論文審査の結果の要旨

氏名　　浜向　直

本博士論文では、偏微分方程式の最大値原理（比較定理）に関連する諸課題を扱っている。考察する方程式には、結晶成長現象を記述するハミルトン・ヤコビ方程式や曲率流方程式が典型例として含まれる。微分方程式の粘性解理論に基づき、初期値問題の一意可解性を最大値原理を通して確立し、さらに解の挙動を調べる。また、最大値原理の証明手法を離散解析にも応用している。

第 1 章では、空間変数 x について不連続なハミルトン・ヤコビ方程式の初期値問題を考える。本研究は、結晶成長のメカニズムの一つである **2 次元核生成**を動機としている。これは、平らな結晶面に対して外部からの結晶分子の供給により小さな丘ができ、それが元となって始まる成長現象のことである。

従来の粘性解の意味（Crandall-Lions, 石井の意味）では、この種の問題の初期値問題の解の一意性が成り立たない。そこで従来の粘性解の定義を修正・拡張することで、新しい解の概念である**包粘性解**という解の概念を定義し、近似方程式の解の極限を取ることで包粘性解の一意存在を示した。ハミルトニアンが非強圧的な場合には一般に包粘性解の一意性が成り立たないが、一意性が成り立つための十分条件を、x についての不連続性を緩和したハミルトニアンを導入することで与えた。また方程式がベルマン型であるときに、不連続なランニングコストを持つ最適制御問題を考えることで、包粘性解の表現公式を与えた。さらにここで確立した不連続方程式に対する粘性解の理論を、解の長時間挙動にも応用した。

第 2 章では、完全非線形放物型方程式の初期値境界値問題の解の長時間挙動を調べている。ただし半空間の境界上では、非斉次ノイマン条件（接触角条件）を課す。典型例として、材料科学者の Mullins によって提唱された、**結晶の蒸発・凝固モデル**を記述する方程式を考えている。

本研究ではまず、初期値ノイマン問題の粘性解の比較定理（一意性）と存在定理を示す。Mullins のモデルを含む一般的設定の下で、解 u のリスケール関数の極限を調べ、その極限が、初期値を 0 とする対応する極限問題の自己相似解のプロファイル関数である。極限問題は通常のグラフに対する曲率流方程式となることが分かる。

極限問題の自己相似解の性質についても調べる。まずはその形状について、極限問題が退化しているとき、自己相似解には微分できない点である角が現れることを示し、さらにその角度を特定する。次に自己相似解の境界での値（物理的には溝の深さ）について考察

する。特に、熱方程式の自己相似解の溝の深さとの差に対する評価を、比較定理を用いて与える。本研究は、Mullins によるこれらの近似に、適当な意味での数学的正当性を与えるものであり、高く評価したい。

第３章では、最大値原理の証明手法を応用して離散問題を取り扱う。各格子点幅が同じとは限らない n 次元格子点の部分集合 Ω に対し、その体積 $\mathrm{Vol}(\Omega)$ と表面積 $\mathrm{Per}(\Omega)$ に関する**離散等周不等式**を導き、さらに等号成立は Ω が立方体のときに限ることを示す。ただし、Ω の体積と表面積は、各辺の長さがその方向の格子点幅に等しい直方体を、Ω の各点に対してその点が中心にくるよう配置して合併を取った集合の体積と表面積によって定義する。またこの集合が $\mathbf{R}^n$ の立方体となるとき、Ω を立方体と呼ぶ。

証明は、古典的な等周不等式に対する Cabré のアイデアに基づく。これは楕円型方程式に対する Aleksandrov-Bakelman-Pucci の最大値原理の証明手法を用いるもので、あるノイマン境界条件付きポワソン方程式の（劣）解 u に対し、u の上接集合の ∇u による像のルベーグ測度を、測度論の面積公式などを用いて巧みに評価することで、Cabré は古典等周不等式を導いている。本研究における離散版では、∇u を優微分 $\partial^+ u$ で置き換え、$\partial^+ u$ による上接集合の像の測度を u の２階差分で直接評価することで面積公式の代用とし、証明を完成させている。差分化されたポワソン・ノイマン問題の可解性もまた問題であるが、対応する連立１次方程式の未知変数をあえて増やすという技法により劣解を構成した。

第４章では、等高面法の改良について議論している。補助関数 $u(x,t)$ のゼロ等高面として表される $\mathbf{R}^n$ 内の超曲面の運動が、１階のハミルトン・ヤコビ方程式を u がみたすことによって記述される場合を考える。典型例として、ハミルトニアンが与えられたベクトル場と $\nabla u(x,t)$ との内積で書かれる輸送方程式を考えているが、このとき時間が経つにつれて解 u の傾きが小さくなり、計算機ではゼロ等高面を取り出すことが困難であることが知られている。

そこで本研究では、この方程式を修正した方程式を考え、その解 u がもとの方程式の解と同じゼロ等高面を与え、かつゼロ等高面付近で傾きが小さくならないようにできることを示す。方程式は非線形であるので粘性解の意味で解くことになるが、この解は一般に滑らかではない。それ故「傾き」の保持をどのような意味で正当化するかが問題となるが、ここではゼロ等高面への符号付き距離関数を用いてその正当化を行った。

このように本博士論文では、結晶成長問題をはじめ、現実にはなんとなく考えられていることに数学的厳密な基礎づけを与えるなど、粘性解理論の深化と応用に大きく貢献したといえる。よって論文提出者の浜向直氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。