論文審査の結果の要旨

氏　名　神吉　雅崇

本論文の目的は，多様な離散可積分方程式系を有限体上で定義するとともにその性質（可積分性および特殊解の挙動）について研究し，これを可積分セルオートマトン(Cellular Automaton,CA)の理論に応用することである．CA では，各セルが有限個の状態のみをとるため，セルの状態を環 Z_n の要素と対応付け，CA を Z_n 上の力学系と考えることができる．特に n が素数の冪であり，有限体上の線形方程式として記述できる CA では，初等的な整数論により軌道分解や基本周期を求められることもある．したがって，離散方程式を有限体上で考えれば，自然に可積分な CA を構成できる可能性に思い至る．しかし，数学的に興味深い方程式のほとんどは有理式で記述される非線形方程式であるため，そのままでは有限体上の方程式と考えることはできない．たとえば，次の方程式(#)：$u_{n+1}=-u_{n-1}+(au_n+1)/u_n$，$(a:\mathrm{const.})$ は，QRT 写像の一つであり，保存量を持つ典型的な可積分方程式である．この(#)式を，たとえば F_3 上で考えると，ほとんどの初期値に対して，従属変数 u は時間発展の過程で 0 をとり，1/0 などの値を決定することが必要になる．仮に，(#)式を，PF_3 上で考えることにし，$1/0=\infty$としても，$0\cdot\infty$ や $\infty-\infty$ などの値を矛盾なく決めねばならず，何らかの合理的な指針が必要である．また，仮にうまく定義できたとしても (#)式は，位相空間を $F_3\times F_3$ とするため，わずか 9 つの状態間を遷移する．これに対して論文提出者は，p 進数体からの還元という観点を用いれば，有限体上の離散パンルヴェ方程式やソリトン方程式がうまく定義できること，そして，数体上の可積分性は almost good reduction とよばれる性質によって特徴付けられ，この性質が複素数体上で可積分性の判定条件として用いられる特異値閉じ込めに対応することを示した．さらにこの性質を用いて，有限体上のパンルヴェ方程式の特殊解も構成している．p 進数体を同時に考えるというアイデアは独創的であり，かつ可積分系分野ではあまり用いられることのない p 進数を巧みに応用した点は申請者の数学的技量の高さを示している．

本論文の構成は以下の通りである．まず第一章では，可積分系理論に関する先行結果の概略を述べ，第二章では有限体上の可積分系に関する先行結果を紹介した上で，力学系の初期値空間の拡張をメインテーマとする本論文の概略について説明している．
前半（第三，四章）は離散パンルヴェ方程式を例にとり，二通りの空間拡張手法に関する研究結果を報告している．第三章では一つ目の拡張方式として坂井理論の有限体上への応用を示している．坂井理論とは離散パンルヴェ方程式系の初期値空間を双有理拡張する理論である．具体的には方程式の特異点のそれぞれで初期値空間を blowing-up することにより，拡張された空間の上で不定性のない時間発展を記述できる．この章の主結果は，特に離散パンルヴェ II 方程式に関して，有限体上において上記の理論を応用し具体的に初期値空間を構成したことである．有限個の点間の遷移であるため，時間発

展の遷移図をオートマトンとして記述できている．また，離散位相のため，拡張された初期値空間に必要な点の個数を坂井理論よりも縮小してよいことを示している．第四章では第二の拡張方式として，p 進数体上で系を定義することで不定性を解消し，得られた結果を極大イデアルで剰余することで有限体上の系を得る手法を提案している．本手法により，不定性無しに系を定義できるだけでなく，従来複素数体上で構成されていた特殊解をそのまま有限体上の解へ還元することが可能となっている．方程式を二変数の力学系として扱い，p 進数体上の時間発展と有限体上の時間発展をセットで考えるときの図式の可換性について研究している．有限ステップでこの図式が可換となることを almost good reduction として定式化している． Almost good reduction は算術的力学系理論における good reduction の概念に着想を得たものであり，これを一般的な離散系へ適用できるよう拡張して得られるものである． この章の主結果は，almost good reduction が離散力学系の「可積分性判定基準」として利用できることを多くの例とともに示したこと，および almost good reduction が，既知の可積分性テストである「特異点閉じ込め手法」の数論的類似物であることを示したことである．具体的な命題においては，いくつかのパンルヴェ方程式の q 離散類似や，カオス系かつ非可積分系であるが「特異点閉じ込めテスト」に通る Hietarinta-Viallet 系といったの多くの系の還元に関する性質を述べるとともに，一部の方程式の特殊解の構成を行っている．第五章は二次元以上の力学系に対して前章の手法を適用したものである．前半と同様の手法により，離散 KdV 方程式について p 進数体上の時間発展を経由することで有限体上の系を定義している．また，類似の手法として，方程式内のパラメータを不定元（変数）と見なすことにより有限体上の系を定義できることも示している．離散 KdV 方程式のある拡張形式を提案するとともに，そのソリトン解を導出し有限体上の挙動を分析している．さらに，通常のソリトン解の有限体上への還元を行い，パラメータの p 進付値に基づく性質の変化を解析している．最後に，高次元の格子力学系の modulo p 還元が満たす性質について双線形形式と非線形形式の相互関係の観点から分析している．第六章は結論と将来の課題である．

以上のように，本論文は，これまで構成が困難とされてきた有限体上の非線形可積分方程式系に対して，almost good reduction という概念を定義することで，時間発展およびその解を定義し，有限体上の離散パンルヴェ方程式やソリトン方程式を構成し，厳密解や複素数体上の方程式系との関係を示したもので，有限体上の可積分方程式系理論に対して大きな進展を与えたものである．よって，論文提出者 神吉雅崇 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．