

## 論文審査の結果の要旨

磯野優介

本論文において論文提出者は、フォン・ノイマン環がカルタン部分環と呼ばれる、よい性質を持った部分環を持たないための十分条件を研究し、その応用として新しい重要な例を構成した。

カルタン部分環の定義は正則な極大可換部分環である。測度空間  $(X, \mu)$  に対し、測度を保つ  $X$  上の変換、あるいは非特異な変換  $T$  が与えられたとき、それが誘導する  $L^\infty(X, \mu)$  の自己同型を通じて接合積と呼ばれる新しいフォン・ノイマン環  $L^\infty(X, \mu) \rtimes \mathbb{Z}$  が作られる。これはフォン・ノイマンとマレーにさかのぼる古典的な構成法であるが、このとき、 $L^\infty(X, \mu)$  はフォン・ノイマン環  $L^\infty(X, \mu) \rtimes \mathbb{Z}$  のカルタン部分環になっており、これが最も典型的なケースである。これ以外の場合も適切な意味で一般のカルタン部分環はこれに「近い」形をしていることが知られている。そのため、カルタン部分環を持つフォン・ノイマン環については、 $L^\infty(X, \mu)$  にあたる部分を調べることにより、エルゴード理論の手法が使えることになる。特にカルタン部分環が適切な意味で一意的なケースが最近知られており、この場合はそのフォン・ノイマン環の研究の多くがエルゴード理論に帰着する。

一方、カルタン部分環を持たないフォン・ノイマン環についてはそのようなことが全くできないため「たちの悪い」ケースと考えられており、これまでこのような場合について有効な一般的研究法は知られていない。

そもそもカルタン部分環を持たないフォン・ノイマン環が実際に存在するかどうかということが長年の未解決問題だったのであるが、これについてはヴォイクレスクが1996年に、2個以上の生成元を持つ自由群の群フォン・ノイマン環はカルタン部分環を持たないことを示した。これは自由エントロピーと呼ばれるヴォイクレスク自身が導入した不変量を用いた高度に技術的な証明であったが、その後最近是小沢、ポパ、ヴァースによる大きな進展があり、カルタン部分環を持たないフォン・ノイマン環の例（およびカルタン部分環が強い意味で一意的であるフォン・ノイマン環の例）が多く見つかっている。

そこで近年、カルタン部分環を持たないフォン・ノイマン環をさらに多く構成するということが大きな関心を持たれる重要問題となっており、激しい競争が繰り広げられている。論文提出者はこの問題について新しい重要な貢献を行ったものである。

これまで多くの研究者が「これこれの条件を持った群フォン・ノイマン環はカルタン部分環を持たない」というタイプの定理を証明してきた。これは上記のヴォイクレスクの結果の拡張にあたるものである。それらの議論は、フォン・ノイマン環が離散群の群環から作られているという条件を本質的に用いていたのであるが、論文提出者は独自のアイディアにより、離散群から

作られているという条件を用いない抽象的な十分条件を与えることに成功したものである。この応用として、自由量子群と呼ばれる一連のフォン・ノイマン環はすべてカルタン部分環を持たないことが示された。これらはほぼ確実にカルタン部分環を持たないと信じられていて、それを証明するため多くの人が努力していたものであるが、群環から来ていないという技術的困難のためこれまで誰も証明に成功していなかったものである。このことを示すために、論文提出者は条件 (AO) と呼ばれる有名な条件を少し強めた (AO<sup>+</sup>) を導入し、これと弱従順性があれば一般にカルタン部分環を持たないことを証明したのである。

またこれは  $\text{II}_1$  型と呼ばれるフォン・ノイマン環に対する研究であるが、III 型と呼ばれるフォン・ノイマン環についても、少し弱い形であるが、同類の結果を得た。III 型のフォン・ノイマン環については別種の技術的困難があるため、このような結果はこれまで得られていなかった立派なものである。

よって、論文提出者磯野優介は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。