

# 学位論文

媒質境界に沿う, および媒質境界と交わる

断層の動的破壊に関する理論的解析

(Theoretical analysis for dynamic fault rupture  
propagating along and across a bimaterial interface)

平成 25 年 5 月博士 (理学) 申請

東京大学大学院 理学系研究科

地球惑星科学専攻

平野 史朗

## Abstract

本論文の目的は、地震発生領域に普遍的に存在する媒質境界が、断層の動的振る舞いにいかなる影響を与えるかを理論的に考察することである。ここではこの問題を、断層が媒質境界に沿う場合、および媒質境界と交差する場合の2通りについて考えることで、媒質境界がもたらす影響を包括的に理解しようとする世界でも類のない試みを行なう。そのため本論文は、序章、第1章「媒質境界を mode-II で動的に伝播する定常パルス型破壊の数理解析」、第2章「媒質境界と交差する mode-III 動的破壊伝播の数理解析」、および終章から成る。

序章においては、地震学が断層周辺の不均質構造を厳密に考慮に入れるべき必要性を説き、そのような研究にとって現状不足し、将来要求されると考えられる数理解析的手法による考察の重要性を述べる。この考えを礎に、本文中で極力数理解析的手法によって物理的考察を導き出すという方針を取ることを掲げる。

第1章においては、媒質境界に沿う断層の動的挙動の問題を取り扱う。これについては1980年までに解析的研究によって先鞭が付けられ、1990年代以降は、多数の数値計算的研究によって豊富な現象論的提言がなされている。また近年ではこれまでの解析的および数値計算的研究から得られた定性的予想を支持するような観測データの報告が散見されるようになってきた。総括してみれば、この問題へのアプローチとしては数値計算的研究が最も豊富である一方で、この研究テーマにとって、かつて先駆的役割を果たした解析的研究の発展は近年では非常に乏しい。そこで本研究においては、媒質境界を動的に伝播する定常パルス型破壊というモデルに焦点を当て、その解析解について調べる。このモデルでは破壊の開始・成長や停止にまつわる議論はできないが、代わりに数学的簡略化が可能のために精密なパラメータ解析が可能になるという利点がある。このモデルを Carleman 型特異積分方程式と呼ばれる問題に帰着し、そこから解析的先行研究では求められて来なかった、1) 任意の一定な破壊伝播速度で、2) 滑りに応じて摩擦係数が変化し、3) 滑り始めの瞬間に滑り速度がゼロ、という物理的に尤もらしい3条件を満たす解析解を導出する。この解を用いて得られる本研究の一つ目の成果は、このような条件を満たす解析解はいつでも必ず存在するわけではなく、初期応力と摩擦弱化解距離、そして破壊伝播の方向と速度に依存して解が決まり、解が存在しないパラメータ領域もありうるということが具体的に示せることである。媒質境界を伝播する破壊の面内問題においては、均質媒質の場合と異なり破壊が伝播方向依存性を持つことは予見されてきたが、その解析解は先の物理的に尤もらしい条件を満たさない場合に限り知られていた。それに対し今回の成果はそれらの条件を考慮したことで、現象論的立場から破壊がいかなる伝播方向依存性を持つかを議論する上で有用である。また本研究の二つ目の成果は、媒質境界における破壊伝播速度の理論的上限值が、これまでの解析的研究によって予想されてきた値とはわずかに異なることを示している点である。これまでは弾性体の均質媒質の理論に登場する Rayleigh 関数が、媒質境界の場合には両媒質の物性比に依存する独特の形で登場し、均質媒質の理論同様に、その零点が破壊伝播速度の理論的上限值であると解釈されてきたが、今回の結果によって、破壊伝播速度がそのような値に達する前にモデルが破綻するという独自の解釈が得られる。最後に本研究三つ目の成果として、観測的研究への提言を行なう。断層面上でのエネルギー消費量を見積るため、これまでいくつかの先行研究において地震時の滑り-応力降下曲線を観測データから解析する研究が行なわれてきたが、その中では断層が媒質境界に存在する可能性やその場合の影響が加味されることはなかった。一方で本研究の結果は、それら観測的先行研究において見られる地震時の滑り-応力降下

曲線のばらつきと同程度のばらつきが、媒質境界の影響によっても生じうることを明らかにしている。これらの成果により、媒質境界を動的に伝播する定常パルス型破壊について、パラメータ依存性の網羅的検証やモデルの限界、そして観測的研究にとっての重要性が理解可能となる。

第2章においては、媒質境界と交差する断層の動的挙動の問題を取り扱う。近年の稠密地震観測により、断層が媒質境界と交差していると思われる事例の報告が増え始めており、その挙動の理論的理解が要請されている。実際、過去3年程度の間はその解析のために数値計算手法開発の見通しがつけられ、2012年から2013年にかけて、2つの先行研究によってようやく解析が実践段階に入った。しかし新たな数値計算手法の開発時には、その数値精度を評価するベンチマークとして解析解との比較が必要不可欠であるにもかかわらず、もっとも単純なモデルである2層媒質中の亀裂の面外問題についてすら、その波動場を記述する解析解は知られて来なかった。そこで本研究では一つ目の成果として、そのような解析解を導出している。その過程においては、2層媒質中の変位場のGreen関数をCagniard de-Hoopの方法により求める手順にまで立ち返り、複素積分を用いて、数値的取り扱いが不可能なGreen関数の発散を回避するという方針を取る。こうして得られる解析解は、先述のベンチマークとして重要なだけでなく、これを既存の境界積分方程式法(BIEM)と呼ばれる手法に適用することで、媒質境界と交差する任意形状の断層の動的挙動を独自に数値計算することも可能にする。そこで本研究は二つ目の成果として、媒質境界と交差する摩擦のない屈曲断層の動的挙動について実際に数値計算を行なっている。その結果、破壊が相対的に弾性波速度の小さな媒質中で始まり、破壊先端が弾性波速度の大きな媒質との境界にぶつかると滑り速度の一時的な減少フェイズが媒質境界から破壊開始点に向かって伝播し、弾性波速度の大小を逆にすると滑り速度の一時的な増大フェイズが同様に伝播することが確認される。これに加え独自の考察として、近年いくつかの先行研究で採用されている、高速滑りにおける速度状態依存型摩擦法則を導入した場合に予想される挙動について定性的に議論する。本研究の数値計算結果とこの摩擦則とを併せて考えることで、媒質境界から破壊開始点に向かって、滑りの停止フロントが伝播してゆく可能性を提唱する。断層破壊と滑りの停止については長年議論的であり、様々な要因が提唱されているが、媒質境界の存在がその一因であるという提言は他に類を見ない。また、地殻内部の一般的な構造を考えることで、これが破壊の停止だけでなく地表での強震動生成パターンにも影響しうることを、先行研究と併せて考察することで提唱する。これらの成果により、媒質境界と交差する断層の動的挙動解析について、他の数値計算手法への貢献可能性や今後の更なる数値計算の必要性が明らかとなる。

終章においては、全体の総括として、均質無限媒質から2層媒質へとモデルを拡張しただけで、如何にパラメータ依存性の網羅的検証が困難となっているかを改めて認識し、それを具体例として震源力学におけるモデル拡張の難しさについて議論する。モデルの拡張時には、ごく単純な拡張であっても、それによって生じるパラメータが複数ありうるということや、旧来のモデルでその依存性が十分に検証されてきたパラメータについても、新たなモデルの下では再び依存性を検証し直さなければならないという困難に直面することが、本論文全体を通じて分かった。この議論を通じて、モデル拡張の難しさと、数理解析的研究の発展の必要性と貢献の余地があることを述べる。

## Abstract

This thesis aims to theoretically investigate the effects of material interfaces universally existing in seismogenic zones on dynamic earthquake faulting. For this purpose we here uniquely attempt to understand the effects of material interfaces comprehensively by considering two types of faults; a fault along a material interface and across a material interface. Hence this thesis consists of four chapters; a preface, part 1 “ theoretical analysis of mode-II steady state dynamic slip pulse propagating along a bimaterial interface ”, part 2 “ theoretical analysis of mode-III dynamic rupture propagation across a bimaterial interface ”, and a postscript.

In the preface, we explain that inhomogeneity of media around faults should be considered in fault mechanics and focus on the necessity of additional analytical investigations for the physical understandings of complex dependencies of various controlling parameters in order to consider the inhomogeneity. On the basis of this idea, we set our approach that we obtain physical understanding by deriving analytical solutions of our model in our context as much as possible.

In the part 1, we consider a fault along a bimaterial interface and investigate the dynamics. For this problem, several pioneering analytic works until 1980 had pointed out newly significant effects of bimaterial interface on fracture mechanics and numerous subsequent numerical works since 1990's have shown many implications in seismology. Moreover, It has been increasingly reported observation data that support the above theoretical predictions and resultant implications. Although, as a whole, numerical approach are dominant for this problem, previous numerical studies did not investigate dependence on parameters for dynamic behaviour of bimaterial faults exhaustively, so that progress of mathematical analysis whose result includes many parameters and permits precise discussion is required in order to interpret the whole picture and some physical backgrounds of results suggested by the numerical studies in an unified manner. In recent, however, mathematical studies for this problem are very few while such studies had led this field of study formerly. Hence, in this study, we put a focus on a steady state dynamic slip pulse model along a bimaterial interface and investigate an analytical solution of this model. While we cannot consider nucleation and termination of rupture in this model due to a strong assumption of steady state, instead, we can precisely analyse parameter dependence because this model allows us to simplify the problem mathematically. By employing this model, we derive an analytical solution that fulfils the following three physically valid conditions: 1) the pulse propagates with any constant rupture velocity, 2) a coefficient of friction varies depending on slip, and 3) slip velocity is zero when slip starts. As the first achievement of us by using this solution, we can specifically show that the solution that fulfils the three conditions does not always exist and be determined depending on pre-stress state, process zone size, rupture direction and velocity when the solution exists. In a problem of in-plane rupture propagating along a bimaterial interface, it has been predicted that behaviour of rupture depends on rupture direction because, unlike rupture propagating in a homogeneous medium, displacement field is asymmetry in this

problem. Nevertheless, previous mathematical analyses has rarely investigated the dependency and, moreover, their consideration has been limited in a case that rupture velocity is very high. On the other hand, our achievement is quite useful for discussing how rupture depends on its propagating direction with any rupture velocity. As the second achievement of us, we show that theoretical limit of rupture velocity along a bimaterial interface is slightly different from a limiting velocity predicted by a previous analysis. Formerly, it had been derived that there exists the generalized Rayleigh function for the bimaterial problem and interpreted that its zero gives theoretical upper limit of rupture velocity. Our analysis, however, suggests an unique interpretation that the model collapses before its rupture velocity reaches zero of the generalized Rayleigh function. Although normal stress perturbation due to slip on a bimaterial interface has been known, we show the perturbation gives upper limit of rupture velocity in a non-opening slip pulse model for the first time ever. As the third achievement of us, we propose a suggestion for observational studies. Some previous works analysed coseismic slip-weakening curve in order to estimate energy dissipation on faults, but they did not consider existence and effects of material interfaces on the faults. Our result, however, show that variation of slip-weakening curve on the bimaterial slip pulse is comparable with uncertainty of the slip-weakening curve suggested by a previous study. On the steady state dynamic slip pulse propagating along a bimaterial interface, these achievements allow us to understand exhaustive parameter dependence, limit of the model, and significance for observational studies.

In the part 2, we consider dynamic behaviour of a fault intersecting a bimaterial interface. Existence of such a fault had been little recognized and theoretical analyses of the fault are very few. Recent dense seismic observations, however, increases number of reports that imply faults intersecting material interfaces. Considering these reports, theoretical understanding of dynamic behaviour of a fault intersecting a bimaterial interface has been required. Some prospects has been established in recent few years in order to improve numerical schemes and actual analyses has became usable due to two previous works through 2012 to 2013. Although some comparison with an analytical solution is necessary as a benchmark for estimating numerical accuracy when a new numerical scheme is suggested, the analytical solution that explains wavefield caused by the fault intersecting a bimaterial interface has not been derived even in a simplest case of anti-plane dislocation problem in a bimaterial. This fact motivated us to derive the analytical solution and, in fact, we succeeded in derivation of the solution as the first achievement of our study. In the derivation, we return to a sequence of derivation of the Green function of displacement in bimaterial with the Cagniad de-Hoop's method and avoid divergent of the Greens function that cannot be treated numerically by using complex integral. An analytical solution obtained by this derivation is significant for the benchmark as previously noted and, moreover, permits us to calculate dynamic behaviour of arbitrary shaped faults uniquely by applying this solution to ready made Boundary Integral Equation Method (BIEM). By using this method, we indeed carry out numerical simulations on behaviour of a non-planar fault intersecting a bimaterial interface as our second achievement. As a result, we show that a phase of temporal increase of slip velocity on the fault runs from an intersection of the fault and

the interface to nucleation point of rupture when the rupture is triggered in a medium with relatively low elastic wave velocity while a phase of temporal decrease of slip velocity runs similarly when two media on the both side of the interface are flipped. Although this shape of a fault and frictionless model we employed are different from a previous work, these results are consistent with results suggested by the previous work. Moreover, we newly and qualitatively discuss an expected behaviour of fault under a rate and state dependent friction law for high slip velocity employed in some previous works in recent. We suggest a possibility that stopping phase of slip propagates from the intersection to nucleation point by merging this friction law and our results. A conclusion that existence of material interfaces can terminate rupture propagation and slip of faults are unique while the problem of this termination has been controversial issue. Additionally, we suggest that the material interface affects not only the termination of rupture but also patterns of strong ground motion by considering general structure of seismogenic zone. Finally, we argue an applicability of the analytic solution derived in this study as the third achievement of us. In a previous study, a method that improves numerical accuracy of analysis of dynamic cracking behaviour in multi-layered medium has been suggested by combining Finite Element Method that can treat multi-layered medium with ready made BIEM that allows to calculate cracking highly accurately only in a homogeneous medium. By applying BIEM with the analytical solution that we derived to the method consist of FEM and BIEM, we can suggest further accuracy in numerical treatment and develop the method that can be useful when one simulate fault behaviour in some complex structures in the future. These achievements show that our results can contribute other numerical schemes and further numerical simulations are required in the future on the analysis of dynamic behaviour of fault intersecting a material interface.

In the postscript, as a general overview, we confirm how the extension of model from a homogeneous medium to a bimaterial makes it difficult to investigate parameter dependence of the model exhaustively and discuss difficulty of model extension in fault mechanics by considering our bimaterial model as an example. Whole part of this thesis shows that even simple extension of model can yield multi parameters and we have to recheck parameter dependences under new model even for some existing parameters whose dependency has been sufficiently investigated in previous model. Through this discussion, we argue that extension of model is not easy and mathematical analysis should be developed and can contribute to this difficulty.

# 目次

序章：媒質境界を考慮した断層挙動の考察の必要性について	2
1 媒質境界を mode-II で動的に伝播する定常パルス型破壊の数理解析	4
1.1 導入	4
1.2 数理モデル化と解析解の導出	7
1.2.1 数理モデル化	7
1.2.2 物理的条件を満たす解析解の導出	9
1.3 解のパラメータ依存性の検証	11
1.3.1 パラメータ範囲について	11
1.3.2 パラメータ依存性の検証	12
1.4 破壊伝播速度についての考察と、観測的研究への提言	13
1.4.1 破壊伝播速度の理論モデル上の上限値	13
1.4.2 実現しうる破壊伝播方向と速度	13
1.4.3 滑り-応力弱化曲線についての観測的研究への提言	15
1.5 要約	16
2 媒質境界と交差する mode-III 動的破壊伝播の数理解析	18
2.1 導入	18
2.2 BIEM の概念紹介と、2 層媒質面外問題の動的解析解の導出	21
2.2.1 直達波、反射波、および透過波を包括する BIEM の数学的概要	21
2.2.2 反射波による BIEM カーネルの複素関数表現	22
2.3 特異的亀裂面上の滑りの時空間発展	27
2.3.1 2 層媒質と亀裂の問題設定	27
2.3.2 媒質境界による、亀裂面上の滑り速度の反射フェイズ	29
2.4 数値計算結果の考察と本手法の応用可能性	30
2.4.1 数値計算結果および摩擦法則を考慮することで示唆される物理現象	30
2.4.2 本研究における手法の応用可能性	32
2.5 要約	33
終章：全体についての要約と議論	34
参考文献	36
謝辞	39
A 付録	40
A.1 透過波による BIEM カーネルの複素関数表現	40
A.2 透過波における複素波線パラメータ $p$ の求め方	42
A.3 BIEM カーネル導出過程における代数的計算	43
A.4 BIEM カーネルの導出結果とコーディングの確認、および数値計算コストについて	45
図表	47

## 序章：媒質境界を考慮した断層挙動の考察の必要性について

地球内部は、そのどこを取っても単純な構造からは成ってはおらず、地震学とはそのような場をターゲットとする学問である。地震学における主要な話題においては、大別すると、地震発生の様相を考察する震源の力学と、地球内部の波動場を考察する地震波伝播の問題が並立している。過去百年ほどに渡って、地震波伝播過程の解析は非常に高精度化されてきた。その道程においては、弾性体中に単純な構造を仮定した場合の厳密な数理解析に始まり、近年ではそれをベンチマークとして、数値計算技術の向上によって現実的な地球内部構造を仮定した場合の波動場の取り扱いにまで及ぶ流れが続いてきた。これに対し、震源力学は線形弾性破壊力学を足掛かりに発達してきた経緯はあるものの、破壊面という領域における境界条件の扱いや破壊先端での変位・応力場の特異性の扱いが困難であり、現時点では考慮する場としては比較的単純な構造に留まっている。特にこれまで震源力学でほとんどの研究において採用されてきたのは、均質無限弾性体という媒質モデルである。しかし地震という現象の包括的理解のためには、地下の岩石の破壊が変位・応力場の擾乱を発生させ、その擾乱が反射・散乱を伴って複雑な構造中を伝播してゆくと共に、破壊面自身にフィードバックすることで破壊の拡大速度や滑り速度などの量が複雑に変動するという過程を理論的に再現可能にすることが望ましく、そのためには、地震波解析の分野で現に考慮されているのと同程度に複雑な構造中で、震源の挙動をも解析可能にすることが期待される。これが、遠い将来の震源力学に課せられた使命のひとつであり、現時点で我々ができることは、そのような目標に向けて第一歩を踏み出すことである。

さて、地球内部構造として地震学的によく知られているのは、地下の弾性定数の空間不均質であり、震源力学の更なる理解のためには、この不均質が断層挙動に及ぼす影響を調べる必要がある。特に地下の弾性定数の不均質は、媒質境界、即ち弾性定数の不連続面の集合で近似されることが多いので、媒質不均質の代表例として、まずは媒質境界の存在を考慮することが相応しいであろう。媒質境界と断層との位置関係として、まず単純に挙げられるのは、断層が境界に沿っている場合と、断層が境界と交差している場合である。無論実際の位置関係はより複雑であり、近年はそのような状況を考慮した観測事例や数値シミュレーションが散見されるようになったが、数値精度上の困難や考慮すべきパラメータの多さなど、数値シミュレーションで調べ尽くすには理解が追いつく見通しが立っているとは言い難いのが現状である。そのため、かつて地震波伝播の研究においてなされてきたように、震源力学において不均質構造を考察する上でも、数値計算的研究を補完しうる数理解析的研究が果たす役割は大きいと期待できる。

本論文は、「第1章・媒質境界を mode-II で動的に伝播する定常パルス型破壊の数理解析」および「第2章・媒質境界と交差する動的破壊伝播の数理解析」の2部構成からなる。各テーマの先行研究による進捗については各部の導入部分で詳解するが、まず第1章で取り扱う境界に沿う断層は、プレート境界や構造線など、その存在事例自体が豊富に知られており、これまでに複数の解析的・数値的・そして観測的研究がなされてきた。中でもその動的挙動を対象とした数値的研究事例は数多く、そこから豊富な現象論的提言がなされているが、それを定性的に裏付けるだけの十分な解析的研究がなされているとは言い難い。また第2章で取り扱う境界と交差する断層は、地質調査や近年の稠密地震観測によって存在事例が徐々に知られるようになってきており、また断層の準静的挙動の解析的・数値的研究も進みつつある。しかし、震源力学の観点からは、断層の動的挙動に関して理解がなされるべきではあるが、そのような解析的・数値的研究は殆どなされていない。以上に鑑みて、本研究全体としては、断層の動的挙動が媒質境界によっていかなる影響を受けるかを、先述の2通りの位置関係の両方について考えることで、



包括的に理解することを目指す。それにあたって、いずれの場合も、問題を単純化し極力解析的に取り扱うことを目指す。その理由は、観測的研究などに比べ解析的研究が遅れをとっているためであり、これが進歩すれば以下のような2つの利点が期待できるからである。まず、震源力学における数値シミュレーションは非常に多くのパラメータへの依存性を調べるものであり、限られた数値計算資源ではその依存性を調べ尽くすことが困難であるのに対し、数学的厳密解がこれを解決できることが期待できる。このような例として、一定速度で拡大する応力降下量一定の2次元直線亀裂の問題では、任意時刻および地点での滑り速度などが破壊伝播速度にどう依存するかを数値的に調べるには破壊伝播速度を幾通りにも変えて計算を繰り返す必要があるが、Kostrov [1964] による本問題の解析解を見れば、そのような手間は全く不要であることから、厳密解の優位性・重要性が伺える。また、単純な場合での厳密解が得られれば、今後震源力学が発展してゆく中で、より複雑な構造を考慮した大規模数値計算などを行なう際のベンチマークとしての貢献が期待できる。現実の断層挙動をより忠実に再現するためには、媒質境界や断層の形状を現実のものに合わせて任意に与えた大規模数値計算が必要となろうが、数値計算の規模が大きくなればそれだけ妥当性の検証が重要となり、結局は単純な場合の厳密解との比較が必要不可欠となるであろう。以上を改めて要約すると、本研究の目的は、媒質境界が、これに沿う、およびこれを横切る断層の動的挙動にいかなる影響をもたらすかを、極力解析的に調べることである。

# 1 媒質境界を mode-II で動的に伝播する定常パルス型破壊の数理解析

## 1.1 導入

媒質境界に存在する断層は非常に多い。プレート境界はそもそも起源の異なる媒質の接する場所であるし、構造線も地質学的時間スケールにおいては相対変位を蓄積し、本来全く異なった場所に存在した別々の媒質同士が接するようになっている場所である。このような地質学的観察事実を震源力学に反映させるため、旧来震源力学で考えられてきたような無限均質媒質中の破壊という断層モデルから進展して、媒質境界面上の破壊を考慮する研究が盛んになってきた [Weertman 1980; Andrews & Ben-Zion 1997; Ben-Zion & Andrews 1998; Cochard & Rice 2000 他多数]。

線形弾性破壊力学において、破壊の問題は破壊伝播方向と媒質変位方向との関係によって mode-I, mode-II, および mode-III 破壊という 3 つの 2 次元問題に帰着され、特に断層の滑りを扱う震源力学においては mode-II および mode-III が重視されることは広く知られた通りである。ここで、2 次元領域に、弾性定数の異なる 2 つの半平面が固着した直線的な媒質境界を仮定し、その上の破壊を考えると、mode-III では破壊がどちらに伝播しようとも、2 次元面内において媒質境界と直交する軸について完全に対称な問題であるから、破壊伝播方向に応じた破壊様式の違い (本論文ではこれを「破壊の異方性」と呼ぶ) は生じないであろう。これに対し、同様の媒質境界の上に mode-II の破壊を考える場合、相対的に柔らかい、もしくは弾性波速度の小さな媒質の滑り方向 (本論文ではこれを「正方向」と呼ぶ) に破壊が伝播する場合と、逆に相対的に硬い、もしくは弾性波速度の大きな媒質の滑り方向 (これを「負方向」と呼ぶ) に破壊が伝播する場合とで、変位場が非対称になるため、何らかの形で破壊の異方性が生じる可能性が考えられる。

そのような媒質境界面上の mode-II 破壊の問題は、準静的弾性論の範疇においては Comninou [1977] によって滑りに対するインパルス応答関数が求められ、Hirano & Yamashita [2011] によって摩擦係数一定条件下での有限長亀裂周辺の 2 次元変位・応力分布の解析解が得られるに至るまで、解析的にも数値的にも多くの研究がなされている。

一方で地震時の挙動を明らかにするには、動的弾性論の範疇での考察が必要である。そこで先述のような単純な媒質境界を仮定し、その上の動的破壊伝播を扱ったモデルとして、まずは Weertman [1963; 1980] の解析的研究が挙げられる。Weertman [1963] は媒質境界面上を相対的に小さな方の S 波速度以下の任意の一定な速度で伝播し、また一定の滑り分布が時間と共に平行移動していくという定常的破壊モデルを考えることで、Galilei 変換により時間変数を除去して動的破壊の問題を数学的に単純化した。その結果として媒質境界においては、破壊伝播速度を変数とし両媒質の物性比によって決まる特有の関数が存在し、その零点は両媒質弾性波速度の違いがおよそ 30 % よりも小さな場合、両媒質の Rayleigh 波速度の間に存在することを示し、これを一般化 Rayleigh 速度と呼んだ。この特有の関数は、滑りに伴う破壊面上でのせん断応力変化の係数として現われるため、破壊伝播速度がこの値を取るとき、破壊面上でのせん断応力変化がゼロとなり、それ以上の破壊の加速が考えられなくなることから、一般化 Rayleigh 速度は均質無限媒質における Rayleigh 速度と同じく、破壊伝播速度を (相対的に小さな方の) S 波速度以下と仮定した場合の、破壊伝播速度の理論的上限值であると考えられてきた。尚、両媒質の物性が大きく異なる場合には、相対的に小さな方の S 波速度がこの理論的上限值に相当する。数学的には、この S 波速度を超える破壊伝

播速度を考慮することも可能であり、Adams [2001] はそのような場合の数理解析を行なっているが、現実の地震で破壊伝播速度が S 波速度を超えたという報告事例は多くないため、本章においても Weertman [1963; 1980] などと同じく相対的に小さな方の S 波速度以下の任意の一定な破壊伝播速度のみを考え、これを単に「任意の破壊伝播速度」と呼ぶことにする。

更に Weertman [1980] においては、任意の滑り速度分布関数が形を保ったまま等速で並行移動してゆくと仮定した場合、媒質境界面上では平面断層であるにもかかわらず滑り速度がゼロでない領域内部で法線応力が変化し、その変化は破壊が正方向に向かう場合には断層面に対して引張的で、逆に負方向に向かう場合には圧縮的であること、またその大きさは破壊伝播速度、両媒質の物性比に依存することを示している。続いて同論文中においては、滑りの空間勾配が局所化、即ちある時刻において滑り速度が非零な領域が有限な範囲にのみ存在し、その領域が一般化 Rayleigh 速度で媒質境界を伝播してゆく場合について議論している。その場合、前段落で述べたように破壊面上で滑りに伴うせん断応力変化はゼロとなるが、法線応力が増減するため、法線応力の増加関数となるような一般的な摩擦法則を考慮すると、正方向へ向かう破壊の場合は摩擦応力の低減により破壊伝播が持続できるが、負方向への破壊では逆に摩擦応力が増大するので持続不可能であろうと結論づけている。尚、後の地震学的研究においては、Weertman [1980] が考慮した「ある時刻において滑り速度が非零な領域が有限な範囲にのみ存在し、その領域が移動する」という破壊の様式は、各時刻において滑り速度が断層端近傍のみに局所化するような破壊様式と対応付けられ、破壊面全体が破壊伸展の際に絶え間なく滑り続ける亀裂型破壊と区別する意味でパルス型破壊などと呼ばれる [Heaton 1990]。

先述の通り、Weertman [1980] はパルス型破壊を仮定した上で、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度の場合についてのみ正方向への持続可能性を議論しているが、後に続く多くの論文では、これを拡大解釈してか「正方向に限ってパルスの破壊が伝播する可能性が指摘されている」とのような記述がなされている。Weertman [1980] の解によれば破壊伝播速度がこれよりも遅い場合には、破壊伝播方向にかかわらずせん断応力は破壊先端の前方で増大するため、法線応力および摩擦力が増大したからと言って直ちに破壊伝播が不可能であると推定することはできない。従って、実際に具体的な摩擦法則と任意の破壊伝播速度が与えられた場合に、負方向への破壊伝播が不可能であるかどうかについての解析的考察は不十分なのが現状である。かくして、Weertman [1980] の「正方向に限ってパルス型破壊が伝播する」という予想は限定的な状況でのみ導かれるものではあったが、これに対応する現象の理論的再現のために、これまで多くの数値計算的研究が行なわれてきた。

自発的破壊伸展の数値シミュレーションにおいて、このような現象の再現に最初に成功したのが、Andrews & Ben-Zion [1997] および Ben-Zion & Andrews [1998] である。彼らはまず、論文の導入部分で、観測された地震時の滑り継続時間が亀裂型破壊の理論から予想されるものよりも短いとする Heaton [1990] などを論拠にパルス型破壊の理解の重要性を主張し、Weertman [1980] を論拠に、媒質境界における mode-II 破壊ならばそれが実現できる可能性を説いた。そしてそれを検証する数値モデルとして、摩擦係数一定で法線応力に比例する Coulomb 摩擦に従う断層面を媒質境界とし、その中に震源核領域を置いた。彼らの考慮した震源核領域においては、人為的に応力降下が課され、その領域が空間的に外側へ向かっては広がっていくと同時に、震源核の内側では時間と共に応力が再び初期値に戻るという挙動が仮定された。その結果、「近似的に」一般化 Rayleigh 速度で伝播するパルス型破壊が再現されたという。ただしこの速度が具体的に Rayleigh 速度の何%なのか、明確に記されていない。

これに対し実際には、彼らが扱ったような、摩擦係数一定の Coulomb 摩擦に従う媒質境界の滑りの解は、本質的に不安定であることが Adams [1995] によって予想されていた。それを裏付けるように、Cochard & Rice [2000] では Andrews & Ben-Zion [1997] と同じ条件設定の下で、再び数値計算が行なわれ、その結果として離散化を細かくするほど断層面上の滑り速度の短周期成分が増大し安定的な解が得られないことが明らかになった。ただしこの問題は、Coulomb 摩擦則を修正し、摩擦抵抗が法線応力変化にわずかに遅れて連続的に変化するような摩擦法則を採用すれば解決することが Cochard & Rice [2000] によって数値的に、そして Ranjith & Rice [2001] によって解析的に確かめられた。この摩擦法則は、Prakash-Clifton 摩擦則と呼ばれ、Prakash & Clifton [1993] および Prakash [1998] の室内実験によって確かめられたものである。これらの実験および Linker & Dieterich [1992] の室内実験に基づき、媒質境界の滑りの解を安定化させるのに妥当な遅延時間は数ミリ秒であると、Cochard & Rice [2000] は推定している。

これを受けて更に数値計算的研究は進められた。先述の Cochard & Rice [2000] はこれまで述べたような設定で、確かに正方向へ一般化 Rayleigh 速度の 97~98% の速度で伝播する安定的なパルス型の破壊を数値解として再現した。Shi & Ben-Zion [2006] は、Andrews & Ben-Zion [1997] などと同じ震源核の設定および特徴的滑り距離が一定な滑り弱摩擦則を用いて、やはり正方向へのみ安定的にパルス型破壊が伝播する数値解を求めている。Rubin & Ampuero [2007] は、Andrews & Ben-Zion [1997] などとは違い一度応力が低下した後は二度と応力が回復しない震源核と、特徴的滑り距離が一定な滑り弱摩擦則を用いて、片方向のみに伝播するパルス型ではなく双方向に伝播する亀裂型の数値解を提示したが、この亀裂の先端が破壊強度の大きなバリアにぶつかると、負方向に向かう亀裂伸展は停止し、正方向ではバリアを乗り越えて、一般化 Rayleigh 速度の 95% 以上の速度でパルス型破壊が伝播してゆくという結果を得た。これらを総合すると、震源核や摩擦法則の与え方には依存するものの、媒質境界において「正方向に限ってパルス型破壊が伝播する」という現象は確かに数値的に再現可能であり、しかもその伝播速度は一般化 Rayleigh 速度に非常に近いことが多いということがわかる。

一方で近年では観測的研究が、「正方向に破壊が伝播しやすい」という予想を支持するような結論を導いている。San-Andreas 断層およびその近傍の断層面上の比較的小さな地震について、地震波形の方位依存性により、正方向のみに伝播した破壊が有意に多いという研究 [Rubin & Gillard 2000, Kane et al. 2013] などがそれにあたる。これらの研究では破壊が亀裂型かパルス型か、破壊伝播速度が具体的に一般化 Rayleigh 速度の何%程度かを明らかにしていないが、少なくともこれまでの理論的予想の一部は天然において実現している可能性が高いと言える。

以上に見てきたように、媒質境界を伝播する mode-II 破壊の研究は、Weertman [1963; 1980] 以後はパルス型破壊の挙動に注目した数値的研究が多数進められてきたが、それに比べ解析的研究の進捗は乏しい。実際、Weertman [1980] が解析的に求めたのは仮定された滑り速度の分布関数が任意の一定速度で境界を伝播する場合の媒質の応答であり、具体的な摩擦法則が与えられた場合の滑り速度の時空間分布ではない。また先述の通り、Weertman [1980] の有用な物理的考察は破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度に一致した場合に限られているが、自然地震の破壊伝播速度はこれより有意に遅い場合も多い [Venkataraman & Kanamori 2004]。有限長の定常的パルス型破壊について、滑りに伴って摩擦係数が変化しない Coulomb 摩擦則を導入して滑り速度の時空間分布を解析的に求めた例としては、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度の場合については Adams [1998]、それよりも遅い任意の破壊伝播速度の場合については Adda-Bedia & Ben Amar [2003] があるが、これらの解はパルスの先端で滑り速度がゼロにな

らず, Adams [1998] では定数となり, Adda-Bedia & Ben Amar [2003] では発散するという非物理的な性質を有している. また通常, 摩擦係数は滑りに伴って変化するので, それらの仮定が非物理的とも言える. 尚, Adda-Bedia & Ben Amar [2003] は Prakash-Clifton 摩擦則を導入した数理解析も行なっているが, 結果的にそれでは滑り速度の発散を回避する厳密解はおろか, 漸近解すら発見できなかった.

このようにパルス型破壊の解析解に基づく研究は今も十分に発展しておらず, これが更に前進すれば, 破壊のモデルを記述するのに必要な多数のパラメータへの依存性を網羅的に調べたり, 過去の数値的研究の成果を定性的に解釈することの一助となることが見込まれる. 具体的にこれまでの問題点を解決しようとする, 1) 任意の破壊伝播速度で, 2) 滑りに応じて変化する摩擦応力を考え, 3) パルスの両端で滑り速度がゼロ, という物理的な 3 つの条件 (以下, 物理的 3 条件と呼ぶ) を満たす解析解の模索が必要であると考えられる. このような解析解がどのような条件下で存在し, どのような関数であるかを吟味すれば, 媒質境界を伝播する定常パルス型破壊について, 正方向に破壊が高速で伝播しやすい理由や, 端点の滑り速度がゼロとなる条件と摩擦法則との関連が明らかになるであろう. そこで本研究ではこのような解析解の導出を目指し, その解の存在条件, パラメータ依存性などを明らかにする.

なお, パルス型破壊の生成要因については先に述べた通り震源核形成プロセスなどに依存するので, 本論文では議論せず, あくまでもパルス型破壊が実現した後の定常状態のみを考える. この場合には, 次節で示す通り数学的単純化により解析解が得られ, 詳細な議論ができるためである.

## 1.2 数理モデル化と解析解の導出

### 1.2.1 数理モデル化

ここでは, 2次元平面内の直線的な媒質境界を仮定し, その境界に沿って固定長の mode-II パルスが, 任意の破壊伝播速度で移動している定常状態を取り扱う. このような問題設定は, Adams [1998] や Adda-Bedia & Ben Amar [2003] によって取り上げられてきたが, 彼らのモデルにおいては導入で述べたような問題が残っている. 一方で均質媒質の場合においては, Rice et al. [2005] によって, 滑り速度関数がパルス両端でゼロであるための滑り弱体化摩擦における諸パラメータ間の条件式が解析的に導かれている. 本研究では, 媒質境界において, 滑り速度関数がパルス両端でゼロであるための滑り弱体化摩擦に関する条件を解析的に導出する.

$x$ - $y$  平面において,  $y = 0$  を媒質境界とし,  $\alpha, \beta$ , および  $\rho$  をそれぞれ媒質の P 波速度, S 波速度, および密度とする. また, 各々に  $\pm$  の上付き文字を付し,  $+$  が付いたものは  $y > 0$  なる領域の,  $-$  が付いたものは  $y < 0$  なる領域の物性値であるとする. こうして与えた媒質境界である  $x$  軸上を, 左向き, 即ち  $x = +\infty$  から  $x = -\infty$  の方向に定常的な右横ずれの破壊が速度  $c$  で伝播しており, 時間  $t$  と空間  $x$  の間の Galilei 変換

$$x' = x + ct, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \tag{1.2}$$

が成り立つと仮定する. この  $x'$  を改めて  $x$  と書けば, 問題としている定常的な 2次元の変位・応力場を  $x$  と  $y$  のみで記述することができる. 特に, 断層面上での滑り分布を  $\Delta u(x)$  とすると, 滑り速度は  $\Delta \dot{u}(x) = c\Delta u'(x)$  によ

て表現される。これらの仮定の下で、Weertman [1980] は、断層面上のせん断応力  $\tau(x)$  および法線応力  $\sigma(x)$  が

$$\tau(x) = \tau_0 - \bar{\mu} \int \frac{\Delta u'(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{1}{\pi}, \quad (1.3)$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \mu^* \Delta u'(x) \quad (1.4)$$

と書けることを示した、ここで  $\tau_0 (> 0)$ ,  $\sigma_0 (< 0)$  はそれぞれ媒質境界に作用する初期せん断応力および初期法線応力であり、せん断応力は右横ずれを正、法線応力は引張を正と取る。係数  $\bar{\mu}, \mu^*$  は2つの媒質の弾性定数および破壊伝播速度によって決まる量で、 $\bar{\mu}(c_{GR}) = 0$  なる破壊伝播速度  $c_{GR}$  が一般化 Rayleigh 速度である。図1にその依存性を示すが、物性比が大きいほど  $\mu^*$  が大きくなることから、媒質境界特有の法線応力変化量も物性比と正の相関を持つことが分かる。また、破壊伝播速度をゼロとしても  $\mu^*$  はゼロとはならないことから、いかなる破壊伝播速度でも法線応力は変化し、従って均質媒質中の破壊の振る舞いとは決して一致しないことが分かる。なお、Weertman [1980] の  $\mu^*$  の式には誤植があり、Cochard & Rice [2000] によって訂正されている。彼らの  $\mu^*$  および  $\bar{\mu}$  の式によれば、今回のように問題を設定した場合、仮に媒質が Poisson 媒質であるとする、上側媒質 ( $y > 0$ ) の方が硬ければ (即ち  $\alpha^+ > \alpha^-$ ,  $\beta^+ > \beta^-$  ならば)、破壊伝播方向は正方向であり、 $\mu^* > 0$  となるが、下側媒質 ( $y < 0$ ) の方が硬ければ (即ち  $\alpha^+ < \alpha^-$ ,  $\beta^+ < \beta^-$  ならば)、破壊伝播方向は負方向であり、 $\mu^* < 0$  となる。この違いが、前節で述べたような、破壊伝播方向と媒質コントラストとの関係によって逆向きに法線応力が変化することに対応する。

さて、破壊がパルス型であるという仮定は、 $\Delta u'(x)$  が破壊先端近傍の有限領域のみで非零な値を持つことに対応する (図2)。ここでは、Adda-Bedia & Ben Amar [2003] や Rice et al. [2005] など多くの解析的研究同様、パルスの長さを時間的に一定であるとし、この領域を  $-1 < x < +1$  とする。これによって前段落と同じく Galilei 変換が利用でき、数学的単純化のおかげで詳細な議論ができることが期待できる。また、先述の Cochard & Rice [2000] によって数値的に再現されたパルス型破壊も、時間的に長さが殆ど変化していないことが伺える (彼らの論文の図6参照) ため、数値計算的研究との対比という意味でも固定長のパルスを扱う意義はあるだろう。本研究では一定でない摩擦係数を取り扱うので、この空間分布を  $f(x)$  とすると、Coulomb 摩擦則の式

$$\tau(x) + f(x)\sigma(x) = 0 \quad (1.5)$$

が書ける。滑り  $\Delta u(x)$  が  $x$  の単調増加関数であるとする、滑り弱化型の摩擦法則の元では  $f(x)$  は連続な広義単調減少関数となる。そこで  $f(x)$  を

$$f(x) = f_d + (f_s - f_d)F(x)$$

と書く、ただし  $f_s, f_d$  はそれぞれ静止摩擦係数と動摩擦係数であり、 $F(x)$  は規格化された摩擦係数で、

$$F(x) = \begin{cases} 1 & (x = -1) \\ 0 & (x = +1) \end{cases} \quad (1.6)$$

を満たす連続な広義単調減少関数であるとする。以上を用いて、媒質境界面上のパルス内部で成立する式は

$$f(x)\Delta u'(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta u'(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{1}{\pi} = p + qF(x) \quad (1.7)$$

と書ける、ただし  $\lambda = \bar{\mu}/\mu^*$ ,  $p = -(\tau_0 + f_d\sigma_0)/\mu^*$ , そして  $q = -(f_s - f_d)\sigma_0/\mu^*$  である。Poisson 媒質の場合、上側媒質の方が硬ければ (即ち  $\alpha^+ > \alpha^-$ ,  $\beta^+ > \beta^-$  ならば)  $\lambda > 0$  であり、下側媒質の方が硬ければ (即ち  $\alpha^+ < \alpha^-$ ,  $\beta^+ < \beta^-$  ならば)  $\lambda < 0$  である。

## 1.2.2 物理的条件を満たす解析解の導出

式 (1.7) は Carleman 型特異積分方程式と呼ばれ, その解は Tricomi [1957] によって以下のように与えられている

$$\Delta u'(x) = \frac{\{p + qF(x)\}f(x)}{f^2(x) + \lambda^2} + \lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{A^*(\xi) \{p + qF(\xi)\} d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi}, \quad (1.8)$$

ただし,

$$\theta(x) = \arctan \frac{\lambda}{f(x)}, \quad (0 < \theta < \pi), \quad (1.9)$$

$$A(x) = \frac{\exp \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(\xi) - \theta(x)}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} \right\}}{\sqrt{f^2(x) + \lambda^2}} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\theta(x)/\pi}, \quad (1.10)$$

$$A^*(x) = \frac{1}{\{f^2(x) + \lambda^2\} A(x)}, \quad (1.11)$$

である. しかしこの形式では, 式 (1.8) の右辺第 2 項が主値積分である上に, 被積分関数の一部  $A^*$  が端点で発散するという 2 つの性質により数値積分困難で, 破壊先端近傍での有界性条件を調べるのに適していないため, これを変形する. まず, Tricomi [1957] の第 4.4 節の式 (28) によって,

$$\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{A^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} = \operatorname{sgn}(\lambda) - f(x)A^*(x) \quad (1.12)$$

が得られており, これを用いると

$$\lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{pA^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} = \operatorname{sgn}(\lambda)pA(x) - \frac{pf(x)}{f^2(x) + \lambda^2} \quad (1.13)$$

および

$$\begin{aligned} \lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{qF(\xi)A^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} &= \lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{q \{F(\xi) - F(x)\} A^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} + \lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{qF(x)A^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} \\ &= \lambda A(x) \int_{-1}^{+1} \frac{q \{F(\xi) - F(x)\} A^*(\xi) d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} + \operatorname{sgn}(\lambda)qF(x)A(x) - \frac{qF(x)f(x)}{f^2(x) + \lambda^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

が得られる. これらを式 (1.8) に代入して, 更に Rice et al. [2005] 同様に断層面上の降伏応力を  $\tau_p = f_s|\sigma_0|$ , 動摩擦力の終端値を  $\tau_r = f_d|\sigma_0|$  とすると,

$$\Delta u'(x) = \frac{\tau_p - \tau_r}{\bar{\mu}} \left\{ \frac{1}{1+S} + F(x) + |\lambda| \int_{-1}^{+1} \frac{A^*(\xi) \{F(\xi) - F(x)\} d\xi}{\xi - x} \frac{d\xi}{\pi} \right\} |\lambda| A(x) \quad (1.15)$$

と書け, 関数  $F$  が区分的に滑らかかつ  $F'$  が有界であれば主値積分が回避されることが見て取れる. ここで応力比

$$S = \frac{\tau_p - \tau_0}{\tau_0 - \tau_r} \quad (1.16)$$

は Andrews [1976] によって導入されたものと同じである. 式 (1.15) に現れる被積分関数は,  $A^*$  の振る舞いによって非有界である.  $A^*$  の端点近傍での特異性は, その定義により,

$$A^*(\xi) \sim (1 \mp \xi)^{\mp\theta(\xi)/\pi}, \quad (\xi \sim \pm 1) \quad (1.17)$$

(符号同順) であり,  $0 < \theta(\xi)/\pi < 1$  であるから積分可能である. 一般に  $F$  が与えられた時に, この積分を求めることは台形公式や Simpson 法などの一般的な数値積分では被積分関数の非有界性のために不可能だが, Mori [2005] による二重指数関数型数値積分公式を用いれば高速かつ高精度で可能である.

式 (1.15) は, 一般には  $x = -1$  近傍で

$$A(x) \sim (1+x)^{-\theta(x)/\pi} \quad (1.18)$$

の強さで発散することが  $A$  の定義から分かるので, 式 (1.15) の括弧  $\{ \}$  内が,  $x = -1$  近傍でこれよりも速くゼロへ収束することが必要である. すなわち一つ目の条件として, 摩擦係数の分布関数  $f$  は, 与えられた応力比  $S$  および  $\lambda$  の値に対して

$$\frac{1}{1+S} + 1 + |\lambda| \int_{-1}^{+1} \frac{A^*(\xi) \{F(\xi) - 1\}}{\xi + 1} \frac{d\xi}{\pi} = 0 \quad (1.19)$$

を満たす必要がある. Rice et al. [2005] は均質媒質の場合にこの条件を導いたが, 彼らの議論は先に述べた収束の速さを検証していない. よって二つ目の条件として, 十分小さな正の実数  $\epsilon$  に対して,  $x = -1$  の近傍にある  $x = -1 + \epsilon$  を考えると, 式 (1.15) の括弧  $\{ \}$  内に  $x = -1 + \epsilon$  を代入して得られる式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+S} + F(-1+\epsilon) + |\lambda| \int_{-1}^{+1} \frac{A^*(\xi) \{F(\xi) - F(-1+\epsilon)\}}{\xi - (-1+\epsilon)} \frac{d\xi}{\pi} \\ &= \frac{1}{1+S} + F(-1+\epsilon) + |\lambda| \int_{-1}^{-1+2\epsilon} \frac{A^*(\xi) \{F(\xi) - F(-1+\epsilon)\}}{\xi - (-1+\epsilon)} \frac{d\xi}{\pi} \\ & \quad + |\lambda| \int_{-1+2\epsilon}^{+1} \frac{A^*(\xi) \{F(\xi) - F(-1+\epsilon)\}}{\xi - (-1+\epsilon)} \frac{d\xi}{\pi} \\ & \sim \text{const.} + \{F(-1+\epsilon) - 1\} + |\lambda| \int_{-1}^{-1+2\epsilon} (1+\xi)^{\theta(x)/\pi} F'(\xi) \frac{d\xi}{\pi} + o((-1+\epsilon)^1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

が  $o((-1+\epsilon)^{\theta(x)/\pi})$  より速くゼロに収束する場合を考えなければならない. ここで, 式 (1.20) の最右辺第 3 項への変形には式 (1.17) を用い, 最右辺第 4 項への変形には, 評価点  $x = -1 + \epsilon$  が左辺第 4 項の積分区間外にあるため, 積分変換の結果が評価点では常に滑らかな関数を返すこと (評価点が積分区間外にある有限 Hilbert 変換が無制限回微分可能であり, Taylor の定理において剰余項がゼロに収束することを示せばよい) を用いている. これを満たすには, まず右辺第 2 項を見ると  $F - 1$  が  $o((-1+\epsilon)^{\theta(x)/\pi})$  よりも速くゼロに収束することが要請され, また右辺第 3 項の積分可能性を考えると,  $F'$  が  $o((-1+\epsilon)^{-1-\theta(x)/\pi})$  よりも弱い特異性を持つ, つまり第 2 項の条件と同じものが要請されることがわかる.

これを満たす  $f$  を式 (1.15) に代入したものが, 我々の求めるべき物理的 3 条件を満たす解析解である. ただし実際にはこれらの条件を満たす  $f$  あるいは  $F$  を陽に書き下すことはできないため, 様々な  $F$  の形状を仮定して陰に解くことになる. その際の  $F$  の与え方は次節で述べることにする.

### 1.3 解のパラメータ依存性の検証

#### 1.3.1 パラメータ範囲について

前節で求めた解析解の具体的な挙動を観察するために, 考慮すべきパラメータ等の範囲を考えておく必要があるだろう. まず媒質の物性比であるが, 各媒質につき P 波速度, S 波速度, 密度の値を仮定する必要があり, この組み



合わせだけでパラメーター空間が6次元と考察困難になってしまうため、ここでは大幅な制約を課す。まず、各媒質が Poisson 媒質であると仮定することで、 $\alpha^+/\alpha^- = \beta^+/\beta^-$  となる。次に、Birch [1961] による経験則から、地殻の代表的な岩石では  $\alpha \propto \rho$  の関係が誤差 10 % 程度で成り立つことが示せる [Hirano & Yamashita 2011] ため、この仮定も用いることにする。これらにより、考慮すべき物性比は  $\rho^+/\rho^- = \alpha^+/\alpha^- = \beta^+/\beta^-$  の1つとなるが、弾性波速度の違いは San-Andreas 断層沿いの地震波解析によれば、場所によって5から30%程度であるとされている [Shi & Ben-Zion 2006]。そこで本論文においては、例として  $\beta^+/\beta^- = 1.2$  (正方向への破壊に対応) および  $\beta^-/\beta^+ = 1.2$  (負方向への破壊に対応) の二通りを扱うことにする。この値は、Andrews & Ben-Zion [1997] や Cochard & Rice [2000] でも用いられている値である。定性的には、一般化 Rayleigh 速度が存在するおよそ  $0.7 < \beta^+/\beta^- < 1.3$  の範囲では  $\mu^*$  の絶対値は物性比が1.0から離れるにつれて大きくなるので、媒質境界であるが故の特徴的振る舞いは両媒質の物性が異なるほど顕著になることが予想できる。

破壊伝播速度については、深発地震や津波地震を除けば Rayleigh 速度の70%以上のものが典型的と考えられる [Venkataraman & Kanamori 2004] ため、まず本節では一般化 Rayleigh 速度の70%から95%の範囲を考える。これを超える95%から100%の間での挙動に関しては、次節で議論する。

応力比  $S$  については、定義上  $0 < S < \infty$  の範囲にあるが、地殻の初期応力  $\tau_0, \sigma_0$  の比および最大静止摩擦係数  $f_s$ 、動摩擦係数  $f_d$  によって決まる量なので、不確定性が強い。ただしこれについては、均質媒質中では  $S < 1$  における自発的破壊進展の数値計算を行なうと亀裂型の解が再現され、時間が十分に経過すれば破壊伝播速度が必ず  $S$  波速度を超えること [Andrews 1976; Gabriel et al. 2012]、また均質媒質中にパルス型破壊を仮定した Rice et al. [2005] の結果によれば、 $S = 10$  程度まで考慮すれば、物理的3条件を満たす摩擦法則として十分広い範囲を考えることに相当すること (図3および次段落の説明参照) から、 $0 < S < 10$  の範囲で検証する。ここで、 $S$  を与える際には摩擦係数は  $f_s = 0.6$  および  $f_d = 0.2$  に固定し、 $\tau_0/\sigma_0$  のみを変化させることにする。その妥当性の根拠は二つあり、式 (1.15) の内訳から理解できる。まず一つ目に、この解の係数部分に  $\tau_p - \tau_r = (f_s - f_d)|\sigma_0|$  があり、解の絶対値が両摩擦係数の差に比例することが予測できることによる。また二つ目には、この係数部分以外の摩擦係数への依存性は全て  $\lambda/f(x)$  の形式で現われていることが分かり、また  $\lambda = \bar{\mu}/\mu^*$  は破壊伝播速度  $c$  の狭義単調減少関数であることから、摩擦係数の値を上げることと破壊伝播速度を上げることは同等の効果をもたらすと予測できることによる。

最後に、摩擦係数の空間分布を表わす関数  $F$  の形状について考える。これを与えるには、ひとつのパラメーターで記述されるような関数を仮定するのが簡単である。その一例として、Rice et al. [2005] はパルス先端から距離  $R$  の領域内で直線的に減少し、その外側では至る所ゼロとなるような関数を採用している (図3の右上枠内点線)。この関数の形状は、パルスの長さを  $L$  と置くと、 $R/L$  というひとつのパラメーターで記述でき、その範囲は  $0 < R/L < 1$  となる。本研究でも原理的にはこれと同じ関数を採用できるが、その場合には微分の不連続点で式 (1.15) の右辺に現われる積分を分割しなければ数値積分ができない。この手間を省くため、パルス内部で Rice et al. [2005] の与えた関数と  $L_1$  ノルムが等しくなるような次の関数を採用する (図3の右上枠内実線)；

$$F(x) = \left( \frac{1-x}{2} \right)^{\frac{4}{R}-1}. \quad (1.21)$$

この関数はパルス内部で狭義単調減少であるため、滑りの減少関数すなわち滑り弱型摩擦則となる。またこの関

数は  $x = -1$  近傍で 1 次関数に漸近するため、式 (1.20) 以降で議論した特異性についての条件を満たしている。さらに至る所連続かつ微分可能なため、数値積分に支障がなく、 $x \mapsto 2x/L$ ,  $R \mapsto 2R/L$  の置換によって、やはり  $R/L$  というパラメータだけで記述できる。図 3 ではこの両者を用いて、無限均質媒質の場合に条件式 (1.19) を満たす  $R/L$  と  $S$  との関係を描画している。無限均質媒質ではこの関係は破壊伝播速度に依存せず一意に定まることがわかっており、点線が Rice et al. [2005] の直線的摩擦分布の仮定によって示された結果である。実線は本研究で用いた滑らかな摩擦分布を仮定した場合であり、Rice et al. [2005] とほぼ同じ結果が得られていることが確かめられる。よって摩擦の弱化曲線の与え方への依存性は十分小さいと判断し、以後全ての結果において式 (1.21) を採用する。

### 1.3.2 パラメータ依存性の検証

図 3 の場合同様、条件式 (1.19) を満たす応力比  $S$  と弱化領域長さ  $R/L$  との関係を、媒質境界の場合について描画したのが図 4 である。ここから、媒質境界の場合には物理的 3 条件を満たす条件式が破壊伝播方向および速度に依存することが見て取れる。破壊が高速化するほど、均質媒質の場合との乖離は顕著になり、正方向への破壊では与えられた応力比  $S$  に対して小さな  $R/L$  を持ち、即ちより狭い領域で摩擦係数が弱化し、負方向への破壊では逆の現象が起こることが分かる。ここで着目すべきは、負方向への破壊は加速に伴って解の存在領域 (即ち応力比  $S$  の取りうる範囲) が制限されては行くものの、この程度の破壊伝播速度であれば、ほとんどの場合において解が存在することが示されたことである。導入にて述べたように、Weertman [1980] は破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度に一致する場合について言及しているが、任意の破壊伝播速度における負方向への破壊の可能性までは否定できていない。それに対し今回の結果によれば、そのような破壊の定常解は、物理的 3 条件を満たした上で存在するのである。

次に、パルス内部における滑り速度の空間分布を示したのが図 5 である。これによれば、均質媒質の場合と同じく、滑り速度の分布形状を決める主要なパラメータは応力比  $S$  であり、絶対値を決める主要なパラメータは破壊伝播速度の比  $c/c_{GR}$  であることがわかる。媒質境界の影響は、破壊伝播の方向と速度によってピークの位置や絶対値が若干異なるという結果として現われている。

最後に、パルス内部の滑り-応力降下曲線を図 6 に示す。ここでは、破壊が負方向へ向かう場合よりも正方向へ向かう場合の方が急激な滑り弱化が起こり、その度合いは破壊伝播速度の増大に伴って強くなる傾向が示された。このことは、破壊伝播方向に応じて法線応力が逆向きに变化するという Weertman [1980] の結果と、図 4 で示された摩擦挙動の破壊伝播方向・速度依存性の結果との兼ね合いによって生じたものである。

## 1.4 破壊伝播速度についての考察と、観測的研究への提言

### 1.4.1 破壊伝播速度の理論モデル上の上限値

ここでは、各破壊伝播方向における破壊伝播速度の、理論モデル上の上限値について考える。まずは負方向への破壊についてであるが、図 4 によれば、 $S \leq 1$  の領域には負方向への破壊についての解曲線が存在せず、したがってそのようなパラメータ範囲における負方向への定常パルス破壊が、物理的 3 条件を満たした上では存在し得ない

と分かる。  $S > 1$  の領域には負方向への破壊についての解曲線が存在するが、破壊の加速に伴ってその曲線の存在領域は図の上方へ遷移している、即ち低速破壊においては与えられた  $S$  の値を取り得ても、高速破壊では取り得ない場合があることが見て取れる。この傾向から、ある応力比  $S (> 1)$  が与えられた時、負方向への破壊の伝播速度の上限値は、物理的 3 条件を満たす解曲線がその  $S$  の値を取りうるという制限によって定まることが予想される。例として  $S = 1.5$  の場合には図 4 より、一般化 Rayleigh 速度の 95 % 程度が、負方向への破壊伝播速度の上限値であろう。またこれより小さな  $S$  に対しては上限値も小さく、より大きな  $S$  に対しては上限値も大きいであろう。

一方で正方向への破壊については、図中において解曲線群の存在領域が破壊の加速と共に 下方へ遷移しているため、1 未満の応力比  $S$  についても物理的 3 条件を満たす解が存在し得る。しかしこの場合には、解曲線群の存在領域とは別の議論によって、破壊伝播速度の理論モデル上の上限値が存在することが、以下の通り示される。図 5 においては、滑り速度が破壊伝播速度の上昇に伴って増大し続けており、これは加速に伴って法線応力変化量も増大し続けることを意味する。この傾向がどう遷移するかを確かめるため、一例として  $S = 2$  の場合において更に破壊伝播速度を高速化させた場合の、正方向へ伝播するパルス内部の法線応力を求めると、法線応力は増大し続け、 $c/c_{GR} = 0.985$  の場合にはパルス先端近傍で正の値を取っていることが読み取れる (図 7)。したがって正方向への破壊の場合、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度に到達する前に、 $0.98 < c/c_{GR} < 0.985$  の間の速度で、滑りに伴う法線応力変化が初期法線応力に打ち勝ってしまうことを意味する。本研究および多くの先行研究では、開口を仮定せず滑りのみが生じる場合を扱っているが、高速破壊時に開口を起こすような法線応力が実現されるのであれば、これは即ちモデルの限界でありモデルを拡張する必要性があることを示している。

これら正負方向についての限界速度は一般化 Rayleigh 速度と殆ど変わらないので、この議論は可観測量との対比には重要な意味を持たないが、これまでの理論的解釈を改めるという意義を持つ。これまでは式 (1.3) に基づいて、 $c = c_{GR}$  においてせん断応力変化の項の係数がゼロとなるために、一般化 Rayleigh 速度そのものが破壊伝播速度の上限値であると解釈されてきたが、本研究によって、少なくとも定常的パルス型破壊の場合には、負方向への破壊については物理的 3 条件を満たす解曲線群の存在領域が、また正方向への破壊については法線応力変化が初期法線応力に打ち勝つことが、各々破壊伝播速度のモデル上の上限を与えるという新たな理解が得られたのである。

#### 1.4.2 実現しうる破壊伝播方向と速度

前小節の結果を受けて、実際にパルス状破壊が伝播し得る方向と速度について議論する。導入において、数値計算上、パルス状破壊は正方向に限り、一般化 Rayleigh 速度に近い値で再現されているという研究を複数紹介した。しかしこれらの結果を、伝播速度を最初から一般化 Rayleigh 速度に限って考えている Weertman [1980] の主張と関係付けるのはもはや不適切であろう。その理由は前小節で述べた通り、一般化 Rayleigh 速度で伝播するパルスは正負いずれの方向についてもこのモデル内では実現不可能であり、それよりもある程度遅い速度であれば、正負いずれの方向に伝播するパルスの定常解も、物理的 3 条件を満たした上で存在することが本研究により明らかとなったためである。自発的破壊伸展の数値計算過程においては、破壊伝播速度が低速から高速へ遷移してゆくのが普通であり、その過程でもし一般化 Rayleigh 速度よりも遅い破壊伝播速度の定常解が存在できるのであれば、そのときは Weertman [1980] の考察ではなく、我々が求めた解が適用可能である。よってここでは、前段落の理論的

上限値以下の、任意の一定な破壊伝播速度というものが各破壊方向について実現しうるか否かを考察する。しかし結論を先に述べれば、この問いに答えることは本モデルの枠内では不可能であることが分かる。

ここでは、ある破壊伝播速度が実現された時の、断層面上での散逸エネルギー量を考える。そのために、本モデルの変数のスケール変換について確認しておく、式 (1.7) において  $x \mapsto 2y/L$ ,  $\xi \mapsto 2\eta/L$  として、

$$f(2y/L) \Delta u'(2y/L) - \lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\Delta u'(2\eta/L) d\eta}{\eta - y} \frac{d\eta}{\pi} = p + qF(2y/L) \quad (1.22)$$

であり、各項の係数の絶対値に  $L$  の依存性がないことから、滑り速度  $\Delta \dot{u} = c\Delta u'$  や、摩擦応力  $f[\sigma_0 + \mu^* \Delta u']$  (ただし  $f$  および  $\Delta u'$  の変数は省略した) といった量の絶対値は、パルスの長さが変化しても変化しないことがわかる。また最終滑り量を  $\delta := \Delta u(2y/L)|_{y=+L/2}$  とすると、

$$\delta = \int_{-L/2}^{+L/2} \Delta u'(2y/L) dy \quad (1.23)$$

$$= L \int_{-1}^{+1} \Delta u'(x) dx \quad (1.24)$$

であるから、 $\delta$  はパルス長に比例する。これらの事実は、パルス長が変化したとき、図 6 において、横軸はその変化に比例して伸縮するが、縦軸は伸縮しないことを表す。従って、断層面上各点での散逸エネルギー量  $W$  は、摩擦応力が滑りに伴ってする仕事量、即ち滑り-応力降下曲線の下面積

$$W = \int_0^{\delta} f[\sigma_0 + \mu^* \Delta u'] d\Delta u \quad (1.25)$$

で表わされ、これは図 6 の曲線群の下面積をパルス長に比例して伸縮させたものに等しい (図の横軸が最終滑り量で規格化されている点に注意せよ)。よって  $W$  は、図 6 における曲線群の下面積を  $W_n(\pm c)$  とすると、

$$W = LW_n(\pm c) \quad (1.26)$$

と書くことができる。ただし破壊伝播速度  $c$  の符号は破壊伝播方向に対応し、+ を正方向、- を負方向とする。

この準備の上で、断層面上での散逸エネルギーから破壊伝播方向と速度の決定可能性を考える。尚、多くの文献においては  $W - \tau_r \delta$  を「破壊エネルギー」として、摩擦発熱に消費されたエネルギーと区別している [e.g., Kostrov & Das 1988]。しかし本モデルでは図 6 の横軸がパルス長に比例して伸縮することから、破壊エネルギーも、差し引かれた発熱エネルギーも、やはりパルス長に比例する。従って、あえて破壊エネルギーを定義するとしても、それは  $W$  の定数倍でしかなく、以下の議論のためには区別の必要がなくなることから、ここでは破壊と摩擦発熱を区別せず散逸エネルギー量  $W$  のみを用いて議論する。そうすると、破壊がある一定速度  $\pm c$  で進むためには、 $W$  が物性によって決まるエネルギーの閾値と釣り合っている必要があるが、式 (1.26) により、いかなる一定速度  $\pm c$  に対しても、パルスの長さを適当に伸縮させれば、与えられた任意の閾値に釣り合う散逸エネルギー量を実現することが可能である。従って、このモデルは破壊伝播方向と速度、およびパルス長との間に成り立つトレードオフの関係によって、任意の破壊伝播速度を実現可能なモデルとなっており、このモデルの枠内では破壊伝播方向と速度を単独で決定することができないのである。破壊伝播速度と独立にパルス長が決定されるのであれば更なる議論が可能であるが、そうだとした場合その理由は本モデルの枠組みでは議論不可能である。

さて、導入部において、様々な震源核形成プロセスや摩擦法則、あるいはバリアの与え方の下で、正方向にのみ一般化 Rayleigh 速度に近い速度でパルスが伝播するという多数の数値計算的先行研究や、統計的に正方向への破壊伝播が多いとされる観測的先行研究を紹介した。従って自発的破壊伸展の結果としては、本モデルの仮定から外れた何らかの要因によって、結局のところ定常状態としては正方向に限り一般化 Rayleigh 速度に近い速度でパルスが伝播するという解しか存在しないと考えられる。一方で本研究のモデルは任意の破壊伝播方向と速度について、応力比  $S$  が 1 以下でない限り定常解を見い出せるため、本モデルがそれら先行研究で提示された結果を直ちに裏付けるとは言えない。更に滑り弱化型摩擦則を仮定した Shi & Ben-Zion [2005] では、 $S = 9$  などの値を用いて、正方向に限り定常的パルス破壊を実現していることから、応力比の大小が問題ではないと考えられる。そこで、これまでの数値計算的研究の結果を支持するならば、本モデルの仮定の問題点を整理する必要がある。本モデルの仮定として、滑り速度が破壊の先端でゼロという条件や、摩擦係数が滑りに伴って弱化するという条件はさほど不自然ではないと考えることができる。よってまずひとつの可能性は、前段落末尾で述べた通り、理由は不明だが破壊伝播速度と独立にパルス長が決定されるというものである。パルス長を固定して考えると、図 6 によれば、破壊が負方向へ伝播するとき、滑り始めの僅かな領域に滑り強化が見られ、加速に伴ってその度合いが強くなってゆく様子が見て取れる。これが破壊の負方向への加速を阻害し、結果として高速破壊が実現しない可能性が考えられる。また図 6 は、破壊が正方向へ伝播するとき、加速に伴って逆に滑り弱化の度合いが強くなってゆくことも表わしている。これが破壊の正方向への加速を促進し、結果として破壊は限りなく理論的上限速度に近づくと考えられる。もうひとつの可能性として、定常性の仮定にそもそも問題があり、震源核形成の時点あるいはその後の破壊加速過程に、破壊伝播の終端速度を宿命付けるような何らかの機構が備わっていることが挙げられる。ただし、後者が前者を含む、即ち震源核形成過程や破壊加速過程がパルス長を決める可能性もある。無論その詳細については、定常状態を仮定した本研究の結果からはこれ以上踏み込むことができない。しかしこうして、少なくともパルス長を決定する外的要因が存在するか、あるいは定常性の仮定に不備があるという問題点の絞り込みに成功した事は、本研究の大きな進捗のひとつである。

#### 1.4.3 滑り-応力弱化曲線についての観測的研究への提言

最後に、滑り-応力弱化曲線について議論する。図 6 からは、最終滑り量と特徴的滑り弱化距離との比は、破壊伝播の方向および速度に応じて顕著に変化することがわかる。地震学的にこのような物理量は通常、図 5 のような滑り速度の履歴を逆解析した後に、弾性論を用いて変換して得られる量であるが、我々の結果は「特徴的滑り弱化距離の正確な見積りは、滑り速度履歴を応力変化に変換する際に、媒質境界であることを意識しないと正確な応力降下曲線が得られない」ことを強く示唆している。実際に断層面上の応力弱化曲線を求める研究は、断層面上で消費されるエネルギーの見積もりに有用なために盛んに行なわれてきた [Ide & Takeo 1997; Mikumo et al. 2003; Cocco et al. 2009] が、これら先行研究は媒質境界の影響を考慮しているわけではないため、これまで得られてきた結果は図 6 で示した程度の範囲内では変わってしまう可能性がある。運動学的断層モデルの解析解像度などの問題により、現実の地震について最終滑り量と特徴的滑り弱化距離との比を正確に求めることは容易ではなく、また地震ごと、および断層面上の各点ごとによってもこの値は異なるが、Mikumo et al. [2003] は地震波解析により、1995 年兵庫県南部地震と 2000 年鳥取県西部地震の断層面上の様々な点について、この比を 0.27 から 0.56 と見積もって

いる。これに対し図 6 の各曲線において特徴的滑り弱化距離をどう定義するかは問題であり、非常に粗雑な議論ではあるが、一例としてわかりやすさのため縦軸の値が 0.25 に達した時の横軸の値を最終滑り量と特徴的滑り弱化距離との比だと考えると、破壊伝播速度が変わるにつれ少なくとも 0.3 程度はこの比が変化していることが見て取れる。Mikumo et al. [2003] の見積もった値のばらつきは、手法上の問題や断層面上の場所ごとの特徴など様々な要因に依るものであると考えられるが、我々の結果は、それらの要因によるものと同程度のばらつきが、媒質境界の影響によっても生じうるもので、断層面上でのエネルギー消費を議論するにあたって、媒質境界の影響は考慮に値するものであることを示唆している。

## 1.5 要約

媒質境界に沿う断層については、これまで数値計算的研究が数多くの成果を出してきており、また近年では観測的研究も始まった一方で、その物理的背景の理解を促す解析的研究が停滞気味であった状況を打破したという点で、本研究において大きな進歩が得られた。本文で紹介したように、これまで多くの数値計算的研究が媒質境界におけるパルス型破壊に注目してきたが、それらの論文が限定的なパラメータの組み合わせについてのみ検証を続けてきたのに対し、数値計算コストの制約を殆ど受けない本研究の解析解からは、背景応力、摩擦係数の弱化距離、破壊伝播の速度と方向について、その依存性を網羅的に調べることができた。それに加え、本文中では具体的なパラメータ依存性の検証を省略したが、両媒質の物性比や摩擦係数の絶対値 ( $f_s$  と  $f_d$  の具体的な値) についても解析解の中にパラメータとして含まれており、これらを変えた計算も直ちに実行可能であるという点で、本研究で導いた解析解によって得られる情報は決して少なくない。例えば、両媒質が Poisson 媒質であるという条件を外し、両媒質の Poisson 比を変えると、法線応力変化項の係数  $\mu^*$  が、低速破壊 (およそ  $c/c_{GR} < 0.8$ ) の場合と高速破壊 (およそ  $c/c_{GR} > 0.8$ ) の場合とで符号を変える場合があり [Weertman 1980], そのような場合には定性的挙動が本文中で示したものと変わることが予想される。物性比についてはパラメータ空間が広すぎるため大幅な制約を課したが、今後、考察すべきパラメータの組み合わせが具体的に与えられた場合にも本研究の解析解は有用となるであろう。また物理的考察として、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度よりも遅い場合には負方向へのパルス型破壊についても物理的 3 条件を満たす解が存在することや、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度に達する僅かに手前で正方向へのパルス内部で滑りによる法線応力変化が初期応力を上回り、開口を生じモデルが破綻する可能性が示された 2 点によって、これまで主に Weertman [1980] の解と考察によってのみ支えられてきた媒質境界を伝播するパルス型破壊のモデルの枠組みについて、新たな理論的解釈を与えたことの意義は大きい。加えて観測的研究に対しても、断層面上でのエネルギー消費を議論するために滑り-応力降下曲線を見積る際に、媒質境界の影響は既往の観測研究における推定のばらつきに対して無視できない変化量をもたらすため、考慮に値するものであることを示唆するという提言を行なった。これら本研究の結果によって、媒質境界に沿うパルス型破壊についての理解と、その重要性の認識が一段と深まるであろう。

## 2 媒質境界と交差する mode-III 動的破壊伝播の数理解析

### 2.1 導入

序文で述べたように、地震が発生する地球内部の領域は、断層と共に多数の媒質境界を含む。その複雑さからは、断層が媒質境界に沿う場合のみならず、媒質境界と交差するような位置関係にあることもありうると考えて然るべきであろう。これまでは地下の断層と媒質境界の位置を精度よく調べるのが技術的に困難だったため、そのような事例はあまり知られて来なかったが、近年の地震学および地質学的観測によって、実際に媒質境界と交差する断層の報告事例が増えつつある [Wang et al. 2004; Kato et al. 2006; Yabe et al. 2009; Naoi et al. 2011; Ferrari & Bonafede 2012; Roche et al. 2012].

まず地震学的観測によるものであるが、M6 を超える巨大断層については、Wang et al. [2004] が 2001 年芸予地震 (M6.7) の断層近傍の構造を考慮した結果、高角スラブ内地震ではあるが地震規模から推定される断層サイズがスラブの厚みに収まるとは考えられず、断層破壊がスラブ-マントル境界を横切り深部方向へ伝播した可能性を提示している。また Kato et al. [2006] は 2004 年中越地震 (M6.6) の断層近傍の余震分布および地震波構造探査から、この地震の最大余震を引き起こした断層の端が媒質境界と接触していることを示している。Ferrari & Bonafede [2012] は、2000 年にアイスランド南部で発生した地震 (M6.6) の地震を引き起こした横ずれ断層が、浅部に確認されていた層境界を突き破って地表に達していると解釈している。M2 程度の小規模断層については、Yabe et al. [2009] および Naoi et al. [2011] による、2007 年 12 月に南アフリカ Mponeng 金鉱山で発生した地震の断層近傍の稠密調査により、断層面上を伝播した動的破壊が媒質境界にぶつかって停止したであろうことまで判明している。

続いて地質学的観察によるものとしては、露頭に見られる層構造を切る断層の観察事例とその特徴の報告事例多数が、Roche et al [2012] によって纏められている。彼らは多数の露頭断層のデータを統合し、層ごとに累積変位量がどのようなプロファイルを持つかなどを調べた上で、そのような調査と解析が断層成長についての理解を深める重要な要素となりうるという説いている。

このようにして媒質境界と交差する断層の存在が徐々に認識され始めた昨今においては、境界と交わる亀裂が均質媒質中の亀裂と如何に異なる挙動を示すかという理論的・数値的解析が望まれるところである。準静的な 2 次元弾性体の破壊力学の枠組みにおいては、境界と交差せず片側媒質のみに存在する直線亀裂上に mode-II の一様滑りを仮定した場合の、亀裂周辺の変位場の解析解が Rami & Singh [1992] によって求められ、以後境界と直交する直線亀裂上に応力降下を仮定した場合の滑り分布の数値解が、mode-II については Rivalta et al. [2002], mode-III については Bonafede et al. [2002] によって求められており、更に屈曲亀裂が境界と交差する場合は、mode-II については Hirano & Yamashita [2011], mode-III については Ferrari & Bonafede [2012] によって数値解が求められている。

これに対し地震時の挙動を調べるためには動的問題としての取り扱いが不可欠であるが、媒質境界と交差する亀裂の動的解析の事例は非常に乏しく、ごく近年その試みが始まったばかりで、現時点ではまず数値計算手法の開発が急がれている。Wada & Goto [2012] は、有限要素法 (FEM) を拡張した X-FEM と呼ばれる手法を用い、媒質境界と交差する mode-II 亀裂の自発的破壊伸展を扱った。しかし彼らの研究は地表面での強震動のパターンが、地表断層と伏在断層の各場合で異なることを検証するためのものであり、亀裂面上での滑り速度の時間発展について

は、亀裂面上のごく限られた点についてのみ図示しているために空間分布の詳細が不明瞭である。また、彼らの得た滑り速度の時間履歴の図を見る限り、数値ノイズが非常に大きく、計算手法上の困難があると思われる。これを上回る高精度な数値計算は、Tada & Yamashita [1997, 以下 TY97 と略記] によって提唱された境界積分方程式法 (BIEM) という数値計算手法の応用によって実現できる可能性がある。BIEM の数学的詳細については次節で述べるが、概要としては、FEM や差分法のように弾性体の変位・応力場を記述する微分方程式を離散化する数値計算手法ではなく、亀裂面上の滑りが弾性体中に作り出す変位・応力場を記述する積分型の表現定理、即ち積分方程式を離散化する手法である。2次元問題の場合、FEM や差分法では亀裂を含む十分広い2次元領域をメッシュや格子によって離散化する必要があるのに対し、BIEM では積分領域に対応する亀裂面という有限長の線、すなわち1次元領域を離散化するだけで良いので、その点で効率が良く、また任意形状の亀裂を取り扱い可能という長所もある。更にその離散化をさほど細かくする必要がないという点でも BIEM は優位であり、Tamura & Ide [2011] による無限均質媒質中における亀裂の自発的伸展の数値解析では、FEM による計算が BIEM による計算と同程度に滑らかな (数値振動の少ない) 解を得るためには、空間方向の離散化要素を BIEM の場合に比べ 10 分の 1 程度に細分化する必要があることが示されている。これは FEM という手法において、応力や変位食い違いが真に亀裂面上で評価されるのではなく、メッシュの (多くの場合三角形の) 要素内部に評価点があり、一方で亀裂面自体はメッシュ要素の辺上にあるために亀裂面上での境界条件が厳密に満たされないのに対し、BIEM では数値積分の際に亀裂面の各離散化要素上の境界条件を厳密に満たす数学的解析解を足し合わせるために、相対的に粗い離散化でも高精度な計算が可能になっているためと考えられる。

TY97 による BIEM は無限均質媒質中での亀裂の問題にしか適用できないという限界があったが、2次元問題の範囲内でこれを拡張した XBIEM という手法が Kame & Kusakabe [2012] によって提唱され、これが媒質境界と交差する亀裂の動的挙動についても高精度な計算を可能にすることが期待されている。Kame & Kusakabe [2012] の手法は、TY97 による無限均質媒質中での亀裂解析に加えて、媒質境界をも離散化し、媒質境界面上の各離散化要素が与えられたトラクションに対しどう応答するかを解析解として求め、亀裂上での食い違いが作り出す変位場・応力場を受けて、媒質境界の固着条件を満たすべき媒質境界の反応を、離散化された積分方程式に取り込んでいる。即ち、媒質境界面上の離散化要素のインパルス応答を解析的に求めた上で、それを用いて媒質境界面の固着条件を数値的に満たす手法である。この手法は原理的に、2次元問題の全ての破壊モードに適用可能な上、屈曲した複数の媒質境界をモデルに取り込むことも可能であり、応用可能性が高い。これを受けて、Kusakabe [2013] は直線的な媒質境界と交差する mode-III の直線亀裂上の自発的破壊伸展の数値計算を XBIEM によって実行した。その結果、相対的に硬い媒質内部で破壊が始まり、亀裂先端が他方の柔らかい媒質との境界に接触した後、一時的な滑り速度の増大フェイズが硬い媒質内部の亀裂面上を逆走し、逆に柔らかい媒質内部で破壊が始まる場合は、一時的な滑り速度の減少フェイズが柔らかい媒質内部の亀裂面上を逆走してゆく様子が示された。

こうして XBIEM は実践段階に入ったが、媒質境界をも離散化し積分方程式に取り込むという新しい試みの性質上、数値解析手法開発に必須となる解析解との比較による検証ができない状況は致命的な問題である。その検証のためには、次節で解説する BIEM の数学的性質上、離散化された亀裂の 1 要素が単位時間、一定速度で滑った場合の 2 層媒質内部の応答が解析的に求められていることが理想だが、そのような解析解は未だ知られていない。たとえば直線的媒質境界と mode-III 亀裂という限定的な仮定の下であっても、上述の解析解を求めることができ



ば XBIEM にとって唯一のベンチマークとなり重要な貢献ができるばかりでなく、更にはその仮定の範囲内では XBIEM を用いずに、媒質境界と交差する任意形状の亀裂の問題を XBIEM 以上の精度で解くことすらできる。次節で紹介するように、上述の解析解は、XBIEM が数値的に満たそうとする媒質境界面上の固着条件を最初から厳密に満たしている解であり、媒質境界を離散化する必要がないためである。

そこで本研究は第一に、2層媒質中に埋め込まれた亀裂要素が単位時間、一定速度で滑った場合の、2層媒質内部の応力場の応答を解析的に求めることを目指す。数学的単純化のため、直線的媒質境界と mode-III の滑りという制約は課すが、媒質境界の固着条件については数学的に厳密に満たす解を求めるのであり、前段落で述べてきたような需要に応えることができる。更に本研究は第二に、求められた解析解を用いて BIEM による亀裂伸展のシミュレーションを行なうことを目指す。これによって、媒質境界と交差する亀裂が地震時にどう振る舞うかを考察する。ただし、亀裂伸展のシミュレーションには非常に多くの仮定が要求される。例えば自発的破壊伸展の場合、震源核の設定および、破壊規準や摩擦法則の設定については多数の方法があり、どれを採用することが地震学的に現実的もしくは有用であるかははっきりしない。特に Wada & Goto [2012] や Kusakabe [2013] で採用されている、臨界滑り量が一定な滑り弱化型摩擦法則の場合、亀裂伸展に伴って亀裂先端近傍の摩擦弱化領域が狭まり、亀裂長に比例して滑り速度の最大値が増大してゆくことが示されている点 [例えば Andrews 2005 など] は、数理モデルのパラメータ依存性の検証を困難化させる上、地震学的に観測される現象を忠実に再現できるわけでもないという2つの問題をもたらす。前者に関しては、この摩擦法則の下では最初に設定された破壊開始点と媒質境界との距離、および臨界滑り量という2つの長さの次元を持つパラメータが存在し、定量的議論のためには両者を様々に変えてパラメータ依存性を調べる必要性が出てくる。特に破壊開始点が媒質境界と十分離れている、もしくは臨界滑り量が十分小さな場合には、滑り弱化型摩擦法則の影響など無視できるようになってしまい、摩擦係数一定の場合と変わらない挙動が予想される。また後者に関しては、臨界滑り量一定な滑り弱化型摩擦法則は各時刻において数値上有限な滑り速度を再現するという点で、現象論的に一見尤もらしいように思われるが、亀裂長に比例して滑り速度の最大値が増大してゆく点は、現実の地震破壊の最中においては亀裂長と滑り速度の最大値に明瞭な相関が見られるわけではない [例えば Uchide et al. 2009] という観測事実と相入れず、一方で臨界滑り量は一定ではなく最終滑り量に比例することが観測から示唆されている [Mikumo et al. 2003; Cocco et al. 2009] ことから、臨界滑り量一定な滑り弱化型摩擦法則を採用することの現象論的意義が、例えば摩擦係数一定な滑り面を考えることに比べて特別大きいとも断定できない。このように現象論的意義が曖昧であるにも関わらず複雑な問題設定の下でパラメータ依存性を調べるよりも、媒質境界と交差する亀裂に特有のパラメータに注目するため、本研究では「一定速度で拡大する、摩擦ゼロの亀裂面」という非常に簡単な条件を設定する代わりに、亀裂が媒質境界と交わる角度をパラメータとし、その依存性を調べる。その角度を設定する際には、Kusakabe [2013] のような直線亀裂ではなく、背景応力場が物性比に応じて変わるといふ2層媒質の性質 [Rybicki & Yamashita 2008] を考慮し、媒質境界との交点で屈曲するような亀裂を仮定する。このような条件下でシミュレーションを行なった後、より複雑な摩擦法則が仮定された場合に予想される定性的挙動について、議論を行なうことにする。

## 2.2 BIEM の概念紹介と、2層媒質面外問題の動的解析解の導出

### 2.2.1 直達波、反射波、および透過波を包括する BIEM の数学的概要

本節では2層媒質中に埋め込まれた mode-III の亀裂要素が単位時間、一定速度で滑った場合の、2層媒質内部の応力場の応答を解析的に求めることを目指す。2層媒質問題においては、直達波、反射波、および透過波が存在するが、このうち直達波による応力場の表現は、無限均質媒質中の問題として、TY97 によって既に導かれている。そこで本論文では反射波と透過波による応力場の表現を求める。TY97 による無限均質媒質中での表現は実関数のみを用いて導出されたが、我々は反射波および透過波の問題を扱う上で、少なくとも複素関数を利用すればこれらの波による応力場の表現が得られることを発見した。本小節では直達波、反射波および透過波を考慮した BIEM の数学的概要を紹介し、次小節では反射波の解析における数学的詳細を展開する。また、透過波の数学的取り扱いには反射波の扱いと似ている部分が多いため、導出過程は付録 (A.1) にて紹介する。

ここでは、 $x$ - $z$  座標系を考え、時刻を  $t$  と置く。応力テンソルの  $xy$  および  $zy$  成分をそれぞれ  $\sigma_{xy}$  および  $\sigma_{zy}$  と書き、変位の  $y$  成分を  $u$  と書く。BIEM の枠組みにおいて、亀裂面上の滑りによる応力変化の表現は、Green 関数が得られれば求めることができる。本論文では、Aki & Richards [2002, 以後 AR02 と略記] によって求められた Green 関数の表現を採用する。彼らは2層媒質中における Green 関数を、後に紹介するような複素関数の虚部を取ることで求めている。そこで本論文では、虚部を表わす記号  $\Im$  を用いて、Green 関数を  $\Im G$  と書くことにする。

面上の滑りが生じた時、変位  $u$  は TY97 の式 (14) によって、

$$u(x, z, t) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_0^t d\tau \Delta u(\gamma, \tau) \mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Im G(x, z, t; \gamma, \tau) \quad (2.1)$$

と表現される。ここで、 $\gamma$  は断層トレース  $\Gamma$  の上の位置、 $\Delta u(\gamma, \tau)$  は滑り量を表わすものとする。TY97 では剛性率  $\mu$  は定数として扱われたが、ここでは2層媒質問題を考えるため  $\gamma$  に依存するものとしている。また今回の解析では、位置  $\gamma$  を原点とする直交座標系を導入し、その場所での  $\Gamma$  の接線方向に  $\xi$  軸を、法線方向に  $\zeta$  軸を取る ( $\xi$  は式 (2.1) に明示的には現われていない。図 8-(a) 参照)。この変位の表現によって、応力の表現は

$$\sigma_{xy} = \mu(x, z) \int_{\Gamma} d\gamma \int_0^t d\tau \Delta u(\gamma, \tau) \mu(\gamma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} \Im G(x, z, t; \gamma, \tau), \quad (2.2)$$

$$\sigma_{zy} = \mu(x, z) \int_{\Gamma} d\gamma \int_0^t d\tau \Delta u(\gamma, \tau) \mu(\gamma) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} \Im G(x, z, t; \gamma, \tau), \quad (2.3)$$

となる。ここで  $\mu(x, z)$  は  $(x, z)$  における剛性率である。一般に Green 関数  $\Im G$  は非有界である [AR02 の 6.4 節参照] ため、式 (2.2) および (2.3) そのものを数値的に直接計算することはできない。BIEM の枠組みでは、この問題に対処するため、TY97 他多くの研究において、滑り速度を時空間的に boxcar 関数の重ね合わせとして離散化する方法が採用されている。即ち

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta u(\gamma, \tau) \sim \sum_{i,n} V^{i,n} \{ \delta(\gamma - \gamma_i) - \delta(\gamma - \gamma_{i-1}) \} \{ \delta(\tau - \tau_n) - \delta(\tau - \tau_{n-1}) \}, \quad (2.4)$$

と近似する。ここで本来曲線的であった断層トレースは線分の集合によって置き換えられており (図 8-(b) 参照)、 $i$  は線分の番号、 $n$  は時間ステップの番号で、 $V^{i,n}$  は時空間領域  $(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \times (\tau_{n-1}, \tau_n)$  において一定な滑り速度、

そして  $\delta(\cdot)$  は Dirac の delta 関数である. 式 (2.2) および (2.3) の右辺を  $\tau$  について 2 回,  $\gamma$  について 1 回部分積分し, その結果に式 (2.4) を代入すると, 近似式として

$$\sigma_{xy} \sim -\mu(x, z) \sum_{i,n} V^{i,n} \mu_i \mathfrak{S} \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} G \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{zy} \sim -\mu(x, z) \sum_{i,n} V^{i,n} \mu_i \mathfrak{S} \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} G \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n}, \quad (2.6)$$

が得られる. ここで  $\mu_i$  は  $i$  番目の線分要素近傍の剛性率とする. 以下では, 式 (2.5) および (2.6) をそれぞれ

$$\sigma_{xy} \sim \sum_{i,n} V^{i,n} K_{xy}^{i,n}(x, z, t) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{zy} \sim \sum_{i,n} V^{i,n} K_{zy}^{i,n}(x, z, t) \quad (2.8)$$

と略記し,  $K_{xy}^{i,n}(x, z, t)$  および  $K_{zy}^{i,n}(x, z, t)$  を BIEM カーネルと呼ぶことにする. ここで行なった部分積分により, BIEM カーネルは有界な関数となり, 数値的に扱うことが可能になる. TY97 は無限均質媒質を扱い, 式 (2.5) および (2.6) の右辺に現われる積分を実行した. 彼らがそれを成し得たのは, 無限均質媒質の Green 関数が比較的簡単に積分できる関数だったためである.

一方で 2 層媒質においては, AR02 の 6.4 節において, 直達波, 反射波, および透過波に対応する Green 関数が, Cagniard de-Hoop の方法によって求められている. ここではそれらを各々  $\mathfrak{S}G_D$ ,  $\mathfrak{S}G_R$ , および  $\mathfrak{S}G_T$  と書くことにする. 更に, BIEM カーネルを  $\mathfrak{S}G_D$ ,  $\mathfrak{S}G_R$ , および  $\mathfrak{S}G_T$  から成る 3 つの項を用いてそれぞれ

$$K_{xy}^{i,n} = \begin{cases} K_{xy,D}^{i,n} + K_{xy,R}^{i,n}, & (\gamma_i \text{ と } (x, z) \text{ が同一媒質にある場合}) \\ K_{xy,T}^{i,n}, & (\gamma_i \text{ と } (x, z) \text{ が別媒質にある場合}) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$K_{zy}^{i,n} = \begin{cases} K_{zy,D}^{i,n} + K_{zy,R}^{i,n}, & (\gamma_i \text{ と } (x, z) \text{ が同一媒質にある場合}) \\ K_{zy,T}^{i,n}, & (\gamma_i \text{ と } (x, z) \text{ が別媒質にある場合}) \end{cases} \quad (2.10)$$

と書く.  $\mathfrak{S}G_D$  は TY97 が扱った均質媒質の問題における Green 関数と同じであり, 従って  $K_{xy,D}^{i,n}$  および  $K_{zy,D}^{i,n}$  の表現は既に求められていることに注意する. 一方,  $\mathfrak{S}G_R$  および  $\mathfrak{S}G_T$  の  $(x, z, t; \gamma, \tau)$  への依存性は複雑であり, 複素波線パラメータ  $p(x, z, t; \gamma, \tau)$  を用いて表現される (AR02 の 6.4 節参照. 詳細は次小節). この場合, 式 (2.5) および (2.6) の右辺に現われる積分を TY97 の枠組みと同様には実行できない. 彼らは実関数の範囲のみで問題を考えているためである. 次小節および付録 (A.1) で, 我々はこの積分を複素波線パラメータ  $p$  について行なう. その過程において我々は,  $K_{xy,R}^{i,n}$ ,  $K_{zy,R}^{i,n}$ ,  $K_{xy,T}^{i,n}$ , および  $K_{zy,T}^{i,n}$  は初等関数および複素変数の不完全楕円積分の線形結合で記述できることを発見した. 複素変数の不完全楕円積分は数値的計算アルゴリズムが Carlson [1995] によって与えられているため, 式 (2.9) および (2.10) の右辺は実際に計算可能であることが, こうして明らかになった. 次小節では, その数学的詳細を反射波の場合について紹介する.

## 2.2.2 反射波による BIEM カーネルの複素関数表現

ここでは  $z = 0$  を媒質境界とし, Green 関数  $\mathfrak{S}G_R$  を元に反射波の BIEM カーネルを導出する. 以下の解析においては, 剛性率  $\mu$  や S 波速度  $\beta$  などの文字に,  $j$  あるいは  $k$  の添字を付すことがある. 添字  $j$  は点  $(x', z')$  に置か

れた波源を含む半無限領域を表わし、波源を含まない他方の媒質は添字  $k$  によって表わされるものとする。本小節では、特に断らない限り AR02 と略記するものはすべて AR02 の 6.4 節を参照するものとする。片側 Laplace 変換を用いた Cagniard de-Hoop の方法により、 $G_R$  は Laplace 領域で

$$G_R = \frac{1}{2\pi\mu_j s \eta_j} \left\{ \frac{\mu_j \eta_j - \mu_k \eta_k}{\mu_j \eta_j + \mu_k \eta_k} \right\} e^{-s(t-\tau)}, \quad (2.11)$$

$$t - \tau = p(x - x') + \eta_j |z + z'|, \quad (2.12)$$

$$p = \frac{(x - x')(t - \tau) + \operatorname{sgn}(x - x')|z + z'| \sqrt{(R/\beta_j)^2 - (t - \tau)^2}}{R^2}, \quad (2.13)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (z + z')^2}, \quad (2.14)$$

$$\eta_j = \sqrt{\beta_j^{-2} - p^2}, \quad \eta_k = \sqrt{\beta_k^{-2} - p^2}, \quad (2.15)$$

という形式で表現される [AR02]. ここで  $s$  は Laplace 変数,  $p$  は複素波線パラメータであり,  $\eta$  の実部の符号は正に取る. 上記の表現は,

$$\frac{\partial G_R}{\partial x} = -\frac{\partial G_R}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t}(pG_R), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial G_R}{\partial z} = \frac{\partial G_R}{\partial z'} = \operatorname{sgn}(z') \frac{\partial}{\partial t}(\eta_j G_R) \quad (2.17)$$

という関係性を与える. ここで、今考えている反射波の場合は波源と観測点が同じ媒質中に含まれているため、 $\operatorname{sgn}(z + z') = \operatorname{sgn}(z')$  を用いた.  $\Gamma$  上の点で、その場の接線が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなすような場所においては、 $x$ - $z$  座標系と  $\xi$ - $\zeta$  座標系における微分作用素の間には、

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\zeta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

という関係がある.

続いて、 $K_{xy,R}^{i,n}$  および  $K_{zy,R}^{i,n}$  の表現を求める. 今回は  $\mu_i = \mu(x, z) = \mu_j$  とできることに注意する.  $\partial_t = -\partial_\tau$ , 式 (2.2), (2.3) (2.16) から (2.19) まで、および Laplacian の回転対称性

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial}{\partial t^2} G_R &= \frac{\partial}{\partial x^2} G_R + \frac{\partial}{\partial z^2} G_R \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^2} G_R + \frac{\partial}{\partial \zeta^2} G_R \end{aligned} \quad (2.20)$$

を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
K_{xy,R}^{i,n} &= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} - \sin \theta \left( -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta_j^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \tag{2.21} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} - \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \operatorname{sgn}(z') \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} \eta_j + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= -\mu_j^2 \Im \left\{ \operatorname{sgn}(z') \left[ \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \eta_j G_R d\tau \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \left[ \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} G_R d\xi \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{zy,R}^{i,n} &= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} + \cos \theta \left( -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta_j^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \tag{2.22} \\
&= -\mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} + \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left[ \left[ \int d\gamma \int d\tau \int d\tau \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} G_R \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \\
&= \mu_j^2 \Im \left\{ \left[ \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} p G_R d\tau \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \left[ \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} G_R d\xi \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \right\}
\end{aligned}$$

を得る. この計算において, 離散化された断層トレースの各線分においては  $\gamma$  を動かすことと  $\xi$  を動かすことは完全に一致する (図 8-(b) 参照) ため,  $\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} d\gamma = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} d\xi$  の関係を用いた. 尚, 以下の計算過程では,  $G = \tilde{G} dp/dt$  を満たす  $p$  の関数  $\tilde{G}$  を用いることがある. 2 層媒質問題であっても, 一般に Green 関数  $G$  は  $dp/dt$  に比例するためである [AR02].  $G$  同様,  $\tilde{G}$  も直達波, 反射波, そして透過波の各々に応じて  $\tilde{G}_D, \tilde{G}_R, \text{ および } \tilde{G}_T$  と書く.

式 (2.21) および (2.22) 各々の最右辺第 1 項の積分は, 積分変数を  $\tau$  から  $p$  に書き換えると

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ -p \end{pmatrix} G_R d\tau &= - \int_{t-\tau_{n-1}}^{t-\tau_n} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ -p \end{pmatrix} G_R dt \\ &= - \int_{p(t-\tau_{n-1})}^{p(t-\tau_n)} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ -p \end{pmatrix} \tilde{G}_R dp \end{aligned} \quad (2.23)$$

が得られる.

式 (2.21) および (2.22) 各々の最右辺第 2 項の積分  $\int G_R d\xi$  を計算することは少々困難を伴う. TY97 は,  $x$ - $z$  座標系を回転させ  $\xi$ - $\zeta$  座標系と平行にすることでこの積分を簡単にした. しかし我々の問題設定では,  $x$  軸は既に媒質境界として固定されてしまっているため同様の手法は適用できない. そのためここでは  $x$  軸から傾いた  $\xi$  軸に沿って積分を行なうしかない. まず, 式 (2.16) から (2.19) までを用いて,

$$\begin{aligned} G_R &= \int^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} G_R d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int^{\xi} (-p \cos \theta + \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta) G_R d\xi \end{aligned} \quad (2.24)$$

を得る. そして  $G_R$  を

$$G_R = \tilde{G}_R \frac{dp}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int^t \tilde{G}_R \frac{dp}{dt} dt = \frac{\partial}{\partial t} \int^p \tilde{G}_R dp \quad (2.25)$$

と書き換えることにより,

$$\int^{\xi} (-p \cos \theta + \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta) G_R d\xi = \int^p \tilde{G}_R dp \quad (2.26)$$

という関係式が得られる. この両辺を  $\xi$  について微分すれば,

$$(-p \cos \theta + \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta) G_R = \frac{\partial p}{\partial \xi} \tilde{G}_R \quad (2.27)$$

が得られ, 結局,

$$\begin{aligned} \int^{\xi} G_R d\xi &= \int^{\xi} \frac{\tilde{G}_R}{-p \cos \theta + \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi \\ &= \int^p \frac{\tilde{G}_R dp}{-p \cos \theta + \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

が成り立つ. 式 (2.28) と類似の形式は透過波の場合にも現われるので, この導出過程は後にも重要となる.

以上により, 反射波による BIEM カーネルは

$$K_{xy,R}^{i,n} = -\mu_j^2 \Im \left[ [I_{xy,R}]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{t-\tau_{n-1}}^{t-\tau_n}, \quad (2.29)$$

$$I_{xy,R} = - \int^p dp \tilde{G}_R \left\{ \operatorname{sgn}(z')\eta_j + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\}, \quad (2.30)$$

$$K_{zy,R}^{i,n} = -\mu_j^2 \Im \left[ [I_{zy,R}]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{t-\tau_{n-1}}^{t-\tau_n}, \quad (2.31)$$

$$I_{zy,R} = \int^p dp \tilde{G}_R \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\} \quad (2.32)$$

という形式で表現できることが判明した. 以下では更に具体的に計算を進める.

式 (2.11) より,

$$\tilde{G}_R = \frac{1}{2\pi\mu_j} \frac{\mu_j\eta_j - \mu_k\eta_k}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} \frac{1}{\eta_j} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} - \frac{1}{2\mu_j\eta_j} \right\} \quad (2.33)$$

という書き換えが可能である. ここでは

$$M^2 = \frac{\mu_j\rho_j - \mu_k\rho_k}{\mu_j^2 - \mu_k^2}, \quad C_j = \frac{\mu_j}{\mu_j^2 - \mu_k^2}, \quad C_k = \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - \mu_j^2} \quad (2.34)$$

によって定義される物性定数を導入することによって, 式 (2.33) の最右辺第 1 項は

$$\frac{1}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} = \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2}. \quad (2.35)$$

と書ける. この表記によって,

$$I_{xy,R} = \frac{1}{\pi} \int^p dp \left\{ \frac{1}{2\mu_j\eta_j} - \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2} \right\} \left\{ \operatorname{sgn}(z')\eta_j + \frac{\sin\theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos\theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin\theta} \right\}, \quad (2.36)$$

$$I_{zy,R} = -\frac{1}{\pi} \int^p dp \left\{ \frac{1}{2\mu_j\eta_j} - \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2} \right\} \left\{ p - \frac{\cos\theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos\theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin\theta} \right\} \quad (2.37)$$

と書き換えることができ,  $\int (p/\eta_j) dp = -\eta_j$  を考慮して更に

$$I_{xy,R} = \frac{1}{2\pi\mu_j} [\operatorname{sgn}(z')p + A \sin\theta] - \frac{1}{\pi} [\operatorname{sgn}(z') \{C_j I_{jj}(M) + C_k I_{jk}(M)\} + B \sin\theta], \quad (2.38)$$

$$I_{zy,R} = \frac{1}{2\pi\mu_j} [\eta_j + A \cos\theta] + \frac{1}{\pi} [\{C_j I_j(M) + C_k I_k(M)\} - B \cos\theta] \quad (2.39)$$

と書くことにする. ここで,  $\{l, m\} = \{j, k\}$  について

$$A := \frac{1}{\beta_j^2} \int^p \frac{1}{p \cos\theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin\theta} \frac{dp}{\eta_j}, \quad (2.40)$$

$$B := \frac{1}{\beta_j^2} \{C_j J_{jj} + C_k J_{jk}\}, \quad (2.41)$$

$$I_l(M) := \int^p \frac{p\eta_l}{M^2 - p^2} dp, \quad (2.42)$$

$$I_u(M) := \int^p \frac{\eta_l^2}{M^2 - p^2} dp, \quad (2.43)$$

$$I_{lm}(M) := \int^p \frac{\eta_l\eta_m}{M^2 - p^2} dp, \quad (2.44)$$

$$J_u := \int^p \frac{1}{p \cos\theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_l \sin\theta} \frac{\eta_l}{M^2 - p^2} dp, \quad (2.45)$$

$$J_{lm} := \int^p \frac{1}{p \cos\theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_l \sin\theta} \frac{\eta_m}{M^2 - p^2} dp \quad (2.46)$$

と置いたが、これらの積分は付録 (A.3) で示すように、

$$A = \frac{1}{\beta_j} \log \frac{-\operatorname{sgn}(z') \sin \theta + \beta_j p}{\cos \theta + \beta_j \eta_j}, \quad (2.47)$$

$$I_l(M) = \sqrt{M^2 - \beta_l^{-2}} \arctan \frac{\eta}{\sqrt{M^2 - \beta_l^{-2}}} - \eta_l, \quad (2.48)$$

$$I_{ll}(M) = \frac{\beta_l^{-2} - M^2}{iM} \arctan \frac{ip}{M} + p, \quad (2.49)$$

$$I_{lm}(M) = \frac{1}{\beta_{min}} \left\{ a^{-2} R_F(c-1, c-k^2, c) - \frac{k^2}{3} R_D(c-1, c-k^2, c) \right. \\ \left. + \frac{(a^{-2}-1)(a^{-2}-k^2)}{3} R_J(c-1, c-k^2, c, c-a^{-2}) \right\}, \quad (2.50)$$

$$J_{ll} = \frac{\cos \theta \left\{ I_l(M) - I_l \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\} - \operatorname{sgn}(z') \sin \theta \left\{ I_{ll}(M) - I_{ll} \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\}}{M^2 - (\sin \theta / \beta_l)^2}, \quad (2.51)$$

$$J_{lm} = \frac{\cos \theta \left\{ I_l(M) - I_l \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\} - \operatorname{sgn}(z') \sin \theta \left\{ I_{lm}(M) - I_{lm} \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\}}{M^2 - (\sin \theta / \beta_l)^2} \quad (2.52)$$

と具体的に求めることができる。ここで、

$$\beta_{Max} := \max \{ \beta_1, \beta_2 \}, \quad (2.53)$$

$$\beta_{min} := \min \{ \beta_1, \beta_2 \}, \quad (2.54)$$

$$a := \beta_{Max} M, \quad (2.55)$$

$$k := \beta_{min} / \beta_{Max}, \quad (2.56)$$

$$c := 1 / (\beta_{Max} p)^2 \quad (2.57)$$

であり、 $R_F, R_D$ , および  $R_J$  はそれぞれ第 1 種、第 2 種、および第 3 種 Carleson 対称型楕円積分である。Carleson [1995] によるそれらの定義は

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} dt, \quad (2.58)$$

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{(t+x)(t+y)}}{(t+z)\sqrt{t+z}} dt, \quad (2.59)$$

$$R_J(x, y, z, p) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(t+p)\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} dt \quad (2.60)$$

となっている。Carlson [1995] はこれらの積分を、複素変数の場合まで含めて数値的に任意精度で計算可能な統一アルゴリズムを提唱している。かくして、反射波に由来する BIEM カーネルを具体的に計算できるようになった。

## 2.3 特異的亀裂面上の滑りの時空間発展

### 2.3.1 2 層媒質と亀裂の問題設定

ここでは前節で求めた BIEM カーネルを用いて、媒質境界と交差する面外亀裂が動的に拡大する際の挙動を数値的に調べる。カーネル導出過程と同様、 $x$ - $z$  座標系を考え、 $z = 0$  を媒質境界とする。また  $\beta$ , および  $\rho$  をそれ



ぞれ媒質の S 波速度, および密度とする. また, 各々に  $\pm$  の上付き文字を付し,  $+$  が付いたものは  $z > 0$  なる領域の,  $-$  が付いたものは  $z < 0$  なる領域の物性値であるとする. これら物性値について, Birch [1961] による経験則と, 各媒質が Poisson 媒質であるという仮定を併用すると, 地殻の代表的な岩石では  $\beta^+/\beta^- = \rho^+/\rho^-$  の関係が誤差 10 % 程度で成り立つことが示せる [Hirano & Yamashita 2011] ため, この仮定を用いることにする. なお本研究では,  $\Delta\beta = 1 - \beta^+/\beta^-$  というパラメータを与える. この値が大きいくほど媒質境界における反射係数は大きく, 透過係数は小さくなるので, 定性的には 2 層媒質であることの影響はこの値が大きいくほど顕著になる. また AR02 により, 体積力の単位インパルス入力に対する反射波の振幅は式 (2.11) の通りで, 特に反射係数

$$\dot{S}\dot{S} = \Re \left\{ \frac{\mu_k \eta_k - \mu_j \eta_j}{\mu_k \eta_k + \mu_j \eta_j} \right\} \quad (2.61)$$

が反射波振幅を特徴付けており, これが物性比だけでなく, 震源と観測点との時空間的な位置関係に依存することが, 複素破線パラメータ  $p$  の内訳より見て取れる. そこで 図 9 においてこの反射係数  $\dot{S}\dot{S}$  の値を,  $\Delta\beta = -15\%$  と  $-30\%$  の 2 通りについて比較した. 下側媒質中に点震源を置き, 水平から  $90^\circ$  (鉛直),  $60^\circ$ , および  $30^\circ$  の方向へ射出された波線が媒質境界で反射し, 点震源と同じ深さの観測点に到達する場合の, 観測点における反射係数  $\dot{S}\dot{S}$  の時間変化が 3 つの矢印に沿って色の变化として見える. 矢印が図の底面に接しているときが各観測点での走時に相当する. この図から, 概ね  $\Delta\beta = -15\%$  における反射係数は  $\Delta\beta = -30\%$  における反射係数の半分程度と見積る事が出来る. それを踏まえて,  $\Delta\beta = \pm 30\%$  の 2 通りのみを考えることにする.

こうして 2 層媒質を考えるにあたり, 各媒質中で異なる背景応力を考えることにする. Rybicki & Yamashita [2008] は, 弾性体の媒質境界における固着条件に基づいて, 背景応力が各媒質中で取るべき値を導いている. 彼らによれば, 各媒質の剛性率を  $\mu^\pm$ , 背景応力の各成分を  $\tau_{xy}^{\pm 0}$  および  $\tau_{zy}^{\pm 0}$  とすると,

$$\begin{aligned} \tau_{zy}^{+0} &= \tau_{zy}^{-0}, \\ \frac{\tau_{xy}^{+0}}{\mu^+} &= \frac{\tau_{xy}^{-0}}{\mu^-} \end{aligned} \quad (2.62)$$

の関係が満たされるべきであるという. この第 1 式は境界面上でのトラクションの連続性により, また第 2 式は歪みテンソルの  $xy$  成分の連続性により導かれる.

続いて亀裂の挙動を考えるにあたり, 導入で述べたように, ここでは摩擦のない単純な亀裂モデルを扱うことにする. このモデルでは, 以下を仮定する 1) 亀裂は, 両媒質中に存在する計 2 つの平面部分に分割され, 2) 各部分は背景応力の最大方向に沿い, 3) 破壊は領域  $z < 0$  に置かれた一点から始まり決められた一定速度で媒質境界へ向かって一方向に拡大する.

まず第 1 および第 2 の仮定により, 今回考える亀裂形状は, 各媒質中での亀裂と媒質境界との角度  $\theta^\pm$  によって特徴付けられる. これまでの仮定により,  $\theta^+$  と  $\theta^-$  との間には, 式 (2.62) から導かれる関係が存在することが以下のように示される. 各媒質中での亀裂面上の応力降下量  $\Delta\tau^\pm$  を各成分に分解したものをそれぞれ  $\Delta\tau_{xy}^\pm, \Delta\tau_{zy}^\pm$  とすると,

$$\Delta\tau_{zy}^\pm = \Delta\tau^\pm \cos \theta^\pm, \quad (2.63)$$

$$\Delta\tau_{xy}^\pm = \Delta\tau^\pm \sin \theta^\pm \quad (2.64)$$

であり、かつ式 (2.62) と、摩擦がゼロ即ち初期応力と応力降下量が等しいという仮定により、

$$\Delta\tau_{zy}^+ = \Delta\tau_{zy}^-, \quad (2.65)$$

$$\frac{\Delta\tau_{xy}^+}{\mu^+} = \frac{\Delta\tau_{xy}^-}{\mu^-} \quad (2.66)$$

であるから、これらを連立させて、

$$\Delta\tau^+ = \Delta\tau^- \sqrt{\cos^2 \theta^- + \left(\frac{\mu^+}{\mu^-} \sin \theta^-\right)^2}, \quad (2.67)$$

$$\frac{\tan \theta^+}{\mu^+} = \frac{\tan \theta^-}{\mu^-} \quad (2.68)$$

を得る。実際の値としては、 $\theta^- = 90^\circ, 45^\circ$  の 2 通りを考え、 $\theta^+$  は上述の関係から自動的に決定されるとする。

第 3 の仮定については、各媒質中での破壊伝播速度  $V_r^\pm$  を各媒質の S 波速度で規格化した量が等しいという関係  $V_r^+/\beta^+ = V_r^-/\beta^-$  を仮定することにする。これは「破壊伝播速度一定」という概念の 2 層媒質への拡張としては自然な仮定であると考えられる。これ以外の一定速度の与え方として、たとえば規格化せず  $V_r^+ = V_r^-$  を一定にするような仮定では、 $V_r^-/\beta^- < 1$  が比較的大きく、かつ  $\beta^- > \beta^+$  の場合に、 $V_r^+/\beta^+ > 1$  となってしまう場合があり、面外問題でありながら破壊伝播速度が S 波速度を超えてしまうという一般的に考えられていない状況を考えなければならず、不自然である。実際の値としては、 $V_r^\pm/\beta^\pm = 0.9$  および  $0.7$  の 2 通りを考える。

以上を踏まえ、媒質と亀裂の配置を模式的に表わしたものが図 10、実際に用いる値は、表 A.4 の通りである。Case  $A^\pm$  では亀裂が境界と直交している。一方で Case  $B^\pm$  では下側媒質中の亀裂セグメントが境界と 45 度で交っており、上側媒質中の亀裂セグメントの方向は式 (2.68) から決定されている。Case  $A^+, B^+$  では破壊が相対的に柔らかい (即ち弾性波速度の遅い) 媒質中で始まり、Case  $A^-, B^-$  では破壊が相対的に硬い (即ち弾性波速度の速い) 媒質中で始まる。Case  $C^+$  では破壊伝播速度の依存性を確かめるため、Case  $A^+$  と比べ破壊伝播速度だけを変えてある。

### 2.3.2 媒質境界による、亀裂面上の滑り速度の反射フェイズ

計算に際しては、媒質境界両側の各亀裂セグメントをそれぞれ 256 分割し、implicit time-marching scheme [Tada 2009] に基づいて行なう。各時間ステップで破壊が 1 空間要素ずつ進むようにするため、時間離散化の幅は破壊伝播速度に反比例させている。またこのモデルでは媒質に応じて S 波速度が異なるため、各媒質中で S 波速度に応じて空間分解能を変えてある。計算結果に対しては、特に平滑化処理は行なわない。

数値計算の結果を図 11 から 15 に示す。各図横軸の原点が媒質境界に対応する。Case  $A^+$  について、図 11-(a) に示す滑り量分布の時空間発展においては、下側媒質中の亀裂セグメント (横軸負の領域) の一部を除いて楕円形に近い分布が得られている。境界と直交する亀裂の場合、各媒質中のセグメント長が同じとき (即ち図 11-(a) で破壊先端が横軸で +1 に達したとき) の準静的な滑り分布は完全な楕円になることが Bonafede et al. [2002] によって示されているが、これが動的な破壊過程においてもほぼ同様であるという結果が示された点は興味深い。また、すべり量分布が楕円から外れる部分の振る舞いについては、図 11-(b) および (c) に示す滑り速度の時空間分布から伺える。これらの図においては、破壊の先端が媒質境界に到達した後、滑り速度を大きく抑制していることが伺

える明瞭な反射フェイズが観察される。この反射フェイズは図中において 45 度の角度で媒質境界から後方へ戻っているが、これは伝播速度が S 波速度に等しいことを示している。ここでは摩擦ゼロの亀裂面を扱っているが、速度依存型摩擦法則においては、滑り速度の抑制は重要な意義を持つ可能性があり、これについては次節で議論する。続いて Case  $B^+$  (図 12) においては、Case  $A^+$  と同様に滑り速度の抑制される様子が得られる。しかしその影響は Case  $A^+$  に見られるほど時空間的に局所化しておらず、明瞭でないために見かけ上の伝播速度をはっきりと定めることも困難である。これは下側媒質中での亀裂セグメント長をいずれのケースでも同じにしているために、亀裂が媒質境界と斜めに接することにより破壊開始点と媒質境界との相対距離が近くなり、下側亀裂セグメント内から放射された弾性波が短時間で媒質境界から反射し影響を及ぼし始めているためと考えられる。

反対に Case  $A^-$  (図 13) においては、滑り速度の一時的な増大が見られる。これは Case  $A^+$  と同様に明瞭な反射フェイズとして現われ、S 波速度で戻ってゆくことがわかる。この擾乱が Case  $A^+$  と逆符号であることは、反射波の符号が媒質コントラストに応じて変わることを考えればごく自然なことである。一時的な滑り速度の増大は Case  $B^-$  (図 14) においても見られるが、やはり Case  $A^-$  に比べて時空間的に局所化していない。その理由は前段落で述べたものと全く同じである。

最後に破壊伝播速度の依存性を確かめるために Case  $C^+$  (図 15) についても計算を行なったところ、Case  $A^+$  と比べて反射フェイズの振幅が小さくなっていることがわかるが、それでもやはり負の滑り速度は現われている。

本節では、媒質境界が亀裂挙動にもたらす影響は滑り速度の反射フェイズとして観察されることを示した。破壊が相対的に硬い媒質へ向かう時、破壊開始点側の亀裂面上で滑り速度は一時的に減少し、逆の場合には増大する。このような効果は亀裂が境界と直交する場合に目立ち、亀裂が境界と斜めに交わる場合には時空間的に局所化するようには見えない。これらの結果についての震源力学的解釈は次節にて議論する。

## 2.4 数値計算結果の考察と本手法の応用可能性

### 2.4.1 数値計算結果および摩擦法則を考慮することで示唆される物理現象

我々の数値計算によって示された亀裂面上の滑り速度の時空間的な複雑さは、震源力学の観点から考察に値するものである。事実、滑り速度の非単調な増減は現実の震源過程解析においても頻繁に見られる現象であるが、媒質境界が地下に普遍的に存在することを考慮すれば、媒質境界の影響がその一端を担っている可能性は十分に考えられる。

更に本小節では、我々の結果と、より現実的と思われる摩擦法則の一種とを併せて考えることで、媒質境界と交わる断層がより複雑な挙動を示す可能性を定性的に議論する。そのために、まずは過去の研究において盛んに取り上げられてきた摩擦法則の一種について紹介する。岩石を用いた室内実験において、Dieterich [1972] や Rice & Ruina [1983] 以降、Coulomb 摩擦則における摩擦係数の滑り速度依存性が盛んに調べられており、近年では Di Toro et al. [2011] の纏めたところによれば、様々な岩石種で、滑り速度の加速に伴って摩擦係数が、 $10^{-4}$  m/s 以下では 0.7 前後だったものが、1 m/s では 0.0 ~ 0.4 にまで弱化することが明らかにされている。これらの実験は、特に数 cm/s 以上の高速滑りでは定常滑りによるものが多く、摩擦係数の時間発展を記述する経験式が未だ発見されていないため、こうした滑り速度依存性を忠実に理論モデルに取り込むことは現時点ではできない。それでも試み

の一環として, Cochard & Madariaga [1994], Ampuero & Ben-Zion [2008] および Gabriel et al. [2012] は独自の速度状態依存型摩擦則として

$$\begin{aligned}\mu_f &= \mu_s + \alpha \frac{V}{V + V_c} - \beta \frac{\theta}{\theta + V_c}, \\ \dot{\theta} &= \frac{V - \theta}{D_c/V_c},\end{aligned}\tag{2.69}$$

という構成則を仮定した数値計算を行なった. ここで,  $\mu_f$  は摩擦係数,  $\mu_s$  は静止摩擦係数,  $V$  は滑り速度,  $\theta$  は状態変数,  $D_c$  は臨界滑り量,  $\alpha, \beta$  は定数で, パラメーター  $V_c$  が速度依存性の強さを決める量である. 上述の著者らは, これを用いた数値計算において, 速度依存性の強さ, 震源核の大きさ, および初期応力の様子に応じて, 動的破壊が, 自発的に停止してしまうパルス型, 瞬間的な滑り領域の長さが成長していくパルス型, そして亀裂型の各々に分類できることを示している. ここで, 亀裂型破壊とは破壊の最中に亀裂面上いたるところで常に滑り速度がゼロでない破壊様式, パルス型破壊とは各時刻において滑り速度がゼロでない領域が破壊先端近傍に限定されている破壊様式を指す. このパルス型破壊の数値的再現過程においては, 破壊先端の後方で滑り速度が小さくなってくるとそれに応じて断層面の強度が回復し, 更に滑り速度が小さくなりついには滑りが停止するというフィードバックが生じていると考えられる.

ここでは我々のモデルで考慮した摩擦なしという仮定を, 前段落で述べた速度依存型摩擦則へと変更した場合に考えられる影響を述べる. このとき, 我々の結果と特に大きな違いが現われると考えられるのは, case  $A^+$ ,  $B^+$ , および  $C^+$  のように, 相対的に弾性波速度の小さな媒質から大きな媒質へと破壊が伝播する場合である. いずれの結果を見ても, 亀裂先端近傍では大きな滑り速度を持つと同時に, 滑り速度の一時的な減少フェイズが媒質境界から破壊開始点へ向かって伝播している. この結果と速度依存型摩擦則との相互作用を考えると, 亀裂先端近傍では大きな滑り速度によって摩擦係数が非常に小さくなり, 結局摩擦ゼロを仮定した本研究のモデルと局所的には大差ない状況が実現されるのに対し, 滑り速度の減少フェイズが到達した場所では, 強度の回復により更に滑り速度が減少し, その回復の強さを決めるパラメーター如何によっては一時的な滑り速度の減少に留まらず, 完全に滑りが停止してしまうことが予想される. 即ち, 媒質境界から破壊開始点へ向かって停止フロントが伝播することになり, これは放射される地震波や最終滑り量を大きく変えるはずである. 実際, 図 11-(a) において滑り分布は増大し続け, 楕円に近い形状を示すようになるが, 滑り速度の減少フェイズが過ぎ去った後は滑りが大きく抑制あるいは停止するのだとすれば, この楕円の形状が大きく歪むか, 絶対値が変わることは想像に難くない. ここまでの定性的議論に加え, 定量的議論を行なう場合には, 当然我々の BIEM の手順に具体的な摩擦法則を導入し, 各種のパラメーター依存性を調べなければならない. 速度弱化型摩擦法則において, 速度弱化および減速時の回復の強さを決めるパラメーターが, 天然の断層においてどの程度であるかを推定することは現時点では実現されていない上, 我々の計算において case  $A^+$ ,  $B^+$ , および  $C^+$  のそれぞれで滑り速度の減少具合は異なるので, 我々の結果と比較して実際にどの程度滑り速度が抑制されるかを確かめるためには少なくとも, 1) 摩擦法則の速度依存性の強さ, 2) 断層と媒質境界とのなす角度, および 3) 破壊伝播速度の 3 つを様々に変えた数値計算が必要であろう. このような数値計算は今後の課題であるが, 現時点で定性的議論ができ, 考慮すべきパラメーター空間が判明したことは大きな前進である. 更に, 我々が採用した破壊伝播速度一定のモデルではなく, 破壊の自発的伸展を考える場合には, 媒質境界から破壊開始点までの間の領域で滑りが抑制されたという情報が媒質境界を超えて亀裂先端に届き, 破壊伝播速度

や亀裂先端近傍の滑り速度などに影響を与えるであろう。その影響がどの程度であるかも、具体的な数値計算を要するために今後の課題である。

続いて、前段落で予想した「媒質境界から破壊開始点へ向かって停止フロントが伝播する」という現象が実現された場合、それが先行研究の解釈に重要な役割を果たしうることを記す。Wada & Goto [2012] は、地表断層と伏在断層との間で強震動生成パターンが違うという報告 [Somerville 2003] を受け、それが力学的にどのような背景に基づいているかを数値モデルによって調べている。彼らは地表から地下のある深さまで mode-II 断層を仮定し、その断層の途中で両方向への破壊が開始すると想定した。彼らは断層の深部端を固定端として設定したため、深部端に達した破壊がそこで強制的に停止させられたことによる停止フロントが S 波速度で地表へ向かって走り、それが地表付近での破壊の挙動を左右するとの結果が出た。この結果は震源力学および強震動にとって停止フロントの挙動が重要であることを示すものであるが、深部で突然滑りが停止してしまうという仮定の妥当性への疑問が残る。一方で我々の前段落の予想は、彼らと違い mode-III ではあるが、断層の途中で媒質の弾性波速度が突然不連続に大きくなれば、そのような停止フロントは生じうることを示している。一般に、地下の媒質の弾性波速度は深さと共に速くなり、それも反射法探査で調べる限りは明瞭な反射面（即ち不連続面）として見える場合が多くあるため、深部へと向かう破壊が、相対的に弾性波速度の大きな媒質との明瞭な境界にぶつかることは往々にして生じることであると考えられる。従って、地下で断層と交わる媒質境界が滑りの停止フロントを作り出し、それが地表付近の断層挙動にも影響するというシナリオが、我々の予想および Wada & Goto [2012] の結果から導き出されるのである。

#### 2.4.2 本研究における手法の応用可能性

本研究で導いた BIEM カーネルは、厳密には単なる 2 層媒質問題にしか適用できないものであったが、Goto et al. [2010] の提唱した手法と組み合わせることによって、多重層構造媒質中の破壊伸展の数値解析にも応用可能であることを以下に示す。Goto et al. [2010] は、BIEM の、特に破壊先端近傍での数値精度の高さと、様々な不均質媒質をも取り扱い可能な FEM の汎用性に目を向け、両者を統合する手法を提唱した。Goto et al. [2010] によれば、弾性波が媒質中を伝播してゆく状況を数値的に扱うとき、FEM においては多重層構造を仮定することは容易である一方で、特異点から出る波をその近傍で計算する場合、均質媒質であれば従来の BIEM を用いた方が FEM よりも高精度であるという。そこで彼らは手法の検証のため、媒質境界と交差していない 2 次元亀裂の問題を考え、1) 媒質境界を仮定した FEM による波動場、2) 無限均質媒質を仮定した FEM による波動場、および 3) 無限均質媒質を仮定した BIEM による波動場の 3 つを数値的に求め、(1) の解から (2) の解を引き算し、そこに (3) の解を加えるという方法をとった。この考え方は、線形弾性論を扱っている以上、(1) の解が直達波と反射波の重ね合わせであり、そこから (2) の解を引くことで反射波の解のみを FEM で計算したことになり、最後に (3) の解を足すことで直達波成分と反射波成分をそれぞれ BIEM と FEM という別個の手法で求めることができ、直達波は反射波よりも必ず伝播距離が短いので、直達波成分だけでも BIEM によって精度を向上させようとする狙いである。これによって従来の FEM だけを用いた手法よりも高精度に層構造中の亀裂挙動が作る波動場を計算することが可能になったが、彼らの枠組みで実際に高精度化可能なのは、あくまでも媒質境界と亀裂が、FEM のメッシュサイズよりも十分大きな距離だけ離れている場合に限定される。亀裂が媒質境界に近づいたり、境界と交差する場合には、境界近傍

の要素間では反射波・透過波の伝播距離が非常に短くなるため、この反射波・透過波を FEM で求める以上は結局従来の FEM の数値精度の悪さが問題となるためである。

この難点を解決しうるのが、本研究によって求めた BIEM カーネルである。多重層構造を仮定する場合、FEM による精度低下が問題となるのは、亀裂面上の各要素から見た最近接媒質境界からの反射波あるいは透過波であるが、最近接境界が平面ならば、そこからの反射波あるいは透過波だけを求めることは、我々の BIEM カーネルをそのまま用いて可能である。したがって直達波に加えこれらを我々が求めた BIEM カーネルを用いて計算し、より遠くの媒質境界からの波や複数の境界間の多重反射波は伝播距離が十分長いとみなして FEM で計算すればよいのである。

## 2.5 要約

媒質境界と交差する断層については、近年ようやく観測的研究によってその存在が認知され始めたと同時に、準静的弾性論の枠組みで理論的研究が進められてきたばかりで、その動的挙動の理論的解析は殆ど手付かずであった。その解析のためにはまず先行して新たな数値的手法開発が必須であり、Wada & Goto [2012], Kusakabe [2013] によって遂に実践段階へと入ったものの、新たな数値的手法の精度の検証に不可欠である解析解の導出がなされておらず、その解析解を面外問題について初めて導出することに成功したのが本研究最大の進捗である。なお、本研究で求めた反射波および透過波の BIEM カーネルは、既に Kusakabe [2013] の XBIEM の数値精度の検証に採用されており、拡張性の高い数値計算手法としてのベンチマークとしての役割を果たしている。続いて本研究で得られた解析解を用い、BIEM によって、実際に媒質境界と交差する断層の動的挙動のパラメータ依存性を調べた。本研究で得られた解析解は両媒質の S 波速度比と密度比、および離散化された断層要素と媒質境界とのなす角度をパラメータとして内包し、これらの値を自由に設定できる他、BIEM という手法がそもそも備えている任意形状の断層面上に応力降下を与えて数値計算ができるという長所を活かし、屈曲断層が媒質境界と交わる場合の数値解析を行なった。その結果得られた解は、Kusakabe [2013] と定性的に類似のものであったが、考察において Kusakabe [2013] が採用したものと異なる速度依存型摩擦法則との相互作用について定性的挙動を予測し、断層の動的挙動が媒質境界の存在と摩擦法則によって非常に複雑かつ多様なものになる可能性を指摘し、更にそれが震源挙動だけでなく強震動生成パターンにも影響しうることを、Wada & Goto [2012] と関連付けて示すことができた。即ち媒質境界の影響は現象論的に重要となる可能性があるため、今後は 2004 年中越地震や 2007 年南アフリカ金鉱山地震のように、断層と同程度のスケールの空間付均質を、多くの断層について調査することが望まれる。また、Goto et al. [2010] による FEM と BIEM の長所を併せ持った数値手法に本研究で導いた BIEM カーネルを導入することにより、多層構造媒質中の媒質境界と交差する断層の挙動であっても FEM を上回る精度で計算が可能となることを示した。これらの状況下における具体的な数値計算は今後の課題であるが、断層の動的挙動の複雑さと多様さを説明しうることや、複雑かつ現実的な構造中の断層挙動が取り扱い可能になるということは、本研究成果が今後の震源力学に与えるインパクトの大きさを示唆していると言えるであろう。

## 終章：全体についての要約と議論

本研究では、媒質境界に沿う、および媒質境界と交差する断層の理論的取り扱いを通じて、媒質境界の存在が断層の動的挙動に及ぼす影響についての包括的理解を深めることができた。ここではその全体的な要約と、本研究を例として理論モデルの拡張に関する一般論としての議論を行なう。

本研究の成果を最も簡潔に表現するならば、媒質境界が断層の動的挙動に与える影響が顕著に見られた、となるであろう。定性的には、均質媒質というモデルを2層媒質というモデルに変更したことによって何らかの差異が生じるのは当然であるが、それが地震学的に有意な差異であることは決して自明ではなく、それを定量的に検証することに理論的研究のひとつの価値がある。例えば、Hirano & Yamashita [2011] は媒質境界に沿う摩擦係数一定の準静的亀裂を仮定し、断層周辺の  $\Delta CFF$  の解析解を導いているが、媒質ごとの  $\Delta CFF$  の値の差異は、Rybicki & Yamashita [2008] が求めた、境界で固着する2層媒質中の初期応力場の媒質ごとの差異に比べて無視できるほど小さく、 $\Delta CFF$  という量に着目する限り定量的には媒質境界の影響は十分小さいという結論に至った。これに対し本研究では、断層の動的挙動において、断層が境界に沿う、および境界と交差するいずれの場合についても無限均質媒質中の挙動とは明らかな差異が見られる事が示された。

さて、以下の文章では、本論文で無限均質媒質から2層媒質へとモデルを拡張したことによって新たに現われたパラメータと現象を考えることを通じて、一般論として震源力学理論におけるモデル拡張時のパラメータ依存性検証のあり方と難しさについて述べる。本論文の第1章、第2章のいずれにおいても、無限均質媒質モデルで考慮される震源パラメータに加えて、新たに両媒質の物性比というパラメータが追加されている。これによって、第1章の媒質境界に沿う断層の場合は、破壊伝播方向という新たなパラメータが付随的に生じた。また、第2章の媒質境界と交差する断層の場合は、断層が媒質境界と交差する角度という新たなパラメータが付随的に生じた。2層媒質というモデルは非常に単純なものであるように思われるが、本文中で述べたように弾性体としての物性値だけで4次元(面外問題の場合)あるいは6次元(面内問題の場合)のパラメータ空間であり、さらにそれぞれの問題に応じて付随的にパラメータが増えるという困難を伴っている。本文中では、いくつかの仮定をおくことで物性比については1つのパラメータとみなしたが、それでも物性比と破壊伝播方向もしくは断層の角度という2つのパラメータを新たに考慮しなければならなくなっている。

ここでは、本論文中で示された計算結果のそれぞれを比較することで、震源力学においてパラメータを2つ増やすことがどれほどの困難をもたらすかを明確に認識しておきたい。本論文で扱った問題において、媒質境界の影響として顕著に見られた独特の現象は、境界に沿う断層の場合は摩擦応力の弱化距離の変化、境界と交差する断層の場合は一時的な滑り速度の増減フェイズの伝播であった。これらの現象の諸パラメータ依存性について調べるとき、まずは2層媒質モデルへの拡張によって新たに生じた先述の2つのパラメータへの依存性を調べるのが理論モデル拡張時の定石であろうが、今回は物性比への依存性は定性的に予想可能であるとして敢えて確かめず、代わりに破壊伝播速度や、特に第1章については応力比  $S$  への依存性も調べた。破壊の様式が破壊伝播速度や応力比  $S$  にどのように依存するかについては、旧来の均質媒質モデルにおいて盛んに調べられている。しかし本研究の一連の結果は、媒質境界の存在によって生じる独特の現象が、旧来のモデルに含まれるパラメータにも依存して様子を変えることを示している。これは、旧来のモデルで如何にその依存性が調べられているパラメータであろうと

も、新しいモデルの下では再びその依存性を確かめなければならないことを表わしており、旧来のモデルが  $N$  次元のパラメータ空間に依存する場合、2 層媒質モデルの完全な理解のためには  $N + 2$  次元のパラメータ空間への依存性を網羅的に調べなければならないという、大変な困難が露見している。ここで持ちだした既存のパラメータ数  $N$  という値は、近年の震源力学理論においては既に調べ尽くすことが困難なほど大きい。例えば均質媒質の場合ですら、断層の動的挙動を調べるにあたり、本文で述べたように式 (2.69) で表わされる摩擦法則の影響を考慮する際に、Ampuero & Ben-Zion [2008] は震源核長さ<sup>2</sup>と速度依存性の強さ  $V_c$  への依存性を主に調べており、Gabriel et al. [2012] は震源核長さ<sup>2</sup>と  $V_c$  および応力比  $S$  への依存性を主に調べている。その際、彼らの論文において、弾性定数や媒質密度、そして式 (2.69) に現われる  $\mu_s, \alpha, \beta$ , および  $D_c$  の値は固定されている。即ち、ここで述べた物理量全てを数え上げると  $N = 10$  であるのに対して、Gabriel et al. [2012] において依存性が考慮されているパラメータ数は高々3つであり、このように個々の数値計算的研究において多数のパラメータへの依存性を網羅的に調べることは多くの場合なされていないのが現状である。また残りのパラメータについては、Ampuero & Ben-Zion [2008] で採用されている値と Gabriel et al. [2012] で採用されている値を比較すると、7つのうち Poisson 比以外は全て異っており、両論文を直接比較して残りのパラメータ依存性を抽出することもできない。このようなモデルを更に 2 層媒質に適用すれば当然、検証ためのコストが増大する。例えば第 2 章の考察部分において、定量的議論のためには式 (2.69) のような摩擦法則を考慮した計算が今後の課題であり、その際に検証すべきパラメータ空間は判明したと記したが、実際には先程数え上げた  $N = 10$  という数字に 2 層媒質特有のパラメータを合わせれば  $N = 12$  (Poisson 媒質などの仮定を外せば更に増える) であり、もはや真にこの空間を網羅することは不可能であろう。仮に Gabriel et al. [2012] の方針 ( $N = 3$ ) をそのまま 2 層媒質に適用したとしても、 $N = 5$  であり、数値計算コストの大幅な増大は必至である。このように、近年提唱されている震源力学理論を単純な 2 層媒質に拡張するだけで、パラメータ依存性を網羅的に調べ包括的に理解することは困難となる。その実現のためには数値計算手法の高効率化やハードウェアの増強だけでなく、更なる思考実験によって、考慮すべきパラメータ空間の見極めが要求されることが予想され、その際に本研究全体を通じて目指したような解析解に基づく定性的予想には、今なお発展の必要性と貢献の余地があると我々は考える。



## 参考文献

- [1] Adams, G.G., 1995 , Self excited oscillations of two elastic half spaces sliding with a constant coefficient of friction, *J. Appl. Mech.*, 62, 867-872.
- [2] Adams, G.G., 1998 , Steady sliding of two elastic half-spaces with friction reduction due to interface stick-slip, *J. Appl. Mech.*, 65, 470-475
- [3] Adams, G.G., 2001 , An intersonic slip pulse at a frictional interface between dissimilar materials, *J. Appl. Mech.*, 68, 81-86, doi:10.1115/1.1349119.
- [4] Adda-Bedia, M. & Ben Amar, M., 2003 , Self-sustained slip pulses of finite size between dissimilar materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 51, 1849-1861.
- [5] Aki, K. & Richards, P.G., 2002 , *Quantitative Seismology*, 2nd edn, University Science Books, Herndon, VA.
- [6] Ampuero, J.-P. & Ben-Zion, Y., 2008 , Cracks, pulses and macroscopic asymmetry of dynamic rupture on a bimaterial interface with velocity-weakening friction *Geophys. J. Int.*, 173, 674-692 doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03736.x
- [7] Andrews, D.J., 1976 , Rupture velocity of plane strain shear cracks, *J. Geophys. Res.*, 81, 5679-5687.
- [8] Andrews, D.J., 2005 , Rupture dynamics with energy loss outside the slip zone, *J. Geophys. Res.*, 110 (2005) B01307, doi:10.1029/2004JB003191.
- [9] Andrews, D.J., & Ben-Zion, Y., 1997 , Wrinkle like slip pulse on a fault between different materials, *J. Geophys. Res.*, 102, 553-571.
- [10] Ben-Zion, Y. & Andrews, D.J., 1998 , Properties and implications of dynamic rupture along a material interface, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88(4), 1085-1094.
- [11] Birch, F., 1961 , The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars, Part 2, *J. Geophys. Res.*, 66(7), 2199-2224.
- [12] Bonafede, M., Parenti, B. & Rivalta, E., 2002 , On strike-slip faulting in layered media, *Geophys. J. Int.*, 149, 698-723.
- [13] Carlson, 1995 , Numerical computation of real or complex elliptic integrals, *Numerical Algorithms*, 10, 13-26
- [14] Cocco, M., Tinti, E., Marone, C. & Piatanesi, A., 2009 , Scaling of slip weakening distance with final slip during dynamic earthquake rupture, in: *Fault-Zone Properties and Earthquake Rupture Dynamics*, edited by Fukuyama, E., International Geophysics Series, 94, 163-186, Elsevier.
- [15] Cochard, A. & Madariaga, 1994 , Dynamic faulting under rate-dependent friction, *Pure Appl. Geophys.*, 142, 419-445,
- [16] Cochard, A. & Rice, J.R., 2000 , Fault rupture between dissimilar materials: Ill posedness, regularization and slip pulse response, *J. Geophys. Res.*, 105, 25,891-25,907.
- [17] Comninou, M., 1977 , The interface crack, *J. Appl. Mechanics*, 44, 631-636.
- [18] Di Toro, G., Han, R., Hirose, T., De Paola, N., Nielsen, S., Mizoguchi, K., Ferri, F., Cocco, M. & Shimamoto T., 2011 , Fault lubrication during earthquakes, *Nature* 471, 494-498, doi:10.1038/nature09838
- [19] Dieterich, J.H., 1972 , Time-dependent friction in rocks, *J. Geophys. Res.*, Volume 77, Issue 20, pages 3690-3697, DOI: 10.1029/JB077i020p03690
- [20] Ferrari, C. & Bonafede, M., 2012 , Non-planar fault models: complexities induced by crustal layering in transcurrent faulting processes *Geophys. J. Int.*, Volume 190, Issue 1, pages 151-178, DOI: 10.1111/j.1365-246X.2012.05517.x
- [21] Gabriel, A.-A., Ampuero, J.-P., Dalguer, L.A., & Mai, P.M., 2012 , The transition of dynamic rupture styles in elastic media under velocity-weakening friction *J. Geophys. Res.*, VOL. 117, B09311, doi:10.1029/2012JB009468

- [22] Goto, H., Ramírez-Guzmán, L. & Bielak, J., 2010 , Simulation of spontaneous rupture based on a combined boundary integral equation method and finite element method approach: SH and P-SV cases *Geophys. J. Int.*, 183, 975-1004 doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04772.x
- [23] Heaton, T.H., 1990 , Evidence for and implications of self-healing pulses of slip in earthquake rupture, *Phys. Earth Planet. Int.*, 64, 1-20.
- [24] Hirano, S., & Yamashita, T., 2011 , Analysis of the static stress field around faults lying along and intersecting a bimaterial interface, *Geophys. J. Int.*, 187(3), 1460-1478.
- [25] Ide, S. & Takeo, M., 1997 , Determination of constitutive relations of fault slip based on seismic wave analysis, *J. Geophys. Res.*, 102, 27,379-27,391
- [26] Kame, N. & Kusakabe, T., 2012 , Proposal of extended boundary integral equation method for rupture dynamics interacting with medium interfaces, *J. Appl. Mech.*, Vol. 79 / 031017-1
- [27] Kane, D.L., Shearer, P.M., Goertz-Allman, B.P., & Vernon, F.L., 2013 , Rupture directivity of small earthquakes at Parkfield, *J. Geophys. Res.*, VOL. 118, 1-10, doi:10.1029/2012JB009675
- [28] Kato, A., Sakai, S., Hirata, N., Kurashimo, E., Iidaka, T., Iwasaki, T. & Kanazawa, T., 2006 , Imaging the seismic structure and stress field in the source region of the 2004 mid-Niigata prefecture earthquake: structural zones of weakness and seismogenic stress concentration by ductile flow, *J. Geophys. Res.*, 111, B08308, doi:10.1029/2005JB004016.
- [29] Kostrov, B.V., 1964 , Selfsimilar problems of propagation of shear cracks, *PMM J. Appl. Math. Mech.*, 30, 1241-1248
- [30] Kostrov, B.V., & Das, S., 1988 , Principles of earthquake source mechanics, Cambridge University Press.
- [31] Kusakabe, T., 2013 , Development of extended BIEM and its application to earthquake dynamic rupture analysis in inhomogeneous media (in Japanese), Master Thesis, the Univ. of Tokyo
- [32] Linker, M & Dieterich, J.H., 1992 , Effects of variable normal stress on rock friction: Observations and constitutive equations, *J. Geophys. Res.*, 97, 4923-4940
- [33] Mikumo, T., Olsen, K.B., Fukuyama, E. & Yagi, Y., 2003 , Stress-Breakdown Time and Slip-Weakening Distance Inferred from Slip-Velocity Functions on Earthquake Faults, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 93, No. 1, pp. 264-282
- [34] Mori, M., 2005 , Discovery of the Double Exponential Transformation and Its Developments, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 41, 897-935
- [35] Naoi, M., Nakatani, M., Yabe, Y., Kwiatek, G., Igarashi, T. & Plenkens, K., 2011 , Twenty thousand aftershocks of a very small (M2) earthquake and their relation to the mainshock rupture and geological structures, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 101(5), 2399-2407.
- [36] Prakash, V & Clifton, R.J., 1993 , Time resolved dynamic friction measurements in pressure shear, *Experimental Techniques in the Dynamics of Deformable Solids*, edited by A. K. T. Ramesh, pp. 33-48, *Appl. Mech. Div., Am. Soc. of Mech. Eng.*, New York.
- [37] Prakash, V., 1998 , Frictional response of sliding interfaces subjected to time varying normal pressures, *J. Tribol.*, 120, 97-102, doi:10.1115/1/2834197.
- [38] Rani, S. & Singh, S.J., 1992 , Static deformation of two welded half-spaces due to dip-slip faulting, *Proc. Indian Acad. Sci. (Earth planet. Sci.)*, 101(3), 269-282.
- [39] Ranjith, K. & Rice, J.R., 2001 , Slip dynamics at an interface between dissimilar materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 49, 341-361.

- [40] Rice, J.R., & Ruina, A.L., 1983 , Stability of Steady Frictional Slipping, *J. Appl. Mech.*, 50, pp. 343-349.
- [41] Rice, J.R., Sammis, C.G. & Parsons, R., 2005 , Off-fault secondary failure induced by a dynamic slip pulse, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 95(1), 109-134.
- [42] Rivalta, E., Mangiavillano, W. & Bonafede, M., 2002 , The edge dislocation problem in a layered elastic medium, *Geophys. J. Int.*, 149, 508-523.
- [43] Roche, V., Homberg, C. & Rocher, M., 2012 , Fault displacement profiles in multilayer systems: from fault restriction to fault propagation, *Terra Nova* Volume 24, Issue 6, pages 499-504, DOI: 10.1111/j.1365-3121.2012.01088.x
- [44] Rubin, A. & Ampuero, J.-P., 2007 , Aftershock asymmetry on a bimaterial interface, *J. Geophys. Res.*, 112, B05307, doi:10.1029/2006JB004337.
- [45] Rubin, A. & Gillard, D., 2000 , Aftershock asymmetry/rupture directivity among central San Andreas fault microearthquakes, *J. Geophys. Res.*, 105, 19,095-19,109
- [46] Rybicki, R. & Yamashita, T., 2008 , Constrains on stresses in isotropic homogeneous infinite half-spaces being in welded contact: 2D anti-plane and in-plane cases, *Acta Geophysica*, vol. 56, no. 2, pp. 286-292.
- [47] Shi, Z. & Ben-Zion, Y., 2006 , Dynamic rupture on a bimaterial interface governed by slip-weakening friction, *Geophys. J. Int.*, 165, 469-484.
- [48] Somerville, 2003 , Magnitude scaling of the near fault rupture directivity pulse, *Phys. Earth Planet. Int.*, 137, 201-212.
- [49] Tada. T., 2009 , Boundary integral equation method for earthquake rupture dynamics, in: *Fault-Zone Properties and Earthquake Rupture Dynamics*, edited by Fukuyama, E., International Geophysics Series, 94, 217-267, Elsevier.
- [50] Tada,T. & Yamashita, T., 1997 , Non-hypersingular boundary integral equations for 2D non-planar crack analysis, *Geophys. J. Int.*, 130, 269-282.
- [51] Tamura, S. & Ide, S., 2011 , Numerical study of splay faults in subduction zones: The effects of bimaterial interface and free surface *J. Geophys. Res.*, VOL. 116, B10309, doi:10.1029/2011JB008283
- [52] Tricomi, F.G., 1957 , *Integral equations*, New York: Dover
- [53] Uchide, T., Ide, S. & Beroza, G.C., 2009 , Dynamic high-speed rupture from the onset of the 2004 Parkfield, California, earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, Volume 36, Issue 4, DOI: 10.1029/2008GL036824
- [54] Venkataraman. A & Kanamori, H., 2004 , Observational constraints on the fracture energy of subduction zone earthquakes, *J. Geophys. Res.*, VOL. 109, B05302, doi:10.1029/2003JB002549,
- [55] Wada, K. & Goto, H., 2012 , Generation Mechanism of Surface and Buried Faults: Effect of Plasticity in a Shallow-Crust Structure *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 102, No. 4, pp. 1712-1728, doi: 10.1785/0120110212
- [56] Wang, K., Wada, I. & Ishikawa, Y., 2004 , Stresses in the subducting slab beneath southwest Japan and relation with plate geometry, tectonic forces, slab dehydration, and damaging earthquakes, *J. Geophys. Res.*, 109, B08304, doi:10.1029/2003JB002888.
- [57] Weertman, J.J., 1963 , Dislocations moving uniformly on the interface between isotropic media of different elastic properties, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp. 197-204
- [58] Weertman, J.J., 1980 , Unstable slippage across a fault that separates elastic media of different elastic constants, *J. Geophys. Res.*, 85, 1455-1461.
- [59] Yabe, Y., Philipp, J., Nakatani, M., Morema, G., Naoi, M., Kawakata, H., Igarashi, T., Dresen, G., Ogasawara, H. & JAGUARS 2009 , Observation of numerous aftershocks of an Mw 1.9 earthquake with an AE network installed in a deep gold mine in South Africa, *Earth planets Space*, 61, e49-e52.

## 謝辞

本学位論文を書くにあたり、多くの方々のご指導、ご協力を賜りました。

東京大学地震研究所の山下輝夫名誉教授には、修士課程入学より長きに渡り指導教員としてご指導頂きました。数学科出身の私に対し、山下教授が地球物理学の素養や数学の応用手法をご教示下さったお陰で、私自身初めて地震学的研究に取り組むことができました。実際、本論文の問題設定は、私が入学当初に山下教授より拝聴した構想を礎にしたものであり、その解決の途上に於いて常に相談に応じて下さいました。また私自身の研究テーマに限らず、幅広い知見や研究者としての道を幾度となく示して頂きました。更に地震研究所を退職された後においても本論文の校閲にご協力頂きました。厚く御礼申し上げます。

同研究所の亀伸樹准教授には、博士課程において数々のご助言を賜りました。特に本論文の全体的な構成や、BIEMの技巧的側面、数々の学会・セミナー発表について直接ご指導を頂く機会が多かっただけでなく、最終年度においては直接の指導教員としてもお世話になり、山下教授と共に多くを与えて下さったことに御礼申し上げます。また亀准教授が大学院生の日下部哲也氏と共に開発を進めて来られた XBIEM の概念と数値計算結果は、本学位論文の第 2 章の内容にとって大変刺激的で参考になり、お陰様で本論文の付録 A.4 におけるカーネルの妥当性の検証が可能になった他、私の研究の意義や新たな問題点を深く考える機会を得ることができました。亀准教授と共に、日下部氏にも感謝の意を表します。

東京大学理学系研究科の井出哲教授、地震研究所の中谷正生准教授、宮武隆准教授、三宅弘恵助教、防災科学技術研究所の福山英一統括主任研究員には、学会・セミナーの場で幾度となくご助言を頂いた他、個人的に様々な場面でご指導を賜りました。井出教授には学会関係での審査・推薦を引き受けて頂いた他、本学位論文の主審査員として、研究方針の大綱から細部に至るまで踏み込んだご助言を頂きました。中谷准教授には南アフリカ金鉱山の観測プロジェクトにまつわる興味深い知見をご提供頂き、また理論的研究一辺倒の私を室内実験に参加させて下さいました。宮武准教授には 2 層媒質中面外問題の差分法計算コードをご提供頂き、お陰様で私の導出した解析解およびそのコーディングが信頼できるものであることを確かめることができました。福山統括主任研究員および三宅助教には、運動学的断層モデルの研究にまつわる問題点をご教示頂き、その過程での議論を、私の動力学的断層モデルの研究が地震学に貢献できる可能性について考察するための材料とさせて頂きました。

また地震研究所の岩崎貴哉教授および大湊隆雄准教授におかれましては、井出教授、亀准教授、中谷准教授と共に本学位論文の審査員を務めて頂き、特に震源力学に捕らわれず広い視点から、本研究へのご理解と有意義なご意見を賜りました。お陰様で本論文の固体地球物理学的な立ち位置や意義を再考することができました。

本学位論文の第 1 章で扱った問題設定については、米 Harvard 大学の James R. Rice 教授と、Southern California 大学の Yehuda Ben-Zion 教授が直接、議論に応じて下さいました。特に Rice 教授には 6 週間に渡り現地で生活面に及ぶまでお世話になり、私が具体的解決方針を考案するまでの直接的な手助けや、当時 Rice 教授の下で進行中であった最新の数値計算的研究成果、およびこの問題において更に追求すべき物理的知見をご提供頂きました。また Ben-Zion 教授は、私の研究内容へのご助言と、この問題設定にまつわる観測的な最新の知見をご提供下さいました。お二方のご協力によって、第 1 章の完成度が飛躍的に高まったことは疑う余地がありません。

以上の方々を始め、セミナー・実験・生活などの面でお世話になった方々全てに、心より御礼申し上げます。

## A 付録

### A.1 透過波による BIEM カーネルの複素関数表現

本文中では、反射波による BIEM カーネルの複素関数表現を導いた。ここでは透過波によるものを考えるが、基本的に導出の道筋は反射波の場合と同様なので、本文中の式番号を参照しながら、透過波の場合の変更点を述べるに留める。尚、座標系や記号の置き方は全て反射波を考えた際に導入したものと同一とする。一応の注意点としては、反射波の場合は波源を表わす点  $(x', z')$  と評価点を表わす点  $(x, z)$  が共に添字  $j$  を伴う媒質中に存在したのに対し、今回は  $(x', z')$  は添字  $j$  を伴う媒質中にあり、 $(x, z)$  は他方の添字  $k$  を伴う媒質中にあることを述べておく。

AR02 により、透過波の Green 関数のラプラス領域での表現は、式 (2.11) および (2.12) の代わりに

$$G_T = \frac{1}{2\pi\mu_j s \eta_j} \left\{ \frac{2\mu_j \eta_j}{\mu_j \eta_j + \mu_k \eta_k} \right\} e^{-s(t-\tau)}, \quad (\text{A.1})$$

$$t - \tau = p(x - x') + \eta_j |z'| + \eta_k |z| \quad (\text{A.2})$$

となる。ただし今回は  $p$  を具体的に求める方法が大幅に変わり、AR02 にはその記載がないため、後の付録 (A.2) で紹介する。式 (A.1) および (A.2) より、式 (2.16) および (2.17) の代わりに、

$$\frac{\partial G_T}{\partial x} = -\frac{\partial G_T}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t}(pG_T), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial G_T}{\partial z'} = \text{sgn}(z') \frac{\partial}{\partial t}(\eta_j G_T), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial G_T}{\partial z} = \text{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial t}(\eta_k G_T), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial G_T}{\partial z'} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta_j}{\eta_k} G_T \right) \quad (\text{A.6})$$

という関係が得られる。ここで今回は波源と評価点異なる媒質中にあるため、 $\text{sgn}(z)/\text{sgn}(z') = -1$  という関係を用いた。式 (A.3) から (A.6) までにより、式 (2.18) および (2.19) の代わりに、

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \frac{\eta_j}{\eta_k} \partial_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\eta_k}{\eta_j} \sin \theta & \frac{\eta_k}{\eta_j} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

が成立する。これら式 (A.3) から (A.8) までを用いることで、式 (2.21) および (2.22) に代わり、

$$K_{xy,T}^{i,n} = -\mu_j \mu_k \Im \left\{ \text{sgn}(z') \left[ \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \eta_j G_T d\tau \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \left[ \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} G_T d\xi \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

$$K_{zy,T}^{i,n} = \mu_j \mu_k \Im \left\{ -\left[ \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} p \frac{\eta_k}{\eta_j} G_T d\tau \right]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} + \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \left[ \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \frac{\eta_k}{\eta_j} G_T d\xi \right]_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \right\} \quad (\text{A.10})$$

を求めることができる。

式 (A.9) および (A.10) の右辺第 1 項に現われる積分は,

$$\begin{aligned} \int^{\tau} \begin{pmatrix} -\operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ -p\eta_k/\eta_j \end{pmatrix} G_T d\tau &= \int^{\tau} \begin{pmatrix} -\operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ -p\eta_k/\eta_j \end{pmatrix} \tilde{G}_T \frac{dp}{dt} d\tau \\ &= \int^p \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z')\eta_j \\ p\eta_k/\eta_j \end{pmatrix} \tilde{G}_T dp \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

と変形できる.

式 (A.9) および (A.10) の右辺第 2 項に現われる積分は, 反射波の場合と少々形式が異なるが, 類似の式変形により, 式 (2.28) の代わりに

$$\int^{\xi} G_T d\xi = - \int^p \frac{\tilde{G}_T dp}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta}, \quad (\text{A.12})$$

$$\int^{\xi} \frac{\eta_k}{\eta_j} G_T d\xi = - \int^p \frac{\tilde{G}_T}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \frac{\eta_k}{\eta_j} dp \quad (\text{A.13})$$

を得ることができる.

従って透過波の BIEM カーネルは, 式 (2.29) から (2.32) までに代わり

$$K_{xy,T}^{i,n} = \mu_j \mu_k \mathfrak{S} \left[ [I_{xy,T}]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{t-\tau_{n-1}}^{t-\tau_n}, \quad (\text{A.14})$$

$$I_{xy,T} = \int^p dp \tilde{G}_T \left\{ \operatorname{sgn}(z')\eta_j + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\}, \quad (\text{A.15})$$

$$K_{zy,T}^{i,n} = \mu_j \mu_k \mathfrak{S} \left[ [I_{zy,T}]_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \right]_{t-\tau_{n-1}}^{t-\tau_n}, \quad (\text{A.16})$$

$$I_{zy,T} = \int^p dp \tilde{G}_T \frac{\eta_k}{\eta_j} \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\} \quad (\text{A.17})$$

と求めることができる.

更に計算を進めると, 式 (A.1) より

$$\tilde{G}_T = \frac{1}{2\pi\mu_j} \frac{2\mu_j\eta_j}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} \frac{1}{\eta_j} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} \quad (\text{A.18})$$

であるから, 式 (2.34) で定義される物性定数を再度用いて,

$$\tilde{G}_T = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_j\eta_j + \mu_k\eta_k} = \frac{1}{\pi} \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2} \quad (\text{A.19})$$

と書くことができるので, 式 (2.30) および (2.32) に代わり

$$I_{xy,T} = \frac{1}{\pi} \int^p dp \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2} \left\{ \operatorname{sgn}(z')\eta_j + \frac{\sin \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\}, \quad (\text{A.20})$$

$$I_{zy,T} = \frac{1}{\pi} \int^p dp \frac{C_j\eta_j + C_k\eta_k}{M^2 - p^2} \frac{\eta_k}{\eta_j} \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z')\eta_j \sin \theta} \right\} \quad (\text{A.21})$$

が導かれる.  $I_{xy,T}$  については, 式 (2.30) の積分の一部と形式的に全く同じであるから, 直ちに

$$I_{xy,T} = \frac{1}{\pi} [\operatorname{sgn}(z') \{C_j I_{jj}(M) + C_k I_{jk}(M)\} + B \sin \theta] \quad (\text{A.22})$$

と分かる。  $I_{zy,T}$  については,

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_k}{M^2 - p^2} \frac{\eta_k}{\eta_j} &= \frac{\beta_k^{-2} - p^2}{M^2 - p^2} \frac{\eta_j}{\beta_j^{-2} - p^2} \\
&= -\frac{\beta_k^{-2} - p^2}{M^2 - \beta_j^{-2}} \eta_j \left\{ \frac{1}{M^2 - p^2} - \frac{1}{\beta_j^{-2} - p^2} \right\} \\
&= -\frac{\eta_j}{M^2 - \beta_j^{-2}} \left\{ \frac{\beta_k^{-2} - M^2}{M^2 - p^2} + 1 - \frac{\beta_k^{-2} - \beta_j^{-2}}{\beta_j^{-2} - p^2} - 1 \right\} \\
&= \frac{\eta_j}{M^2 - \beta_j^{-2}} \left\{ \frac{M^2 - \beta_k^{-2}}{M^2 - p^2} - \frac{\beta_j^{-2} - \beta_k^{-2}}{\beta_j^{-2} - p^2} \right\} \\
&= \frac{M^2 - \beta_k^{-2}}{M^2 - \beta_j^{-2}} \frac{\eta_j}{M^2 - p^2} - \frac{\beta_j^{-2} - \beta_k^{-2}}{M^2 - \beta_j^{-2}} \frac{1}{\eta_j}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

および

$$\frac{M^2 - \beta_k^{-2}}{M^2 - \beta_j^{-2}} = \left( \frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^2, \quad \frac{\beta_j^{-2} - \beta_k^{-2}}{M^2 - \beta_j^{-2}} = \left( \frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^2 - 1 \tag{A.24}$$

という計算を考慮すると, 式 (2.40) から (2.46) までを用いて書き換えれば,

$$\begin{aligned}
&\int^p dp \frac{C_j \eta_j + C_k \eta_k}{M^2 - p^2} \frac{\eta_k}{\eta_j} \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_j \sin \theta} \right\} \\
&= \int^p dp \left[ \frac{C_j \eta_k}{M^2 - p^2} + \left( \frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^2 \frac{C_k \eta_j}{M^2 - p^2} - \left\{ \left( \frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^2 - 1 \right\} \frac{C_k}{\eta_j} \right] \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_j \sin \theta} \right\} \\
&= \frac{\mu_j}{\mu_k} \int^p dp \left[ \frac{1}{\mu_j \eta_j} - \frac{C_j \eta_j + C_k \eta_k}{M^2 - p^2} \right] \left\{ p - \frac{\cos \theta}{\beta_j^2} \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_j \sin \theta} \right\} \\
&= -\frac{1}{\mu_k} \{ [\eta_j + A \cos \theta] + \mu_j [C_j I_j(M) + C_k I_k(M) - B \cos \theta] \}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

を得る.

以上を纏めて,

$$I_{xy,T} = \frac{1}{\pi} [-\operatorname{sgn}(z) \{C_j I_{jj}(M) + C_k I_{jk}(M)\} + B \sin \theta], \tag{A.26}$$

$$I_{zy,T} = -\frac{1}{\pi \mu_k} \{ [\eta_j + A \cos \theta] + \mu_j [C_j I_j(M) + C_k I_k(M) - B \cos \theta] \} \tag{A.27}$$

が得られ, これを式 (A.14) および (A.16) に代入したものが, 透過波による応力場の BIEM カーネルである.

## A.2 透過波における複素波線パラメター $p$ の求め方

式 (2.11) から複素波線パラメター  $p$  を求めることは 2 次方程式を解くだけで可能であるが, 式 (A.2) によって定められる  $p$  はそう単純ではない. AR02 にはこの  $p$  を求める具体的手順が紹介されていないため, ここではそれを紹介する. 実際には式 (A.2) において  $\tau = 0$ ,  $x' = 0$  として一般性を失わないので,

$$t - px = \eta_j |z'| + \eta_k |z| \tag{A.28}$$

を  $p$  について解く問題を考えることになる。この式の両辺を 2 乗し、その際に右辺に現れた  $\eta_j^2$  および  $\eta_k^2$  を伴う項を左辺に移行してもう一度両辺を 2 乗すると、

$$\begin{pmatrix} R^4 - Z^4 \\ -4txR^2 \\ 2R^2T^2 + (2tx)^2 + (\beta_j^{-2} + \beta_k^{-2})Z^4 \\ -4txT^2 \\ T^4 - \left(\frac{Z^2}{\beta_j\beta_k}\right)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.29})$$

という  $p$  についての 4 次方程式を得る。ここで

$$R^2 = x^2 + z^2 + z'^2, \quad (\text{A.30})$$

$$Z^2 = 2zz', \quad (\text{A.31})$$

$$T^2 = t^2 - \left(\frac{z}{\beta_k}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\beta_j}\right)^2 \quad (\text{A.32})$$

と置いた。4 次方程式は Ferrari の方法などを用いて代数的に解を求めることができるが、一般に複素平面上に 4 つの根を持つ。Cagniard de-Hoop の方法では  $p$  の虚部は正に取るので [AR02]、複素共役な根の組の中で虚部が負であるものは除外してよいが、それでも  $p$  が 2 つ残ってしまう。これは、先ほどの 2 乗を繰り返す手順によって、 $t - px = \eta_j |z'| \pm \eta_k |z|$  という 2 つの異なる式を同一視する結果になってしまったことに由来する。しかし  $t - px = \eta_j |z'| - \eta_k |z|$  を満たすような解は放射条件を満たさないので、 $p$  の 4 つの値のうち、 $t - px = \eta_j |z'| + \eta_k |z|$  を満たし虚部が正であるようなものだけを採用すればよい。

### A.3 BIEM カーネル導出過程における代数的計算

ここでは式 (2.47) から (2.52) までを求める過程を詳解する。尚、ここで行なう積分は全て不定積分として現われるが、結果として式 (2.29) のように積分区間の両端の値を代入するので、以下の不定積分において積分定数は全て省略する。

$A$  については、 $p^2 - (\sin \theta / \beta_j)^2 = (\cos \theta / \beta_j)^2 - \eta_j^2$  の関係を用いると、以下の計算

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{\beta_j^2} \int^p \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_j \sin \theta} \frac{dp}{\eta_j} \\ &= -\frac{1}{\beta_j^2} \left\{ \operatorname{sgn}(z') \sin \theta \int^p \frac{\eta_j}{p^2 - (\sin \theta / \beta_j)^2} \frac{dp}{\eta_j} - \cos \theta \int^p \frac{p}{(\cos \theta / \beta_j)^2 - \eta_j^2} \frac{dp}{\eta_j} \right\} \\ &= \frac{1}{\beta_j} \left\{ \operatorname{sgn}(z') \tanh^{-1} \frac{\beta_j p}{\sin \theta} + \tanh^{-1} \frac{\beta_j \eta_j}{\cos \theta} \right\} \\ &= \frac{1}{\beta_j} \log \frac{-\operatorname{sgn}(z') \sin \theta + \beta_j p}{\cos \theta + \beta_j \eta_j} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

によって求めることができる。



$I_l(M), I_u(M), J_u$  については,

$$\begin{aligned}
I_l(M) &:= \int^p \frac{p\eta_l}{M^2 - p^2} dp \\
&= \int^p \frac{\eta_l^2}{M^2 - \beta_l^{-2} + \eta_l^2} \frac{p}{\eta_l} dp \\
&= - \int^{\eta_l} \frac{\eta_l^2}{M^2 - \beta_l^{-2} + \eta_l^2} d\eta_l \\
&= \int^{\eta_l} \left\{ \frac{M^2 - \beta_l^{-2}}{M^2 - \beta_l^{-2} + \eta_l^2} - 1 \right\} d\eta_l \\
&= \sqrt{M^2 - \beta_l^{-2}} \arctan \frac{\eta_l}{\sqrt{M^2 - \beta_l^{-2}}} - \eta_l,
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
I_u(M) &:= \int^p \frac{\eta_l^2}{M^2 - p^2} dp \\
&= \int^p \left\{ \frac{\beta_l^{-2} - M^2}{M^2 - p^2} + 1 \right\} dp \\
&= \frac{\beta_l^{-2} - M^2}{iM} \arctan \frac{ip}{M} + p,
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
J_u &:= \int^p \frac{1}{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_l \sin \theta} \frac{\eta_l}{M^2 - p^2} dp \\
&= \int^p \frac{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_l \sin \theta}{p^2 - (\sin \theta / \beta_l)^2} \frac{\eta_l}{M^2 - p^2} dp \\
&= \int^p \frac{p \cos \theta - \operatorname{sgn}(z') \eta_l \sin \theta}{M^2 - (\sin \theta / \beta_l)^2} \left\{ \frac{1}{M^2 - p^2} - \frac{1}{(\sin \theta / \beta_l)^2 - p^2} \right\} \eta_l dp \\
&= \frac{\cos \theta \left\{ I_l(M) - I_l \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\} - \operatorname{sgn}(z') \sin \theta \left\{ I_u(M) - I_u \left( \frac{\sin \theta}{\beta_l} \right) \right\}}{M^2 - (\sin \theta / \beta_l)^2}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

によって求めることができる.  $J_{lm}$  については,  $J_u$  とほぼ同様である.

最後に  $I_{lm}(M)$  を不完全楕円積分で表現する過程を記す.

$$\beta_{Max} := \max \{ \beta_1, \beta_2 \}, \tag{A.37}$$

$$\beta_{min} := \min \{ \beta_1, \beta_2 \}, \tag{A.38}$$

$$a := \beta_{Max} M, \tag{A.39}$$

$$k := \beta_{min} / \beta_{Max}, \tag{A.40}$$

$$q := \beta_{Max} p \tag{A.41}$$

と置くことで,

$$\begin{aligned}
\int^p \frac{\eta_l \eta_m}{M^2 - p^2} dp &= \int^p \frac{\sqrt{\beta_{Max}^{-2} - p^2} \sqrt{\beta_{min}^{-2} - p^2}}{M^2 - p^2} dp \\
&= \frac{1}{\beta_{min}} \int^q \frac{\sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}}{a^2 - q^2} dq \\
&= \frac{1}{\beta_{min}} \int^q \frac{(1 - a^2 + a^2 - q^2) \sqrt{1 - k^2 q^2}}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2}} dq \\
&= \frac{1}{\beta_{min}} \left\{ \int^q \frac{(1 - a^2) \sqrt{1 - k^2 q^2}}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2}} dq + \int^q \frac{\sqrt{1 - k^2 q^2}}{\sqrt{1 - q^2}} dq \right\} \\
&= \frac{1}{\beta_{min}} \left\{ \int^q \frac{(1 - a^2) \sqrt{1 - k^2 q^2}}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2}} dq + E(q, k) \right\}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

を得て, 更に

$$\begin{aligned}
\int^q \frac{\sqrt{1 - k^2 q^2}}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2}} dq &= \int^q \frac{1 - k^2 a^2 + k^2 a^2 - k^2 q^2}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}} dq \\
&= \int^q \frac{1 - k^2 a^2}{(a^2 - q^2) \sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}} dq + \int^q \frac{k^2}{\sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}} dq \\
&= \int^q \frac{a^{-2} - k^2}{(1 - a^{-2} q^2) \sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}} dq + \int^q \frac{k^2}{\sqrt{1 - q^2} \sqrt{1 - k^2 q^2}} dq \\
&= (a^{-2} - k^2) \Pi(q, k, a^{-2}) + k^2 F(q, k)
\end{aligned} \tag{A.43}$$

を得る. ここで,  $F, E$ , および  $\Pi$  はそれぞれ第 1 種・第 2 種・および第 3 種不完全楕円積分の Legendre 標準形である. よって  $I_{lm}$  は

$$\int^p \frac{\eta_l \eta_m}{M^2 - p^2} dp = \frac{1 - a^2}{\beta_{min}} \left\{ (a^{-2} - k^2) \Pi(q, k, a^{-2}) + k^2 F(q, k) \right\} + \frac{1}{\beta_{min}} E(q, k) \tag{A.44}$$

と表わされる.  $c := 1/q^2$  と書けば, これらは式 (2.60) で定義される Carlson の対称形  $R_F, R_D$ , および  $R_J$  によって

$$F(q, k) = R_F(c - 1, c - k^2, c), \tag{A.45}$$

$$E(q, k) = R_F(c - 1, c - k^2, c) - \frac{k^2}{3} R_D(c - 1, c - k^2, c), \tag{A.46}$$

$$\Pi(q, k, a^{-2}) = R_F(c - 1, c - k^2, c) + \frac{1}{3a^2} R_J(c - 1, c - k^2, c, c - a^{-2}) \tag{A.47}$$

と書き直すことができ [Carlson 1995], 従って,

$$I_{lm} = \int^p \frac{\eta_l \eta_m}{M^2 - p^2} dp = \frac{1}{\beta_{min}} \left\{ a^{-2} R_F - \frac{k^2}{3} R_D + \frac{(a^{-2} - 1)(a^{-2} - k^2)}{3} R_J \right\} \tag{A.48}$$

が得られる.

#### A.4 BIEM カーネルの導出結果とコーディングの確認, および数値計算コストについて

本論文の第 2 部で求めた 2 層媒質内部の応力に関する BIEM カーネルが, 導出結果およびコーディングのいずれにおいても確からしいことを確認するため, Kusakabe [2013] によって開発された XBIEM のコードを用いて,

本論文が導いた BIEM カーネルと同一の現象を再現し比較した。式 (2.7) および (2.8) において総和を取らず、ただ一組の  $(i, n) = (1, 1)$  について取り出せば、これは長さ  $\gamma_1 - \gamma_0$  の線分上に、時刻  $\tau_0$  から  $\tau_1$  までの間、一定の滑り速度  $V^{1,1}$  を与えた場合の、点  $(x, z, t)$  における応力を与える表現となる。即ちこれは BIEM カーネルの物理的な意味でもある。そこでこれと同値な問題を XBIEM によって解き、その解と本研究で導出しコーディングした式の出力とを比較した。まず媒質については、上下で密度が同一であり、S 波速度を下側で 1、上側で 0.5 に設定した。用いた震源は、線分の長さが 1、中点の座標が  $(-5, -10)$ 、角度が  $x$  軸から半時計回りに  $45^\circ$  で、滑り速度は  $V^{1,1} = 1$ 、滑り時刻は  $(\tau_0, \tau_1) = (0, 0.5)$  とした。また観測点については、 $(x, z) = (0, \pm 2)$  および  $(0, \pm 4)$  の 4 点において、時刻  $0 \leq t \leq 25$  の区間に 2000 点の出力を行なった。一方、XBIEM においては、解析解の出力と時間軸上同じサンプリングレートとなるよう、断層要素を 40 分割し計算した。図 16 にその比較結果を示す。塗り潰し領域で示した本論文の解析解と、XBIEM による波形は、非常に良い一致を示しており、これによって本論文におけるカーネルの導出結果およびコーディングの確からしさが認められた。

最後に、本研究で行なった動的破壊の数値計算に要した計算資源と所要時間を記しておく。一例として、表 A.4 の Case  $A^+$  を計算するために要した時間は、断層面を 512 分割し 512 時間ステップの計算で 1 時間 7 分であった。ハードウェアは、CPU: Intel Core i7-980(6cores, 3.33GHz), RAM: DDR3(12GB) から成るデスクトップ PC を利用し、仕様言語は Fortran 90 で、intel fortran composer と OpenMP により並列化コンパイルを行なった。第 2.2.1 節で述べたように、本論文による BIEM は TY97 による BIEM と比較して、カーネルの数学的表現を除けば全く同一の手法であるため、本手法の計算所要時間においてはカーネルの計算部分を評価することが必要である。そこでカーネルの計算部分のみ所要時間を計測したところ、断層長、時間ステップ共に 128 分割で約 45 秒、256 分割で約 6 分、512 分割で約 47 分であった。カーネルの計算は、 $i$  番目の線分要素が  $j$  番目の線分要素に及ぼす影響を  $n$  番目の時間ステップについて計算する必要があるため、 $i, j, n$  が同じ分割数であれば、理論上分割数の 3 乗に比例して所要時間が増大し、実測値はほぼその通りである。一方、カーネルを計算し終えた後に滑り速度を各時空間上の要素で求める計算量は分割数の 4 乗に比例するので、これ以上計算規模が大きくなるとこちらが支配的となるが、現時点ではカーネルの計算部分に大半の時間が消費されていることがわかる(尚、現時点では I/O の所要時間は無視できるほどであった)。本論文で導いた BIEM カーネルは複素変数の不完全楕円積分を含み、それは Carlson [1995] の提唱するアルゴリズムにより任意精度で計算可能であると既に述べた。今回、利用可能な高速数値計算ライブラリの中にこの楕円積分を求めるものを見つけることができず、Carlson のアルゴリズムを元に筆者自らがライブラリをコーディングしたが、実際には商用ソフトウェアの Mathematica にこの積分が組み込み関数として含まれており、Fortran から Mathematica の機能を呼び出す環境を整えれば、更にチューニングされたライブラリが利用でき高速化が期待できる。また、カーネルの各々は  $i, j, n$  の組み合わせから成るが、添字の異なるカーネル同士には依存性が無く完全に独立に計算可能であるため、並列化効率が非常に高い。従って、より大型の並列計算機システムを利用すれば、上記の計算時間は劇的に短縮される見込みがある。

図表

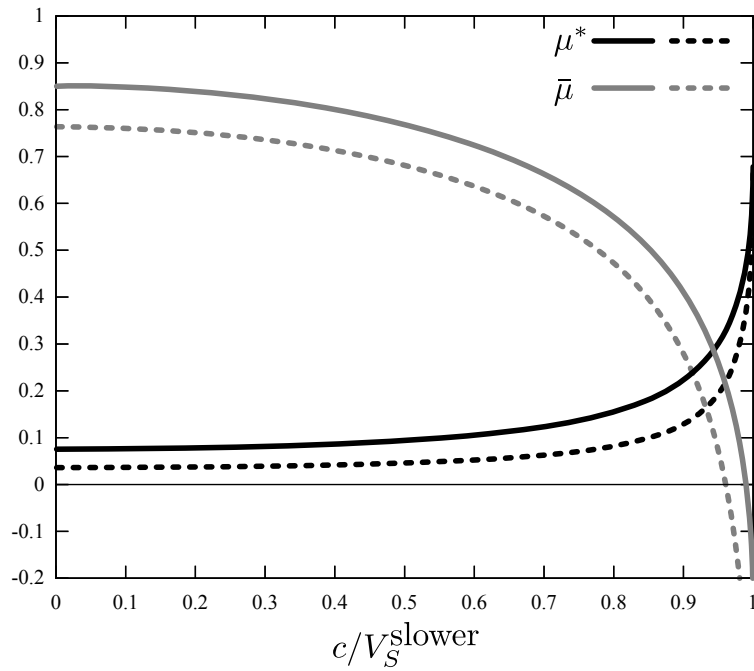


図 1:  $\mu^*$  (黒色) および  $\bar{\mu}$  (灰色) の破壊伝播速度依存性. 実線は  $\alpha^+/\alpha^- = \beta^+/\beta^- = \rho^+/\rho^- = 1.2$ , 点線は  $\alpha^+/\alpha^- = \beta^+/\beta^- = \rho^+/\rho^- = 1.1$  の場合に対応する.  $\bar{\mu}$  の零点が一般化 Rayleigh 速度である. 縦軸の規格化定数は, 両媒質の剛性率のうち小さな方 ( $= (\beta^-)^2 \rho^-$ ).

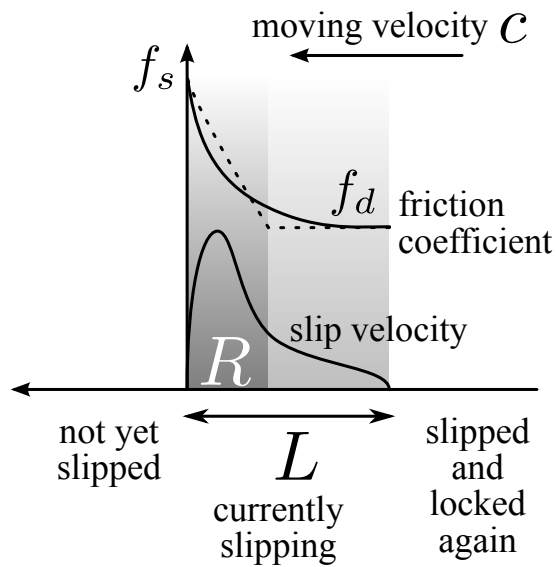


図 2: 媒質境界を左向きに走る長さ  $L$  のパルス状破壊と, その先端近傍の長さ  $R$  のプロセスゾーン, およびパルス内部の摩擦係数の分布の模式図.

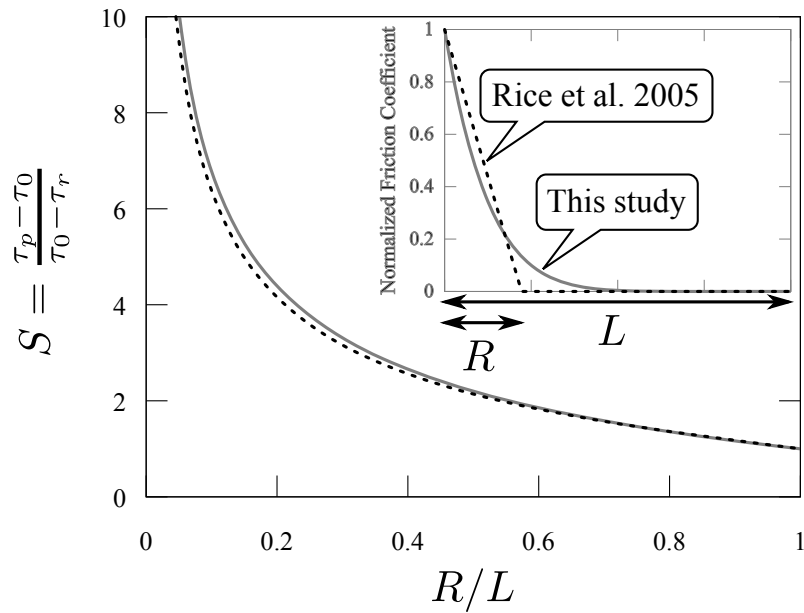


図 3: 無限均質媒質中の定常的パルス型破壊が、条件式 (1.19) を満たすための、応力比  $S$  と弱化領域長さ  $R/L$  との関係式。黒点線は Rice et al. [2005] が採用した直線的弱化、灰色実線は本研究が採用する滑らかな弱化 (右上枠内参照) によるもの。

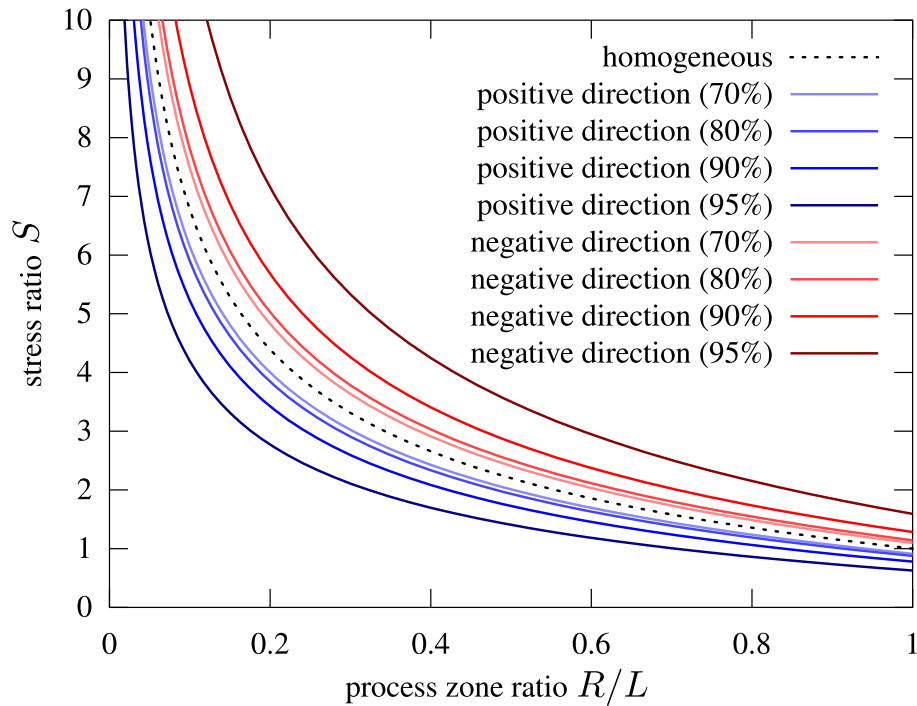


図 4: 媒質境界を伝播する定常的パルス型破壊が、条件式 (1.19) を満たすための、応力比  $S$  と弱化領域長さ  $R/L$  との関係式。青が正方向、赤が負方向への破壊で、線の色の薄いものから順に、破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度の 70%, 80%, 90%, 95% の事例に相当する。均質媒質の場合と異なり、破壊伝播の方向および速度に依存することが分かる。

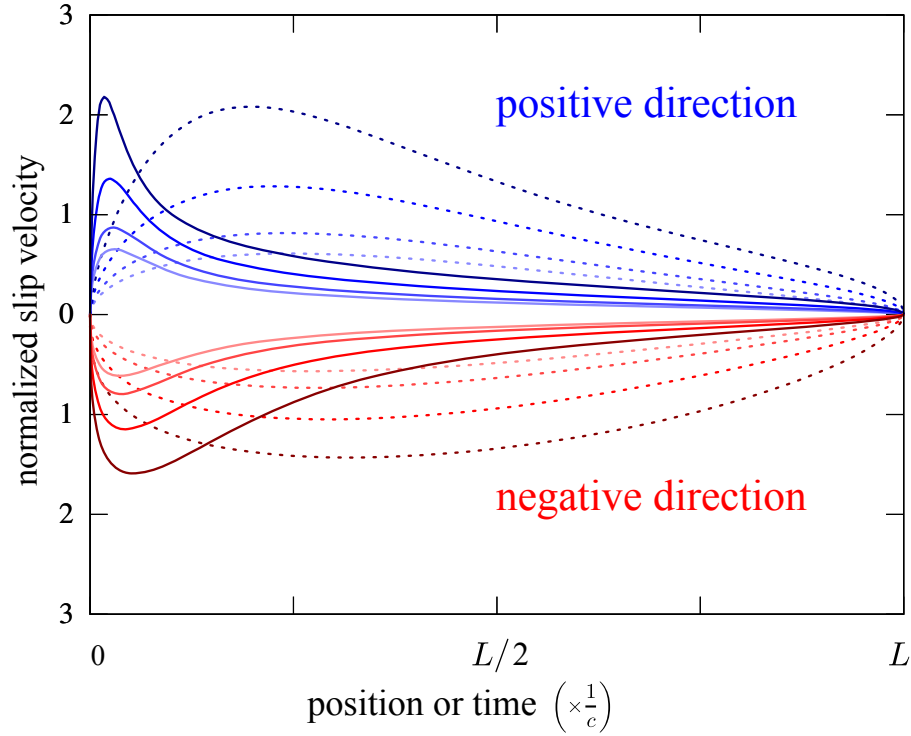


図 5: 媒質境界を伝播する定常的パルス内部の滑り速度分布. 横軸はパルス長で規格化した空間座標だが, Galilei 変換により,  $1/c$  倍することで時間軸と見ることできる. 縦軸の規格化定数は  $(\tau_p - \tau_r)c_{GR}/G_{soft}$  であり, ここで  $G_{soft}$  は両媒質の剛性率のうち小さな方である. 尚, 縦軸の絶対値はパルス長に依存しない. 青が正方向, 赤が負方向への破壊で, 線の色の薄いものから順に, 破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度の 70%, 80%, 90%, 95% の事例に相当する. 実線は応力比  $S = 8$ , 点線は応力比  $S = 2$  の場合に相当する.

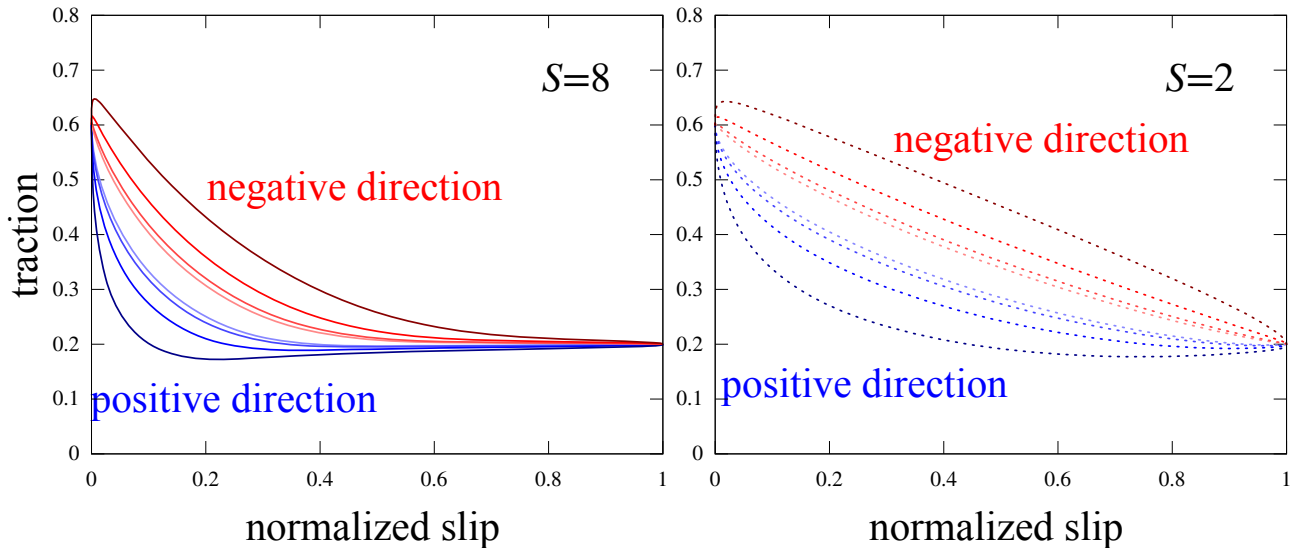


図 6: 媒質境界を伝播する定常的パルス内部の応力降下曲線. 横軸は最終滑り量で規格化した滑り量で, 縦軸は摩擦力を初期法線応力の大きさ  $|\sigma_0|$  で規格化したもの. 滑りに伴う法線応力変化があるため, 滑りの開始時と終了時を除いて縦軸が仮定した摩擦係数そのものではないことに注意を要する. 青が正方向, 赤が負方向への破壊で, 線の色の薄いものから順に, 破壊伝播速度が一般化 Rayleigh 速度の 70%, 80%, 90%, 95% の事例に相当する. 実線は応力比  $S = 8$ , 点線は応力比  $S = 2$  の場合に相当する.

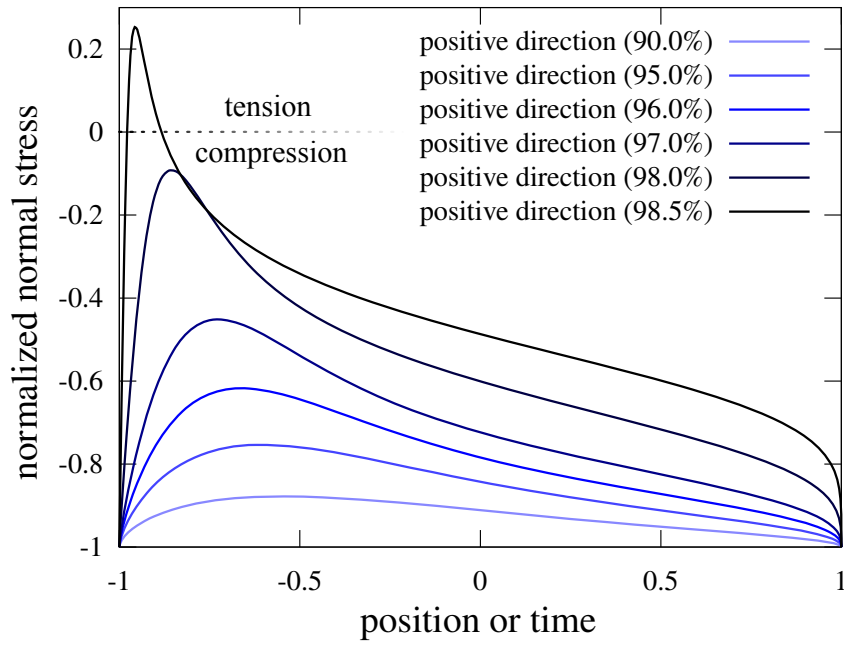


図 7:  $S = 2, \beta^+ / \beta^- = 1.2$  の場合について、正方向へ伝播するパルス内部の法線応力を初期法線応力の大きさ  $|\sigma_0|$  で規格化したもの。色が濃くなる順に破壊伝播速度 (右上凡例の括弧内) が高速化する場合に対応する。

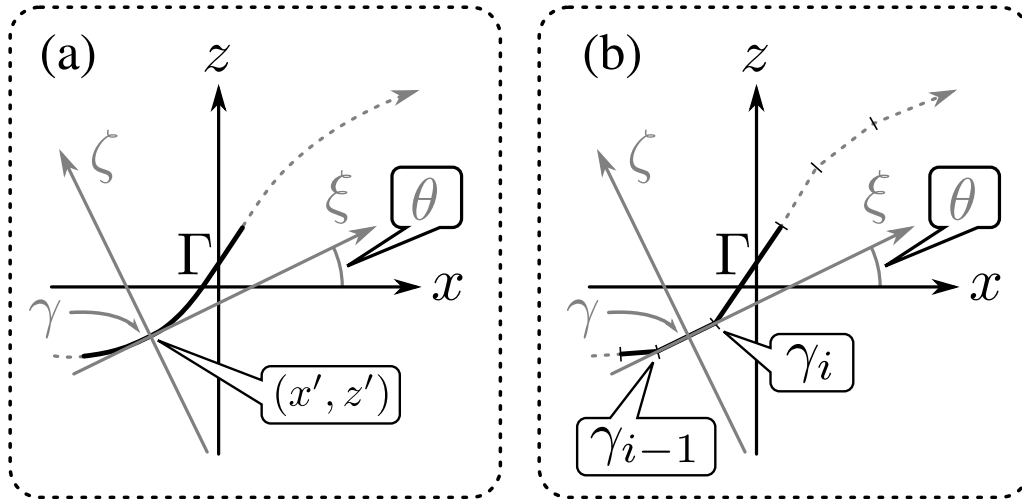


図 8: a) 断層トレース  $\Gamma$  上の点  $\gamma$  で定義される  $\xi$ - $\zeta$  座標系. b) 断層トレースを離散化した場合の幾何形状.

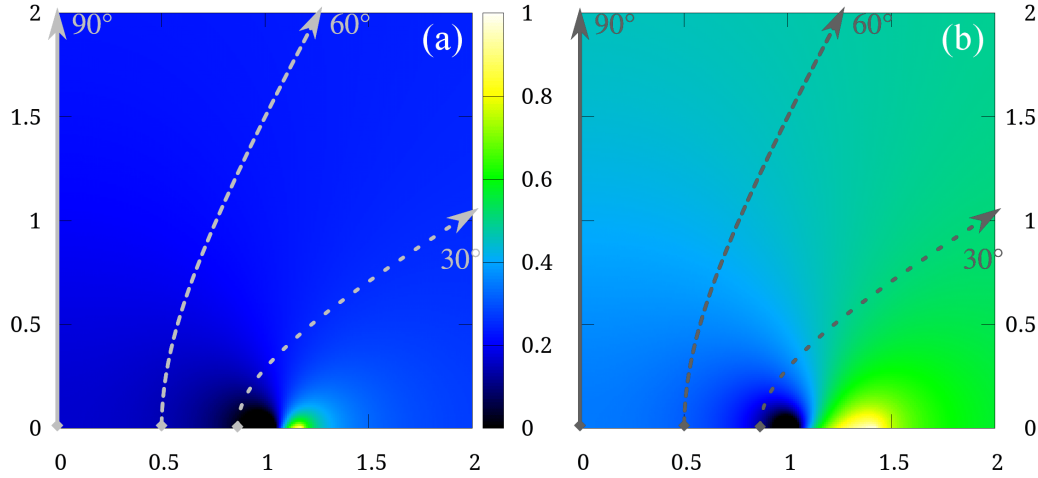


図 9: a)  $\Delta\beta = -15\%$  の場合に、反射係数  $\hat{S}_r \hat{S}_t$  が複素平面 (横軸と縦軸はそれぞれ複素波線パラメーター  $p$  の実部と虚部) 上で変化する様子を色で表わしたものの。反射係数は走時において矢印の出発点の値を取り、時間の経過と共に矢印に沿って値を変化させてゆく。観測点と媒質境界との距離は震源と媒質境界との距離に等しく、矢印に付した角度は震源からの波線の射出角。b)  $\Delta\beta = -30\%$  の場合の反射係数の時空間変化。

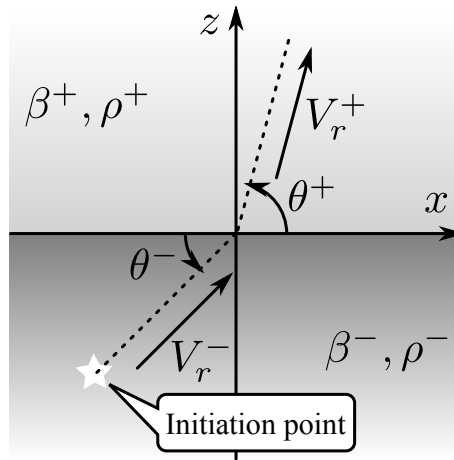


図 10: 媒質と亀裂の配置を模式的に表わしたものの。点線は媒質境界  $z = 0$  と交差する面外亀裂。  $\beta^\pm$  は S 波速度、  $\rho^\pm$  は密度、  $\theta^\pm$  は各亀裂セグメントと媒質境界とのなす角度、  $V_r^\pm$  は破壊伝播速度である。

	$\Delta\beta$	$V_r^\pm/\beta^\pm$	$\theta^-$	$\theta^+$	$\Delta\tau^+/\Delta\tau^-$
Case $A^+$	+30%	90%	90°	90°	2.20
Case $B^+$	+30%	90%	45°	66°	1.71
Case $A^-$	-30%	90%	90°	90°	0.455
Case $B^-$	-30%	90%	45°	19°	0.748
Case $C^+$	+30%	70%	90°	90°	2.20

表 1: 境界と交差する断層モデルの数値計算事例のパラメーター。



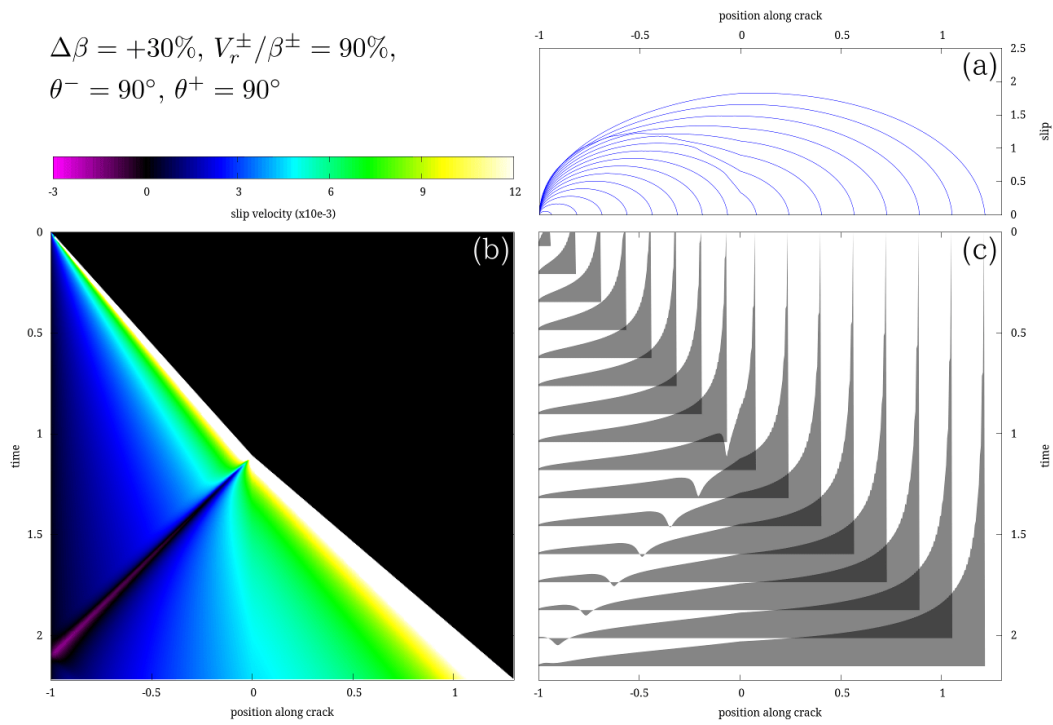


図 11: case  $A^+$  の結果. (a) は滑り分布, (b) は滑り速度の時空間発展を表わし, (c) は (b) の横方向の断面図である. 各図横軸の原点が媒質境界に対応する.

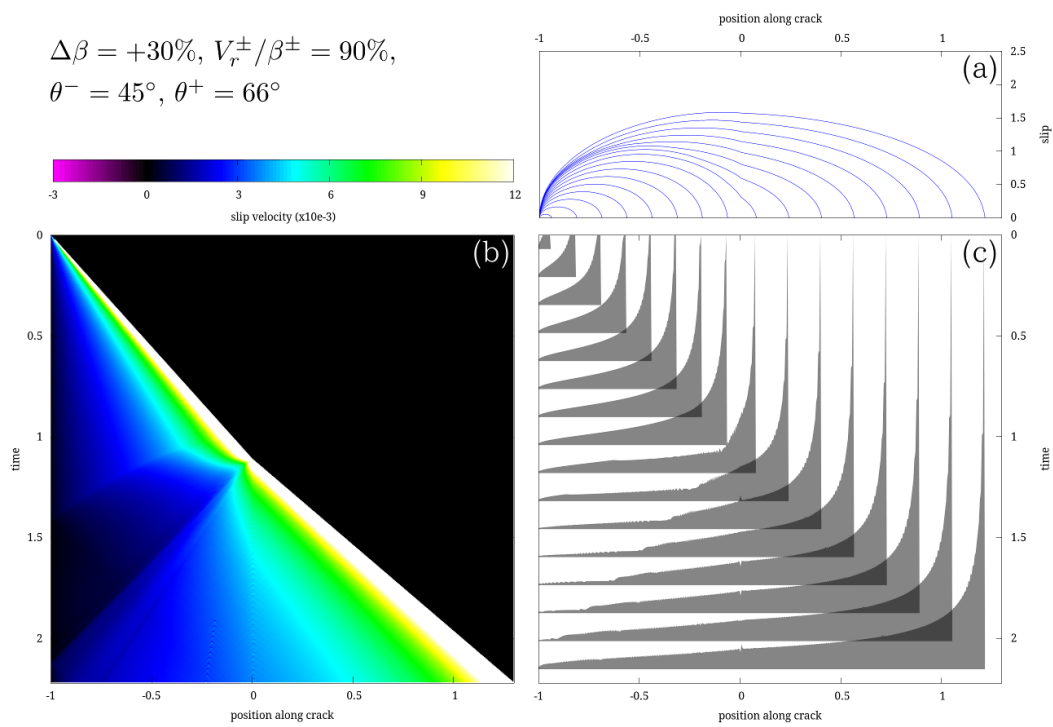


図 12: case  $B^+$  の結果.

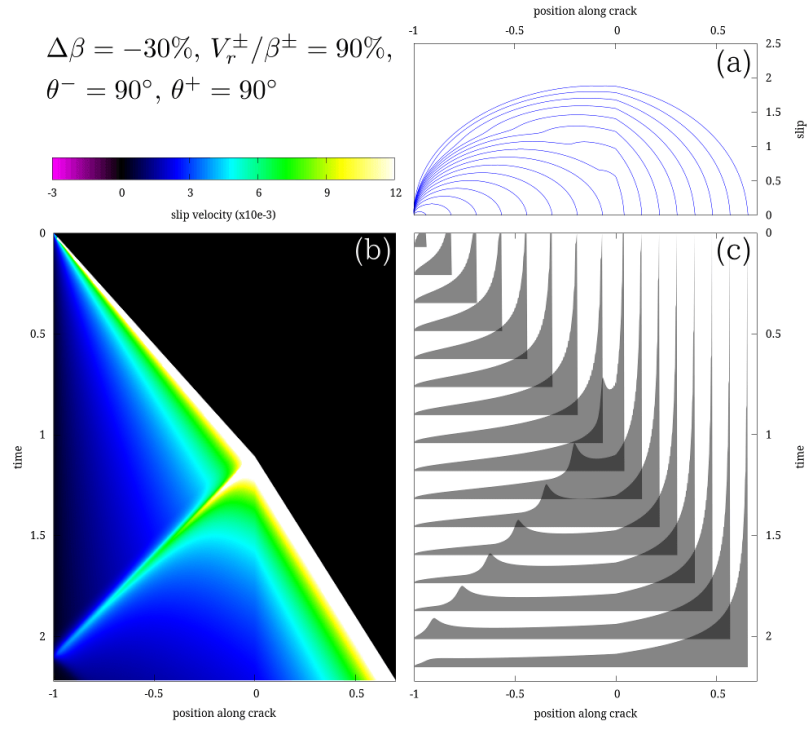


図 13: case  $A^-$  の結果.

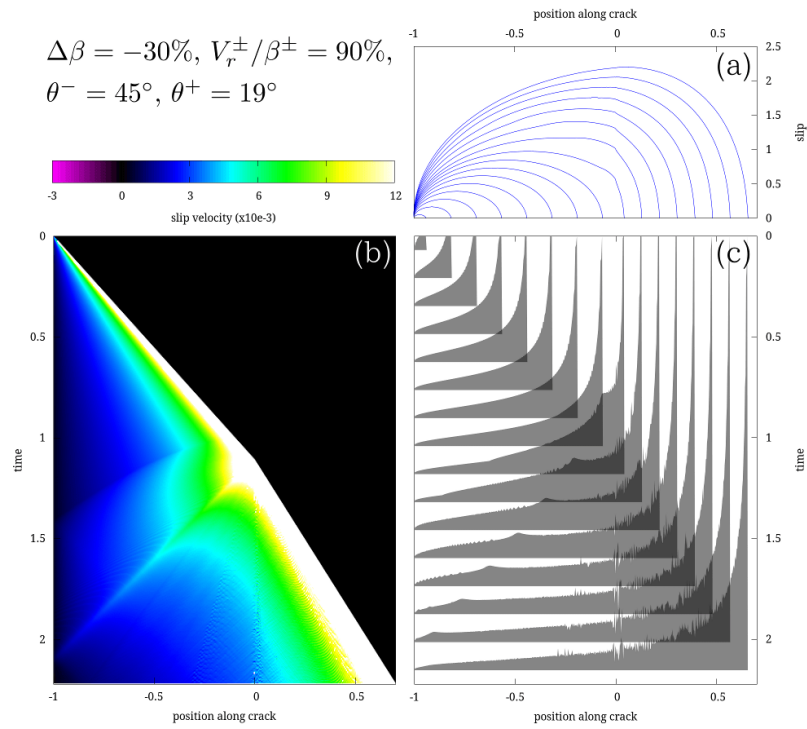


図 14: case  $B^-$  の結果.

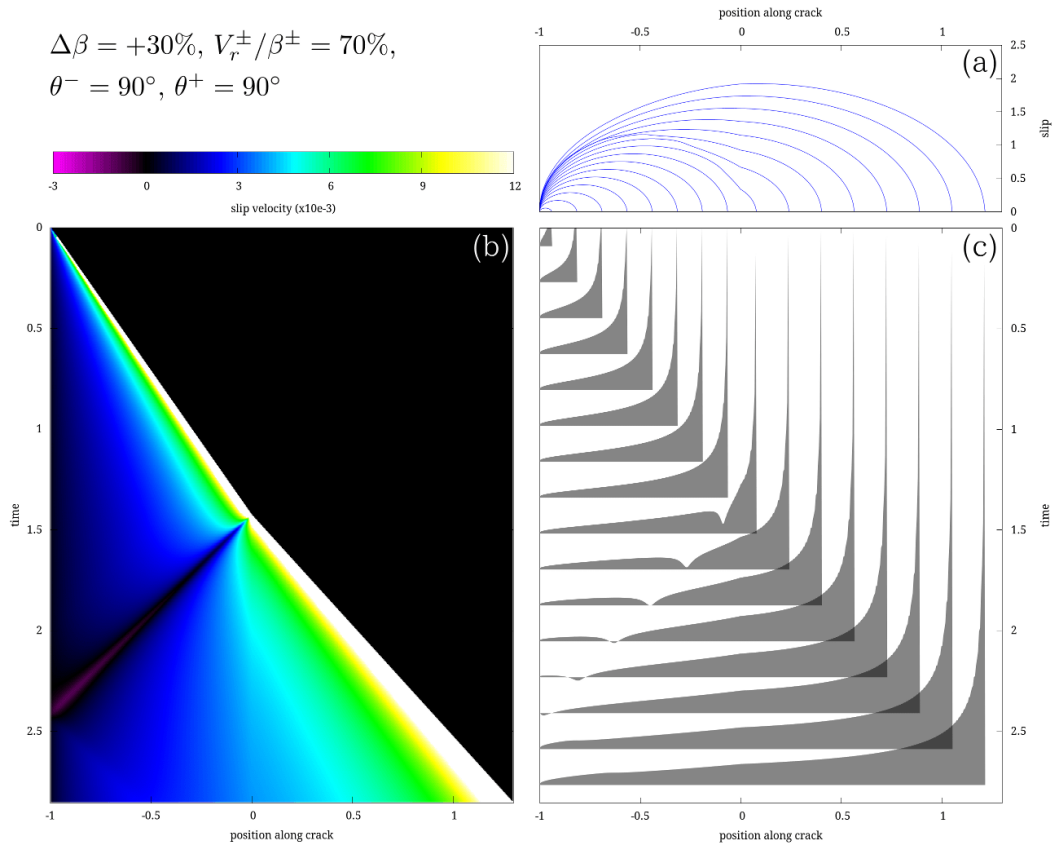


図 15: case  $C^+$  の結果.

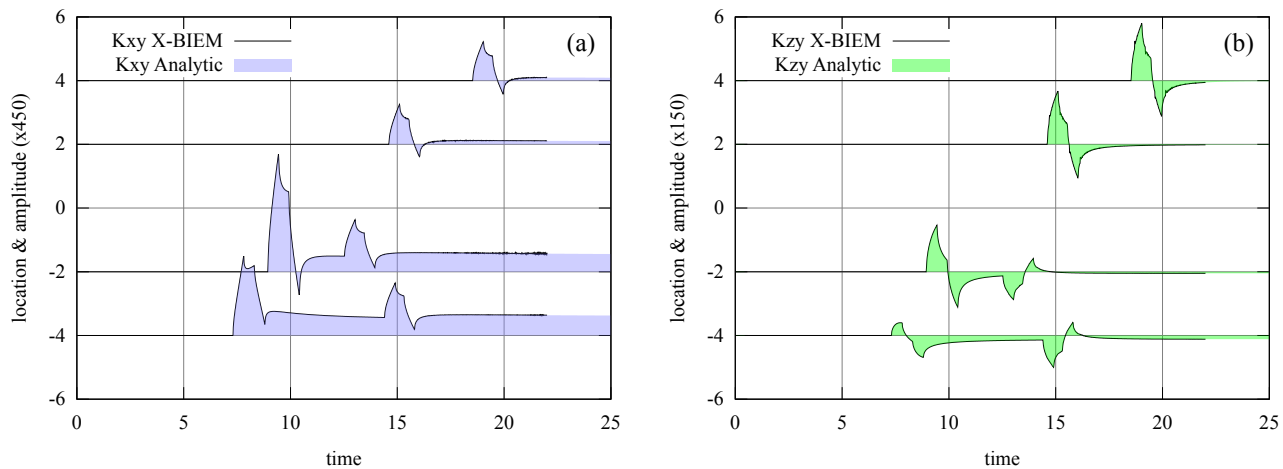


図 16: a) BIEM カーネル  $K_{xy}^{1,1}$  を、本論文の解析解 (塗り潰し領域) および X-BIEM による数値計算 (黒線) の両手法により求めた結果の比較. 縦軸の波形開始位置が観測点の  $z$  座標を表わし、振幅は見やすさのため 450 倍してある. b) 同様に  $K_{zy}^{1,1}$  を、両手法で求めた結果の比較. 振幅は見やすさのため 150 倍してある.