論文の内容の要旨

論文題目　The Stokes semigroup on non-decaying spaces

（非減衰空間上のストークス半群）

氏名　　　阿部　健

本論文では有界関数空間上のストークス半群について論じる。線型化ナヴィエ・ストークス方程式（ストークス方程式）の解作用素であるストークス半群は、べき乗可積分空間上解析半群となることが有界領域や外部領域など様々な領域において知られており、ナヴィエ・ストークス方程式を研究する上で重要な役割を果たしている。しかしこれが有界関数空間上解析半群となるかは、領域が滑らかな境界をもつ有界領域の場合であっても永年未解決の問題であった。領域が半空間の場合は、ストークス方程式の基本解に対する直接評価によりストークス半群が有界関数空間上解析半群となることが従う。本論文では有界領域を典型例として、さらに外部領域や摂動半空間などの非有界領域を含む広いクラスの領域に対してこの問題を肯定的に解決した。

研究の歴史を遡ると一般の楕円型作用素が有界関数空間上解析半群を生成することは、まず全空間上の連続関数空間において増田氏 (1972) により証明された。この結果はその後 H. B. Stewart（スチュアート）(1974, 1980) によりディリクレ境界値問題やさらに一般の境界条件へと拡張された。増田・スチュアート両氏の方法は発展方程式に対応するレゾルベント問題の解の L^∞ 評価をべき乗可積分空間上のレゾルベント評価と補間不等式により導く局所化の議論である。この方法は楕円型方程式のレゾルベント評価の方法として広く用いられているが、ストークス方程式に対しては圧力場の存在により直接適用することが困難であった。

本論文において鍵となる役割を果たすのはストークス方程式の圧力場を速度場により見積もる L^∞ 評価である。ストークス方程式の圧力場の評価は楕円型方程式のノイマン問題を経由して、通常べき乗可積分空間上において得られる。しかし有界関数空間上においては同様の評価が成立しない為、（空間無限遠で減衰しない）有界な速度場により圧力場を

評価することが不可能であった。そこで圧力場の満たすノイマン境界条件が、渦度場の接方向成分に対する曲面上の発散に変形できることに着目し、領域の境界との距離を用いた圧力場の L^∞ 評価を導いた。これが鍵であった。この圧力場の L^∞ 評価を用いることでストークス半群を有界関数空間上の解析半群へと一意的に拡張することが可能になった。

本論文は全５章により構成した。第１章から第４章では背理法により非定常ストークス方程式の解に対するアプリオリ L^∞ 評価を導き、これによりストークス半群が有界関数空間上解析半群となることを証明した。さらに第５章では非定常ストークス方程式に対応するレゾルベント問題の解の評価を増田・スチュアートの方法から証明し、背理法による証明に対して直接証明を与えた。前者の方法は発見的な考察に基づいたオリジナルの証明であり、より強力な評価を導くことが可能である。一方後者の方法は一見複雑ではあるが解析半群の角度や境界条件の拡張など、背理法による証明では不明であった事柄を導くことが可能である。

非定常ストークス方程式の解に対するアプリオリ L^∞ 評価について詳しく述べよう。本論文の第１章から第３章では領域 Ω 上におけるディリクレ境界条件の下での非定常ストークス方程式の解 (v, q) に対するアプリオリ L^∞ 評価

$$\sup_{0<t\le T_0} \left\| N(v,q) \right\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \le C \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

を証明した。ここで v と q はそれぞれ速度場と圧力場、v_0 は初期速度場を表し、$N(v,q)(x,t)$ は解 (v,q) に対する二階微分までのスケール不変なノルム

$$N(v,q)(x,t) = \left|v(x,t)\right| + t^{1/2}\left|\nabla v(x,t)\right| + t\left|\nabla^2 v(x,t)\right| + t\left|v_t(x,t)\right| + t\left|\nabla q(x,t)\right|$$

を表す。このアプリオリ L^∞ 評価により、まず（空間無限遠で減衰する）連続なソレノイダルベクトル場全体の空間 $C_{0,\sigma}(\Omega)$ 上へとストークス半群が C_0-解析半群として一意的に拡張可能になる。

このアプリオリ L^∞ 評価の証明には爆発法を用いる。爆発法とは結論を否定することで得られる解の点列に対して、解の爆発点近くをスケール変換により拡大し、アプリオリ L^∞ 評価の問題を爆発点のまわりでの爆発解の点列の『コンパクト性』の問題と、その極限の『一意性』の問題に帰着させる間接証明の方法である。スケール変換による領域の拡大により、極限問題は全空間又は半空間上での解の一意性を証明する問題になる。爆発法は非線形楕円型・放物型方程式の解のアプリオリ L^∞ 評価の方法として広く用いられているが、ストークス方程式の解のアプリオリ L^∞ 評価に適用した例は本研究が初めてである。この議論を熱方程式に対して適用し同様の結果を得ることは容易であるが、ストークス方程式に対しては、爆発解の点列の『コンパクト性』とその極限の『一意性』のどちらにも特有の難しさがあった。これは圧力場の存在により、ストークス方程式を素直に通常の放物型方程式として扱うことができない為である。

爆発解の点列の『コンパクト性』とその極限の『一意性』を導く上で鍵となるのは、圧力場の速度場（渦度場）による L^∞ 評価

$$\sup_{x\in\Omega} d_\Omega(x)\left|\nabla q(x,t)\right| \leq C_\Omega \left\|W(v)\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)}(t)$$

である。ここで $d_\Omega(x)$ は点 $x \in \Omega$ と領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ との距離を表し、$W(v)$ は $\partial\Omega$ 上の接ベクトル場 $W(v) = -(\nabla v - \nabla^T v)n_\Omega$ を表す。接ベクトル場 $W(v)$ は空間次元が３次元の場合、渦度場の接方向成分 $-\mathrm{curl}\ v \times n_\Omega$ に他ならない。ここで n_Ω は $\partial\Omega$ 上定義された単位外向き法線ベクトルである。この評価は圧力場の満たす斉次ノイマン問題の解の評価として得られる。鍵となる考察は圧力場の満たすノイマン境界条件が速度場に対する非圧縮性条件の下で、渦度場の接方向成分に対する曲面上の発散に変形できることである。即ち、$\Delta v \cdot n_\Omega = \mathrm{div}_{\partial\Omega} W(v)$ と変形できることに着目し、圧力場の評価を斉次ノイマン問題

$$\Delta q = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial q}{\partial n_\Omega} = \mathrm{div}_{\partial\Omega} W \text{ on } \partial\Omega$$

の解のアプリオリ評価を調べる問題へと帰着する点である。

本論文では、この斉次ノイマン問題の解のアプリオリ評価の成立する領域を（厳密に）許容な領域と名付け定式化した。また実際に有界領域や外部領域、摂動半空間などの典型的な領域が許容領域であることを爆発法により証明した。この斉次ノイマン問題の解の評価は、C. E. Kenig, F. Lin, Z. Shen（ケニッグ・リン・シェン）等によっても（別の目的で）独立に発見されており、有界領域に対してはグリーン関数の評価により直接証明可能であることがわかっている。しかし非有界領域は扱われていない。本論文で用いた爆発法による証明方法はグリーン関数を必要とせず、外部領域や摂動半空間に対しても適用可能である。この圧力場の L^∞ 評価を用いることにより、爆発解の点列に対する『コンパクト性』とその極限の『一意性』の問題を解決し、爆発法によりアプリオリ L^∞ 評価を証明することが可能になった。

本論文ではさらに非減衰型のソレノイダルベクトル空間 L^∞_σ 上へとストークス半群を拡張した。外部領域や摂動半空間などの非有界領域において、よく知られているべき乗可積分空間の理論は初期値に対して空間無限遠での減衰条件を課してしまう。この為非減衰初期値に対しては線型ストークス方程式の解の存在であっても非自明であった。本論文では外部領域や摂動半空間において、有界な（非減衰）初期値を台コンパクトで滑らかなソレノイダルベクトル場により各点近似する近似定理を証明した。これによりアプリオリ L^∞ 評価と共にストークス半群を空間 L^∞_σ 上の非 C_0-解析半群として一意的に拡張した。

最後に非定常ストークス方程式に対応するレゾルベント問題の解の評価を、圧力場の L^∞ 評価を用いて増田・スチュアートの方法により直接導いた。これにより背理法では不明であった有界関数空間上の解析的ストークス半群の角度が $\pi/2$ であることを証明した。また境界条件をディリクレ境界条件から拡張し、速度場の境界上での滑りを考慮したロバン型境界条件の下でストークス半群が有界関数空間上解析半群となることを証明した。