論文の内容の要旨

論文題目

A few topics related to maximum principles (最大値原理に関連する諸課題)

氏名　浜向　直

本論文では，偏微分方程式の最大値原理 (比較定理) に関連する諸課題を述べる．考察する方程式には，結晶成長現象を記述するハミルトン・ヤコビ方程式や曲率流方程式が典型例として含まれる．微分方程式の粘性解理論に基づき，初期値問題の一意可解性を最大値原理を通して確立し，さらに解の挙動を調べる．また，最大値原理の証明手法を離散解析にも応用する．

第 1 章では，空間変数 x について不連続なハミルトン・ヤコビ方程式，特に，連続なハミルトニアン H_0 と，不連続なソース項 r により，

$$\partial_t u(x,t) + H_0(x, \nabla u(x,t)) = r(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0) \tag{A.1}$$

と表される方程式の初期値問題を考える．(ここで ∇ は x についての勾配を表す．) 本研究は，結晶成長のメカニズムの一つである 2 次元核生成を動機としている．これは，平らな結晶面に対して外部からの結晶分子の供給により小さな丘ができ，それが元となって始まる成長現象のことである．典型例として扱う方程式は，

$$\partial_t u(x,t) - |\nabla u(x,t)| = cI(x) \quad (c > 0) \tag{A.2}$$

で，右辺の $I(x)$ は原点で 1，それ以外で 0 の値を取る不連続関数である．しかし，従来の粘性解の意味 (Crandall-Lions, 石井の意味) では，(A.2) の初期値問題の解

の一意性が成り立たない．そこで従来の粘性解の定義を修正・拡張することで，新しい解の概念，$\overline{D}$-**粘性解**を導入する．この $\overline{D}$-粘性解に対する比較定理が，本研究の主結果の一つである．

しかし初期値を 0 としても (A.2) の $\overline{D}$-粘性解は存在しない．そこで解の定義を弱め，優解として，$\overline{D}$-粘性優解の下限で表される関数も許容した．こうして**包粘性解**という解の概念を定義し，近似方程式の解の極限を取ることで包粘性解の存在を示した．代表的な結果として，H_0 が強圧的で適当な連続性を持ち，かつ r が有界上半連続なときに，任意の有界一様連続な初期値に対して，(A.1) の初期値問題の包粘性解が一意的に存在することが示せた．ハミルトニアンが非強圧的な場合には一般に包粘性解の一意性が成り立たないが，一意性が成り立つための十分条件を，x についての不連続性を緩和したハミルトニアンを導入することで与えた．また方程式がベルマン型であるときに，不連続なランニングコストを持つ最適制御問題を考えることで，包粘性解の表現公式を与えた．

ここで確立した不連続方程式に対する粘性解の理論を，解の長時間挙動にも応用する．方程式 (A.1) において，H_0 が強圧的で x に依らない場合を考える．一意解を u とし，そのリスケール関数を $u_{(\lambda)}(x,t) := u(\lambda x, \lambda t)/\lambda$ で定めるとき，$u_{(\lambda)}$ は (A.1) の右辺を $r(\lambda x)$ で置き換えた方程式の解となる．従って r の台がコンパクトとすると，$\lambda \to \infty$ のときの $u_{(\lambda)}$ の極限は，(A.1) の右辺を $c_r I(x)$ (c_r は r の最大値) とした極限問題の解として特徴付けられることが期待できる．本論文では，その極限問題の一意的な包粘性解が，実際にリスケール関数の極限を特徴付けることを示す．(極限問題の従来の粘性解は一意でないことに注意されたい．) この結果より特に，

$$\frac{1}{t}u(tx,t) \to V(x) \quad \text{as } t \to \infty \tag{A.3}$$

という長時間的な収束が得られる．ここで V は，初期値を 0 とする極限問題の自己相似解のプロファイル関数である．また非負ソース項 r が，台コンパクトでないが $\mathbf{R}^n$ で周期的なときには，(A.3) の極限 $V(x)$ は定数 c_r となることも分かる．

第 2 章では，完全非線形放物型方程式

$$\partial_t u(x,t) = F(\nabla u(x,t), \nabla^2 u(x,t)) \quad (x \in \{x_1 > 0\},\ t > 0) \tag{B.1}$$

の初期値問題の解の長時間挙動を調べる．ただし半空間 $\{x_1 > 0\}$ の境界上では，ノイマン条件 (接触角条件) の

$$\partial_{x_1} u(x,t)|_{x_1=0} = \beta > 0 \tag{B.2}$$

を課す．典型例として，材料科学者の Mullins によって提唱された，**結晶の蒸発・凝固モデル**を記述する方程式を考えている．これは指数部に平均曲率 k (グラフ表示で $k = \mathrm{div}(\nabla u(x,t)/\sqrt{1+|\nabla u(x,t)|^2})$) を含む一般化された曲率流方程式，

$$\partial_t u(x,t) = \sqrt{1+|\nabla u(x,t)|^2}(1-e^{-k}) \tag{B.3}$$

に接触角条件の (B.2) が付いた問題として与えられる．

本研究ではまず，F の連続性と退化楕円性の仮定の下，初期値ノイマン問題の粘性解の比較定理 (一意性) と存在定理を示す．そして (B.3) を含む一般的設定の下で，(B.1) の解 u のリスケール関数の極限を調べ，特に長時間的な収束

$$\frac{1}{\sqrt{t}}u(\sqrt{t}x,t) \to V(x) \quad \text{as } t \to \infty$$

を導く．ここで V は，初期値を 0 とする対応する極限問題の自己相似解のプロファイル関数である．例えば元の問題が (B.3) であるとき，極限問題は通常のグラフに対する曲率流方程式，

$$\partial_t u(x,t) = \sqrt{1+|\nabla u(x,t)|^2} \cdot k \tag{B.4}$$

となることが分かる．

極限問題の自己相似解の性質についても調べる．まずはその形状について，極限問題が退化しているとき，自己相似解には微分できない点である角が現れることを示し，さらにその角度を特定する．次に自己相似解の境界での値 (物理的には溝の深さ) について考察する．特に，熱方程式

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) \tag{B.5}$$

の自己相似解の溝の深さとの差に対する評価を，比較定理を用いて与える．接触角 β が十分小さいとき，(B.5) の溝の深さが良い近似を与えることが分かる．

Mullins の原論文では，線形近似 $1 - e^{-k} \approx k$ を施すことで (B.3) を (B.4) で近似し，さらに (B.2) の β が十分小という仮定から $|\nabla u(x,t)| \approx 0$ とすることで (B.5) に帰着し，熱方程式を解くことで蒸発・凝固問題の解を与えている．本研究は，Mullins によるこれらの近似に，適当な意味での数学的正当性を与えるものである．

第 3 章では，最大値原理の証明手法を応用して離散問題を取り扱う．各格子点幅が同じとは限らない n 次元格子点の部分集合 Ω に対し，その体積 $\mathrm{Vol}(\Omega)$ と表面積 $\mathrm{Per}(\Omega)$ に関する**離散等周不等式**，

$$\frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)^{(n-1)/n}} \geqq 2n$$

を導き，さらに等号成立は Ω が立方体のときに限ることを示す．ただし，Ω の体積と表面積は，各辺の長さがその方向の格子点幅に等しい直方体を，Ω の各点に対してその点が中心にくるよう配置して合併を取った集合の体積と表面積によって定義する．またこの集合が $\mathbf{R}^n$ の立方体となるとき，Ω を立方体と呼ぶ．

証明は，古典的な等周不等式に対する Cabré のアイデアに基づく．これは楕円型方程式に対する Aleksandrov-Bakelman-Pucci の最大値原理の証明手法を用いるもので，あるノイマン境界条件付きポワソン方程式の (劣) 解 u に対し，u の上接集合の ∇u による像のルベーグ測度を，測度論の面積公式などを用いて巧みに評価することで，Cabré は古典等周不等式を導いている．本研究における離散版

では，∇u を優微分 $\partial^+ u$ で置き換え，$\partial^+ u$ による上接集合の像の測度を u の 2 階差分で直接評価することで面積公式の代用とし，証明を完成させている．差分化されたポワソン・ノイマン問題の可解性もまた問題であるが，対応する連立 1 次方程式の未知変数をあえて増やすという技法により劣解を構成した．

第 4 章では，等高面法の改良について議論する．補助関数 $u(x,t)$ のゼロ等高面として $\Gamma(t)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid u(x,t)=0\}$ と表される $\mathbf{R}^n$ 内の超曲面の運動が，1 階のハミルトン・ヤコビ方程式，

$$\partial_t u(x,t)+H(x,\nabla u(x,t))=0 \quad (x\in\mathbf{R}^n,\ t>0) \tag{D.1}$$

によって記述される場合を考える．典型例として，H が与えられたベクトル場と $\nabla u(x,t)$ との内積で書かれる輸送方程式を考えているが，このとき時間が経つにつれて解 u の傾きが小さくなり，計算機ではゼロ等高面を取り出すことが困難であることが知られている．

そこで本研究では，(D.1) を修正した方程式，

$$\partial_t u(x,t)+H(x,\nabla u(x,t))=u(x,t)G(x,\nabla u(x,t)) \tag{D.2}$$

を考え，右辺の G を適当に定義したときに，その解 u が (D.1) と同じゼロ等高面を与え，かつゼロ等高面付近で傾きが小さくならないようにできることを示す．方程式 (D.2) は非線形であるので粘性解の意味で解くことになるが，この解は一般に滑らかではない．それ故「傾き」の保持をどのような意味で正当化するかが問題となるが，ここでは $\Gamma(t)$ への符号付き距離関数 $d(x,t)$ を用いてその正当化を行う．(D.2) の初期値問題の解が，各 $\varepsilon>0$ に対し，ε に依存したゼロ等高面の近傍上で，二つの関数 $e^{-\varepsilon t}d(x,t)$ と $e^{\varepsilon t}d(x,t)$ の間にあることを比較定理に基づいて示す．