論文の内容の要旨

On the Asymptotic Expansion Method and its Applications

(漸近展開法とその応用について)

戸田 真史

本論文では確率過程における漸近展開法の高次の展開の一般的な表現と計算手法の導出，及び漸近展開法の拡張とそのファイナンスの問題への応用に関する研究を行った．

近年の金融市場の発達に伴い，非常に複雑な構造を持った金融商品が実際に取引されるようになってきている．またリーマン・ショック以降顕在化してきたクレジットリスクなど，金融市場のモデルも複雑化してきている．このような状況下において，金融実務上重要となっている金融商品の適切な価格評価は困難な問題であり，通常はモンテカルロ・シミュレーションに代表される計算負荷の大きい数値計算手法に頼らざる得ない状況となっている．その一方で，実際のトレーディングにおいては，迅速な商品の価格評価，リスク指標の計算，あるいはモデルのパラメータ推定（キャリブレーション）等のために，高速に計算可能な手法への需要は依然として高い．それらの目的のために現在までデリバティブの価格等に対する様々な解析的近似解法が提案されている．特に，Yoshida[1992]，Kunitomo-Takahashi[1995] 等によって確立された漸近展開法は極めて一般的な仮定のもとでオプション価格等の近似公式を統一的に与える事の出来る有力な手法であり，現在まで様々な数理ファイナンスの問題に応用がなされている．

従来の漸近展開法に関する文献では，漸近展開の 3 次までの次数の展開公式しか明示されておらず，ファイナンス等への応用研究でも，比較的低次の漸近展開が主として用いられてきた．一方で近年では，コモディティなどに代表されるように満期の長いオプションが取り引きされるようになってきたこと，リーマン・ショック以降の極めてボラティリティの大きな市場状況など，従来の 3 次までの漸近展開では必ずしも十分な近似精度が確保できない状況になりつつあり，実務上でもより精度の高い，高次の漸近展開の必要性が高まってきている．

そのような状況を踏まえ，Chapter 1 では漸近展開法による近似公式の従来とは異なる計算方法を提案し，一般の次数についての展開公式の導出を行った．漸近展開の具体的な表現を求めるにはある種の Wiener-Ito 重積分の条件付期待値を計算する必要があり，従来の研究ではこれらを Takahashi[1999] 等で与えられていた公式を用いて計算を行っていた．しかし，これらの公式は 3 次までの漸近展開に必要なものしか明示されておらず，それより高次

の漸近展開の具体的な計算は必ずしも自明ではなかった．本論文では従来の条件付期待値の公式を用いずに，条件付期待値がある種の期待値の級数として表現されること (Lemma 2) を利用して，それらの期待値が満たす微分方程式系を求めることで，一般の次数についての漸近展開の展開公式を導出した (Theorem 2 及び Theorem 3)．また，この公式の中に現れる微分方程式系はある種の階層構造を持っており，例えば数式処理ソフト等を用いれば任意の次数まで容易に逐次計算出来ることも示した．この新たに提案した計算手法では従来では困難であった高次の漸近展開の統一的な計算が可能になり，これによってより精度の高い近似式の導出が出来るようになった．

Chapter 2 では, Chapter 1 で導出した高次の漸近展開法の具体的なファイナンスの問題への応用と他手法との比較 (Section 2.1 及び Section 2.2)，及び漸近展開の拡張に関する研究を行った (Section 2.3 及び Section 2.4)．

Section 2.1 では高次の漸近展開法を確率的ボラティリティモデル (λ-SABR モデル) の下でのオプション価格計算に応用した．また，λ-SABR モデルの特殊ケースである SABR モデル下でのオプション価格計算も行った．SABR モデルの下でのオプション価格評価には Hagan et al.[2002] による近似式が良く知られているが，その近似式との近似精度の比較も行った．特に Hagan et al.[2002] による近似式, 及び低次の漸近展開では近似精度が悪化する長期 (満期 10 年) のケースに関する数値実験を行い，Chapter 1 で提案された計算手法によって導出した高次 (5 次) の展開を用いることで近似精度が大幅に改善される事を示した．

Section 2.2 では同じく確率的ボラティリティモデル (λ-SABR モデル) の下でのアベレージ・オプションの価格評価問題に漸近展開法を応用した．経路依存型オプションであるアベレージ・オプションの価格評価を行う際にも Chapter 1 で提案した計算手法を用いることにより機械的に高次の漸近展開による近似式を導出できることを確認した．

Section 2.3, 及び Section 2.4 では漸近展開法の拡張に関する研究を行った．通常の漸近展開法の枠組みではその極限分布 (展開式の 1 次部分) は正規分布となるが，漸近展開法の枠組みを若干変更することにより近似式の 1 次の項の分布が正規分布以外の分布になるような漸近展開を構成することが出来る．近似対象の分布が正規分布とは大きく異なった分布である場合，通常の正規分布を中心とする漸近展開では特に低次の展開の近似精度が悪化する傾向があり，そのようなケースでは展開の 1 次の項の分布を正規分布以外の分布になるような漸近展開を構成することで低次の展開の近似精度の向上が期待できる．

Section 2.3 では，もとの確率過程の指数部分を展開することで，近似式の第 1 項が対数正規分布 (Black-Scholes モデル) あるいは，シフト付対数正規分布 (displaced diffusion) になるような近似公式を導出した．また同様の考え方を用いることにより，Poisson 型のジャンプを含む確率的ボラティリティモデル (jump diffusion stochastic volatility model) のジャンプ拡散過程 (jump diffusion process) を中心とする漸近展開による近似式を導出した．

Section 2.4 では Section 2.3 の対数正規型の漸近展開を一般化し，変数変換を利用した漸近展開法として定式化した．また，併せて漸近展開の摂動パラメータの導入方法という観点から既存の漸近展開法の研究を整理した．変数変換を利用した漸近展開に関しては，特に局所ボラティリティを含むモデルに対して，拡散項が局所ボラティリティを含まない形に変数変換を行った上で漸近展開を適用する方法を提案した．具体例として，SABR モデル

に対し，通常の正規分布を中心とする漸近展開，対数正規分布を中心とする漸近展開，上記の変換を施した漸近展開 (カイ二乗分布を中心とする展開に相当) をそれぞれ行い，オプション価格の近似式を導出してその近似精度を比較し，提案した方法が他の展開と比較して安定した近似が得られる事を確認した．

以上のように，本論文では漸近展開法の一般次数の展開公式の導出，及び変数変換を用いた展開の中心が必ずしも正規分布とはならない漸近展開法の定式化を行った．特に，具体的なファイナンスの数値的な問題に対して，高次の漸近展開，及び適切な分布を中心とする漸近展開法を利用することにより近似精度の向上ができることを示した．