論文の内容の要旨

論文題目：

Discrete integrable equations over finite fields
（有限体上の離散可積分方程式）

かんき　まさたか
氏　　名：　　神吉　雅崇

本論文の目的は、多様な離散可積分方程式系を有限体上で定義するとともにその性質（可積分性および特殊解の挙動）について研究することである。可積分方程式とは、厳密解が解析的に記述できる非線形方程式群の総称であり、それらの持つ変換群の対称性や特殊解の多様性に関して盛んに研究がなされている。離散可積分系とは、可積分系の独立変数を離散化した系であり、連続系の性質を保存する数値計算スキームとしての意義はもちろんのこと、離散KP階層の理論に代表されるように離散系そのものの重要性からも研究がなされている。さらに離散系の従属変数をも離散化した系として超離散方程式がある。超離散方程式は、複数のセルがある一定の規則に従い有限状態を遷移する点において、セルオートマトンであると解釈できる。超離散方程式は、離散系から「超離散化」という極限操作によって得られることが知られている。一方で超離散化は負号の存在する系に適用できないなどの問題もある。本論文は、離散可積分系とセルオートマトンを結びつける有力な一理論として、「有

限体上の離散可積分方程式」を主題として記述する。有限体上の離散方程式の定義は、離散系から直接にセルオートマトンを得ることを可能にする点で、超離散化に匹敵する強力な理論となりうると期待される。しかし有限体上で力学系の定義を行うことは、多くの初期値に対して不定性が生じるため困難であり、先行研究はほとんど存在しなかった。さらには、有限個の点間の遷移に過ぎない力学系が可積分であることの意味付けも全く行われてこなかった。本論文では、まず第一章にて可積分系理論に関する先行結果の概略を述べる。第二章では有限体上の可積分系に関する先行結果を紹介した上で、力学系の初期値空間の拡張をメインテーマとする本論文の概略について説明する。前半（第三、四章）は離散パンルヴェ方程式を例にとり、二通りの空間拡張手法に関する研究結果を報告する。第三章では一つ目の拡張方式として坂井理論の有限体上への応用を紹介する。坂井理論とは離散パンルヴェ方程式系の初期値空間を双有理拡張する理論である。具体的には方程式の特異点のそれぞれで初期値空間を blowing-up することにより、拡張された空間の上で不定性のない時間発展を記述できる。本章の主結果は特に離散パンルヴェII方程式に関して、有限体上において上記の理論を応用し具体的に初期値空間を構成したことである。有限個の点間の遷移であるため、時間発展の遷移図をオートマトンとして記述できる。また、離散位相のため、拡張された初期値空間に必要な点の個数を坂井理論よりも縮小してよいことが示される。第四章では第二の拡張方式として、p 進数体上で系を定義することで不定性を解消し、得られた結果を極大イデアルで剰余することで有限体上の系を得る手法を提案する。本手法により、不定性無しに系を定義できるだけでなく、従来複素数体上で構成されていた特殊解をそのまま有限体上の解へ還元することが可能となる。方程式を二変数の力学系として扱い、p 進数体上の時間発展と有限体上の時間発展をセットで考えるときの図式の可換性について研究する。有限ステップでこの図式が可換となることを almost good reduction として定式化する。Almost good reduction は算術的力学系理論における good reduction の概念に着想を得たものであり、これを一般的な離散系へ適用できるよう拡張して得られる。本章の主結果は、almost good reduction が離散力学系の「可積分性判定基準」として利用できることを多くの例とともに示したこと、および almost good reduction が、既知の可積分性テストである「特異点閉じ込め手法」の数論的類似物であることを示したことである。具体的な命題はいくつかのパンルヴェ方程式の q 離散類似や、カオス系であるが

非可積分であるHietarinta-Viallet系といったの多くの系の還元に関する性質を述べるとともに、一部の方程式の特殊解の構成を行っている。第五章では二次元以上の力学系に対して前章の手法を適用する。前半と同様の手法により、離散KdV方程式についてp進数体上の時間発展を経由することで有限体上の系を定義する。また、類似の手法として、方程式内のパラメータを不定元（変数）と見なすことにより有限体上の系を定義できることを紹介する。離散KdV方程式のある拡張形式を提案するとともに、そのソリトン解を導出し有限体上の挙動を観察する。通常のソリトン解の有限体上への還元を紹介し、パラメータのp進付値に基づく性質の変化を観察する。最後に、高次元の格子力学系のmodulo p還元が満たす性質について双線形形式と非線形形式の相互関係の観点から研究する。第六章は結論と将来の課題についてである。