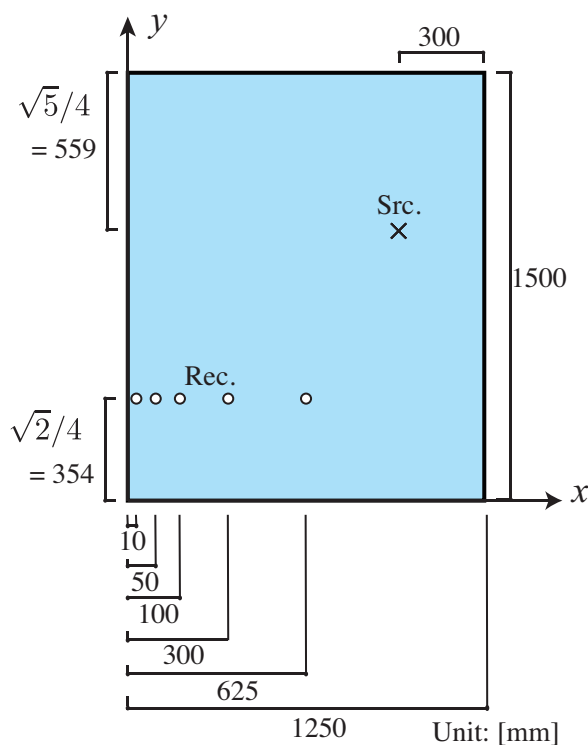


Fig. 4.41: Dimension of the plate and receivers and excitation points for the calculation.

フィルタ次数に関する検討

ここでは、内部損失を変化させたときの損失係数を同定する。Fig.4.39 に、各フィルタ次数による板の損失係数同定結果を示す。なお、破線に振動解析時に与えた板の損失係数を示す。フィルタの次数が低いとき、高周波数ほど損失係数同定結果が小さいことがわかる。これは、各帯域分割が不十分であるためである。損失係数を一定値として与えた場合には高周波数の方が振動減衰率が大きいため、多くの場合高周波数の減衰曲線は折れ曲が

りが生じる。帯域分割が不十分である場合にはこの折れ曲がり同定区間で生じ、求めたい帯域の減衰を捉えることができない。そのため、損失係数推定にあたっては減衰曲線を観察し、同定区間に大きな折れ曲がりが生じていないことを確認する必要がある。

フィルタの次数を大きくしていくと、1000 Hzで64次程度の次数まで、損失係数0.08以下でヒルベルト変換法・拡散振動法ともに解析時に与えた内部損失に概ね近い値をとる。ただし、拡散振動法がより安定していることがわかる。また、拡散振動法でさらにフィルタ次数を大きくした場合には高い内部損失から順に値の低下がみられる。

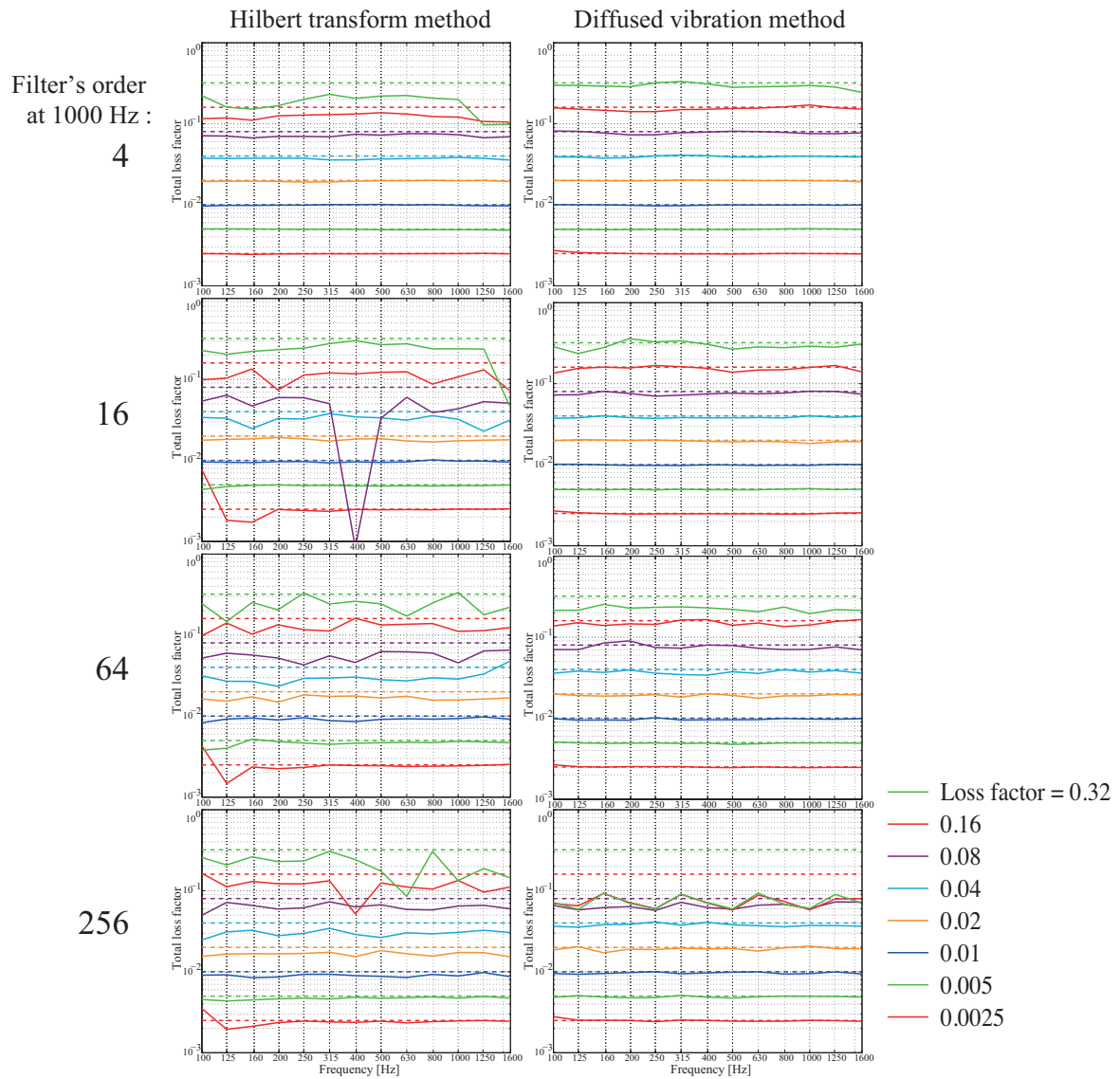


Fig. 4.42: Loss factors calculated by filtering with different tap lengths.

受振点

損失係数同定にあたり，受振点に関する検討を行う。前検討における設定をパターン A とし，次の 4 パターンの受振点を設定する。

- 板試料端辺から辺に垂直な方向に設置した受振点列 5 点 (パターン A)
- 板試料隅から 45° 方向に設置した受振点列 4 点と試料中央 1 点 (パターン B)
- 板試料 1/4 面に無理数比となるよう設置した受振点 5 点 (パターン C)
- パターン A の受振点間にさらに受振点を設置した受振点列 9 点 (パターン D)

それぞれのパターンにおける受振点を Fig.4.41 の x, y 座標を示す。なお，単位は [mm] とする。

- パターン A: $(x, y) = A1(10, 354), A2(50, 354), A3(100, 354), A4(300, 354), A5(625, 354)$
- パターン B: $(x, y) = B1(10, 10), B2(50, 50), B3(100, 100), B4(300, 300), B5(625, 750)$
- パターン C: $(x, y) = C1(433, 707), C2(140, 331), C3(207, 451), C4(515, 545), C5(38, 198)$
- パターン D: $(x, y) = D1(10, 354), D2(30, 354), D3(50, 354), D4(75, 354), D5(100, 354), D6(200, 354), D7(300, 354), D8(460, 354), D9(625, 354)$

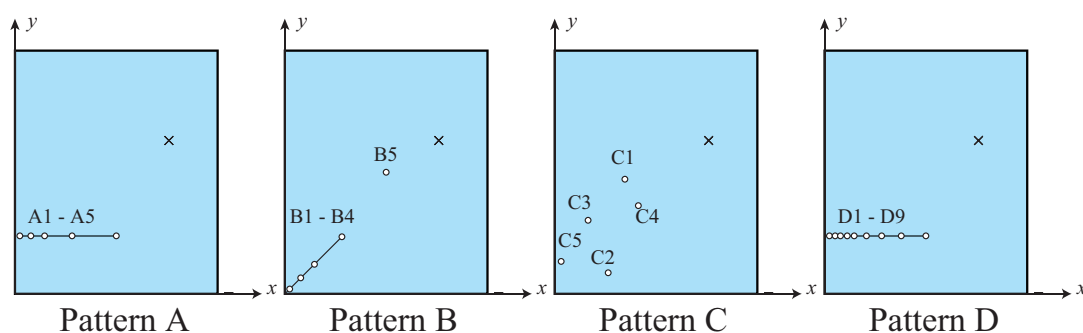


Fig. 4.43: Patterns of receiving points.

加振点に関しては前検討と同様に一点とし検討を行う。板材に与える損失係数は 0.01 とし，その他の条件は前検討と同様とした。損失係数の同定結果を Fig.4.44 に示す。いずれの受振動点においても概ね所望の損失係数である 0.01 に近い値となっていることがわかる。ただし，パターン B に関しては比較的算出結果が不安定であるといえる。

また，損失係数の算出の差異には複数の受振点で求まる残響時間を平均して系の残響時間としているが，平均化する際の値のばらつきを検討するためそれぞれのパターンについて一点の受振点から求まる損失係数を Fig.4.45 に示す。概ね同程度のばらつきが確認されたが，パターン C が比較的ばらつきが少なく，パターン B がばらつきが大きい。特に，

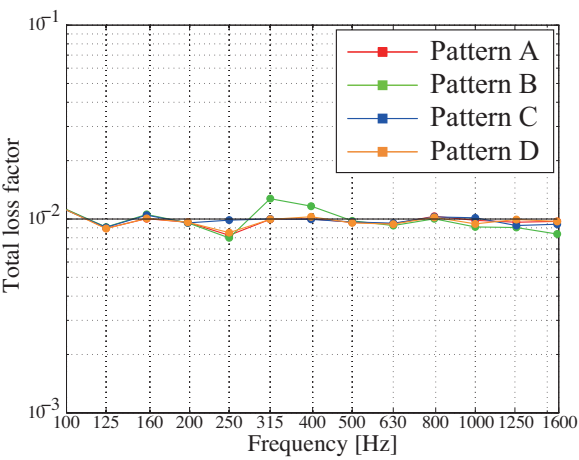


Fig. 4.44: Loss factors calucurated from different recieving patterns.

受振点 B5 については大きく所望の数値から外れている。この受振点は板試料中央点である。板試料中央は板の振動モードが疎となりやすく、分析周波数によっては損失係数算出結果が不安定になる可能性が示された。

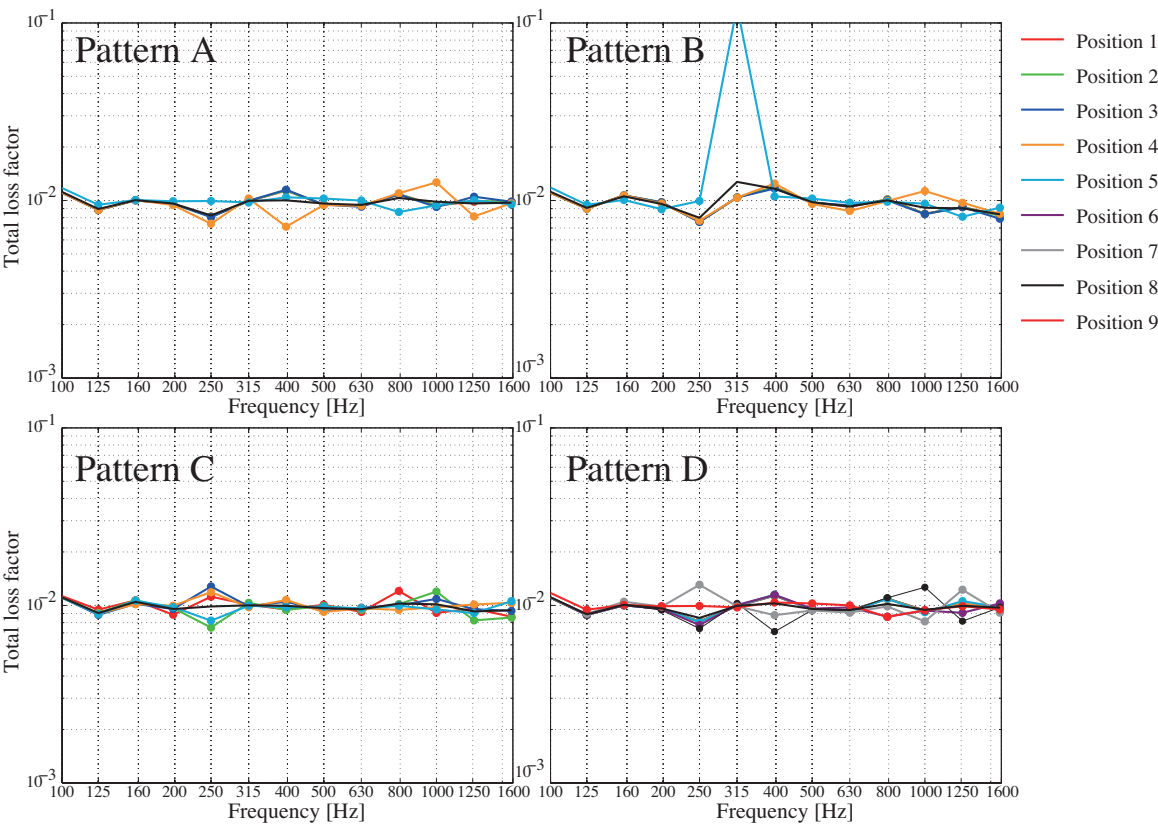


Fig. 4.45: Loss factors calucurated from different recieving points.

4.4.3 端部損失係数の同定

系の端部損失係数は板材の周辺上で一様な値を持ち、周辺の局所作用を仮定して算出される。そのため、支持材の物性としての損失係数のみならず、支持材や板材の物性と性状に依存し、さらに周波数特性をもつと考えられる。また、端部損失係数は局所作用を仮定するため周辺支持部の機械インピーダンスとモーメントインピーダンスより求まるエネルギー吸収率から理論的に算出することができる。そこで、板材の端部損失の同定結果と理論的に導出した結果の比較を行い、板振動場の特性や支持条件の影響について検討する。

端部損失は二次元拡散振動場を仮定し板周辺でのランダム入射振動エネルギー吸収率を定義することでエネルギー論的に導出できる。振動エネルギーの吸収を周辺のみとしたとき、端部損失係数 η_{bound} は次式で表される。

$$\eta_{\text{bound}} = \frac{c_b}{\pi^2 S f} \sum_k l_k \alpha_k \quad (4.24)$$

ここで、 c_b は板試料の曲げ波の伝搬速度、 S は板試料の面積、 l_k は板試料の k 番目の周辺長、 α_k は板周辺でのランダム入射振動エネルギー吸収率である。

解析条件

端部損失係数同定の基本的な解析条件は前項のパターン A とする。ただし支持条件として、集中バネ支持モデルと三次元弾性体支持モデルの比較を行う。板の内部損失を 0 とし、三次元弾性体支持条件に関して音響透過損失算出条件と同様に内法を一定とする。本検討で用いる板材と支持材の物性値を Tab.4.4 に示す。

Tab. 4.4: Physical properties and directions of the plate and the support material.

Plate	Size	$1.25 \times 1.5 \text{ [m}^2\text{]}$
	Thickness	0.01[m]
	Young's modules	$7.5 \times 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$
	Density	2500 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.22
	Loss factor	0
Support material	Young's modules	$1.0 \times 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]}$
	Density	1000 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.25
	Loss factor	0.5

支持材寸法の影響

支持材の接合幅を変化させたときの損失係数の同定結果を Fig.4.46 に示す。併せて、弾性連続体モデルの機械インピーダンスより理論的に求めた端部損失係数を示す。集中バネ支持モデルによる解析結果は理論計算結果の値よりも大きくなる傾向がみられる。これは振動場の拡散性が成立していないことを示している。板振動におけるモード等の影響により、支持材に対するランダム入射が崩れており垂直入射成分が増加していることが考えられる。また、板の振動変位分布も辺上で一様でなくなり、その影響により振動エネルギーの吸収が拡散振動場よりも顕著となることが考えられる。

支持材の適合幅が増加することに伴い理論値のピークの生じる周波数の上昇がみられる。これは板を質量、支持材をバネとしたバネマス共振に伴う値の増加であるが、この傾向は集中バネ支持モデルの数値解析結果でも確認できる。よって、解析結果と理論値で周波数特性の傾向は概ね一致していると言える。

三次元弾性体支持モデルと集中バネ支持モデルは低周波数域で概ね同様の傾向を示している。ここでも、三次元弾性体支持モデルにおいて面外方向変位による損失が支配的であることがわかる。ただし、高周波数域では二つの解析モデルで接合幅を厚くしていくと集中バネ支持モデルが高い値をとるのに対して、三次元弾性体支持モデルでは理論値よりも低下する場合もみられる。これは、垂直入射エネルギー吸収率における検討でも示したとおり、接合幅の上昇に伴い高周波数域で周辺部の振動変位が複雑化していることが原因であると考えられる。

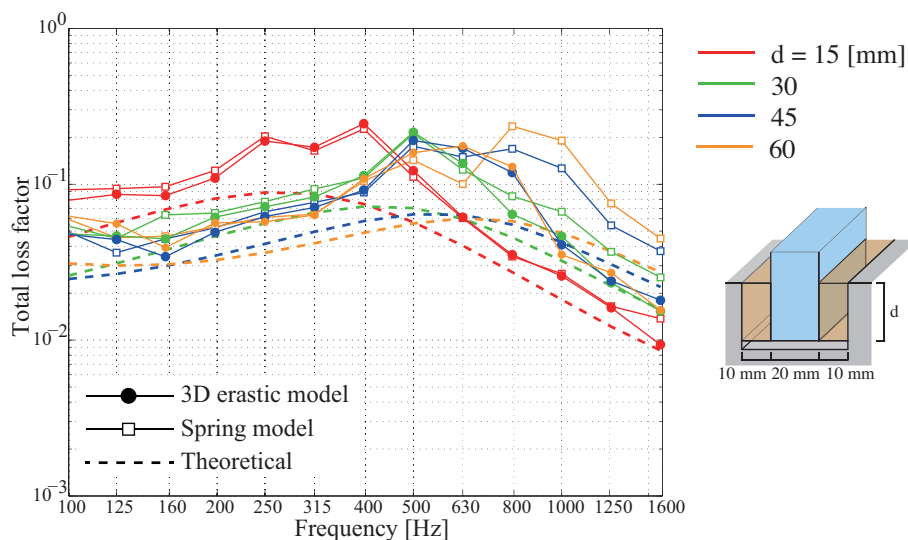


Fig. 4.46: Effects of connected widths of support material on the estimation of the loss factors.

次に、支持材の厚みを変化させたときの損失係数の同定結果を Fig.4.47 に示す。支持材の設置幅に関する検討と同様に解析結果は理論値よりも概ね高い値をとる。理論値において弾性体の縦振動モードによるピークが高周波数域で生じ、その周波数は厚みの増加に伴い低下していることがわかるが、これはいずれの解析結果でも確認できる。ただし、三次元弾性体支持モデルは集中バネ支持モデルと比較しピークの値が小さい。これは、垂直入射エネルギー吸収率のグラフ Fig.4.13 でも確認できるとおり、三次元弾性体支持条件において面外方向への一次元振動伝搬が崩れ面内運動も生じているためである。

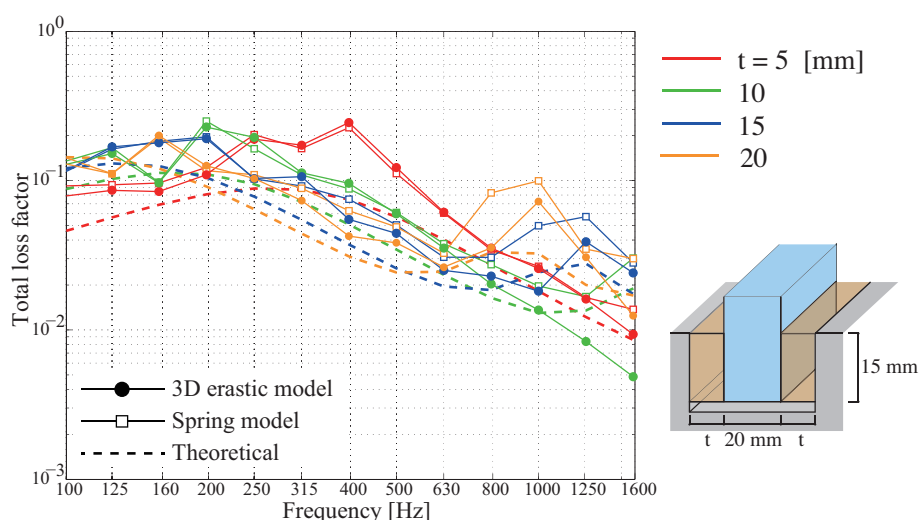


Fig. 4.47: Effects of thicknesses of support material on the estimation of the loss factors.

さらに、板試料の縦横比を一定としサイズを変化させたときの損失係数の同定結果を Fig.4.48 に示す。板の周辺長の増加の割合にと面積の増加の割合の違いから、試料サイズが大きいほど系としての損失係数は小さくなる。解析結果において板材のサイズが小さいときの低域の損失係数の値が乖離しているのは、板材のモード密度が小さく測定結果が不安定となるためであると考えられる。

支持材物性の影響

支持材のヤング率を変化させたときの損失係数の変化を Fig.4.49 に示す。支持材のヤング率の上昇に伴いバネマス共振周波数が上昇していることが理論値からわかり、解析結果からも概ね同様の傾向が確認された。なお、ヤング率が 10^8 N/m^2 の条件において、三次元弾性体支持モデルと集中バネ支持モデルで値の乖離がみられる。これは Fig.4.29 で確認されたように、集中バネ支持モデルによるモーメントインピーダンスのエネルギー吸収の傾向が三次元弾性体支持モデルと乖離していることが原因であると考えられる。

次に、解析時の支持材の損失係数を変化させたときの端部損失係数の変化を Fig.4.50 に示す。支持材の損失係数の増加に伴う端部損失の上昇が確認でき、損失係数 1 の高周波数を除き両解析モデルは良い対応を示している。

支持材の密度を変化させたときの両モデル端部損失係数の変化を Fig.4.51 に示す。支

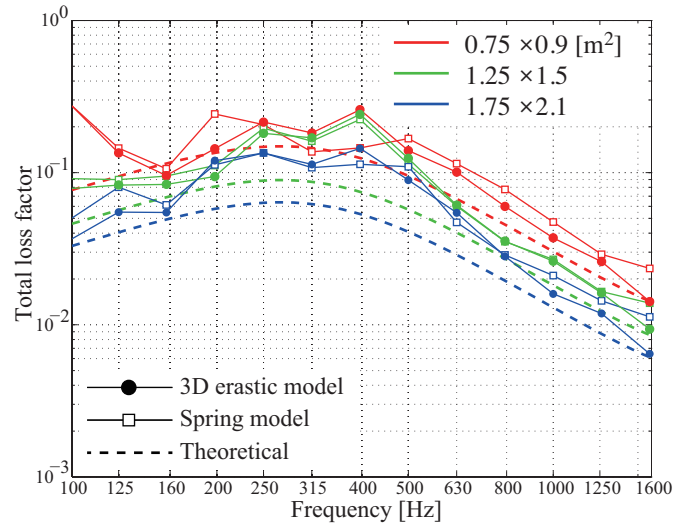


Fig. 4.48: Effects of sizes of plate material on the estimation of the loss factors.

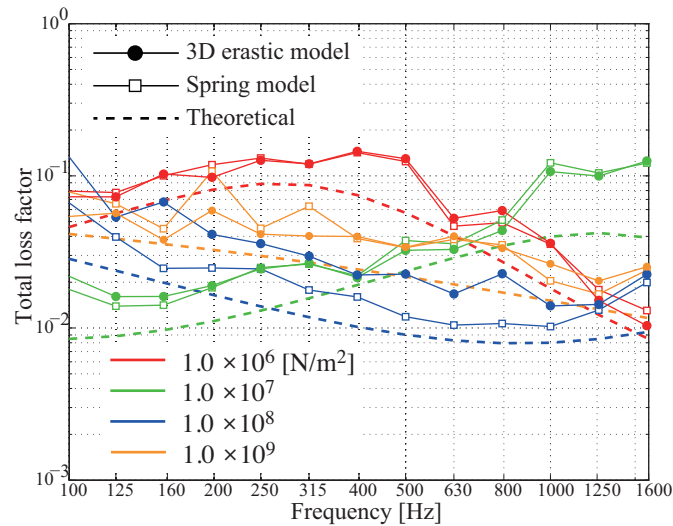


Fig. 4.49: Effects of young's moduli of support material on the estimation of the loss factors.

支持材と比較し板材の質量が大きいため概ね同様な値を示すが、集中バネ支持モデルの場合には高域で支持材のモード共振による上昇がみられるのに対し、三次元弾性体支持モデルではそれが確認されない。

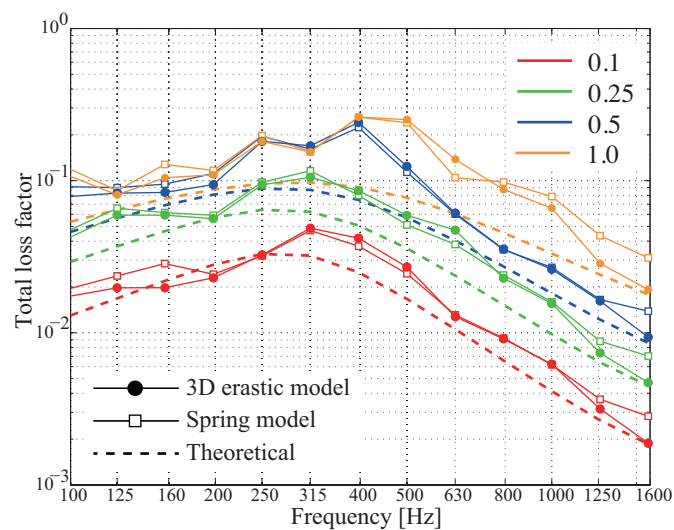


Fig. 4.50: Effects of loss factors of support material on the estimation of the loss factors.

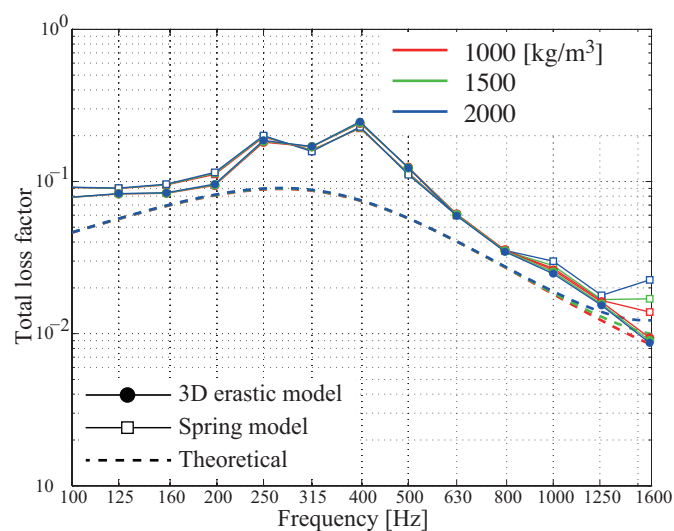


Fig. 4.51: Effects of densities of support material on the estimation of the loss factors.

4.4.4 音響放射の損失係数の同定

次に、音響放射による損失係数の同定を行う。音響放射による損失に関して、 f_c 以下の周波数帯域では板や支持材の物性、寸法等に依存するため推定が困難であると共に、数値的に小さいため無視されることが多いとされている [47]。ここではそれらの影響を理想化し、板材及び支持材の内部損失が音響放射損失に与える影響を検討する。

まず、板材の内部損失および支持材による端部損失の無い条件として、前々項の条件においてガラスの内部損失を 0 とし、板材を 10 mm のバフル内部に単純支持したときの損失係数同定結果を Fig.4.52 に示す。コインシデンス限界周波数付近および低域において音響放射による損失係数の上昇がみられるが、ガラスの内部損失及び端部損失と比較し概ね小さな値となっていることがわかる。無限大平板の曲げ波による音響放射はコインシデンス限界周波数以下で損失係数は 0 となることが知られており [5]、本解析結果の低周波数域での放射効率の上昇は板材の有限性及びバフル厚によるものであると考えられる。

次に、同条件において板材の損失係数を与え、空気と連成させない真空状態とバフル内部に設置した状態における総合損失係数の算出結果を Fig.4.53 に示す。真空状態では総合損失係数は板材の損失係数に一致し、バフルに設置したことによる損失の上昇が全帯域的にあらわれている。さらに、Fig.4.52 と比較すると板材に損失を与えることによる音響放射損失も上昇していることが観察され、音響放射による損失の他の条件による変動が表れているといえる。

さらに、板材の端部支持条件として集中バネモデルと三次元弾性体モデルを用いて端部損失を導入したときの総合損失係数の算出結果を Fig.4.54 に示す。なお、支持材の物性は Tab.4.2 とし、板材の内部損失を 0 とした。このとき、支持材による端部損失の影響が支配的となるため中低周波数域で音響放射による損失はみられないが、コインシデンス周波数付近では真空条件とバフル設置条件で算出結果に乖離がみられ、その傾向は支持モデル間で概ね同様である。実験において単純支持条件や固定支持条件などの端部損失の無い支持を行うことは困難であるため、本条件のようにパテ支持等の条件下ではコインシデンス周波数以下では音響放射による損失を無視した検討を行うことが可能であるといえる。

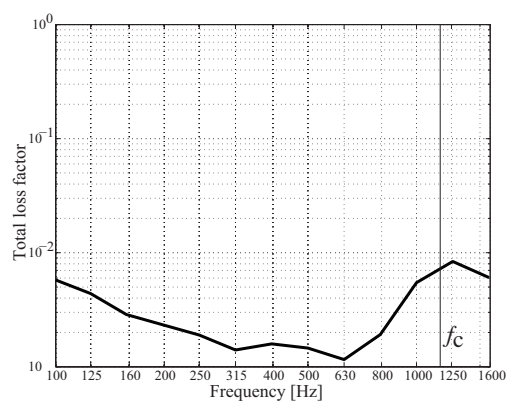


Fig. 4.52: Radiation loss factor of a plate without internal loss mounted in the baffle.

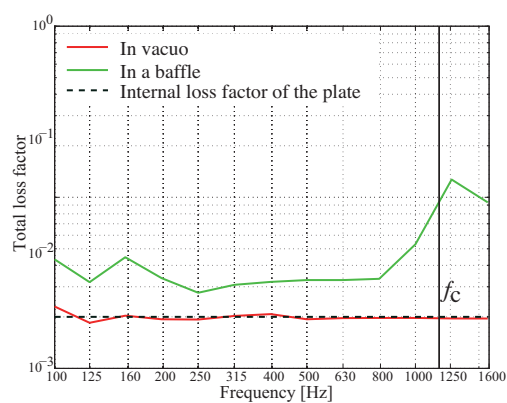


Fig. 4.53: Total loss factors effected of internal loss factors of plate.

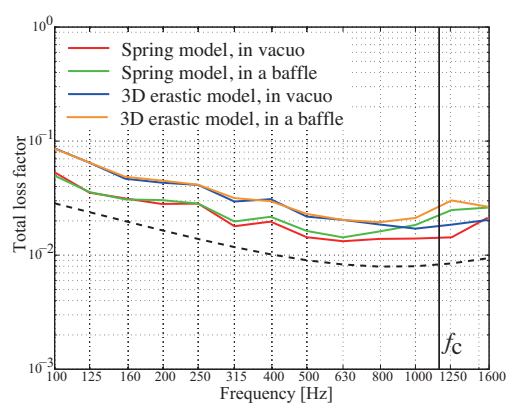


Fig. 4.54: Total loss factors calculated for the plate with edge damping.

4.4.5 ランダム入射振動エネルギー吸収率による検討

系の損失係数より算出されるランダム入射エネルギー吸収率について検討を行う。この値は、垂直入射エネルギー吸収率の算出と同様に板試料端部の支持条件を機械インピーダンス及びモーメントインピーダンスを用い局所作用を仮定することで解析的に求めることができるため、実測結果により算出したランダム入射振動吸収率との比較を通し、支持材物性の推定が行われている [23]。しかし一方で、実測による算出結果と理論的な算出結果の整合性については検討が行われておらず、推定精度等に疑問が残る。

ここでは、数値解析結果から実測と同様に拡散振動法を用いてランダム入射振動エネルギー吸収率を算出し、さらに数値解析上の入力パラメータから理論的なランダム入射振動エネルギー吸収率との比較を行うことで、解析に用いる物性の同定精度向上と実測における物性推定精度向上に向けた基本的知見を得ることを目的とする。

解析結果から拡散振動法により算出した損失係数を Eq.(4.24) に代入することによりランダム入射振動エネルギー吸収率の算出を行った。まず、支持材の寸法を変化させたときの値を Fig.4.55 に示す。理論的に導出した値と比較して吸収率が増加し、支持材が厚い場合を除いて多くの場合に吸収率が1を超えることがわかる。集中バネモデルにおいても同様の傾向が見られることから、振動場において拡散振動が崩れている影響が表れているものといえる。ただし、端部損失係数の推定結果と同様に板材を質量・支持材をバネとした一自由度共振系におけるピークの生じる周波数は概ね対応していることがわかる。また、支持材のモードによる吸収率の上昇も確認でき、これは集中バネ支持モデルによる解析結果において顕著である。

Fig.4.56, Fig.4.57 に、支持材の各物性を変化させたときのランダム入射振動エネルギー吸収率を示す。ヤング率の変化による一自由度共振周波数の変化は概ね良く捉えているが、先の検討と同様に全体的に大きな値を示していることがわかる。各物性の変化によるエネルギー吸収率の周波数特性に関しては概ね端部損失係数同定結果と同様の傾向を示している。

以上より、振動エネルギー吸収率関数から直接的に曲線当てはめにより端部支持材の物性を推定することは難しいといえる。特に拡散振動場が実現されている場合には集中バネ支持モデルと理論値が一致するはずであり、拡散振動が実現されていないことによる同定結果の乖離は顕著であるといえる。実測値との比較より物性の推定を行う場合、支持材の損失係数を過大評価してしまうことになる。

ただし、板材を質量、支持材をバネとした一自由度共振周波数は良い対応を示したことに加え、板材の密度が支持材の密度と比較し十分に大きい場合には、支持材の密度がバネのマス共振周波数にあたえる影響は小さいことから、音響透過損失に大きな影響を与える支持材のヤング率に関して、支持材寸法が既知であるときその吸収率のピークの周波数による推定の可能性が示された。

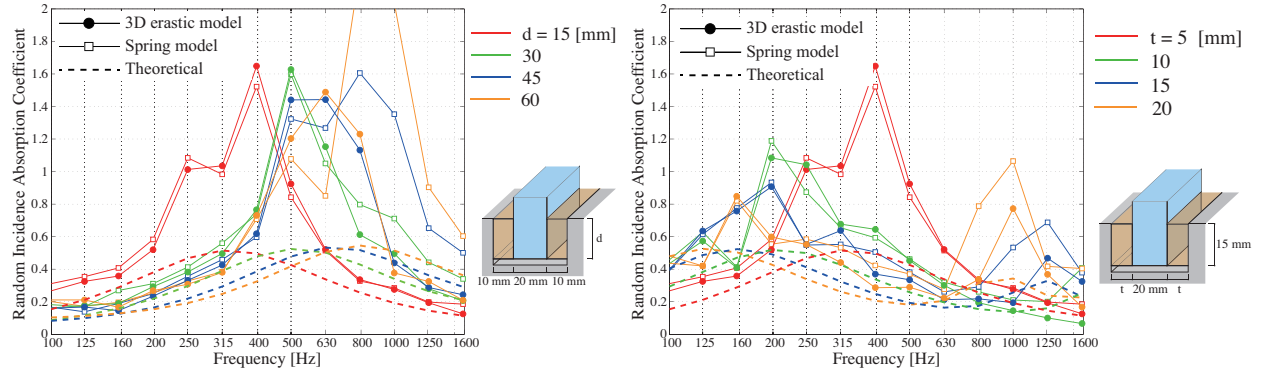


Fig. 4.55: Effects of support material sizes. Left : connected width , Right : thickness.

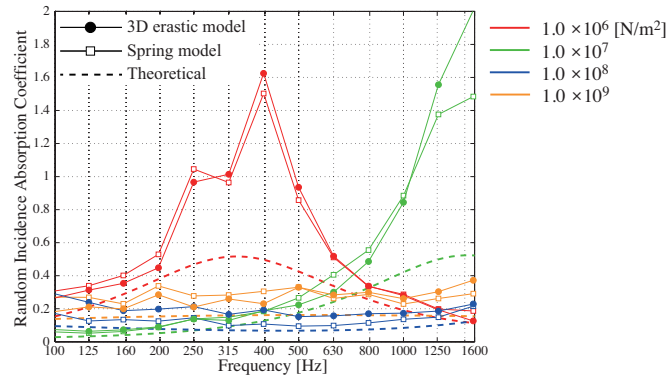


Fig. 4.56: Effects of young's moduli of support material.

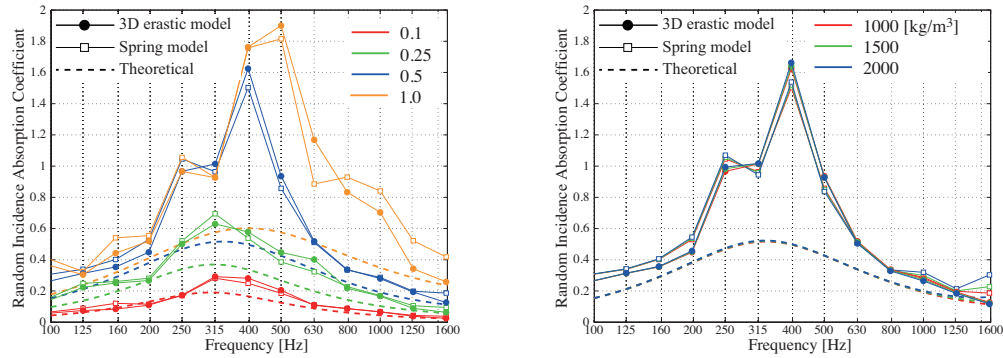


Fig. 4.57: Effects of physical properties of support material. Left: loss factor, Right: density.

4.5 まとめ

本章では、音響透過損失測定の数値予測モデルとして三次元弾性体支持モデルを導入し、集中バネモデルと比較を通し支持材が音響透過損失に与える影響について検討を行った。さらに、数値予測を行うための物性の測定に関して損失係数を用いた検討を行った。

それらの検討の結果から、板材を質量、支持材をバネとした共振に関しては両モデルに良い対応がみられたが、バネマス共振より低い周波数や高域での支持材のモードによる共振に関しては、三次元弾性体の面内方向への運動による複雑な振動状態をなっていることが確認され、その運動状態の違いが音響透過損失測定結果にも影響することを示した。また、支持材の物性による違いも示し、支持材のヤング率や損失係数は音響透過損失に大きな影響を及ぼしうることを示した。

また、遮音性能試験室設備を利用した系の損失係数同定手法に関して、その測定条件や算出条件が算出に与える影響を基礎的な検討により示し、支持材の内部損失推定の有効性を数値解析上で裏付けた。ただし、端部損失係数の同定は、入力パラメータより理論的に算出される損失の周波数の特性は概ね捉えているものの、拡散振動場の仮定が崩れることに起因すると考えられる値の乖離がみられた。

振動拡散法による支持材物性の推定に関しては、拡散振動場の仮定が崩れていることによる問題点が明らかとなった。測定結果を定数倍する、ログスケールでのフィッティングを行う等の解決策が考えられるが、各実験室の条件に応じた補正を行うためには様々な知見や実測結果を考慮し慎重に行う必要がある。

第5章

総括

本章では、本研究により得られた成果を総括し、今後の課題について述べる。

第一章では、本研究の背景について概説し、材料開発における数値予測精度・測定精度向上に向け、研究目的を以下のように設定した。

- 部材の設置位置等の実験条件に関し、解析モデルの検討を通し音響透過損失に算出結果に与える影響を解明すること
- 部材の支持材に関し、解析モデルの検討を通し音響透過損失測定や物性測定における精度向上のための知見を得ること

第二章では、本論文で用いる数値解析の基礎理論について述べた。定常状態の音場、弾性体振動場、板振動について支配方程式を導出し、さらに音場に関しては有限要素法・境界要素法による解析手法を述べ、弾性体振動場、板振動場に関しては有限要素法による解析手法を述べた。さらに、各物理場及び手法の連成手法や具体的な適用方法を示した。

第三章では試料設置条件に関する検討としてニッシュ効果を取りあげ、まず第一節で既往研究を概観し張り出し型ニッシュと凹み型ニッシュの比較の必要性を述べた。第二節ではニッシュ深さの影響に関する検討として、板試料厚、入射条件、板端部の支持条件がニッシュ効果に及ぼす影響について検討した。その結果、全体的な傾向として板厚に依らずコインシデンス限界周波数以下の周波数で板厚増加に伴う音響透過損失の低下が見られ、低下量は凹み型ニッシュが顕著であることを示した。さらに入射条件による違いや入射角ごとの音響透過損失算出結果から、擦過角付近で値の低下がみられること、入射角ごとの値はニッシュタイプにより大きく異なることを示した。さらに、壁厚の変化に伴う透過損失の変化量を示した。その結果、低周波数域についてニッシュタイプによる違いが顕著であり、ニッシュ深さや周波数帯域により複雑な挙動を示すことが明らかとなった。第三節では同一実験室で生じる変動の検討として、試料設置位置による影響の検討を垂直入射条件、ランダム入射条件に関して行った。垂直入射条件では、試料設置位置が入射側音場に近くなるにつれ、反共振による値の上昇が確認され、凹み型は非共振周波数で複雑な挙動を示すことが示された。ランダム入射条件では、入射側および透過側のニッシュ深さについて低音域で相反則が成り立つことが確認されたが、入射角度分布をみると相反則は

成り立たないことを示した。さらに、試料設置位置に関して位置依存性が高くなる地点がニッシェ 2:1 付近であり、一般的な実験室測定における設置位置と一致することを示した。

第四章では音響透過損失測定における周辺支持材に関する検討を行った。第一節では既往研究と既往の数値解析手法の紹介を行い、三次元弾性体支持モデルの導入の必要性について述べた。更に、集中バネ支持モデルのモデル化を概観した。第二節では垂直入射振動エネルギー吸収率を定義し、音響分野における伝達関数法を曲げ波に適用した算出手法の提案を行った。更に、三次元弾性体支持モデルと集中バネモデルについてエネルギー吸収率の比較を行い、板を質量、支持材をバネとした並進運動における一自由度共振に関しては両モデルで良い対応を示しているのに対し、より低い周波数における回転バネの共振や支持材のモードによる共振に関しては乖離がみられることを示した。第三節では、各支持モデルにおける音響透過損失を算出した。その結果、支持材の接合幅が小さい場合には板共振による音響透過損失のディップの深さに両モデルで乖離がみられ、支持材の接合幅が厚い場合には板の共振周波数に乖離が生じることが確認された。実質的な板サイズや局所作用を仮定している影響であると考えられたため、板サイズを固定し支持材の内法と設置幅中央に簡易支持モデルを適用することで共振周波数の変化を観察したが、どちらの場合にも共振周波数は一致せず、さらに非共振周波数においてもモデル間で乖離が生じることを示した。第四節では、音響透過損失測定設備を利用した損失係数同定に関する検討を行った。そこでまず損失係数の算出法の概観を行いヒルベルト変換法と拡散振動法について検討を行った。算出にあたって、検討項目としてフィルタ次数の設定に関して詳細にその影響を示し、内部損失係数の導出を通し手法の妥当性能を確認した。さらに端部支持材による端部損失係数を算出し、拡散振動場を仮定した理論値と振動解析結果により算出した値について、傾向は捉えているもののその値に大きな乖離が生じていることを示した。さらにランダム入射エネルギー吸収率について検討を行い、音響透過損失測定結果に影響の大きい支持材のヤング率について推定できる可能性を示し、一方で単純な曲線当てはめでは支持材の損失係数を過大評価してしまう可能性を示唆した。

今後の展望として、音響材料開発の数値予測手法という観点ではより自由度の高い複雑な形状をもつ構造部材の遮音性能予測に対応が必要となる。よって、板材料の解析モデルに関するものとして、シェルや多孔質弾性板等の要素の導入、平板要素と境界要素法との適合、厚板要素や張力・異方性を有する平板要素の導入、初期歪みの導入等々数多くの発展が見込まれる。また、現在幾何学的入射パワーを想定した解析を行っているが、入射波と反射波を分離することによる実質的な入射パワーの算出手法の構築が求められる。

ニッシェ効果に関しては、その効果量が共振によるディップに大きく影響を受けることから単純な補正は難しく、数多くの知見との対応関係明らかにする必要があるといえる。特に、スタガードニッシェや傾斜をもつニッシェ等の解析も本研究における解析手法では検討可能であることから、今後より多くのパラメトリックスタディが可能である。

端部支持材に関する検討については、端部支持材の物性の逆推定を行い支持材そのものの物性と系に組み込んだときの物性の違いを明らかにすることで、実測および数値予測上

の精度向上が見込まれる。また，本検討では集中バネモデルとの対応関係をみる上で支持材と側壁を一面のみ固定の条件とした。これはシリコーン支持の条件に近くパテ支持では空気と接している面以外は固定支持やスリップ状態に近いものと考えられたためであるが，その影響に関しても検討の余地がある。

参考文献

- [1] Albert London , Transmission of reverberant sound through single walls, *J. Research Natl. Bur. Standards*, Vol.42(605), pp. 77-88, 1949.
- [2] Albert London , Transmission of Reverberant Sound Through Double Walls, *J. Research Natl. Bur. Standards* , Vol.44(2058), pp. 77-88, 1950.
- [3] A.Adini and R.W.Clough, Analysis of plate bending by the finite element method, National Science Foundation, G7337, 1961
- [4] Bong-Ki Kim, Hyun-Ju Kang, Jae-Seung Kim, Hyun-Sil Kim, and Sang-Ryui Kim, Tunneling effect in sound transmission loss determination: Theoretical approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 115(5), Pt. 1, pp. 2100-2109, 2004.
- [5] C.Hopkins, Sound Insulation, Routledge, 2012
- [6] E. C. Sewell, Transmission of Reverberant Sound Through a Single-Leaf Partition Surrounded by an Infinite Rigid Baffle, *J. Sound Vibration*, Vol. 12, pp. 21-32, 1970
- [7] Frank Ihlenburg, Finite element Analysis of Acoustic scattering, Springer, 2007
- [8] J.F. Allard, N.Atalla Propagation of sound in porous media : Modeling sound absorbing materials -Second Edition, WILEY, 2009
- [9] J.Yoshimura, S.Sugie, and E.Toyoda, Effects of size and edge damping on measurement results for sound reduction index of glass pane, *Proc. of Inter-noise*, 2006.
- [10] J.Yoshimura, S.Sugie, and E.Toyoda, Internal edge damping effects on sound reduction index measurements of a glass pane, *Proc. of Inter-noise*, 2007.
- [11] L. Cremer , Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schragen Einfall *Akustica Zeitschrift*, Vol. 7, pp. 81-103, 1942.
- [12] Loris Nagler , Simulation of Sound Transmission through Poroelastic Plate-like Structures, Monographic Series TU Graz, 2011
- [13] O. C. Zienkiewicz 著, 吉識雅夫, 山田嘉昭監訳, 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1975
- [14] R. J. Donato, Sound Transmission through a Double-Leaf Wall, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.51 (807), 1972.
- [15] Roman Vinokur, Mechanism and calculation of the niche effect in airborne sound transmission, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 119(4), pp. 2211-2219, 2006.

-
- [16] R.J. Melosh, Basis for derivation of matrices for direct stiffness method, AIAA, J.1 1631-7, 1963
 - [17] R. W. Guy and P. Sauer, The Influence of Sills and Reveals on Sound Transmission Loss, *Applied Acoustics.*, Vol. 17, pp. 453-476, 1984.
 - [18] R. W. Guy, A. De Mey and P. Sauer, The Effect of Some Physical Parameters upon the Laboratory Measurements of Sound Transmission Loss, *Applied Acoustics.*, Vol. 18, pp. 81-98, 1985.
 - [19] S.Timoshenko, and S.Woinowsky-Krieger, Theory of plate and shells (2nd ed.), chap.4, McGraw-Hill, NewYork, 1959
 - [20] T. Kihlman and A. C. Nilsson, The Effects of Some Laboratory Designs and Mounting Conditions on Reduction Index Measurements, *Journal of Sound and Vibration.*, Vol. 24 (3), pp. 349-364, 1972.
 - [21] T. Sakuma, K. Egawa, Y. Yasuda: Numerical analysis of sound transmission loss of glass pane - On the treatment of edge damping, *Proc. Inter-Noise 2008 (Shanghai)*, No.0486, 9p., 2008.
 - [22] T. Sakuma, K. Adachi, Y. Yasuda, Numerical investigation of the niche effect in sound insulation measurement, *Proc. Inter-Noise 2011 (Osaka)*, No.432239, 8p., 2011.
 - [23] 朝倉巧, FDTD 法による音響振動連成解析を用いた遮音性能のシミュレーションに関する研究, 博士論文, 2009.
 - [24] 安達光平, 音響振動連成解析を用いた遮音性能測定法の現象解明, 東京大学修士論文, 2011.
 - [25] 飯田一嘉, 現場実務者と設計者のための 実用 騒音・振動制御ハンドブック, エヌ・ティー・エス 2000
 - [26] 江川健一, 窓ガラスの音響透過損失に関する数値解析 板振動場における周辺支持部のモデル化について, 東京大学修士論文, 2009.
 - [27] 大嶋拓也, 佐久間哲哉, 壁体部材の遮音性能数値予測に関する研究: 板材における寸法および内部減衰の影響に関する検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 111-112, 2001.
 - [28] 大鶴徹, 山本秀樹, 計算力学手法による異端の音響透過特性解析, 日本音響学会誌 Vol.4, No. 4 1988.
 - [29] 大鶴徹, 富来礼次, 岡本則子, 建築壁体の遮音メカニズム解析: 周辺支持に関する計算力学的手法と音響インテンシティ法による基礎的検討, 日本建築学会九州支部研究報告集, No. 39, pp.153-156, 2000.
 - [30] 加藤初弘, 加藤初儀. 非均質な弾性平板における屈曲波のテンソル基底を用いた新しい定式化. 日本応用数理学会論文誌 Vol. 22, No. 4, pp. 253-267, 2012.
 - [31] 川井孝雄, 一重板の遮音機構の解析: 周辺固定円形板への平面波垂直入射, 日本建築学会大会学術講演梗概集, Vol. 47 pp. 17-18, 1972.
 - [32] 黒木荘一郎, SEA 法の改良による単層壁の残響室法音響透過損失の推定: 壁体の形

- 態による遮音性能の変化に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 67-68, 1986.
- [33] 黒木荘一郎, 安岡正人, 赤坂裕, 圧電振動板加振動による単層壁の損失係数の測定と周辺吸収率の算出, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1991.
- [34] 佐久間哲哉, 大嶋拓也, 音響振動連成シミュレーションによる部材遮音性能予測に関する研究 -膜・板材の3次元透過モデル-, 日本音響学会講演論文集, No.2, pp. 687-688, 2000.
- [35] 佐久間哲哉, 安田洋介, 江川健一, 窓ガラスの音響透過損失に関する数値解析: 周辺支持部のモデル化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 229-230, 2008.
- [36] 真田明, 正章忠, 柄川尚慶, 田中信雄, 音響透過損失測定における試料サイズの影響に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol. 69, No. 684, pp. 109-116, 2003.
- [37] 真田明他, 反共振現象のメカニズムを利用したアクティブ遮音に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol. 693, No.70, pp. 1293-1300, 2004.
- [38] 清水貴史, 河井康人, 境界積分方程式による多重窓の音響透過の解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 53-54, 2004.
- [39] 高崎強, 大鶴徹, 板の形態とその遮音特性に関する研究: その2 有限要素法を用いた中空二重壁の音響透過解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 431-432, 1990.
- [40] 田中信雄他, 振動放射音の制御に関する研究: キャンセレーションメカニズムについて, 日本機械学会論文集, Vol. 537, No.57, pp. 1512-1519, 1991.
- [41] 寺尾 道仁, インピーダンス管を用いた材料の音響特性の計測技術, 音響学会誌 63(10), pp.606-611, 2007
- [42] 前川純一, 森本政之, 阪上公博, 建築・環境音響学 第二版, 共立出版 2000
- [43] 武藤大輔, 高野靖, 武市通文, 牧野和宏, 山口剛, 実験 SEA 法を用いた板の透過音解析, 環境工学総合シンポジウム講演論文集, No. 12 pp. 111-114, 2002.
- [44] 山口道征, ガラスの透過損失測定用パテ (putty) の複素弾性率, 制振工学研究会通信 2 月号, 2006.
- [45] 山口道征, サッシ窓用ガスケット材料の複素弾性率, 制振工学研究会通信 8 月号, 2006.
- [46] 吉村純一, 小川博正, 山下充康, 音響透過損失の測定における試料の取付条件の影響- ニッシェ効果について-. 日本音響学会講演論文集, pp.641-642, 1985.
- [47] 吉村純一, 杉江聡, 豊田恵美, 板ガラスの音響透過損失の測定結果に与えるサイズ及び端部損失の影響, 建築音響研究会資料 AA2006 - 30, 2006
- [48] 吉村純一, 杉江聡, 豊田恵美, 板ガラスの音響透過損失の測定結果に与えるサイズ及び端部損失の影響, 日本音響学会騒音・振動研究会資料, N-2006-45, 2006.
- [49] 遊喜純子, 黒木荘一郎, 安岡正人, 透過損失に与える損失係数および周辺吸収率の影響, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1993.
- [50] JIS A 1416: 2000 「実験室における建築部材の空気音遮断性能の測定方法」.
- [51] JIS A 1441-1: 2007 「音響インテンシティ法による建築物及び建築部材の空気音遮断性能の測定方法 第1部: 実験室における測定」.

-
- [52] JIS G 0602 : 1993 「制振鋼板の振動減衰試験方法」.
- [53] JIS A 1405-2:2007 「音響管による吸音率及びインピーダンスの測定-第2部：伝達関数法」
- [54] ISO 140-1:1997 Acoustics - Measurement of sound insulation in buildings and of building elements - Part 1: Requirements for laboratory test facilities with suppressed flanking transmission.
- [55] 財団法人 建材試験センター 建築材料 (建築部材の空気遮断性能試験) における不確かさに関する調査研究成果報告書, 経済産業省委託調査研究, 2003.
- [56] 日本音響学会編, 音響用語辞典, コロナ社, 2003

謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院新領域創成科学研究科 社会文化環境学専攻修士課程において、同専攻佐久間哲哉准教授のもとに行った研究をまとめたものであります。筆者の不理解の中、佐久間先生には研究内容に関する内容はもとより研究を行う心構えから言葉遣いに至るまであらゆる面で御指導していただきました。心から感謝いたします。

同専攻の副指導教員の佐々木淳教授には、普段見落としがちな視点に関するアドバイスをいただきました。また東京大学生産技術研究所坂本慎一准教授には本論文の副査を担当していただきました。ここに感謝申し上げます。

本研究は、同専攻井上尚久さんの博士課程における研究の一端であります。本学入学以前より今日まで受けた御恩をこの紙面で表現することは到底できませんが、本研究に関わらせていただきましたこと、日々のご指導に感謝申し上げます。

株式会社 清水建設 朝倉巧博士には、音響透過問題のベンチマーク問題に関する研究において非常に有益なアドバイスをいただき、その他筆者の不躓な質問にも親切に御対応いただきました。ここにお礼申し上げます。

佐久間研究室の先輩であります土屋裕造さん、石川聡史さん、太刀岡勇氣さん、李孝振さん、江田和司さん、中島和博さん、郭静さん、後輩の上田脩太郎さん、澤幡麻佑子さん、西村裕喜子さん、深浦将太さん、鈴木一聡さんには、修士課程の短い期間ではありましたが楽しい思い出をたくさんいただきました。

同期の竹下圭悟さん、吉高弘俊さん、櫻田真章さんには、研究はもちろん日々の生活の多くを共有させていただきました。ここに敬意を表します。

筆者の九州大学音響設計学科の指導教員である河原一彦助教には、佐久間研究室での研究をご支援いただき、また筆者の学部生時代には何よりも研究の魅力をご教授くださいました。ここに感謝申し上げます。また嶋本裕之さん、古澤宏樹さん、内田秀継さんをはじめ音響設計学科の同期の皆様には筆者の本学在籍時においても筆者の研究や私生活等の相談に快く乗っていただきました。

最後になりましたが、筆者の学生生活を暖かく見守って頂いた両親と兄姉に多大なる感謝の意を称します。

2014 年 1 月 27 日

清家剛

発表論文一覧

修士論文梗概

本研究に関する発表論文

1. 清家剛, 井上尚久, 佐久間哲哉, ”音響透過損失測定におけるニッシュ効果に関する数値解析－解析モデルの比較－,” 日本音響学会秋季研究発表会講演論文集, pp.1047-1048, 2013.9.
2. 清家剛, 井上尚久, 佐久間哲哉, ”薄板の音響透過損失に関する数値解析－三次元弾性体による周辺支持モデル－,” 日本音響学会春季研究発表会講演論文集, pp.-, 2014.3.

本研究以外の発表論文

1. 清家剛, 李孝振, 佐久間哲哉: 2次元ランダム入射乱反射率の実験室測定法に関する基礎的検討, 日本音響学会秋季研究発表会講演論文集, pp.1167-1168, 2012.9.
2. 清家剛, 佐久間哲哉, 朝倉巧: 薄板の音響透過問題に関するベンチマーク問題の提案－周波数領域解析と時間領域解析の計算精度・効率の比較－, 日本建築学会大会学術講演梗概集(環境工学1), pp.207-208, 2013.9.

板状部材の遮音性能の数値予測に関する研究 - 試料設置及び支持条件のモデル化 -

Numerical Prediction of Sound Insulation Performance of Plate-like Members
- Modeling of Sample Mounting and Edge Support System

学籍番号 47-126785

氏 名 清家 剛 (Seike, Tsuyoshi)

指導教員 佐久間 哲哉 准教授

1 はじめに

1.1 研究の背景

外部騒音伝搬・プライバシー等に関する社会的要求水準の高まりや音環境設計の広範囲化に伴い、高性能・多機能・低コストの遮音材料の開発が盛んに行われている。部材開発は、「性能予測」・「作成」・「測定評価」を繰り返し製品として設計されるため、それぞれの段階における精度を高めサイクルを短縮することが製品の高性能化やコストの削減につながる。そこで、サンプル作成の必要が無い数値シミュレーションの特長を活かした設計自由度の高い遮音性能予測手法の確立と、それを利用した測定結果の変動要因の究明が求められている。

1.2 研究の目的

以上のような背景を踏まえ、本研究では部材遮音性能の予測および測定における精度向上と測定結果の変動要因の解明に向け、試料設置条件及び試料端部の支持条件が部材の遮音性能に与える影響を音響振動連成解析により明らかにすることを本研究の目的とする。これら変動要因解明および現実には則した解析モデルの開発を通じ、部材開発の高性能化・低コスト化に貢献するものである。

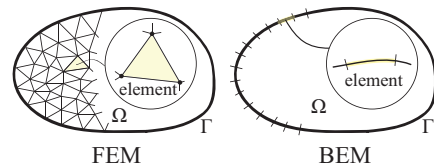


Fig. 1 Conceptual diagram of finite element method and boundary element method.

2 研究手法概要

2.1 遮音性能指標

建築部材の空気音遮断性能を評価する物理指標として、音響透過損失を用いる。音響透過損失は、試料に入射する音響パワー (W_{inc}) と試料を透過する音響パワー (W_{trans}) の比の常用対数の 10 倍で、次の式で与えられる。

$$R = -10 \log_{10} \frac{W_{trans}}{W_{inc}} \quad [\text{dB}]$$

2.2 解析手法

本研究では以下の二つの波動音響解析手法を用い、両手法を連成させ音場・振動場の解析を行う (Fig. 1)。

有限要素法 (FEM)

解析場の領域を離散化し、解析対象を多自由度振動系として解く手法であり、種々の物理場に柔軟に対応可能な手法である。

境界要素法 (BEM)

解析場の境界を離散化し境界値問題を解く手法であり、開空間の解析に有利な手法である。

2.3 解析モデル

音響透過損失測定は、音源室と受音室を繋ぐ開口に試料を設置することで透過する音響パワーの測定を行っている。

一方、本研究における数値解析モデルでは、厚みのある無限大剛バフルの開口に設置した試料へ音波がランダムな方向から入射する条件を想定し解析を行う。開口面への入射パワーおよびバフル内外の境界面での透過パワーから音響透過損失を算出する。入射側・透過側のバフル外部の音場には BEM を、バフル内部の音場・振動場には FEM を適用し、仮想境界面で結合する。

3 試料設置条件に関する検討

3.1 検討内容

試料と実験室間の壁体の厚みの差による凹みはニッシュと呼ばれており、ニッシュの深さや試料設置位置による測定値の変動がニッシュ効果として知られている。関連する研究はこれまで多くなされてきたが [1,2]、張り出しにより側壁を模擬した張り出し型と厚みのある側壁に試料を設置した凹み型による検討が実験的・数値的検討について混在しており、二つのタイプの対応関係は明らかになっていない。そこで本報では、これら二つのタイプのニッシュについて、ニッシュ深さによる音響透過損失値の変動の比較結果を報告する。

解析にあたり、正方形 (0.9 m×0.9 m) のガラスの周辺をパテ材で支持したモデルを想定し、ランダム入射透過損失を算出する。

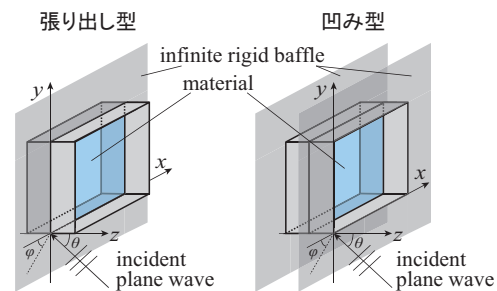


Fig.2 Schematic of the calculation models.

3.2 検討結果

Fig. 2 に示す 2 つのニッシュタイプについて、ニッシュ深さを変化させ、試料をニッシュ中央に設置したときの音響透過損失値を Fig. 3 上段に、またその 1/3 オクターブバンド換算値を下段に示す。無限大面積試料の理論値、有限矩形板の理論式を併せて示す。

ニッシュが浅いとき、板の共振に伴うディップが生じているものの、それ以外の中低音域において両モデルとも有限矩形板の理論式に概ね従う傾向がみられる。

ニッシュが厚いとき、中低音域で値の低下がみられる。例としてニッシュ無しの場合と深さ 450 mm の凹み型ニッシュを設置した場合の 1/3 オクターブバンド値を比較すると、800 Hz 以下のほぼ全ての周波数帯域で 5 dB 程度の値の低下が生じていることがわかる。この低下量は、理論的にはガラス板の板厚が半分になったときの変化量に相当し、実務上大きな変化といえる。

ただし、値の低下量はニッシュタイプにより大きな差がみられ、張り出し型は 400 Hz 以下の低音域で比較的变化が少ないことがわかる。既往研究や実務において行われてきた張り出しによる実験室側壁の模擬は、特に低音域に関し一般的な凹み型ニッシュの効果を再現できていないことが示唆され、検討対象となる実験設備の状況に応じた適切なモデル化による予測が必要である。

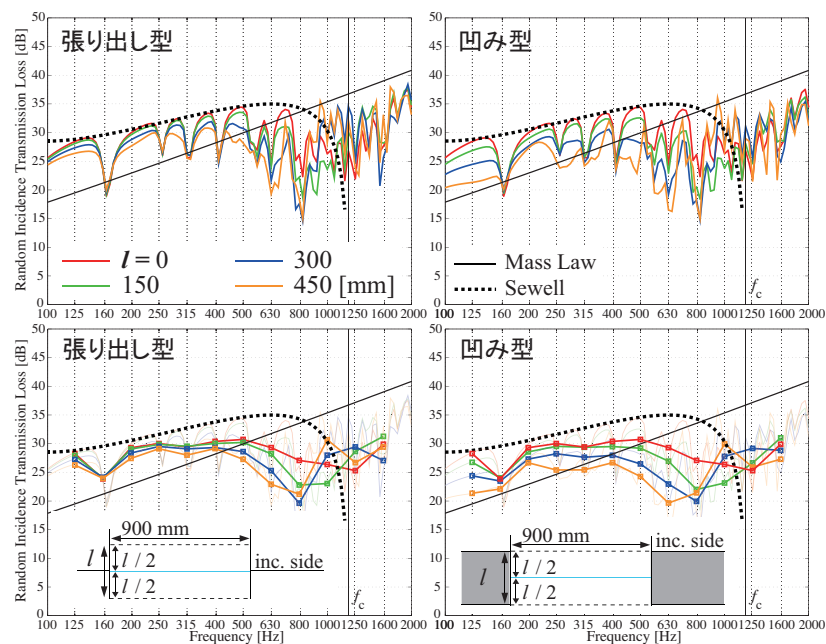


Fig. 3 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different wall thicknesses. Single freq. (top), 1/3 Oct. band (bottom).

4 支持条件に関する検討

4.1 検討内容

板材が共振する周波数では音響透過損失にディップが生じ、このディップの深さは振動系の粘性抵抗が主に制御している。そのため、ガラスや鉄といった内部損失の小さく薄い板状部材の場合、試料自体の物理特性の他、試料設置時の支持材によるエネルギー損失が音響透過損失の測定結果に大きな影響を及ぼすことが知られている[3]。

よって、数値解析による遮音性能予測においても、現実にもった性能予測という点で試料端部の支持条件の適切なモデル化が重要である。既往研究として支持材による端部支持条件をバネに置き換えたモデル(集中バネモデル)による検討が行われたが[4]、板試料の面内方向への運動を考慮していない点など、妥当性や適用範囲に関して不明な点が多い。そこで、より現実にもったモデルとして板材の四周付近を三次元弾性体により面的に接合させたモデル(三次元弾性体モデル)を導入した。本報では両モデルにおける音響透過損失値の比較結果について紹介する。

4.2 解析モデル

ガラス相当の物性値を与えた正方形(0.9 m × 0.9 m)の板試料を壁厚 100 mm の開口部中央に設置し、ランダム入射透過損失を算出する。以下に各支持モデルの概要を示す。

集中バネ支持モデル Fig. 4 (a)に示すように、板試料周辺の支持材が端部の変位・傾斜に対して各々反作用するものと仮定し、弾性体と等価な並進・回転バネからなるモデルを想定する。

三次元弾性体支持モデル Fig. 4 (b)に示すように、側壁内部に埋め込まれている三次元弾性体を板試料と適合させる。

4.3 検討結果

支持材の厚みを変化させたときの両支持モデルの音響透過損失値とその 1/3 オクターブバンド換算値を Fig. 5 に示す。板共振によるディップは三次元弾性体支持モデルがより浅くなり、1/3 オクターブバンド換算値においても低音域で最大 2.6 dB 程度の乖離がみられる。三次元弾性体支持モデルでは板試料の面内方向への運動が支持材に生じるため、エネルギー損失が若干大きくなっていることが明らかとなった。

また、1000 Hz 以上の高音域において支持材厚増加による値の上昇が観察される。実務上、材料の性能だけでなく施工状況も遮音性能に影響を与えることが示された。

支持材の接合幅を変化させたときの両モデルの音響透過損失の計算結果を Fig. 6 に示す。接合幅の増加に伴いディップの周波数の上昇が観察されるが、上昇の程度は集中バネ支持モデルが大きく、接合幅が厚い場合には両モデルで共振周波数に乖離が生じる。これにより 1/3 オクターブバンド換算値では低音域で両者に大きな乖離が生じていることがわかる。

以上の検討より、モデルによる端部損失特性の相違を明らかにした。集中バネ支持モデルを用いる場合にはその周波数特性を見誤る危険性があり、十分な配慮を行う必要がある。

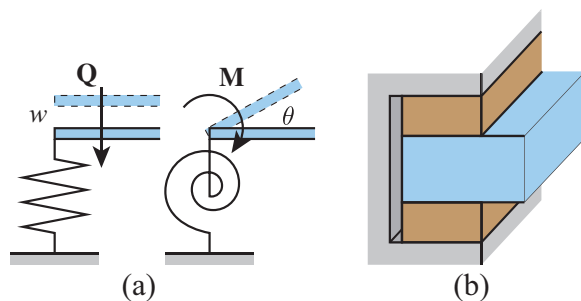


Fig. 4 Schematics of the support model.
(a) spring support model. (b) three dimension elastic support model.

5 おわりに

本研究では部材遮音性能の評価や予測における精度向上を目的として、試料設置条件及び試料端部支持条件が音響透過損失の測定値に与える影響に関する検討を行った。本報告では音響透過損失値に関する検討内容を紹介したが、その他、支持材のエネルギー吸収特性の同定に関する検討を行っている。数値予測を行うためには実測から得られる物性パラメータの入力が必要であるため、その物性の適切な同定は予測精度向上に不可欠である。本研究では測定条件を理想化した数値解析上で物性同定のための基礎的検討を行った。それら一連の研究の結果より、予測・測定両面における精度向上に向けた知見が得られ、より現実にもった遮音性能予測の解析モデルの構築に寄与できる成果を得た。

本研究では試料としてガラスを研究対象とし予測精度の向上に向けた検討を行ったが、音響材料開発のための数値予測手法の確立という観点から、より多様な物理場や曲面構造・積層構造に柔軟に対応した予測手法の確立・発展が見込まれる。

参考文献 [1] 安達他, 音響学会講演論文集(春), 1149-1150, 2011. [2] Yoshimura, Inter-Noise, No.641, 2006. [3] 吉村他, 建築音響研究会資料, AA2006-30. [4] 江川他, 音響学会講演論文集(春), 1133-1134 2009.

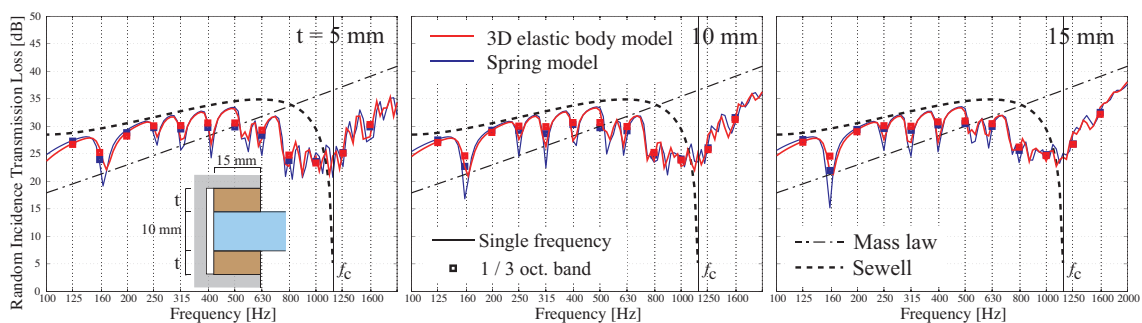


Fig. 5 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different thicknesses of the support material.

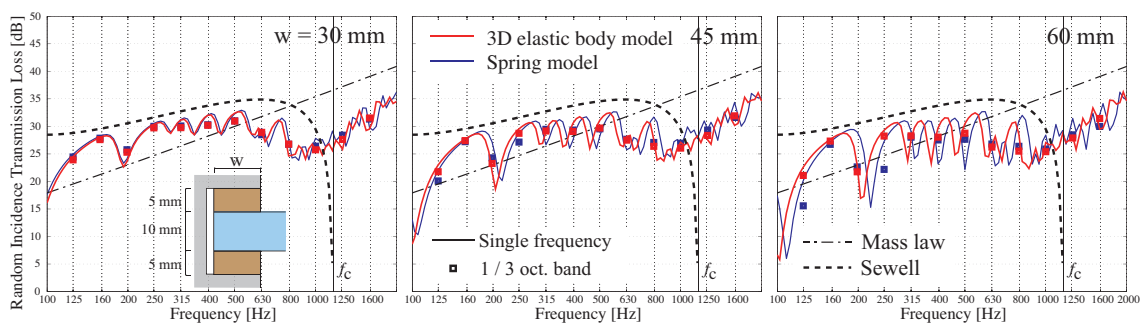


Fig. 6 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different widths of the support material.

音響透過損失測定におけるニッシュ効果に関する数値解析 -解析モデルの比較-

☆清家剛, 井上尚久, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

建築部材の残響室法透過損失測定における影響要因として、試料と壁体間のニッシュ（へこみ）の影響、いわゆるニッシュ効果が知られている。ニッシュ効果の関連研究として試料を板で囲むことによりニッシュを模擬したモデルによる実験的・数値的検討が行われてきたが[1,2], モデルの妥当性の検証については充分に行われていない。本報では、Fig. 1 に示すような張り出し型 (Model A) と凹み型 (Model B) のニッシュ効果の相違について、音響振動連成解析による解析結果から比較検討を行う。

2 解析手法

2.1 解析モデル

Model A 無限大剛バフル中の板試料四周を薄板で囲ったモデルを想定する[2]。入射側・透過側音場の各々に境界要素法 (BEM) を適用し、ニッシュに相当する薄板は厚さ 0 の剛な縮退境界とする。板振動場には有限要素法 (FEM) を適用する。

Model B 厚みのある無限大剛バフルの開口に試料を設置したモデルを想定する[3]。入射側・透過側のバフル外部の音場には BEM を、バフル内部の音場には FEM を適用し、境界面で連成する。板振動場には FEM を適用する。

2.2 解析条件

正方形 (0.9 m×0.9 m) の板試料にガラスに相当する物性値を与える (Table 1)。また、端部は単純支持とする。平面波が天頂角 θ , 方位角 φ で入射するものとして斜入射透過損失を算出し、各入射角について重み付け平均を行い、ランダムおよび音場入射透過損失を算出する。100 – 2000 Hz の 1/24 オクターブバンド中心周波数で解析を行う。

3 解析結果

3.1 ニッシュ深さ・板厚

2つのモデル、3通りの板厚の試料について、ニッシュの深さを 0, 150, 300, 450 mm と変化させ、試料をニッシュ中央に設置した場合のランダム

入射透過損失の計算結果を Fig. 2 に示す。また、ランダム入射時の質量則、Sewell の有限板理論式 [4] も併せて示す。

モデル・板厚に依らず、板共振により透過損失にディップが生じているものの、ニッシュが浅い場合には概ね Sewell の理論式による値に従う傾向が確認できる。ニッシュが深くなるにつれて、コインシデンス限界周波数 (f_c) 以下の非共振周波数において透過損失の低下量は大きくなり、Sewell の理論式による値から乖離していく傾向を示す。この傾向は Model B が顕著であり、特に低周波数において低下量が大きい。二つのモデルの開口面に対するバフル面の位置の違いにより、入射側では実際の入射パワーに、透過側では開口面での放射インピーダンスに違いが生じていることが推察される。

3.2 試料設置位置・入射条件

2つのモデルについて、ニッシュ深さを 450 mm, 試料の板厚を 10 mm とし、試料位置を変化させたときの垂直、ランダム、音場入射透過損失の計算結果を Fig. 2 に示す。

垂直入射条件においては、板の奇数モードの共振に伴うディップが見られ、モデルによる値の相違は低周波数で顕著である。

ランダム入射においてはいずれのモデルにおいても入射側および透過側のニッシュの深さについて概ね可逆性が認められる。また中音域では、試料が中央にあるとき最も透過損失が小さくなっている。中音域以下ではモデルによる値の差が大きく、試料位置の影響は Model B が顕著である。音場入射条件もランダム入射と同様の傾向を示すが、全体的にランダム入射条件よりも 2 dB 程度大きな値を示している。

4 おわりに

本報ではニッシュ効果について、二つの音響振動連成解析モデルを用いて比較検討を行った。その結果、 f_c 以下の非共振周波数における透過損失について、ニッシュのモデルによる違いが顕著となることが示された。

*Numerical investigation on the niche effect in sound transmission loss measurement -Comparison of numerical models, by SEIKE Tsuyoshi, INOUE Naohisa and SAKUMA Tetsuya (Univ of Tokyo).

参考文献

[1] 吉村他, 音講論(春), 641-642, 1985. [2] 安達他, 音講論(春), 1149-1150, 2011. [3] 井上他, 音講論(春), 1221-1224, 2013. [4] Sewell, J. Sound. Vib. 12, 21-32, 1970.

Table 1 Physical property of the plate.

Size	$0.9 \times 0.9 \text{ [m}^2\text{]}$
Young's modules	$7.5 \times 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$
Poisson's ratio	0.22
Density	$2500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
Loss factor	0.002

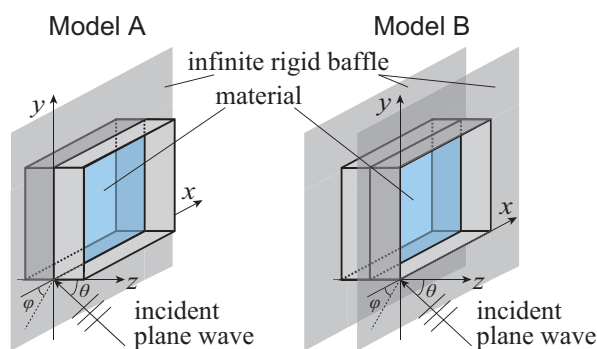


Fig. 1 Schematic of the calculation models.

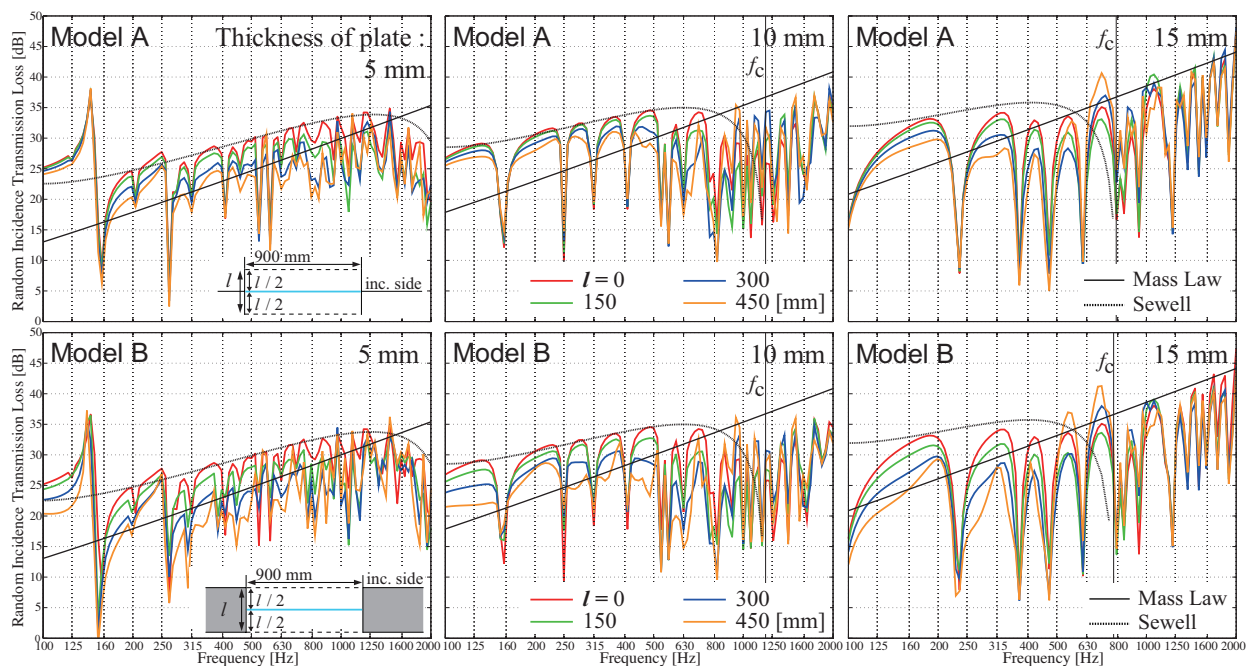


Fig. 2 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different niche depths.

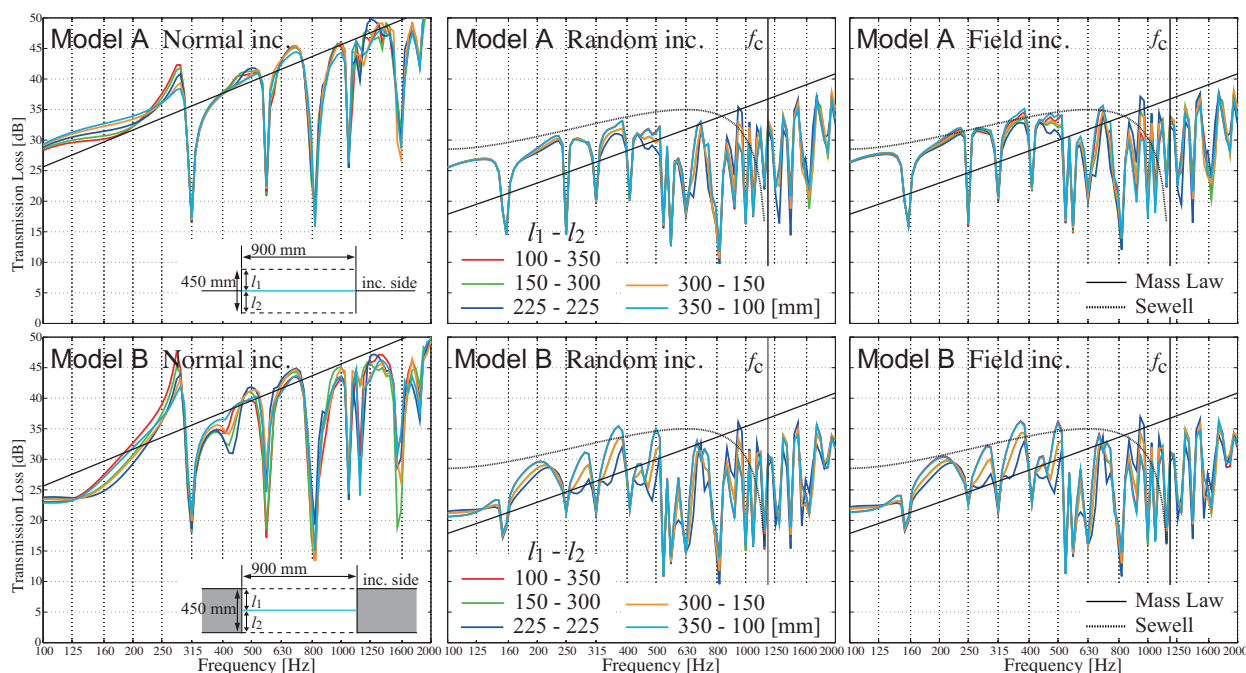


Fig. 3 Normal, random and field - incidence transmission loss calculated for the plate with niches on both sides. Their depths are varied oppositely, as the total depth becomes 450 mm at constant.

薄板の音響透過損失に関する数値解析 -三次元弾性体による周辺支持モデル-*

☆清家剛, 井上尚久, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

薄く内部損失の小さい材料の音響透過損失測定において試料の支持材の特性が測定結果に大きな影響を及ぼすことが知られている[1]。佐久間らはガラス周辺を並進バネと回転バネにより支持するモデル(集中バネ支持モデル)を導入し、支持材による端部損失を考慮した透過損失の数値予測を行ったが[2,3], モデルの妥当性や適用可能条件等、不明な点が多い。本報ではより現実には解析モデルとして、薄板周辺を三次元弾性体により面的に支持するモデル(三次元弾性体支持モデル)を導入し、集中バネ支持モデルとの相違について音響振動連成解析結果から比較検討を行う。

2 解析手法

2.1 解析モデル

Fig. 1 (a)に示すように、厚みのある無限大剛バフルの開口中央に薄板試料を設置し、平面波が入射する音響透過問題を想定する。バフル内部の音場・振動場に有限要素法、バフル外部の音場に境界要素法を適用し境界面で連成する。

集中バネ支持モデル Fig. 1 (b)に示すように、薄板周辺の支持材が端部の変位・傾斜に対して各々反作用するものと仮定し、弾性体と等価な並進・回転バネにより薄板周辺を支持する。

三次元弾性体支持モデル Fig. 1 (c)に示すように、側壁に埋め込まれている三次元弾性体と薄板の接合を想定する。薄板の面外変位・回転角に対し、三次元弾性体の変位を適合させる。また、三次元弾性体は側壁との接合面において固定支持とする。

2.2 解析条件

正方形(0.9 m×0.9 m)の薄板試料にガラスに相当する物性値を与え、支持材にはパテを想定した物性値を与える(Table 1)。平面波が天頂角 θ 、方位角 ϕ で入射するものとして斜入射透過損失を算出し、各入射角について重み付け平均を行い、ランダム入射透過損失を算出する。100–2000 Hzの1/24 オクターブバンド中心周波数で解析を行う。

3 解析結果

3.1 支持材厚

支持材と薄板の接合幅を15mmとし、厚みを変化させたときの両支持モデルにおける音響透過損失の計算結果と1/3 オクターブバンド換算値をFig. 2に示す。また、ランダム入射時の質量則、コインシデンス限界周波数(f_c)、Sewellの有限板理論式[4]も併せて示す。

モデル・支持材厚に依らず、板の非共振周波数では概ねSewell式に従う傾向がみられ、高音域ではコインシデンス効果による透過損失の低下が確認できる。板共振によるディップについては、低音域で支持モデルにより乖離がみられ、弾性体モデルがより浅い傾向を示している。集中バネモデルでは薄板の面外方向の運動のみ想定しているのに対し、弾性体モデルでは薄板の面内方向、特に周辺に沿う方向の運動が支持材に生じるため、エネルギー損失が若干大きくなっている。また、高音域では支持材が厚くなるにつれピークディップがならされ透過損失が増加しており、主に薄板を質量、支持材をバネとした一自由度共振系による影響と考えられる。なお、両支持モデルの1/3 オクターブ値では、低音域で最大2.6 dBの差が生じているが、中高音域では1.3 dB以内に収まっている。

3.2 支持材接合幅

支持材の厚みを5 mm、薄板の内法を一定とし、接合幅を変化させたときの両支持モデルにおける透過損失の計算結果をFig. 3に示す。

両支持モデルとも接合幅の増加に伴いディップの周波数の上昇が観察されるが、上昇の程度は集中バネモデルが大きく、接合幅が厚い場合には両モデルで共振周波数に乖離が生じていることがわかる。集中バネモデルは解析を行う薄板のサイズが一定であるのに対し、弾性体モデルは接合幅分だけ実質的な薄板のサイズが増加していることに起因するものと考えられる。また、集中バネモデルでは接合面内の反作用力の分布を無視して平均的に与えているため、実際のインピーダンスに差が生じている可能性がある。

*Numerical analysis of sound transmission loss of thin plate –Modeling of edge support system by three-dimension elastic body, by SEIKE Tsuyoshi, INOUE Naohisa and SAKUMA Tetsuya (Univ of

4 おわりに

本報では音響透過損失予測における端部支持条件について、二つモデルを用いて比較検討を行った。その結果、板共振時の透過損失値や共振周波数に両モデルの相違が確認された。集中バネモデルを用いる場合には、特に接合幅に関し十分な配慮を行う必要がある。

謝辞 本研究は科研費(No. 25289193)の助成を受けたものである。

参考文献 [1] 吉村他, 建音研資料, AA2006-30. [2] 佐久間他, 音講論(春), 1131-1132, 2009. [3] 江川他, 音講論(春), 1133-1134, 2009. [4] Sewell, J. Sound. Vib. 12, 21-32, 1970.

Table 1 Physical properties and dimensions of the plate and the support material.

Plate	Size	0.9×0.9 [m ²]
	Thickness	0.01[m]
	Young's modules	7.5×10^{10} [N/m ²]
	Density	2500 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.22
Support material	Loss factor	0.002
	Young's modules	1.0×10^8 [N/m ²]
	Density	1000 [kg/m ³]
	Poisson's ratio	0.25
	Loss factor	0.5

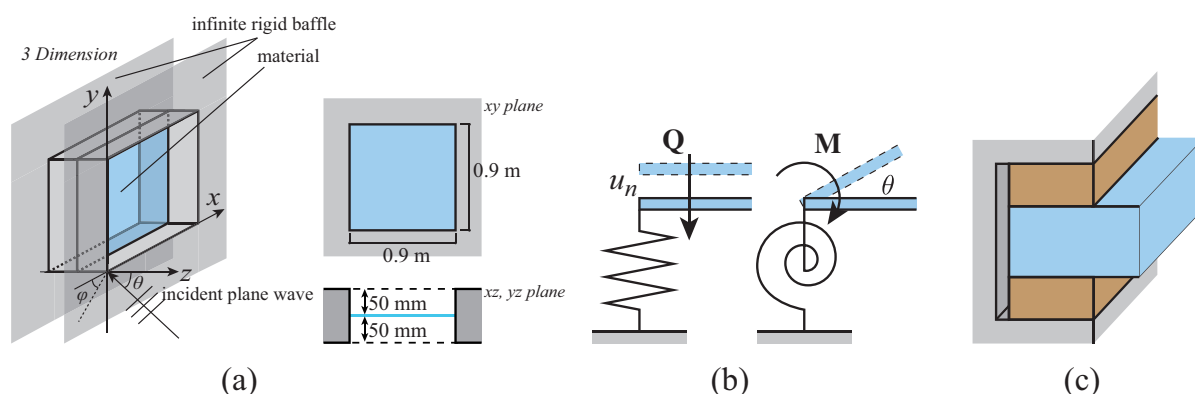


Fig. 1 Three schematics: (a) numerical model of sound transmission. (b) spring support model. (c) three-dimensional elastic support model.

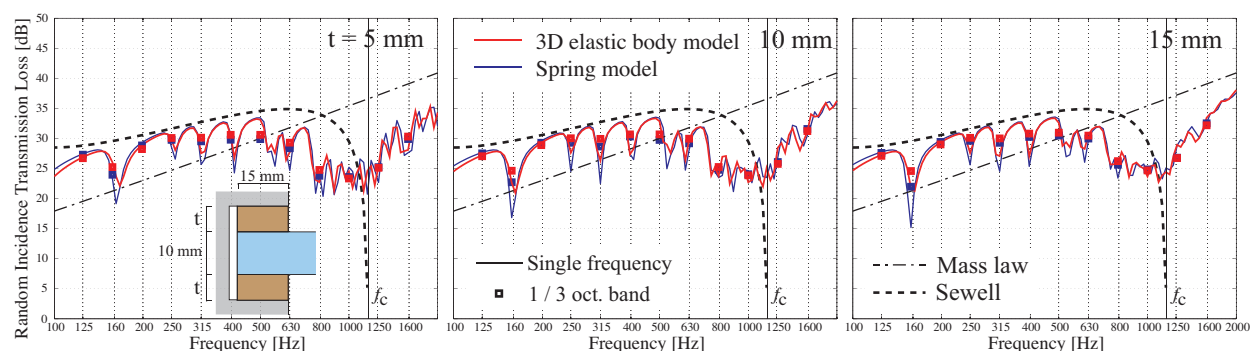


Fig. 2 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different thicknesses of the support material.

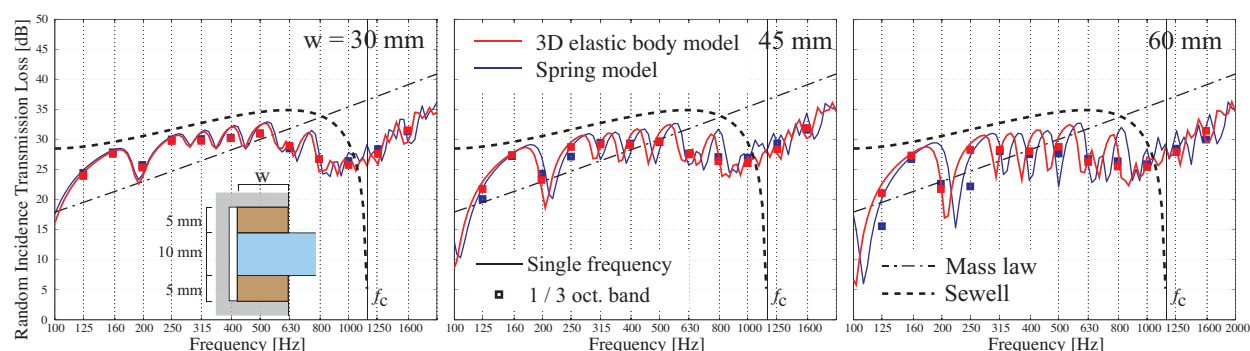


Fig. 3 Random-incidence transmission loss calculated for the plate with different widths of the support material.

2次元ランダム入射乱反射率の実験室測定法に関する基礎的検討*

☆清家剛，李孝振，佐久間哲哉（東大・新領域）

1. はじめに

壁面の音響拡散を表す一物理指標として乱反射率が提案され、3次元ランダム入射乱反射率の残響室測定法が ISO^[1]で規格化された。一方、建築空間において頻繁に用いられているリブ構造などの拡散体は入射角依存性が非常に強く、室内音響特性に及ぼす影響も大きいことから、入射角依存性を考慮した測定法が望まれている。既報^[2]では、矩形室において1次元音場の卓越する条件を設定し、試料設置による残響時間の変化から垂直入射乱反射率を求める測定法を構築した。本報では、縮尺模型実験により2次元ランダム入射乱反射率の同定を試み、数値解析結果との比較を通して、測定法の適用可能性に関する知見を得る。

2. 2次元ランダム入射乱反射率の測定理論

対向する平行壁面2面を吸音性、他の4面を反射性とし、2次元音場が卓越する条件を作る(図1)。床面全面に試料を設置するものとし、試料設置前後の残響時間 $T_{2,0}, T_{2,1}$ を計測する。2次元拡散音場を仮定すると、

$$T_{2,0} = \frac{13.8\pi S}{cL\{-\ln(1-\alpha_0)\}} \tag{1}$$

$$T_{2,1} = \frac{13.8\pi S}{cL\{-\ln(1-\bar{\alpha})\}} \tag{2}$$

ただし、 S, L は2次元音場の面積・周長、 $\alpha_0, \bar{\alpha}$ は試料設置前後の平均吸音率で、

$\bar{\alpha} = \frac{l_s}{L}\{\alpha_s + (1-\alpha_s)s_{r,2}\} + \frac{L-l_s}{L}\alpha_0$ である。ここで、 l_s, α_s は2次元面内の試料の長さ・吸音率であり、試料の2次元ランダム入射乱反射率は次式で算出される。

$$s_{r,2} = \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_s} \frac{L}{l_s} \left[1 - \exp\left\{ \frac{13.8\pi S}{cL} \left(\frac{1}{T_{2,0}} - \frac{1}{T_{2,1}} \right) \right\} \right] - \frac{\alpha_s - \alpha_0}{1-\alpha_s} \tag{3}$$

なお、本測定理論により求められる2次元ランダム入射乱反射率は、全反射エネルギーに対する面外方向への乱反射成分の割合に相当する。

3. 測定概要

アクリル板(10 mm 厚)を用いて製作した 1/4 縮尺矩形室の対面にウレタンフォーム吸音材(150 mm 厚、密度 25 kg/m³)を設け、2枚のアクリル板(2 mm 厚)を3通りの角度で設置し不整形室を作成した(表1)。

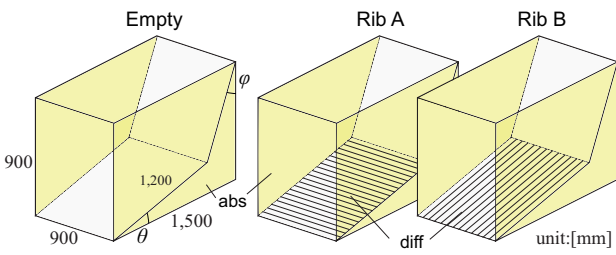


Fig. 1. 1/4 scale room and two sample arrangements.

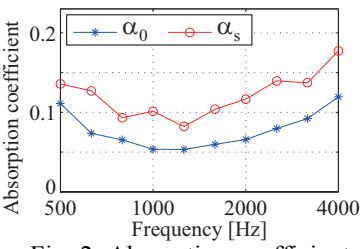


Fig. 2. Absorption coefficients of wall and the sample.

Table 1. Slopes of two walls.

	θ [deg]	φ [deg]
Room 0	0	18
Room 1	1	19
Room 2	5	21

測定試料(25 mm 角 の木製リブを配列した周期構造壁面)は 1200 mm×900 mm の床全面に2方向(rib1, rib2)に配置した。TSP 信号で測定したインパルス応答から逆二乗積分法により1/3オクターブ帯域毎の残響曲線を求め、指定範囲の最小二乗近似より残響時間を算出した。なお、試料設置前の吸音率は(1)式より導出し、試料の吸音率は別途測定した残響室法吸音率を採用した(図2)。

4. 測定結果および考察

4.1. 残響時間の同定

試料設置前後の各室の残響曲線を図3に示す(周波数は実物換算)。試料設置より減衰量が大きくなり、設置方向による影響も現れている。10 dB の減衰区間で同定した各室の残響時間を図4に示す。初期に対して後期で同定した残響時間は全体的に長くなる傾向にあるが、試料設置により残響時間が短くなることが確認できる。特にリブを吸音面に対して平行に設置した場合(Rib B)、残響時間の低下がより顕著であり、リブによる散乱成分が2次元音場の面外方向に大きいことが推察される。

4.2. 2次元ランダム入射乱反射率の同定

上記の同定区間で求めた残響時間から算出した2

* Basic study on a laboratory measurement method of two-dimensional random-incidence scattering coefficients, by SEIKE Tsuyoshi, LEE Hyojin and SAKUMA Tetsuya (Univ. of Tokyo).

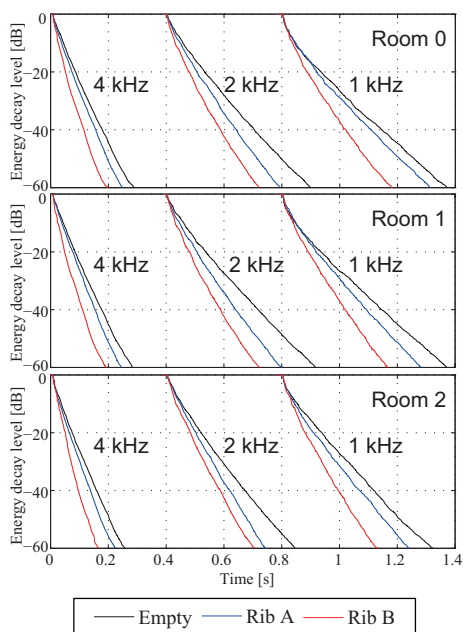


Fig. 3. Energy decay curves in 1/3-oct. bands.

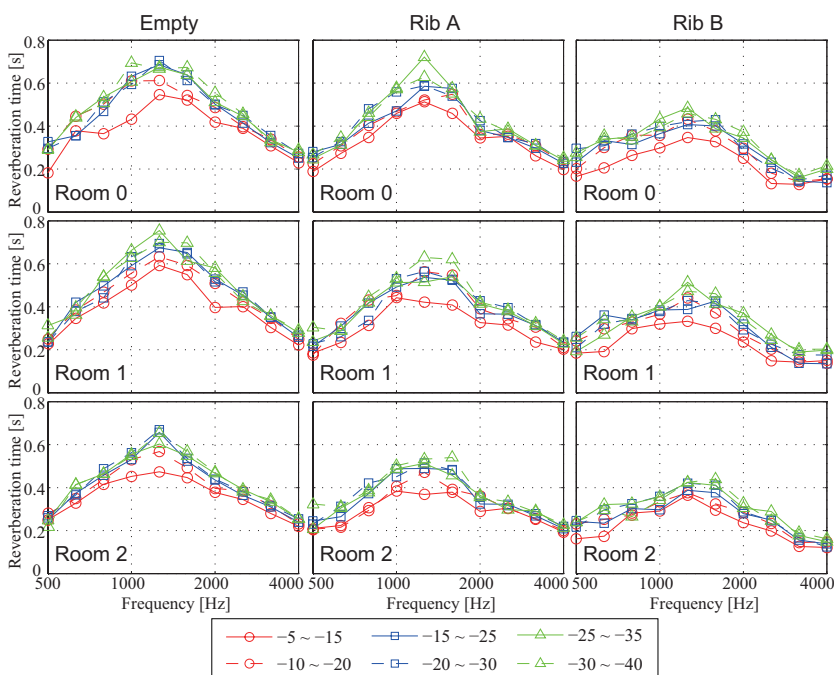


Fig. 4. Reverberation times estimated from different decay ranges.

次元ランダム入射乱反射率を図5に示す。図中、波動数値解析^[3]による垂直入射・2次元ランダム入射の計算値を併記する。Rib A の測定値は計算値と全く異なり、ほぼ0となっている。吸音面に垂直なリブ方向では散乱成分が2次元音場の面内に残るため、見掛け上の値が極めて小さくなったものと考えられる。一方、Rib B では散乱成分が面外に向かうことから、計算値と比較的良好な対応を見せている。

Rib B の結果を詳細に見ると、初期に対して後期で同定した乱反射率は値が全体的に低下し、計算値より高音域側にピークが移っている。2次元音場の減衰過程において、試料に対する入射エネルギーの角度分布の変化が原因として考えられる。Rib B の乱反射率の入射角依存性として、垂直入射に対して面内角度が大きくなると乱反射率が低下する傾向にあるため、後期では擦過入射に近い成分の割合が増加している可能性がある。なお、試料面の傾斜が無い Room 0 では他の室より乱反射率が若干高いことから、2次元ランダム入射からの乖離が生じているものと推察される。

5. おわりに

本報で試行した乱反射率測定法は、2次元音場の面外への散乱成分を同定するものであり、従来の乱反射率の定義(非鏡面反射成分の割合)と異なる。リブ構造壁面の方向により測定値が異なることを例示したが、測定法として精度上の問題は大きい。

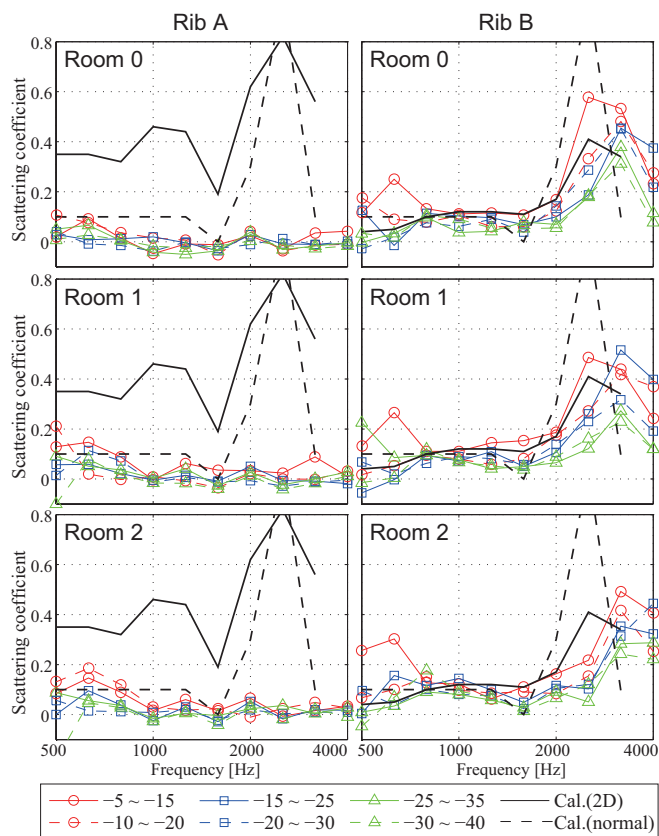


Fig. 5. 2D random-incidence scattering coefficients estimated from different decay ranges for the two sample orientations. Black thick/dotted lines: numerical results for 2D random/normal incidence.

参考文献

- [1] ISO 17497-1:2004.
- [2] 李他, 音講論(春), 1295-1296, 2011.3.
- [3] H. Lee et al., *Inter-Noise 2012 (New York)*, 2012.8.

薄板の音響透過問題に関するベンチマーク問題の提案 -周波数領域解析と時間領域解析の計算精度・効率の比較-

正会員 ○清家 剛*
同 佐久間 哲哉**
同 朝倉 巧***

ベンチマーク問題 有限要素法 時間領域有限差分法
音響透過損失 境界要素法

1. はじめに

近年、様々な数値解析手法が音場予測に応用され、その有効性、実用性も高まりつつあるが、各手法間の相互比較はあまりなされていない。このような状況を踏まえ AIJ-BPCA (Architectural Institute of Japan-Benchmark Problems for Computational Acoustics) ベンチマーク問題群が web 上で公開され[1]、研究開発や利用者の手法選択において有用なデータベースの構築が進められている[2][3]。

本報では、構造・音響連成問題における基本問題として、弾性薄板の音響透過問題を対象としたベンチマーク問題を提案する。ここでは有限要素法と境界要素法を組み合わせた周波数領域解析手法[4]（以下 FEM+BEM）および時間領域有限差分法を用いた時間領域解析手法[5]（以下 FDTD）による解析結果に関して、精度・効率の観点から比較・検討を行う。尚、本報は建築学会音響数値解析小委員会における検討内容をまとめたものである。

2. 問題概要

無限大剛バフル中に設置された薄板に振幅 1 Pa の平面波が板に垂直に入射する問題を想定する (Fig.1)。薄板の形状は矩形 (1 m × 1 m) とし、板厚およびバフル厚は特に考慮しない。薄板の端部は単純支持とし、ガラスを想定した物性値を与える (Table.1)。

TASK A (音圧分布) 点 (0.5, 0.0, 0.0) から点 (0.5, 1.0, 0.0) までの線分上に 0.02 m おきに設置した 51 点 (Fig.1 の R1) での音圧振幅値を算出する。解析周波数は 1/1 オクターブバンド中心周波数 ($f = 31.5, 63, 125, 250, 1k, 2k$ Hz) とした。

TASK B (周波数応答) 板の音響透過損失を算出する。本報での解析周波数は 50~2k Hz とした。

Table.1 Physical property of the plate

Thickness	0.01 [m]
Young's modules	7.5×10^{10} [N/m ²]
Poisson's ratio	0.22
Density	2500 [kg/m ³]
Loss factor	0.002

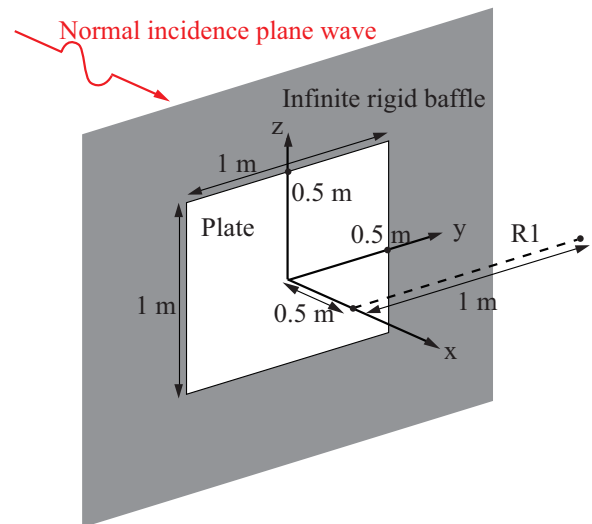


Fig.1 Geometry of the model

3. 計算例

3.1 解析手法概要

FEM+BEM 板の曲げ振動場に有限要素法(FEM)、入射側・透過側音場に境界要素法(BEM)を適用する。それぞれ四角形要素を使用し、解析波長の 1/8 以下となるよう離散化を行った。FEM における板の要素行列は陽な形式で与え、BEM における影響係数は 4 点の Gauss 積分により算出した。行列方程式の解法は LU 分解に基づく直接解法を用いた。計算実行環境として、Intel Core i7 960 (3.2 GHz), Intel コンパイラを用いた。

FDTD 板の曲げ振動場と入射側・透過側音場に陽解法の時間領域差分法を適用する。空間離散化幅は解析波長の 1/8 以下とし、時間離散化幅は、音場について $\Delta t = 2.5 \times 10^{-2}$ ms, 振動場においては $\Delta t = 1.25 \times 10^{-3}$ ms とした。入射側・透過側音場端部に 15 層の PML を設け、音源として 2 kHz までを含む平面波を与えた。計算実行環境として Intel Core i7 920 (2.67 GHz) を用いた。尚、本解析では 500 Hz 以下と以上の 2 帯域に分けて板の損失係数を近似的に与え、合計 2 回の計算を行った。また、解析した時間応答長については十分な減衰を考慮し、2.4 秒分とした。

A benchmark test on the sound transmission loss of a thin plate. - Comparison of calculated results by frequency and time domain methods in terms of accuracy and efficiency -

SEIKE Tsuyoshi, SAKUMA Tetsuya
and ASAKURA Takumi

3.2 結果と考察

解析精度 Task A の解析結果を Fig.2 に示す.

1 kHz 以下の周波数については、両者は概ね良く対応しているが、2 kHz で乖離が見られる。これは高周波数になるに従い FDTD の板振動解析において分散誤差が生じているためであると考えられる。

Task B の解析結果を Fig.3 に示す。また、1/3

オクターブバンド換算値、質量則、各モード周波数の理論値を併せて記す。両手法ともに質量則、板の共鳴透過を良く捉えているといえる。ただし、上述の分散誤差により FDTD の解析結果では高音域で共振の生じる周波数が低下している。例として(5, 5) モード周波数の理論値は 1273 Hz であるのに対し、FEM+BEM では 1271 Hz, FDTD では 1252 Hz にディップが生じている。

計算効率 両 Task を解析した際の周波数範囲と応答時間、計算時間、必要記憶容量を Table.2 に示す。FEM+BEM では 1Hz 刻みで 1951 回 計算を行い、総計算時間は約 73.1 時間であった。FDTD では 1/40000 秒刻みで 96000 step の計算を 2 回行い、総計算時間は約 36.3 時間であった。

4 おわりに

本報では、薄板の音響透過損失のベンチマーク問題を提案し、各手法について解析例の提示、及び比較検討を行った。その結果、両手法の解析結果は概ね良い対応を示すことがわかり、構造・音響連成のベンチマーク問題としての有効性が示された。周波数領域解析では周波数ごとに細やかな条件設定が可能な点、時間領域解析では一度で全周波数帯域の結果が得られる点など、それぞれの特徴を勘案の上、対象とする問題ごとに適した手法を選定することが可能である。

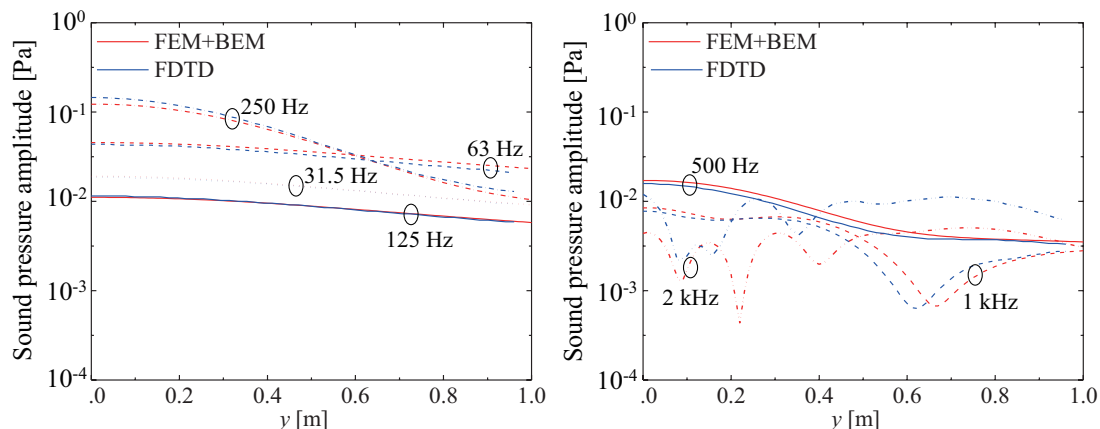


Fig.2 Distribution of the sound pressure amplitude.

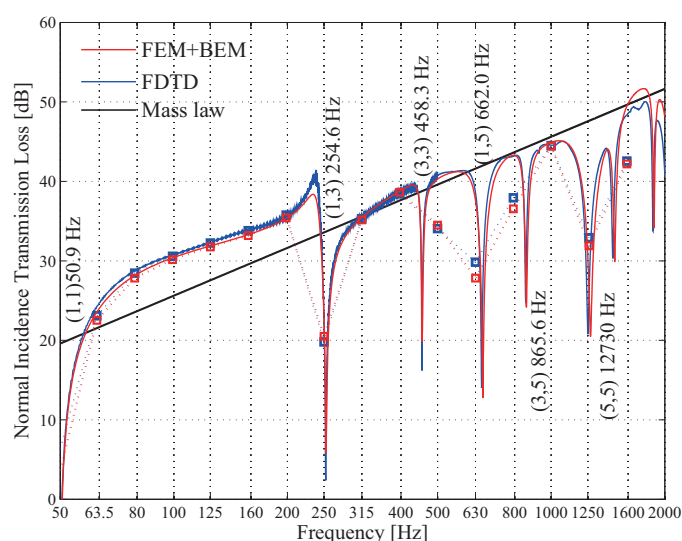


Fig.3 Transmission loss of a glass plate with 10 mm thickness.

参考文献 [1] Working Group on Computational Method for Environmental Acoustics, "Benchmark Platform on Computational Methods for Architectural/Environmental Acoustics," <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/aij-bpca/index.html> [2] T. Sakuma et al., Proc. 18th Int'l Cong. Acoust., 1, 281-284 (2004). [3] T. Otsuru et al., Proc. Int'l Sympo. Room Acoust. Design and Science, C03, 6p (2004). [4] T. Sakuma et al., Inter-Noise 2008, No. 486. [5] T. Asakura, S. Sakamoto, Building Acoust., Vol.16, No. 3, 267-281 (2009),

Table.2 Outline of the contributed calculation method.

Method	Frequency / Duration time	Calculation time(s) per freq. step / time step	Degree of freedom	Used Memory (MB)	Max length of element (m)
FEM+BEM	50~1000 (Hz)	4.84	2916	129.75	0.037
	1001 ~ 2000 (Hz)	258.58	10404	1612.95	0.02
FDTD	2.4 (s)	0.68	16881050	128.8	0.0196

*東京大学大学院新領域創成科学研究科 修士課程

**同 准教授・博(工)

***清水建設株式会社 技術研究所 研究員・博(工)

*Grad. Student., Grad. Sch. Frontier Sci., Univ. of Tokyo.

**Assoc. Prof., ditto, Dr. Eng.

***Dr. Eng., Institute of Tech., Shimizu Co.,