論文の内容の要旨

博士論文題目

Examples of factors which have no Cartan subalgebras
(カルタン部分環を持たない因子環の例)

氏名　磯野 優介

この論文では，フォンノイマン環が Cartan 部分環を持たないための十分条件について考察した．特にその条件を用いる事で，自由量子群と呼ばれる量子群から作られるフォンノイマン環が Cartan 部分環を持たない事を示した．この結果について説明するため，まずはフォンノイマン環や Cartan 部分環について先に触れておく．

フォンノイマン環とは，ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素のなす環 $\mathbb{B}(H)$ の部分環であり，対合作用で閉じ，さらに各点収束の位相で閉じたもののことである．特に単純（各点収束で閉じたイデアルを持たない）な時，それを因子環という．可換なフォンノイマン環はいつも L^∞ 関数環と同型になるため，フォンノイマン環論は非可換積分論と呼ばれることもある．

フォンノイマンの最も重要な例として，離散群 Γ の左正則表現から生成されるフォンノイマン環 $L\Gamma$ がある（以下群フォンノイマン環という）．群の情報から，対応する群フォンノイマン環の情報を取り出そうというのが，近年のフォンノイマン環論においての中心的な話題である．

群フォンノイマン環の一般化として，離散群 Γ の測度空間 X への作用からもフォンノイマン環を作る事が出来る（以下群測度フォンノイマン環，$L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ と書く）．この時 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は $L^\infty(X)$ を部分環に持っており，特に群作用が（本質的）自由であるときには，Cartan 部分環と呼ばれるものになる．逆に全ての Cartan 部分環は弱い意味でこのような形をしているため，フォンノイマン環が Cartan 部分環を持つという事は，その環を研究する上での重要な足がかりにもなりうる．

フォンノイマン環論最大の研究対象である自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ は Cartan 部分環を持たない (以下 Cartan free) 事が知られている．これはつまり，$L\mathbb{F}_n$ の研究には Cartan 部分環を使えないという否定的な事実であるが，一方でフォンノイマン環が Cartan free であるという事は，群測度フォンノイマン環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ の構造を持たないという事であり，すなわち $L\mathbb{F}_n$ は（本質的自由な）群作用からは絶対に得られない環である事を意味する．だから Cartan free であるという事は，フォンノイマン環の分類問題において，非常に大き

な意味を持つ事になる.

自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ が Cartan 部分環を持たないという定理は，もともとは自由確率論と呼ばれる特別な手法を用いて証明された事実であるが，近年 Sorin Popa により導入された新たな技術（Theorem 2.2.1）を元に，純粋なフォンノイマン環論を用いた証明が与えられている（小澤–Popa [23]）．ここでの証明は非常にシンプルだったため，この証明を改良する事で，多くの Cartan free な環が発見されている.

私の論文の主定理は，Cartan free に対する新たな十分条件を与えた事である（Theorem A）．これは近年発表された Popa–Vaes の論文 [27]（上記小澤–Popa の改良の一つ）において用いられた群フォンノイマン環を解析するための技術が，より一般のフォンノイマン環に対して適用出来る事を示したものである．今まで知られている Cartan free の例の多くは群フォンノイマン環であるが，私の論文では抽象的な条件付けを与えたため，群フォンノイマン環である必要がない．その結果として，自由量子群と呼ばれる量子群 $U(n)^+$（または $O(n)^+$，ただし本稿では $A_u(1_n)$，または $A_o(1_n)$ と書かれている，Subsection 2.4）から作られるフォンノイマン環 $L^\infty(U(n)^+)$ が Cartan free である事を示した.

自由量子群 $U(n)^+$（または $O(n)^+$）とは，ユニタリ群（または直行群）の量子群的な自然な類似物である．この量子群は強い普遍性を持っているため，そこから作られるフォンノイマン環は，自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ と近い性質を持つことが知られていた．そのため $L\mathbb{F}_n$ と同様に Cartan free が成り立つと期待されていたが，環の構造が群フォンノイマン環よりも複雑なため，これまでの手法は使えなかった．私の論文では抽象的な条件付けを与えたため，量子群の複雑さと関係なく，Cartan free である事を示す事が出来た.

定理の仮定は二つある．一つは小澤によって定義された条件（AO）と呼ばれるものを少し強めたもの（以下 $(\mathrm{AO})^+$，Definition 3.1.1），もう一つは弱従順性と呼ばれる群の性質に対応するフォンノイマン環の近似性質（以下 W*CBAP，Subsection 2.3）である．条件 $(\mathrm{AO})^+$ についてもやはり群論の方に対応する条件 (bi-exactness) があり，これらはもともとの Popa–Vaes の論文で述べられていた群論的な条件を，自然にフォンノイマン環の言葉に翻訳したものである．具体例である $L^\infty(U(n)^+)$ がこれらを満たす事はすでに知られていた.

さて，この自由量子群をさらに一般化する事で，III 型フォンノイマン環 $L^\infty(A_u(F))$（trace を持たない）が得られる．これが Cartan free かどうかは，やはり興味深い問題である．上記の方法では，フォンノイマン環が II 型である事（trace を持つという事）を仮定していたため，そのままのやり方では上手くいかない．そこで私は，この III 型環の連続核（常に II 型になり，trace がある）を研究し，これがある自然な仮定を満たせば，元の III 型環 $L^\infty(A_u(F))$ が，ある特別な Cartan 部分環を持たない事を示した（Theorem B)．これは Cartan free よりも弱い結果ではあるが，III 型環に対する Cartan free の結果は少ないため，非常に興味深い結果である．しかし一方で，$L^\infty(A_u(F))$ がこの定理の仮定を満たすかどうかはまだ未解決である.

ここでも，定理の仮定は二つある．一つは $(\mathrm{AO})^+$ を自然に連続核の上で定義したもの（Definition 3.2.1)，もう一つはやはり W*CBAP を持つことである．前者は私の論文の中で考察されており，特に $L^\infty(A_u(F))$ の連続核がいつもこれを満たすことが証明されている（Proposition 3.2.4)．一方で，W*CBAP については（特別な場合を除いて）II 型の時しか確認されておらず，これが III 型の時に成り立つかどうかは，それ自体が興味のある問題である．実際，III 型量子群フォンノイマン環で W*CBAP を満たすような環は（従順な場合を除いて）ほとんど知られていない．これは III 型環特有の難しさが出てくるからであり，これを乗り越えて弱従順性を示すこと，そして III 型環の場合の Cartan free を示す事が今後の課題である.