

Theory of quantum measurement of energy  
—Quantum algorithm and its evaluation—

( エネルギーの量子測定理論  
—量子アルゴリズムとその性能評価— )

仲山 将順

## 1 概要

エネルギーの演算子であるハミルトニアンは閉鎖系の時間発展を記述し、また熱浴と接する量子系の平衡状態の性質も決定する基本的な量である。フォン・ノイマンによる量子力学の公理では、すべての可観測量には対応する量子測定が存在するとされるが、一方でハミルトニアンは一般に非局所的な演算子であり、対応するエネルギーの量子測定をどのように実行するかということは自明ではない。このエネルギーの測定の実行方法に関しては、量子力学の黎明期からおよそ 80 年間にわたってさまざまな議論がされてきた。1931 年にランダウとパイエルスは摂動論を用いた測定モデルを構成し、それに必要な時間  $\tau$  と測定精度  $\varepsilon$  の間に  $\tau\varepsilon \geq \hbar$  の関係（エネルギーと時間の不確定性関係）があることを導いた。しかし、1963 年にアハラノフとボームは、相互作用の結合定数をいくらでも大きくできる測定器系が存在することを前提として、エネルギーと時間の不確定性関係を満たさない測定を構成している。これらの場合はいずれも系のハミルトニアンが測定者にとって既知であるという前提に基づいている。2002 年のアハラノフ、マサー、チャイルズらの論文においてはいじめて、系のハミルトニアンが未知の場合におけるエネルギーの測定が考察された。ハミルトニアンが未知の系に適用できるエネルギーの測定方法を示すことは、あらゆるハミルトニアンをもつ系に適用できる一般的な方法を示すことであり、重要な問題設定である。しかし、彼らの論文の中ではハミルトニアンが未知の系に対するエネルギーの測定方法は具体的に構成されておらず、測定に必要な時間を見積もるだけにとどまっている。

これらの基礎論的な興味加えて、近年、エネルギーの測定のうち“射影測定”と呼ばれるクラスのものには、様々な応用が期待されている。射影測定は、量子系の測定直後にもう一度同じ測定を同じ系に行えば同じ値を得るという「繰り返し可能な仮定」を満たす測定である。1980 年に提案された量子非破壊測定 (QND) では、重力波の検出等にエネルギーの射影測定が利用できることが示されている。また、最近活発な議論がなされている非平衡統計力学の揺らぎの定理 (マイクロなエネルギーの遷移確率と、マクロな熱力学関係式を結びつける理論) についても、実験的な検証を行うことが可能になる。

これらの背景を受け、本論文ではハミルトニアンが未知の系に対して、測定時間の増加に従い漸的にエネルギーの射影測定を可能にする方法を構成し、さらに十分な性能となるのに必要な測定時間を解析す

る。この測定時間の解析で用いる、エネルギー射影測定についての性能評価の指標もまた新たに定式化している。

本論文では、次の二つのエネルギー射影測定の方法を提案している。一つはハミルトニアンを推定し、そのハミルトニアンに対応するエネルギー射影測定を構成する方法（トモグラフィーによる方法）である。この方法は、2002年のアハラノフらの研究のより詳細な考察であるといえる。二つ目は、被測定系となる量子系と量子コンピューターを接続することにより、系のハミルトニアンを特定しないまま、エネルギー射影測定を実装する方法（位相推定アルゴリズムを用いた方法）である。この方法は、量子系の時間発展を量子計算のリソースとして直接利用するという新しい発想の手法である。

## 2 それぞれの測定方法とその性能評価

トモグラフィーによる方法では本論文オリジナルの“ユニタリ演算子の線形推定法”を構成し、得られた演算子の情報を元にエネルギーの射影測定を構成する。既存の推定法としては量子系の一般の状態変化を推定するプロセストモグラフィーが知られているが、本論文の方法は状態変化をユニタリに限っているため推定するパラメーターが少なく済む利点がある。ただし線形推定は一般的には物理的に対応物のない推定値を返すという弱点が知られおり、本研究においてもそのまま射影測定を構成することが一般の場合ではできない。そこで本研究では推定された演算子の各成分の確率的な振る舞いを変えないまま、少なくとも正規性と正則性を満たす演算子へ変換する適当な方法があることを仮定して解析を行った。

位相推定アルゴリズムを用いた方法では、被測定系の時間発展を利用してKitaefの位相推定アルゴリズムを実装する。Kitaefの位相推定アルゴリズムは、漸近的に射影測定を実装できるアルゴリズムである。このアルゴリズムを使うためには、量子コンピューターのあるメモリの状態が $|0\rangle$ のとき被測定系時間発展が静止し、 $|1\rangle$ の場合には通常の時間発展をするような時間発展を実装する必要がある。これを、コントロール化されたダイナミクスという。近年、未知のユニタリで記述されるダイナミクスをに対して、そのコントロール化を厳密に実装することが不可能であることが証明されたが、本研究では漸近的にコントロール化を達成するための新しい量子アルゴリズム、“ユニバサルコントロール化”を提案することでこの問題を回避した。

これら二つの方法で実装した測定が理想的な射影測定からどれほど離れているかを定量評価するため、新たな指標を提案した。既存の測定の評価関数としては、二つの測定の確率分布関数間の距離を現すモンジュ距離や、測定に伴う状態変化の違いを評価する距離関数であるダイヤモンド・ノルムなども知られているが、前者は一般的に計算が困難であり、後者はエネルギー射影測定に対しては一意的に定義することができないために直接適用することができない。本論文では測定値の平均二乗誤差で定義される「測定値の揺らぎ」と、繰り返し可能な仮定をどれほど満たさないかを表す「繰り返し不可能性」という量を定義して測定方法の性能評価を行った。本論文では新たな指標を定義するに留まらず、これらの指標と既存の評価関数（モンジュ距離、ダイヤモンドノルム）との間に成り立つ関係式を導いている。一つは、定義した二つの量がモンジュ距離の上界を与えるというものである。もう一つの関係は、「測定値の揺らぎ」が0の場合、理想的な射影測定と評価したい量子測定とのダイヤモンド・ノルムが一意的に定義され、その値が「繰り返し不可能性」と一致するというものである。これらの結果は、本研究で定義した指標が極めて妥当なものであることを示している。

これら「測定値の揺らぎ」「繰り返し不可能性」で測った際に、十分な性能となるために必要な測定時間を解析することが本論文の目標の一つである。ただし、測定に要する時間は我々が量子系に対して行うことが可能な操作の制限により大きく変わる。そこで本論文では、所望の相互作用が実行可能な有限次元量子系（量子コンピューター）がエネルギーの測定器として与えられ、量子コンピューターは被測定系の時間発展の特徴的なスケールより十分短い時間内に働くとして全体の時間を見積もっている。そのため測定時間は、量子コンピューターが連続した二つの操作をする際に、被測定系が必要な時間発展をするまでの待ち時間の総和で与えられる。

トモグラフィーによる方法と、位相推定を用いた方法それぞれについて、大きさ $\varepsilon$ 以下の「測定値の揺らぎ」を保証するために必要な測定時間を比較すると、トモグラフィーによる方法が $O(d^4 \Delta_{\max}/\varepsilon)$ に比例する一方、位相推定を用いた方法は $O(\Delta_{\max}^3/\varepsilon^2)$ となることがわかった。ここで $\Delta_{\max}$ は系のハミルトニアンの最大のエネルギー固有値と最低のエネルギー固有値の差であり、 $d$ は量子系のヒルベルト空間の次元の大きさである。このことから $\Delta_{\max}^2/d^4$ を下回る「測定値の揺らぎ」を要求する場合にはトモグラフィーによる方法の方が性能がよく、上回る場合には位相推定の方法のほうが性能が良いといえる。

ただし次元  $d$  は系のサイズ（構成粒子数）が増えるにしたがって指数関数的に増加するのに対して、 $\Delta_{\max}$  は近接相互作用しかもたない一般的な物理系に関しては線形に増加するため、サイズが十分大きいほとんどの系に対して位相推定を用いた方法が有効に働くと考えられる。「繰り返し不可能性」に関してはトモグラフィによる方法では測定時間をいくら増やしてもある定数を下回らない場合がある一方、位相推定を用いた方法はいかなる場合でもこの値が 0 となることがわかった。

これらのことから、“位相推定による方法” は大きなサイズの量子系に対して、そのサイズの影響を受けずに効果的にエネルギーの射影測定を行うことができる方法といえる。

### 3 まとめ

本論文の研究成果の要点は以下のとおりである。

1. 実装が不可能であるとされていたユニタリダイナミクスのコントロール化の問題に対して、新しい量子乱択アルゴリズムの提案を行い、漸近的な実装は可能であることを示した。
2. 測定が射影測定としての振る舞いからどれほど遠いかを評価する 2 つの評価関数すなわち「測定値の揺らぎ」、「繰り返し不可能性」を定式化し、測定間の距離を測る既知の関数との関係を導いた。
3. エネルギーの射影測定としてハミルトニアンを推定して測定を実行する“トモグラフィによる方法”と、量子系の時間発展をリソースとして量子アルゴリズムを適用する“位相推定による方法”の 2 つのエネルギーの射影測定方法を具体的に構成した。
4. トモグラフィによる方法と位相推定を用いた方法のそれぞれについて、同じ「測定値の揺らぎ」を保証するための測定時間を計算した。前者は  $O(d^4 \Delta_{\max} / \epsilon)$  に比例するのに対して後者は  $O(\Delta_{\max}^3 / \epsilon^2)$  となることがわかった。
5. トモグラフィによる方法と位相推定を用いた方法のそれぞれについて、「繰り返し不可能性」を計算した。前者が測定時間をいくらかけても 0 に値が収束しない場合がある一方、後者は測定時間によらず常に 0 となることがわかった。