

平成 25 年度 博士学位論文

反応流・伝熱統合解析によるハイブリッドロケット  
内部弾道特性の数値予測技術に関する研究  
(Study on Numerical Evaluation Method for Hybrid Rocket  
Internal Ballistics with Combined Analysis  
of Reactive Flow and Heat Transfer)

東京大学大学院工学系研究科

航空宇宙工学専攻

学生証番号：37-117061

船見 祐揮

指導教員：嶋田 徹 教授

2013 年 12 月

## 概要

次世代の宇宙推進システムとして現在、ハイブリッドロケット推進が注目されている。ハイブリッドロケットとは燃料と酸化剤を異なる相で搭載するロケット推進のことであり、多くの場合には固体の燃料と液体の酸化剤を搭載している。ハイブリッドロケットが有する利点としては、固体ロケットと比較しての高い理論比推力、燃料と酸化剤が物理的に分離されていることによる高い安全性、燃焼生成物に有害物質を含まない良好な対環境性などが挙げられる。一方で、その実用化までに解決されなければならない技術的課題としては、遅い燃料後退速度や低い燃焼効率などが挙げられる。また、ハイブリッドロケットの設計手法が十分に確立されていないことも課題の一つであり、本論文ではこの点に着目する。一般的に、ロケットの設計にあたっては、内部弾道特性、つまり、ロケット内部の現象に起因するロケットの飛翔性能に影響を与えるパラメータ（燃焼室圧力や燃料後退速度など）の特性に関するデータベースの作成が必要となる。まず固体ロケットにおけるデータベースに関して述べると、固体推進薬の燃焼過程が燃料壁面近傍での化学反応といったミクロなスケールの現象によって支配されているがために、モータ内での流動といったマクロなスケールでの現象に大きくは左右されず、ある形状・あるスケールのモータで得られたデータを何らかの補正のもとで別の形状・別のスケールのモータへと適用することが可能である。一方で、ハイブリッドロケットのデータベースにおいては、固体燃料の燃焼が乱流境界層燃焼というメカニズムを通して行われるためにマクロなスケールでの流れ場の挙動にも大きな影響を受けることになり、固体ロケットのようにある形状・あるスケールのエンジンで得られたデータを別の形状・別のスケールのエンジンへと適用することができない点に設計の困難さがある。またハイブリッドロケットにおいては、固体ロケットと比べて内部弾道特性に関わるパラメータの種類が多いことも状況を難しいものとしている。したがって、ハイブリッドロケットエンジンのスケールアップや最適化を図るためには非常に大きな内部弾道特性データベースが必須となり、これを実験あるいは大規模数値計算にて達成することは不可能である。そこで、このような広範な条件および多様なパラメータを含むデータベースの効率的な作成に適用可能な、ハイブリッドロケット内部弾道特性の数値予測技術を構築することが本論文の目的となる。

ハイブリッドロケット内部弾道特性評価のために反応流・伝熱統合解析手法を構築した。この解析手法は大きく分けて二つの部分から成り、一方は燃料グレインポート内およびノズル内の反応流れであり、他方は燃料壁面近傍に着目した熱の流れである。前者のモデルとして準一次元圧縮性 Euler 方程式を扱い、加えて燃料と酸化剤の混合の程度を追跡するために混合分率の輸送方程式を解く。ここで得られた混合分率と熱力学状態量は化学平衡計算と関連付けられる。後者のモデルでは燃料壁面におけるエネルギー収支を扱うことにな

り、ここでは対流熱伝達や輻射熱伝達によって燃料壁面へ流入する熱量、熱伝導により固体燃料中へ流入する熱量および固体燃料の熱分解・気化に必要なエネルギーが考慮される。このエネルギー収支の式を解くことで、燃料後退速度が評価される。この解析手法を用いることによって、燃料後退速度といった内部弾道特性を数値的に予測することが可能である。

構築した反応流・伝熱統合解析手法を用いた本数値予測技術について、その特性の調査を行った。この調査は、本数値予測技術を構成する各要素が燃料後退速度の予測においてどの程度影響を与えるのかを明らかにするために実施された。特性調査にあたって、熱分解・気化速度の評価式中のパラメータ（活性化エネルギーと前指数因子）の感度解析、対流熱伝達モデル（モデル中の質量流束の指数や火炎位置での速度増大）が与える影響の解析、輻射熱伝達が与える影響の解析（放射率のパラメトリック解析）、そして固体燃料壁面温度と実効気化熱の評価法が与える影響の解析が実施された。それらの結果を燃料後退速度の予測の観点から見ると、酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性は対流熱伝達モデルに現れる質量流束の指数に強く支配され、この依存特性が大きく変化するのは輻射熱伝達量が大きい場合においてであることが示された。燃料後退速度の絶対値に関しては、多くのパラメータがある程度の影響を与える一方で、熱分解・気化速度に関わるパラメータである前指数因子は他のパラメータと比べて極めて小さな影響しか与えないことが示された。

本数値予測技術を用いてハイブリッドロケット内部弾道特性の解析を実際に行い、計算値と文献値を比較することで本数値予測技術の解析精度について調査した。また、ハイブリッドロケットエンジンにおいて設計者が操作し得る各種パラメータに様々な値を与えて解析を行い、内部弾道特性データベースの作成例を示した。前者の解析精度の調査にあたっては、GOX/HDPE を用いた実験室スケールエンジンの解析と GOX/HTPB を用いた実験室スケールエンジンの解析を行った。その結果として得られた時空間平均燃料後退速度を文献値と比較したところ、その絶対値は文献値と同程度のオーダーで得られており、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果なしのモデルでの結果が燃料後退速度の下限値として、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果ありのモデルでの結果が燃料後退速度の上限値として使用可能であることが示された。その一方で、酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性の予測に関してはその精度においてまだ課題が残るものとなっているが、輻射熱伝達を考慮することでそれを考慮しない場合と比較してより良い結果を得ることができた。後者の内部弾道特性データベースの作成にあたっては、設計者が操作し得る条件として、燃焼器スケール、燃料グレインポート長さ、固体燃料初期温度、酸化剤流入温度とノズルスロート径の五つのパラメータに着目し、それらのパラメトリック解析を行った。解析には、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果なしのモデルと輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果ありのモデルの二つが採用された。燃焼器スケールを大きくすると、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大を考慮しない場合とする場合のいずれにおいても燃料後退速度が減少する傾向が見られた。また、ハイブリッドロケット燃焼器の相似性を利用して、小さなスケールのエンジンで得られた経験則をそのまま大きなスケールのエンジンへと適用できないことが確認された。その一方で、燃料グレインポート長さのみを変化させた結果として、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大を考慮しない場合とする場合で時空

間平均燃料後退速度に関して異なる傾向が得られた。固体燃料初期温度は燃料後退速度に対して大きな影響を与えることはなく、この点は固体ロケットとは異なる特徴となる。酸化剤流入温度とノズルスロート径では、燃料後退速度の増減に関して輻射熱伝達・火炎位置での速度増大を考慮しない場合とする場合で同じ傾向が得られたが、ノズルスロート径に関しては輻射熱伝達・火炎位置での速度増大を考慮した場合の方がその影響が顕著に現れた。これらの解析の結果として得られたデータベースを用いることで燃料後退速度が取り得る値の幅を大まかに知ることができ、また、どのパラメータが燃料後退速度に対して大きく影響するのかについて把握することができた。したがって、本数値予測技術を用いて作成されたハイブリッドロケット内部弾道特性データベースは有用であると言える。

以上の結果から、本論文にて開発した反応流・伝熱統合解析手法を用いた本数値予測技術におけるハイブリッドロケット内部弾道特性評価の実行可能性が示された。したがって、ハイブリッドロケット設計者がこの手法を用いて広範な条件および多様なパラメータを含む設計データベースを作成し役立てることができると見込まれる。

# 目次

第1章	序論	1
1.1	背景	1
1.1.1	ハイブリッドロケットの特徴	1
1.1.2	ハイブリッドロケットの設計における課題	2
1.1.3	内部弾道特性の数値予測技術に関する先行研究	5
1.2	本研究の目的	7
1.3	本論文の構成	8
第2章	反応流・伝熱統合解析手法	9
2.1	解析手法の概要および仮定	9
2.1.1	解析手法の概要	9
2.1.2	手法構築時に導入される仮定	11
2.2	反応流体解析	14
2.2.1	基礎方程式	14
2.2.2	数値解法	19
2.3	伝熱解析	23
2.3.1	対流熱伝達量の評価	24
2.3.2	輻射熱伝達量の評価	26
2.3.3	熱伝導量の評価	29
2.3.4	気化熱の評価	32
2.3.5	エネルギー収支式の解法	33
2.4	化学平衡計算	33
2.4.1	準一次元流れ場の断面平均温度および断面平均組成の推算，比熱比 および音速の推算	34
2.4.2	火炎温度および燃焼ガス組成の推算	38
2.4.3	火炎下部領域の平均温度および平均組成の推算	40
2.5	解析モデルの選択	43
2.6	解析結果の平均化処理	44
第3章	本数値予測技術の特性	45
3.1	問題設定と代表的な計算例	45
3.2	熱分解・気化速度の影響	50

3.2.1	活性化エネルギーの感度	50
3.2.2	前指数因子の感度	51
3.3	対流熱伝達の影響	52
3.3.1	モデルにおける $G$ の指数が局所燃料後退速度に与える影響	52
3.3.2	モデルにおける $G$ の指数が平均燃料後退速度に与える影響	52
3.3.3	火炎での速度増大の効果が平均燃料後退速度に与える影響	55
3.4	輻射熱伝達の影響	56
3.5	固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法の影響	59
3.6	特性調査の結論	62
<b>第4章</b>	<b>本数値予測技術の評価と適用例</b>	<b>63</b>
4.1	文献値との比較	63
4.1.1	GOX/HDPE 系の実験結果（文献値）との比較	63
4.1.2	GOX/HTPB 系の実験結果（文献値）との比較	66
4.1.3	文献値との比較についての結論	69
4.2	内部弾道特性データベースの作成例	71
4.2.1	燃焼器スケールの影響	71
4.2.2	燃料グレインポート長さの影響	79
4.2.3	固体燃料初期温度の影響	86
4.2.4	酸化剤流入温度の影響	90
4.2.5	ノズルスロート径の影響	94
4.2.6	解析時間	100
4.2.7	内部弾道特性データベース作成についての結論	101
<b>第5章</b>	<b>結論</b>	<b>103</b>
<b>付録A</b>	<b>物性値および各種パラメータ</b>	<b>105</b>
A.1	GOX/HDPE 系	105
A.2	GOX/HTPB 系	106
<b>付録B</b>	<b>時間進行幅の選定</b>	<b>107</b>
<b>付録C</b>	<b>対流熱伝達モデルの導出と修正</b>	<b>109</b>
C.1	Karabeyoglu モデルの導出	109
C.2	Karabeyoglu モデルの修正	112
	<b>参考文献</b>	<b>117</b>
	<b>謝辞</b>	<b>121</b>

# 目次

1.1	University of New Orleans における二次元解析手法の開発例 . . . . .	6
2.1	流入条件 . . . . .	18
2.2	流出条件 . . . . .	18
3.1	Karabeyoglu らの実験条件 . . . . .	45
3.2	活性化エネルギー $E_a$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	51
3.3	パラメータ $k$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	55
3.4	パラメータ $a_v$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	56
3.5	放射率 $\varepsilon_g$ および $\varepsilon_s$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	58
3.6	異なる固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	62
4.1	Karabeyoglu らの実験条件 (再掲) . . . . .	63
4.2	GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の文献値および計算結果 . . . . .	65
4.3	GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	65
4.4	Shanks らの実験条件 . . . . .	66
4.5	GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の文献値 . . . . .	68
4.6	GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の計算結果 . . . . .	69
4.7	GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	70
4.8	モデル 1 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	73
4.9	モデル 2 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	74
4.10	燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	77
4.11	モデル 1 による燃料グレインポート長さ $L_p$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	80
4.12	モデル 2 による燃料グレインポート長さ $L_p$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	81
4.13	空間平均燃料後退速度 (モデル 1, 試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	81

4.14	燃料グレインポート長さ $L_p$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	84
4.15	モデル 1 による固体燃料初期温度 $T_a$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	88
4.16	モデル 2 による固体燃料初期温度 $T_a$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	89
4.17	固体燃料初期温度 $T_a$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	89
4.18	酸化剤流入温度 $T_{inj}$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	90
4.19	モデル 1 による酸化剤流入温度 $T_{inj}$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	92
4.20	モデル 2 による酸化剤流入温度 $T_{inj}$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	93
4.21	モデル 1 によるノズルスロート径 $D_t$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	96
4.22	モデル 2 によるノズルスロート径 $D_t$ のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 . . . . .	97
4.23	ノズルスロート径 $D_t$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	100
4.24	計算環境 . . . . .	101
4.25	解析時間 . . . . .	101
A.1	GOX/HDPE 系における物性値および各種パラメータ . . . . .	105
A.2	GOX/HTPB 系における物性値および各種パラメータ . . . . .	106
B.1	Karabeyoglu らの実験条件 (試験番号 1) . . . . .	107
C.1	速度比 $u_e/u_{f1}$ およびパラメータ $a_v$ の値 . . . . .	116



# 目次

1.1	ハイブリッドロケットを用いた有人宇宙輸送機：SpaceShipTwo . . . . .	2
1.2	固体ロケットにおける燃焼 . . . . .	3
1.3	ハイブリッドロケットにおける燃焼：乱流境界層燃焼 . . . . .	4
1.4	Motoe らによる三次元解析の例 . . . . .	5
1.5	2005 年における University of New Orleans での二次元解析の例 . . . . .	6
1.6	Stoia-Djeska らによる一次元解析の例 . . . . .	7
2.1	解析対象 . . . . .	9
2.2	解析の流れ . . . . .	11
2.3	反応流・伝熱統合解析手法における主要な仮定 . . . . .	12
2.4	燃料壁面固定座標系 $y$ . . . . .	30
2.5	燃料壁面近傍の温度分布 . . . . .	31
3.1	火炎での速度増大および輻射を考慮しないモデルでの解析結果の例（試験番号 1）. . . . .	47
3.2	火炎での速度増大および輻射を考慮するモデルでの解析結果の例（試験番号 1）. . . . .	48
3.3	火炎での速度増大および輻射を考慮するモデルでの解析結果の例（試験番号 1）（続き）. . . . .	49
3.4	活性化エネルギー $E_a$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	50
3.5	前指数因子 $A_c$ のパラメトリック解析にて得られた係数 $a$ と指数 $n$ . . . . .	51
3.6	質量流束 $G$ の指数を $0.5/(1-k)$ に変更したモデル（変形モデル）にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	54
3.7	パラメータ $k$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	55
3.8	パラメータ $a_v$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	56
3.9	気相放射率 $\varepsilon_g$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	57
3.10	固相放射率 $\varepsilon_s$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	58
3.11	異なる固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	60
3.12	実効気化熱の軸方向分布 . . . . .	61

4.1	GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける時空間平均燃料後退速度の文献値および計算値の比較 . . . . .	64
4.2	GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時空間平均燃料後退速度の文献値および計算値の比較 . . . . .	67
4.3	Shanks らによる GOX/HTPB 系ハイブリッドロケット燃焼実験の結果 . . .	70
4.4	モデル 1 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	72
4.5	モデル 2 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	73
4.6	燃焼器スケールを変化させた場合の燃焼室圧力 (試験番号 1, 時刻 0 s) .	75
4.7	燃焼器スケールを変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) . .	76
4.8	燃焼器スケールを変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .	76
4.9	燃焼器スケールを変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .	77
4.10	燃焼器スケールを変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	78
4.11	モデル 1 による燃料グレインポート長さ $L_p$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	79
4.12	モデル 2 による燃料グレインポート長さ $L_p$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	80
4.13	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の局所燃料後退速度 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	81
4.14	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の燃焼室圧力 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	82
4.15	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	83
4.16	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	83
4.17	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	84
4.18	燃料グレインポート長さ $L_p$ を変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	85
4.19	モデル 1 による固体燃料初期温度 $T_a$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	87
4.20	モデル 2 による固体燃料初期温度 $T_a$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	87
4.21	固体燃料初期温度 $T_a$ を変化させた場合の対流熱流束, 輻射熱流束, 伝導熱流束および気化に要するエネルギー ( $T_a = 250$ [K], 試験番号 1, 時刻 0 s) .	88
4.22	モデル 1 による酸化剤流入温度 $T_{inj}$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	91

4.23	モデル 2 による酸化剤流入温度 $T_{inj}$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	91
4.24	モデル 1 によるノズルスロート径 $D_t$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	95
4.25	モデル 2 によるノズルスロート径 $D_t$ のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . . . . .	95
4.26	ノズルスロート径 $D_t$ を変化させた場合の燃焼室圧力 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	96
4.27	ノズルスロート径 $D_t$ を変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	97
4.28	ノズルスロート径 $D_t$ を変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	98
4.29	ノズルスロート径 $D_t$ を変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	98
4.30	ノズルスロート径 $D_t$ を変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s) . . . . .	99
B.1	時間進行幅 $\Delta time$ の影響 . . . . .	108
C.1	Serin らの計算結果 . 時刻 1 s の状態 . . . . .	112
C.2	Chiaverini らの計算結果 . 時刻 3.5 s の状態 . . . . .	113
C.3	境界層内速度プロファイル : (a) 従来型 of 速度プロファイル, (b) 火炎位置での速度増大を含む速度プロファイル, (c) 火炎位置で速度 $u_{fl}$ となり, 従来型 of プロファイルと相似な, 仮想的な速度プロファイル . . . . .	114

# 記号表

$A$	: 断面積
$A_S$	: 固体燃料表面積
$A_c$	: 前指数因子
$A_t$	: ノズルスロート面積
$B_a$	: 空気力学的ブローイングパラメータ
$B_t$	: 熱化学的ブローイングパラメータ
$C$	: すず濃度
$C_f$	: 壁面摩擦係数
$C_{p,j}$	: 化学種 $j$ の定圧モル比熱
$C_s$	: Sutherland 係数
$C_{v,j}$	: 化学種 $j$ の定積モル比熱
$D_{p,0}$	: 初期ポート径
$D_t$	: ノズルスロート径
$E_a$	: 活性化エネルギー
$F$	: Helmholtz エネルギー最小化における評価関数
$\mathbf{F}$	: 流束ベクトル
$G$	: 総質量流束, あるいは, Gibbs エネルギー最小化における評価関数
$G_{ox}$	: 酸化剤質量流束
$H_j$	: モルあたりの化学種 $j$ のエンタルピー
$K$	: スイッチング関数中に現れる定数, 式 (2.40)
$K_{ox}$	: 酸化剤濃度
$L$	: 光路長
$L_p$	: 燃料グレインポート長さ
$M$	: 気相の放射率の評価に必要な定数行列の列サイズ, 式 (2.72)
$N$	: 気相の放射率の評価に必要な定数行列の行サイズ, 式 (2.72)
$N_c$	: 計算領域内の全セル数
$N_g$	: 気体状態の化学種の数
$N_p$	: 燃料グレインポート内の格子点数
$N_t$	: 全化学種の数 (凝縮相も含む)
O/F	: 酸化剤・燃料比
$\mathbf{P}$	: AUSMDV にて用いる圧力ベクトル, 式 (2.29)
$P_E$	: 実効圧力

$Pr$  : Prandtl 数  
 $\mathbf{Q}$  : 保存量ベクトル  
 $Q_c$  : 混合ガス単位質量あたりの燃焼熱  
 $R$  : 断面半径  
 $R_e$  : 比全エネルギー残渣  
 $R_p$  : 圧力残渣  
 $R_u$  : 普遍気体定数  
 $R'_u$  : 化学ポテンシャル評価の際に用いる普遍気体定数  
 $S_j$  : モルあたりの化学種  $j$  のエントロピ  
 $\mathbf{S}_{Mass}$  : 燃料壁面からの質量付加に伴う生成項ベクトル, 式 (2.2), (2.12)  
 $\mathbf{S}'_{Mass}$  : 燃料壁面からの質量付加に伴う生成項ベクトル, 式 (2.13)  
 $\mathbf{S}_{Q1D}$  : 準一次元近似に伴う生成項ベクトル, 式 (2.2), (2.12)  
 $\mathbf{S}'_{Q1D}$  : 準一次元近似に伴う生成項ベクトル, 式 (2.13)  
 $T$  : 温度  
 $T_{inj}$  : 酸化剤流入温度  
 $T_m$  : 融点  
 $U_j$  : モルあたりの化学種  $j$  の内部エネルギー  
 $V$  : 比体積 ( $= 1/\rho$ )  
 $\mathbf{W}$  : 基本量ベクトル  
 $Y_k$  : 化学種  $k$  の質量分率  
 $a$  : 経験式 (1.1), (1.2) や (2.215) のパラメータ, あるいは, 音速, あるいは, 放射率推算式 (2.73) 中のパラメータ  
 $a_m$  : AUSMDV にて用いる最大の音速, 式 (2.33)  
 $a_{ij}$  : 化学種  $j$  一分子中の原子  $i$  の数  
 $a_{k,j}$  ( $j = 1 \sim 7$ ) : 化学種  $k$  の NASA 多項式の係数  
 $a_v$  : 火炎位置での速度増大の効果に関するパラメータ  
 $b$  : 放射率推算式 (2.73) 中のパラメータ  
 $b_{k,j}$  ( $j = 1, 2$ ) : 化学種  $k$  の NASA 多項式の係数  
 $b_k$  : 混合気体単位質量あたりの原子  $k$  の物質量  
 $c$  : 比熱, あるいは, 放射率推算式 (2.73) 中のパラメータ  
 $c^*$  : 特性排気速度  
 $c_{ji}$  : 気相の放射率の評価に必要な定数行列, 式 (2.72)  
 $c_{p,e}$  : 化学平衡状態における定圧比熱  
 $c_{p,f}$  : 化学平衡状態における定圧比熱のうち, 凍結状態の寄与分  
 $c_{p,k}$  : 化学種  $k$  の定圧比熱  
 $c_{p,r}$  : 化学平衡状態における定圧比熱のうち, 反応の寄与分  
 $c_{v,e}$  : 化学平衡状態における定積比熱  
 $e$  : 比内部エネルギー  
 $e_{reaction}$  : 分解層厚さ

$e_t$  : 比全エネルギー  
 $f$  : Helmholtz エネルギー  
 $f(T_S)$  : Newton 法で解くべき  $T_S$  の方程式  
 $f'(T_S)$  : Newton 法で解くべき  $T_S$  の方程式の導関数  
 $f_s$  : スケール係数  
 $g$  : Gibbs エネルギー  
 $h$  : 比エンタルピー  
 $h_k$  : 化学種  $k$  の比エンタルピー  
 $h_v$  : 実効気化熱 (融解・気化潜熱 + 熱分解反応に必要な熱)  
 $h'_v$  : 実効気化熱 (融解・気化潜熱 + 熱分解反応に必要な熱 + 固体燃料の昇温に必要な熱)  
 $h_w$  : 燃料壁面から吹き出す燃料熱分解ガスが有するエンタルピー  
 $k$  : ブロッキング効果に関するパラメータ, 式 (2.67)  
 $l$  : 原子種の数  
 $l_p$  : 断面周長  
 $\dot{m}_F$  : 燃料壁面からの質量付加量  
 $\dot{m}_f$  : 燃料質量流量  
 $\dot{m}_{ox}$  : 酸化剤流入質量流量  
 $\dot{m}_t$  : 全質量流量  
 $n$  : 経験式 (1.1), (1.2) や (2.215) のパラメータ, あるいは, 混合ガス単位質量あたりの気相化学種の全物質質量  
 $n_j$  : 混合ガス単位質量あたりの化学種  $j$  の物質質量  
 $p$  : 圧力  
 $p_k$  : 化学種  $k$  の分圧  
 $(p_k L)_m$  : 放射率推算式 (2.73) 中のパラメータ  
 $q$  : ブロッキング効果に関するパラメータ, 式 (2.67)  
 $\dot{q}$  : 熱流束  
 $\dot{q}_c$  : 対流熱伝達による熱流束  
 $(\dot{q}_c)_{original}$  : Karabeyoglu の対流熱伝達モデル, 式 (2.57), (C.20)  
 $\dot{q}_{rad}$  : 輻射エネルギー流束  
 $r$  : ポート半径方向座標  
 $\dot{r}$  : 燃料後退速度  
 $r_x$  : ポート内格子幅の公比  
 $s$  : スイッチング関数  
 $s_L$  : 流束制限関数  
 $t$  : 時間  
 $t_b$  : 燃焼時間  
 $u$  : 軸方向速度  
 $u'_e$  : 図 C.3 に示した仮想速度プロファイル (c) の境界層端速度  
 $v$  : 壁面垂直方向速度

$w_k$  : 化学種  $k$  あるいは原子  $k$  のモル質量  
 $x$  : 軸方向座標  
 $x'$  : 燃料熱分解ガス  $C_{x'}H_{y'}$  一分子中の原子 C の数  
 $y$  : 壁面垂直方向座標 (静止座標系)  
 $y'$  : 燃料熱分解ガス  $C_{x'}H_{y'}$  一分子中の原子 H の数  
 $\tilde{y}$  : 壁面垂直方向座標 (燃料壁面固定座標系)  
 $\Delta h$  : 燃料壁面と火炎の間の比エンタルピの差  
 $\Delta h_k^0$  : 化学種  $k$  の標準生成エンタルピ  
 $\Delta \ln T$  : 温度の自然対数の変化量  
 $\Delta \ln n$  : 混合ガス単位質量あたりの気相化学種の全物質質量の自然対数の変化量  
 $\Delta \ln n_j$  : 化学種  $j$  の物質質量の自然対数の変化量  
 $\Delta m_F$  : 燃料消費量  
 $\Delta t$  : 計算領域全体での時間幅 (グローバル・タイムステップ法)  
 $\Delta t_i$  :  $i$  番目のセルでの時間幅 (ローカル・タイムステップ法)  
 $\Delta time$  : 時間進行幅  
 $\Delta x_i$  :  $i$  番目のセルの幅  
 $\Delta x_N$  : ノズル内のセルの幅  
 $\Delta \varepsilon$  : バンド・オーバーラップに関する混合ガス放射率の補正項  
 $\Psi$  : AUSMDV にて用いるベクトル, 式 (2.29)  
 $\alpha$  : 熱拡散率  
 $\alpha_{rad}$  : 吸収率  
 $\alpha_L$  : AUSMDV にて用いるパラメータ, 式 (2.32)  
 $\alpha_R$  : AUSMDV にて用いるパラメータ, 式 (2.32)  
 $\gamma$  : 比熱比  
 $\gamma_e$  : 化学平衡状態における比熱比  
 $\delta F$  : Helmholtz エネルギー最小化における評価関数の変分  
 $\delta G$  : Gibbs エネルギー最小化における評価関数の変分  
 $\delta n_j$  : 混合ガス単位質量あたりの化学種  $j$  の物質質量の変分  
 $\delta \lambda_i$  : Lagrange 乗数の変分  
 $\epsilon$  : 微小量  
 $\varepsilon$  : 放射率  
 $\zeta$  : 放射率の補正項に現れるパラメータ, 式 (2.91)  
 $\kappa$  : MUSCL 法の空間精度を制御するパラメータ  
 $\lambda$  : 熱伝導率  
 $\lambda_i$  : Lagrange 乗数  
 $\mu$  : 粘性係数  
 $\mu_i$  : 化学種  $i$  の化学ポテンシャル  
 $\nu_{CFL}$  : Courant 数  
 $\xi$  : 混合分率

$\pi$  : 円周率  
 $\pi_i$  : Lagrange 乗数の符号を変えて  $R_u T$  で除したもの  
 $\rho$  : 密度  
 $\sigma$  : Stefan-Boltzmann 定数  
 $\tau$  : 剪断応力  
 $\phi$  : MUSCL 法の使用の有無を制御するパラメータ  
 $\omega$  : 緩和係数

#### 下付き添字

0 : 壁面吹き出しがない場合,あるいは,標準状態  
1 : 燃料流  
2 : 酸化剤流  
*AUSMD* : AUSMD による評価  
*AUSMV* : AUSMV による評価  
*F* : 燃料  
*I* : ノズル入り口  
*L* : セル境界の左側  
*O* : ノズル出口  
*P* : 燃焼生成物  
*Q1D* : 準一次元流体計算にて得られた値  
*R* : セル境界の右側  
*S* : 燃料壁面  
*T* : ノズルスロート  
*a* : 雰囲気  
*bf* : 火炎下部領域  
*e* : 境界層端  
*final* : 最終位置  
*fl* : 火炎位置  
*g* : 気相  
*i* : 位置に関する番号  
*initial* : 初期位置  
*k* : 化学種あるいは原子に関する番号  
*monomer* : モノマ (燃料ガス)  
*n* : Newton 法の繰り返し数  
*new* : 修正後  
*nv* : 火炎位置にて極大値を持たない速度分布の場合  
*old* : 修正前  
*polymer* : ポリマ (固体燃料)  
*r* : 基準



*s* : 固相  
*soot* : すず  
*st* : 化学量論比

#### 上付き添字

$\bar{\quad}$  : 平均量 (空間平均あるいは時間平均あるいは時空間平均)  
+ : 右行き  
- : 左行き  
0 : 拘束条件  
(1) : Runge-Kutta 時間積分法の第一段階  
*L* : セル境界の左側  
*R* : セル境界の右側  
*n* : 時間に関する番号

#### 略語

AUSM: Advection Upstream Splitting Method  
CEA: Chemical Equilibrium with Applications  
CFD: Computational Fluid Dynamics  
CPU: Central Processing Unit  
GOX: Gaseous OXygen  
HDPE: High Density Polyethylene  
LDPE: Low Density Polyethylene  
HTPB: Hydroxyl-Terminated PolyButadiene  
JANAF: Joint Army-Navy-Air Force  
LES: Large Eddy Simulation  
MUSCL: Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws  
NASA: National Aeronautics and Space Administration  
PC: Personal Computer  
RHS: Right Hand Side

# 第1章 序論

本章では、まず本研究の背景として、ハイブリッドロケットの特徴とその設計における課題、ハイブリッドロケット内部弾道特性の数値予測に関する従来の研究について述べる。次いで本研究の目的について説明し、最後に本論文の構成について述べる。

## 1.1 背景

本研究の背景として、ハイブリッドロケットの定義やそれがどのような特徴を有しているのかについて、および、ハイブリッドロケットの設計における課題について説明する。また、ハイブリッドロケット内部弾道特性の数値予測技術に関する従来の研究について述べる。

### 1.1.1 ハイブリッドロケットの特徴

次世代の宇宙推進システムとして、現在、ハイブリッドロケット推進が注目されている。ハイブリッドロケットとは燃料と酸化剤を異なる相で搭載するロケット推進のことであり、多くの場合には固体の燃料と液体あるいは気体の酸化剤を搭載している。ハイブリッドロケットが有する利点として、以下の点が挙げられる。

- 固体ロケット推進と比しての高い理論比推力
- 燃料と酸化剤が物理的に分離されていることに起因する高い安全性
- 燃焼生成物に有害物質を含まない良好な対環境性
- 消炎・再着火やスロットリングが可能なことによる高いミッション適合性
- 優れた安全性に基づく管理費の低減や安価な燃料（炭化水素高分子材）の使用による低コスト性

これらの利点を受けて、ハイブリッドロケットは多くの大学で学生の教育用ロケットとして採用されており、また、アメリカでは有人宇宙輸送機への適用が進められている。Scaled Composites 社では有人宇宙輸送機 SpaceShipOne が開発され、2004 年には民間企業として初めて高度約 100km に到達した [1]。この成功を受けて現在 SpaceShipTwo の開発が進められており、2013 年 4 月にはロケットエンジンを用いた飛行試験が実施された（図 1.1）[2]。



図 1.1: ハイブリッドロケットを用いた有人宇宙輸送機：SpaceShipTwo [2] .

以上のような多くの利点を有する一方で，ハイブリッドロケットには実用化までに解決されなければならない技術的課題がいくつか残されている．例えば，次のような課題である．

- 遅い燃料後退速度
- 低い燃焼効率
- 燃焼不安定性

また，ハイブリッドロケットの設計手法が十分に確立されていないことも課題として挙げることができる．これらの課題に対しては現在まで研究が進められており，特に燃料後退速度の向上に関しては，酸化剤旋回流方式 [3] やパラフィンに代表される低融点燃料の使用 [4] など有望な方法が提案されている．

### 1.1.2 ハイブリッドロケットの設計における課題

ここでは固体ロケットの設計とハイブリッドロケットの設計を対比することで，ハイブリッドロケットにおける設計の課題について説明する．説明の中で「内部弾道特性」という言葉を用いるが，これはロケット内部の現象に起因する，ロケットの飛翔性能に影響を与えるパラメータの特性を指す．例えば，燃焼室圧力や燃料後退速度の特性が挙げられる．

#### 固体ロケットの設計

推進薬グレインは酸化剤粒子と金属粒子を燃料となるバインダで混ぜ固めて整形することで作られている．推進薬壁面から気化した燃料ガスと酸化剤ガスが壁面ごく近傍にて化

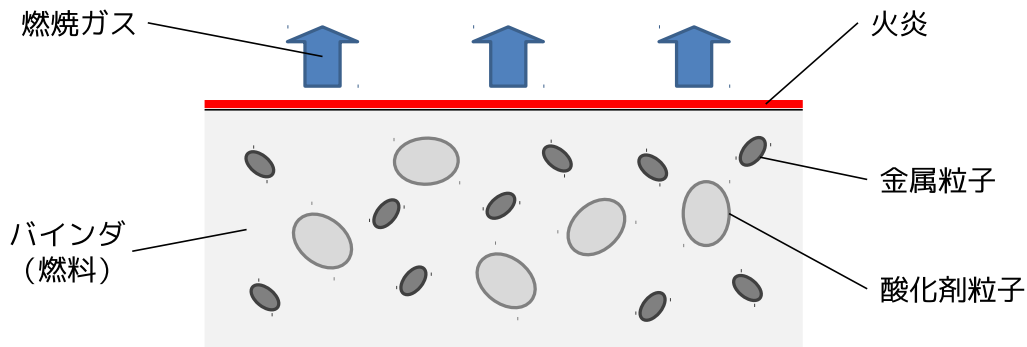


図 1.2: 固体ロケットにおける燃焼 .

学反応することになる ( 図 1.2 を参照 ) . 燃焼時には推進薬の組成に応じた酸化剤・燃料比 O/F が達成され, 言い換えると, 推進薬組成を調整することで O/F を制御することができる . したがって, O/F は基本的にはモータ内のマクロな流れのスケールには左右されず, 燃焼過程は化学反応律速となり, 圧力依存の燃焼速度が得られる .

$$\dot{r} = ap^n \quad (1.1)$$

要求推力を満たす固体ロケットモータの設計は, この関係 (1.1) を利用して, 燃焼室圧力に対する燃焼速度 ( 推進剤ガス発生量 ) のデータベースを用いることで, 燃焼面積を決定することにより行われる . この内部弾道特性データベースの作成にあたって, 一般的には, モータ内での流動といったマクロなスケールの現象ではなく, 燃料壁面近傍での化学反応といったミクロなスケールの現象によって燃焼速度が支配されているという事実が大きな意味を持っている . つまり, この事実により, ある形状・あるスケールのモータで得られたデータを, 何らかの補正が必要ではあるものの, 別の形状・別のスケールのモータへと適用することが可能となる . 実際に, スtrand燃焼試験や小型固体ロケットモータにより得られたデータを基に, 実寸大の固体ロケットモータの設計が行われている . また, データベースを構築するために必要なパラメータの数も比較的少なく, そのパラメータとしては燃焼速度や燃焼室圧力, 初期推進薬温度などが挙げられる .

### ハイブリッドロケットの設計

ハイブリッドロケットを特徴付けるのは乱流境界層燃焼と呼ばれる燃焼形態である . 境界層燃焼の概略を図 1.3 に示す . ハイブリッドロケットの燃焼器は, 固体燃料で作られたグレインのポート内を気化した酸化剤が流れる構造となっている . 気相からの熱の流入を受けて固体燃料が熱分解・気化し, 固体燃料壁面上に形成された乱流境界層内にて燃料ガスと酸化剤ガスが拡散・混合する . そして, 燃焼反応が生じて火炎を形成し, それにより発生した熱が対流熱伝達や輻射熱伝達によって固体燃料へと伝わり固体燃料の熱分解・気化が促進される . 固体燃料が気化する速度は気相からの熱流入量のみではなく, 表面での

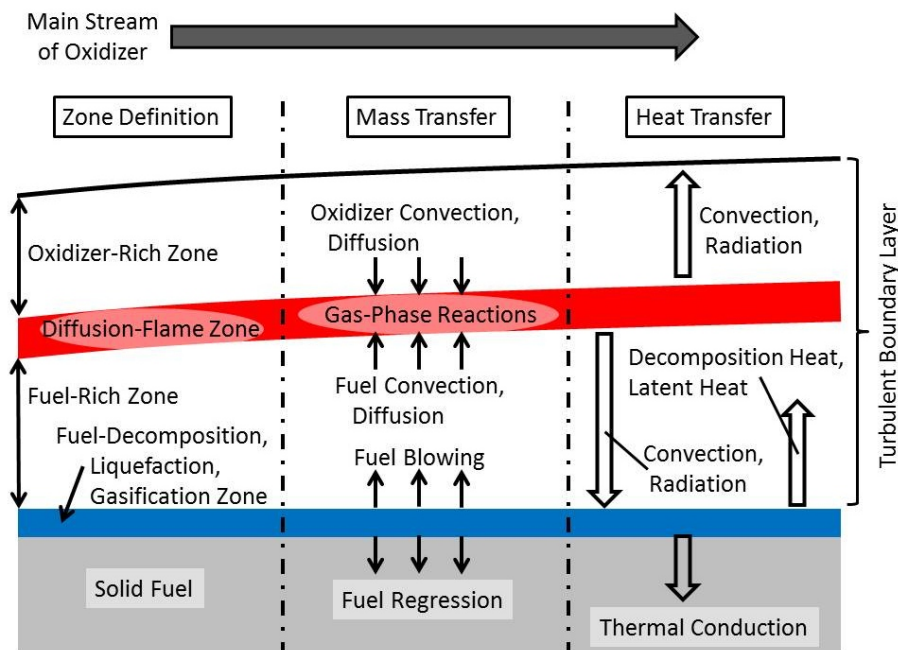


図 1.3: ハイブリッドロケットにおける燃焼：乱流境界層燃焼。

燃料の熱分解反応、固体燃料の液化や気化に要する潜熱や固体燃料中への熱伝導といった要素にも影響される。さらに境界層燃焼は、燃焼器内での渦の挙動、軸流流入や旋回流入に代表される酸化剤流入方式などといったマクロなスケールでの流れ場の挙動にも影響を受ける。結果的に燃焼過程は拡散律速となり、質量流束依存の燃料後退速度が得られる。

$$\dot{r} = aG^n \quad (1.2)$$

エンジン設計に向けて、この質量流束に対する燃料後退速度（燃料ガス発生量）のデータベースを作成することになる。しかしマクロなスケールの現象が燃料後退速度に大きく影響するために、ある形状・あるスケールのエンジンで得られた内部弾道特性データを別の形状・別のスケールのエンジンへと適用することは難しい。次に、酸化剤・燃料比 O/F の観点から考える。酸化剤流量はバルブの開閉の調節により設計者が自由に与えることが出来るが、燃料流量は境界層燃焼のメカニズムを通して決まるために流れ場に関わる多くの要素の影響を受ける。したがって O/F に関してもこれらの要素の影響を受けることとなり、また、時間の経過に伴って O/F の値が変化するような状況となる。そのため、データベースを構築するために必要なパラメータの数が非常に大きくなり、そのパラメータとしては燃料長さ、ポート径、ポート形状、前部・後部燃焼室の有無およびそれらのサイズ、酸化剤流入方式およびインジェクタ形状、流れ場の状態(乱流の強さ、渦の発生状況、...)などが挙げられる。現状は実験データ(あるいは解析データ)が存在する範囲でのみ設計が可能であり、エンジンのスケールアップや性能の最適化を図るのが難しい。ハイブリッドロ

ケットが抱えている上記の状況は，固体ロケットと比較して非常に困難なものであることは明らかである．スケールアップや性能の最適化を可能とする内部弾道特性データベースを作成することはそのデータベースの大きさのために実験のみで行うことはほぼ不可能であり，したがって多様な条件を効率よく解析可能な数値予測技術が必須であると言える．

### 1.1.3 内部弾道特性の数値予測技術に関する先行研究

ハイブリッドロケットエンジンの設計に際してその内部弾道特性を理解するために，多様な条件に対応した内部弾道特性データベースが必要となる．この特性を数値解析によって把握しようとする研究は，これまで多くの研究者により行われてきた [5]．

数値流体力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）を用いてエンジン内部の流体现象を解析し，それを内部弾道特性の評価へとつなげようとする研究が行われている．三次元燃焼場の CFD 解析としては，Large Eddy Simulation (LES) とフレイムレットモデルを用いた Motoe らの解析（図 1.4） [6] や化学平衡計算を CFD と組み合わせた Koda らの解析 [7] などが挙げられる．これらの三次元モデルを用いた解析は流れ場の詳細な状態を知ることができ，メカニズムの解明に役立つ一方で，スーパーコンピュータを要する非常に計算負荷の高い解析となり，多様な条件下での解析を必要とする実設計には適さないものとなる．これに対して二次元燃焼場の CFD 解析に次元を落とせば，三次元場としての詳細な情報は得られなくなるものの，より計算負荷の低い解析となる．二次元解析の例としては，表 1.1 や図 1.5 に示したような，University of New Orleans の Akyuzlu らの解析 [8–11] が挙げられる．表 1.1 から分かるように，モデルを実際に則した厳密なものにしていくほど現象を追っている時間が短くなり，これらの例ではせいぜい数秒程度の解析時間である．さらに計算負荷の低い方法としては，一次元やゼロ次元での解析がある．一次元解析の例としては Stoa-Djeska らによる音響振動の解析（図 1.6） [12] が挙げられ，ゼロ次元解析の例

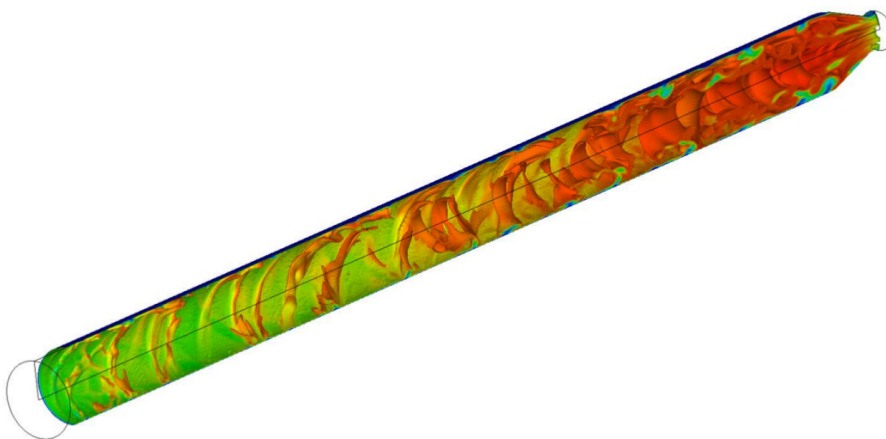


図 1.4: Motoe らによる三次元解析の例 [6]．混合分率の値を用いて色付けされている．

表 1.1: University of New Orleans における二次元解析手法の開発例 .

発表年度	1998	2001	2002	2005
非圧縮性 /圧縮性の別	非圧縮性 (エネルギーの保存 式のみを解く)	非圧縮性	非圧縮性	圧縮性
層流/乱流 の別	層流	層流	乱流 ( $k-\varepsilon$ )	乱流 ( $k-\varepsilon$ )
燃焼モデル	燃焼反応 を扱わず	燃焼反応 を扱わず	一段総括反応 (有限速度)	一段総括反応 (有限速度)
解析した現象 の時間	2 秒まで	1 秒まで	0.6 秒まで	0.12 秒まで
参考文献番号	文献 [8]	文献 [9]	文献 [10]	文献 [11]

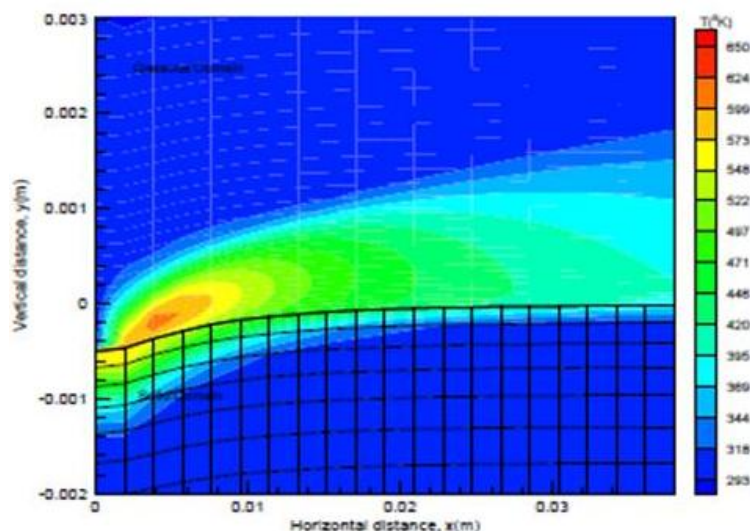


図 1.5: 2005 年における University of New Orleans での二次元解析の例 [11] . 時刻 0.12 秒での温度分布 .

としては白石らによる性能パラメータの時刻変化予測 [13] が挙げられる . これらの解析では , 燃料後退速度を見積もるために燃焼試験により得られた経験式 (1.2) を用いている . このような低次元の解析においては燃料後退速度の評価に関して同様の方法を取るものが多く , 事前に燃焼試験を必要としている .

以上の解析では極限られたケースの解析しか行われておらず , エンジン設計に必要な多

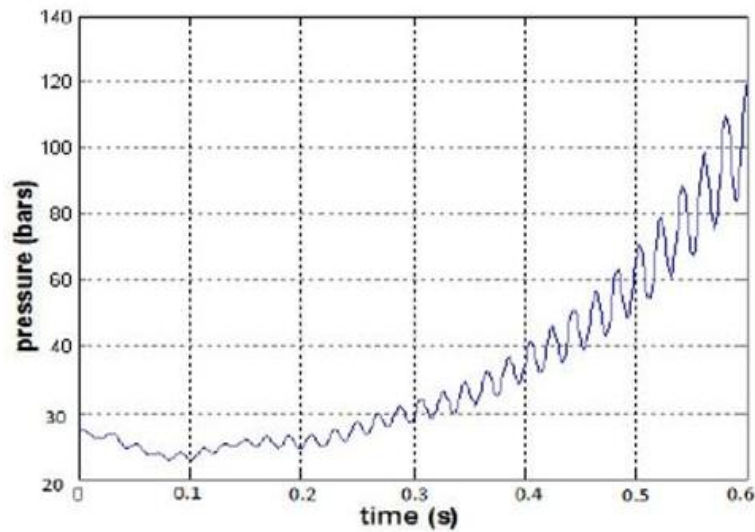


図 1.6: Stoia-Djeska らによる一次元解析の例 [12]：圧力振動の様子。

くの条件を用いたパラメトリック解析を効率よく行える手法の検討がまだ十分ではない。また、既存の低次元・軽量解析手法では、燃焼実験で得られた経験式 (1.2) を用いている場合が多く、事前に燃焼試験を要するなど、まだ課題が残されている。それに関連して、設計に際して重要な情報となる質量流束に対する燃料後退速度の依存特性 (指数  $n$ ) の予測を目的とした解析が行われておらず、この特性の予測可能性が検証されていない。これらの点は、ハイブリッドロケット内部弾道特性データベース作成に向けた数値予測技術を開発するにあたって注目すべき課題となる。

## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、ハイブリッドロケットエンジンの最適設計やスケールアップに必要な、広範な条件および多様なパラメータを含む設計データベースの効率的な作成に適用可能な、ハイブリッドロケット内部弾道特性の数値予測技術を構築することである。ハイブリッドロケットエンジンにおける内部弾道特性を予測するためには、燃焼器内の反応性流れ場を表現するモデルと固体燃料の熱分解・気化の直接的な駆動力となる伝熱のモデルが必要となり、これらを統合した上でパラメトリック解析を効率よく行うことができるような手法の実装が重要である。そして開発した数値予測技術の特性把握を行い、その上でデータベース作成の例を示すことで、本数値予測技術の有用性を評価する。燃料後退速度の予測に着目し、その絶対値のみではなく、質量流束に対するその依存特性の予測の観点からも議論を行う。



### 1.3 本論文の構成

第1章では、本論文の背景と目的について述べた。第2章では、本研究にて構築した、ハイブリッドロケット内部弾道特性予測のための反応流・伝熱統合解析手法の詳細について述べる。この解析手法は、燃料グレインポート内およびノズル内の反応性流れと燃料壁面近傍に着目した熱の流れの二つの部分から構成されることが説明される。また、化学平衡を仮定した燃焼反応の取扱いについても説明される。第3章では、いくつかのパラメータを任意に振って解析することで本数値予測技術の特性について議論する。ここでは、熱分解・気化速度の評価式中のパラメータ（活性化エネルギーと前指数因子）の感度解析、対流熱伝達モデル（モデル中の質量流束の指数や火炎位置での速度増大）が与える影響の解析、輻射熱伝達が与える影響の解析（放射率のパラメトリック解析）、そして固体燃料壁面温度と実効気化熱の評価法が与える影響の解析が実施される。第4章では、本数値予測技術の評価を行い、また本数値予測技術の適用例を示す。前者の評価にあたっては、時空間平均燃料後退速度に関して計算値と文献値を比較することで、本数値予測技術の解析精度について議論する。ここでは、GOX/HDPE系の実験室スケールハイブリッドロケットエンジンの解析とGOX/HTPB系の実験室スケールハイブリッドロケットエンジンの解析が実施される。後者の適用例としては、ハイブリッドロケット内部弾道特性データベースの作成例を示すことで、本数値予測技術の有用性について評価する。設計者が操作し得る条件として、燃焼器スケール、燃料グレインポート長さ、固体燃料初期温度、酸化剤流入温度とノズルスロート径の五つのパラメータに着目し、パラメトリック解析が実施される。第5章では、本論文の結論と今後の展望を述べる。

## 第2章 反応流・伝熱統合解析手法

この章では本解析手法の概要について述べた後，反応流解析モデルおよび伝熱解析モデルの詳細について説明する．

### 2.1 解析手法の概要および仮定

この章では，ハイブリッドロケット内部弾道特性評価のための反応流・伝熱統合解析手法の概要，および，その手法構築時に導入される仮定について記述する．

#### 2.1.1 解析手法の概要

ここではハイブリッドロケット内部弾道特性評価のための反応流・伝熱統合解析手法の概要について説明する．

まず，本解析手法が扱うハイブリッドロケットの構成について述べる．典型的なハイブリッドロケットエンジンは，固体燃料を有する燃焼器，ノズル，酸化剤供給系（加圧系，酸化剤タンク，配管やインジェクタ）から成る．ここで解析の対象となるのは，図 2.1 にて示すように，燃焼器内部の流体および熱の流れとノズル内の流体の流れである．本解析手法においては，燃料グレインポートとして単一の丸穴ポートを想定する．また，燃焼器

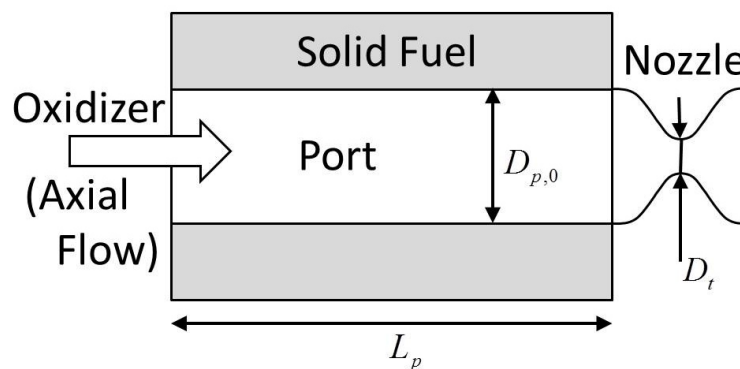


図 2.1: 解析対象．

内への酸化剤の流入は軸流としてなされることとする。ノズルはコンバージェント・ダイバージェントノズルを想定し、その形状は次の式で表すことができるものとする。

$$R(x) = R_T + \frac{2(R_I - R_T)}{(x_I - x_T)^2}(x - x_T)^2 - \frac{R_I - R_T}{(x_I - x_T)^4}(x - x_T)^4 \quad \text{at } x_I \leq x \leq x_O \quad (2.1)$$

座標  $x$  は軸方向の座標であり、ポート前端を原点とする。ノズル入り口での半径  $R_I$  は、初期ポートの半径と一致するように設定する。ノズルの軸方向長さは燃料グレインポート長さの 5% に設定する。また、燃焼中におけるノズルスロートのエロージョンは考慮しない。

本解析手法は大きく分けて二つの部分より構成される。一つは燃料グレインポート内およびノズル内の反応流れであり、もう一つは燃料壁面近傍に着目した熱の流れである。前者の反応流れを扱うにあたっては、軸方向に垂直な方向の断面における平均値を圧力や速度といった各物理量の代表値として扱う。同時に軸方向の断面積変化も考慮することで、2.2 章で説明するように、準一次元の流れ場としてモデル化する。燃料の気化による燃料壁面からポート内への燃料の流入は、流れ場の支配方程式の生成項として扱う。ここでは、ポリマである固体燃料が熱分解・気化するにあたって、燃料ガスは全て単一のモノマ  $C_xH_y$  へと熱分解していると仮定する。ポート前端からの酸化剤の流入に関しては、酸化剤は全て気体の状態であるとした上で、流れ場の支配方程式における境界条件として質量流量や流入温度を指定する。燃料ガスと酸化剤の混合の程度を表すパラメータとして、混合分率を定義する。この混合分率と燃焼器内の熱力学状態を燃焼反応と関連付けることができる。ハイブリッドロケットでの燃焼において、化学反応の特性時間は主流における流体現象の特性時間や固体燃料中への熱伝導の特性時間と比べて一般的に非常に小さい [14]。したがって、ある流れ場の状態において、それに対応した化学平衡状態が瞬時に達成されると仮定し、2.4 章で説明するように、混合分率と熱力学状態量を用いて化学平衡計算を行う。燃料の気化によって燃料壁面は後退し、流路形状が変化する訳であるが、この流路形状の変化は内部の流れ場の変化に対して準静的であると仮定する。つまり、任意の瞬間において、その時の流路形状に対応した流れ場の定常解（収束解）が瞬時に達成されると考える。次に、後者の燃料壁面近傍の熱の流れに関して述べる。2.3 章で説明するように、燃料壁面におけるエネルギー収支を解くことで、燃料後退速度を決定する。ここで燃料壁面へとエネルギーを流入出させるメカニズムとしては、対流熱伝達、輻射熱伝達および熱伝導が考えられる。また、燃料の熱分解・気化に必要なエネルギーも検討しなければならない。対流熱伝達や輻射熱伝達を評価するにあたっては、燃料壁面上に形成される境界層火炎を考慮する必要がある。先ほど述べたように化学反応の特性時間は非常に小さいので、準定常的な火炎を仮定する。したがって、準定常火炎を想定した対流熱伝達モデルを採用する。輻射熱伝達においては、輻射源として燃焼ガス中の気相成分およびすすを考慮して評価する。固体燃料中への熱伝導量は、熱伝導方程式を解くことで固体燃料中の温度場を求めることで行う。この際、固体燃料中の熱伝導に関しては、燃料壁面に垂直な方向の熱の伝わりのみを考慮する。

解析の流れについて説明する。大まかな解析の手順を図 2.2 に示す。まず初めに、流れ場や流路形状の初期条件を設定する。次に、燃料壁面におけるエネルギー収支の式を解くこ

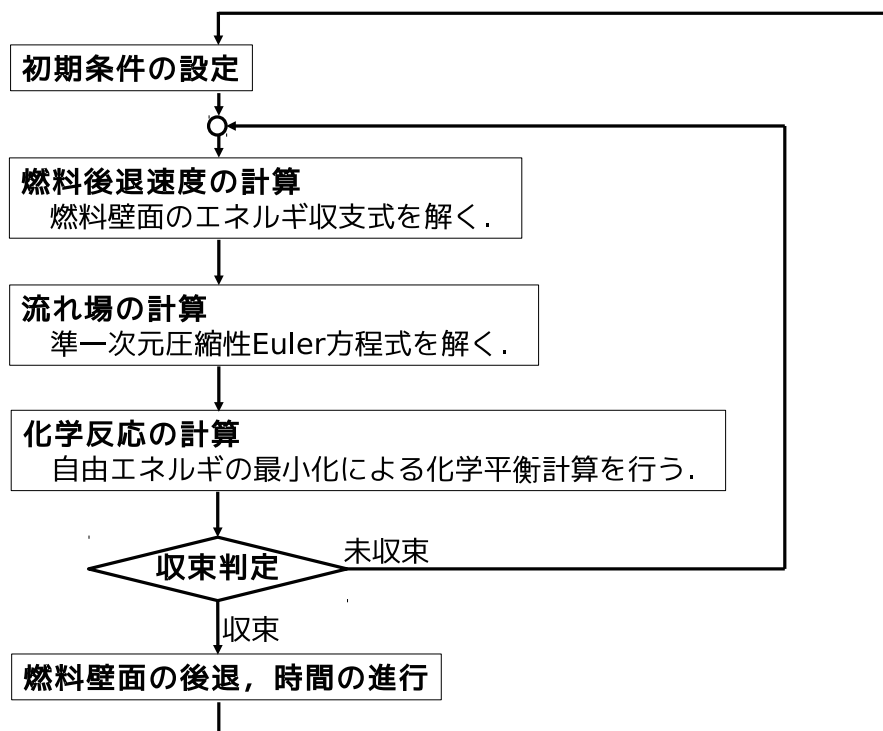


図 2.2: 解析の流れ .

とで燃料後退速度を設定する．得られた燃料後退速度を基に生成項の値を評価し，流れ場の計算を実行する．流体計算により得られた混合分率と熱力学状態量を用いて化学平衡計算を実行する．以上の結果を基に収束判定を行い，収束条件を満たさなければ燃料後退速度の評価へと戻り，収束条件を満たすまで一連のプロセスが繰り返される．収束条件を満たしたならば，最終的に得られた燃料後退速度と任意の微小な時間進行幅  $\Delta time$  を用いて，時間を  $\Delta time$  だけ進めてポート形状を変化させ，上記のプロセスの最初に戻り，次のポート形状に対する収束解を求める．燃料と酸化剤の組み合わせとして GOX/HDPE を想定した解析では  $\Delta time$  の値として B 章にて選定した  $\Delta time = 0.3$  [s] を採用し，GOX/HTPB を想定した解析ではやや大きめの値である  $\Delta time = 0.5$  [s] を採用する．このプロセスをある指定した燃焼時間に達するまで繰り返す．

解析に用いる物性値および各種パラメータは A 章にて示す．

### 2.1.2 手法構築時に導入される仮定

ここでは反応流・伝熱統合解析手法構築時に導入される仮定についてまとめる．各項目末尾の章番号は，その仮定を導入している箇所を含む章を表す．本解析手法における主要

## 燃焼器内の流れ場

ポート形状は初期状態では単一の丸穴であり、それは時間経過に伴い準静的に変化する。

準一次元の流れ場を考える。  
各成分ガスは理想気体の状態方程式に従う。

酸化剤は軸流流入とする。

ノズルスロートのエロージョンは無視する。

化学平衡組成が達成される。

燃料の流入は圧縮性Euler方程式の生成項として扱う。

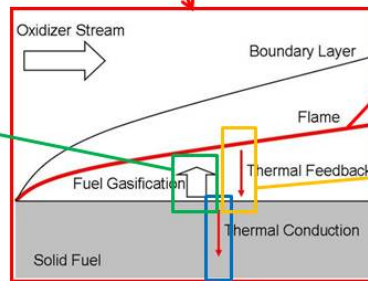
## 固体燃料の壁面および

### 内部

燃料の熱分解速度はArrhenius型の式に従う。  
また、発生する燃料ガスは単一成分(モノマ)とする。

化学反応は速く、準定常的な火炎を形成する。  
消炎は考慮しない。

対流熱伝達を考慮する。  
燃焼ガス、すすおよび固体燃料壁面からの放射を考慮する。



壁面垂直方向の熱伝導のみを考慮する。

図 2.3: 反応流・伝熱統合解析手法における主要な仮定。

な仮定を図 2.3 に示す。

## エンジン構成に関する仮定

解析対象となるエンジン構成に関する仮定は以下の通りである。

1. 固体燃料グレインは丸穴シングルポートを有する (2.1.1 章)
2. 酸化剤は完全に気化した上で軸流流入する (2.1.1 章)
3. ノズルスロートのエロージョンを無視する (2.1.1 章)

## 主流での流れ場の評価における仮定

燃焼室圧力といった内部弾道特性の評価につながる、主流における流れ場を記述するにあたり導入される仮定は以下の通りである。

1. 主流における流れ場は粘性を考慮しない圧縮性の準一次元の保存方程式で記述できるとし、燃料ガスの流入はその式の生成項として考慮される (2.1.1 章, 2.2.1 章)
2. 各々のガス成分は理想気体の状態方程式に従う (2.2.1 章)
3. 燃料ガスがどのように流入したとしても、あるいは主流の酸化剤ガスとどのように拡散・混合し反応したとしても、全ての化学種の速度は等しい (2.2.1 章)

4. 準一次元流れ場における組成は化学平衡状態とする (2.1.1 章, 2.2.1 章, 2.4.1 章)

#### 燃料後退速度の評価における仮定

燃料後退速度を決定するために, 固体燃料壁面における熱収支の式を解く. そこでは壁面へ流入する対流熱流束や輻射熱流束, 固体燃料中への熱伝導による熱流束, 固体燃料の熱分解・気化に要するエネルギーの釣り合いが考慮される. 固体燃料壁面へ流入出する熱流束を評価するにあたり導入される仮定は以下の通りである.

##### (対流熱伝達)

1. 対流熱伝達量の評価に際して軸方向のどの位置においても火炎は存在するとし, 消炎は考慮しない (2.3 章)

##### (輻射熱伝達)

1. 輻射熱伝達量の評価に際して軸方向のどの位置においても火炎は存在するとし, 消炎は考慮しない (2.3 章)
2. 輻射源として, 火炎位置における燃焼ガスが含む二酸化炭素と水蒸気, 火炎下部領域のすす (グラファイト), 固体燃料を考える (2.1.1 章, 2.3.2 章)
3. 輻射源となる燃焼ガスは, 化学量論比に対応した化学平衡状態である. (2.3.2 章, 2.4.2 章)
4. 燃焼ガスから発せられた輻射光における光路長は火炎厚さとし, 火炎厚さは軸方向のどの位置に置いて同じ一定値である (2.3.2 章)
5. 燃焼ガスが発した輻射光のすすによる吸収は無視する (2.3.2 章)
6. すすの発生領域は燃料過剰領域である火炎下部とする (2.3.2 章)
7. すすの発生領域は化学平衡状態である (2.3.2 章, 2.4.3 章)
8. すすから発せられた輻射光における光路長は火炎高さとする (2.3.2 章)
9. 壁面垂直方向の混合分率分布を二次曲線で近似し, 混合分率が化学量論比となる位置が火炎の位置 (火炎高さ) である (2.3.2 章)
10. 燃料壁面に達した輻射光の一部は反射して, 残りは全て燃料に吸収され, かつ, その吸収は全て燃料壁面にて行われる (2.3.2 章, 2.3.3 章)
11. 固体燃料の放射率と吸収率は等しい (2.3.2 章)

##### (熱伝導)

1. 固体燃料中への熱伝導は, 固体燃料壁面垂直方向のみを考慮する (2.1.1 章, 2.3.3 章)
2. 固体燃料はウェブ厚さの方向に半無限である (2.3.3 章)
3. 輻射光が固体燃料中に達し, それが燃料内部にて吸収されることはない (2.3.2 章, 2.3.3 章)

##### (固体燃料の熱分解・気化)

1. 燃料の熱分解・気化に伴う流路形状の変化は, 流れ場の変化に対して準静的である. (2.1.1 章)

2. 固体燃料（ポリマ）が熱分解・気化する際には，すべて単一のモノマ  $C_{x'}H_{y'}$  の気体へと熱分解する（2.1.1章，2.2.1章，2.3.1章）
3. 固体燃料の熱分解反応および気化の速度は壁面温度の関数（Arrhenius型の式）に従う（2.3.5章）

### 燃焼に関する仮定

本解析手法においては，燃焼現象を扱うために三回の化学平衡計算を軸方向の各位置において実行する．それらは，(1) 準一次元流れ場における断面平均場としての温度と組成を求めるとき，(2) 境界層中の火炎位置における温度と組成を求めるとき，(3) すずの発生領域である火炎下部における平均温度と組成を求めるとき，に行われる．各々の化学平衡計算に導入される仮定は以下の通りである．

1. 他の現象と比べて化学反応の特性時間は十分に短く，各瞬間・各位置において化学平衡状態が達成される（2.4.1章，2.4.2章，2.4.3章）
2. 化学平衡計算(1)と(2)においては，燃焼ガス組成として  $C_{x'}H_{y'}$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $H_2$ ,  $OH$ ,  $O$  と  $H$  の九化学種を考慮する（2.4.1章，2.4.2章）
3. 化学平衡計算(3)においては，燃焼ガス組成として  $C_{x'}H_{y'}$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $H_2$ ,  $OH$ ,  $O$  と  $H$  の九化学種に加えて凝縮相であるグラファイト（これをすずと見なす）を考慮する（2.4.3章）
4. 化学平衡計算(1)においては，拘束条件となる各元素の物質量は準一次元流れ場の解として得られる混合分率によって決まる．また，熱力学状態は準一次元流れ場の解として得られる密度と比内部エネルギーによって規定される（2.4.1章）
5. 化学平衡計算(2)においては，拘束条件となる各元素の物質量は化学量論比における混合分率によって決まる．また，熱力学状態は圧力と比エンタルピによって規定され，これらの値は準一次元流れ場の解として得られる断面平均値で近似する（2.4.2章）
6. 化学平衡計算(3)においては，拘束条件となる各元素の物質量は火炎下部における平均混合分率によって決まる．また，熱力学状態は圧力と比エンタルピによって規定され，これらの値は準一次元流れ場の解として得られる断面平均値で近似する．（2.4.3章）

## 2.2 反応流体解析

ここでは，ハイブリッドロケット燃焼器内における反応流れを記述する基礎方程式とその数値解法について説明する．

### 2.2.1 基礎方程式

ハイブリッドロケット燃焼器内の流れ場を記述するにあたり，燃焼器内の各軸方向断面での平均値をその断面における物理量の代表値として取扱い，その軸方向変化を考えるこ

ととする。つまり、準一次元の流れ場を考慮する。空間の次元を準一次元とする理由は、計算において低コストが見込まれること、および、軸方向のみではあるが空間分布情報の取得が可能であることである。準一次元流れ場の支配方程式としては、圧縮性 Euler 方程式が用いられる。ハイブリッドロケットにおいては燃料壁面から燃料熱分解ガスが燃焼器内へ流入する訳であるが、その流入に伴う質量・運動量・エネルギーの付加は支配方程式の生成項として取り扱われる。また、燃料や酸化剤の存在割合を追跡するために混合分率と呼ばれるパラメータが導入され、その保存式も圧縮性 Euler 方程式と同時に解かれる。混合分率の定義の仕方には種々あるが、ここでは原子ベースの定義を用いる [15]。

燃料壁面からの質量付加に伴う生成項を有した準一次元圧縮性 Euler 方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial A\mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial A\mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}_{Q1D} + \mathbf{S}_{Mass} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{Q1D} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{Mass} = \begin{pmatrix} l_p \dot{m}_F \\ 0 \\ l_p \dot{m}_F h_w \end{pmatrix}$$

この方程式系の第一行目が混合ガスの質量保存式、第二行目が混合ガスの運動量保存式、第三行目が混合ガスのエネルギー保存式を表す。生成項  $\mathbf{S}_{Q1D}$  は流れ場の準一次元近似に伴う項であり、生成項  $\mathbf{S}_{Mass}$  は燃料壁面から燃料熱分解ガスが流入することに伴う項で、燃料熱分解ガスが有する質量・軸方向運動量・エネルギーである。

燃焼器内の流れ場では燃焼反応が進行しており、反応を伴った流れを取り扱う必要がある。この際に有用な概念として、混合分率というものがある。このパラメータは燃料と酸化剤の混合の程度を表す一種の指標であり、化学平衡計算を通して燃焼ガスの平衡組成や燃焼ガス温度と関連付けられる (2.4.1 章を参照のこと)。ここで、混合分率の定義に先立って、原子 C の輸送方程式を考える。

$$\frac{\partial A\rho b_C}{\partial t} + \frac{\partial A\rho b_{Cu}}{\partial x} = \frac{x'}{12x' + y'} l_p \dot{m}_F \quad (2.3)$$

右辺の生成項は、燃料壁面から流入する燃料熱分解ガス  $C_{x'}H_{y'}$  に含まれる原子 C の量を表している。次に、以下のような仮定を導入する。

#### 化学種の速度に関する仮定

「燃料ガスは一種類の炭化水素  $C_{x'}H_{y'}$  であるとし、その燃料ガスがどのように流入したとしても、あるいは主流の酸化剤ガスとどのように拡散・混合し反応したとしても、全ての化学種の速度は局所的に等しい。」



この場合，C や H が存在する場所では，その比は分子  $C_{x'}H_{y'}$  中における C と H の比に常に保たれていることになる．

$$b_C : b_H = x' : y' \quad \text{at } b_C \neq 0 \text{ and } b_H \neq 0 \quad (2.4)$$

また，各元素の物質量の和を考えると以下の式が得られる．

$$w_C b_C + w_H b_H + w_O b_O = 1 \quad (2.5)$$

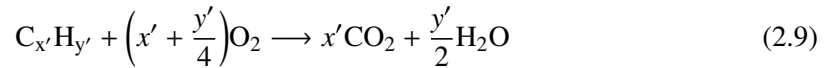
以上より，式 (2.3) から原子 C の物質量が求まると，式 (2.4) より原子 H の物質量が得られ，ついで式 (2.5) より原子 O の物質量が決まることになる．言い換えると，化学種の速度に関する仮定を導入することで，原子 C の輸送 [式 (2.3)] のみを追いかければ，原子 H や原子 O の輸送方程式を解かなくても式 (2.4) や式 (2.5) を用いることで，各位置における全ての原子の物質量を決定することができる．この原子 C の物質量  $b_C$  を基に混合分率  $\xi$  を定義する．原子 C の物質量を，100%燃料の流れにおける値と 100%酸化剤の流れにおける値を用いて以下のように無次元化する．

$$\xi \equiv \frac{b_C - b_{C,2}}{b_{C,1} - b_{C,2}} \quad (2.6)$$

$$b_{C,1} = \frac{x'}{12x' + y'} \quad (2.7)$$

$$b_{C,2} = 0 \quad (2.8)$$

これが原子ベースで定義された混合分率である．炭化水素  $C_{x'}H_{y'}$  と酸素  $O_2$  の燃焼反応として，一段総括反応



を考えると，化学量論比における混合分率は以下ようになる．

$$\xi_{st} = \frac{12x' + y'}{44x' + 9y'} \quad (2.10)$$

上記の無次元化によって原子 C の輸送方程式 (2.3) を混合分率の輸送方程式へ書き換えることができる．

$$\frac{\partial A\rho\xi}{\partial t} + \frac{\partial A\rho\xi u}{\partial x} = l_p \dot{m}_F \quad (2.11)$$

この混合分率の輸送方程式 (2.11) を準一次元圧縮性 Euler 方程式 (2.2) と合わせて解くこととする．

準一次元圧縮性 Euler 方程式 (2.2) と混合分率の輸送方程式 (2.11) をまとめる .

$$\frac{\partial A \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial A \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}_{Q1D} + \mathbf{S}_{Mass} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \\ \rho \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \\ \rho \xi u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{Q1D} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{Mass} = \begin{pmatrix} l_p \dot{m}_F \\ 0 \\ l_p \dot{m}_F h_w \\ l_p \dot{m}_F \end{pmatrix}$$

これを变形して整理し直すと以下ようになる . ただし , ポート形状の変化は流れ場の変化に対して準静的であるという仮定の下 , 各時刻のポート形状に対応した収束解を得るためにこれらの方程式を解くという目的から , ここでは  $dA/dt = 0$  としている .

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}'_{Q1D} + \mathbf{S}'_{Mass} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \\ \rho \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \\ \rho \xi u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}'_{Q1D} = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (\rho e_t + p)u \\ \rho \xi u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}'_{Mass} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} l_p \dot{m}_F \\ 0 \\ l_p \dot{m}_F h_w \\ l_p \dot{m}_F \end{pmatrix}$$

補助式として理想気体の状態方程式を用いる .

$$p = \sum_{k=1}^{N_g} \frac{Y_k}{w_k} \rho R_u T \quad (2.14)$$

また , 各種エネルギーの定義式は以下の通りである .

$$e_t = e + \frac{u^2}{2} \quad (2.15)$$

$$e = \sum_{k=1}^{N_t} h_k Y_k - \frac{p}{\rho} \quad (2.16)$$

$$h_k = \Delta h_k^0 + \int_{T_r}^T c_{p,k} dT \quad (2.17)$$

ここで，化学種  $k$  の比エンタルピー  $h_k$  と化学種  $k$  の定圧比熱  $c_{p,k}$  には，NASA の CEA で用いられている関数を用いる [16]．これは JANAF テーブルなどのデータを温度の多項式としてフィッティングしたものであり，NASA 多項式と呼ばれる．

$$\frac{c_{p,k}}{R_u/w_k} = a_{k,1}T^{-2} + a_{k,2}T^{-1} + a_{k,3} + a_{k,4}T + a_{k,5}T^2 + a_{k,6}T^3 + a_{k,7}T^4 \quad (2.18)$$

$$\frac{h_k}{R_u T/w_k} = -a_{k,1}T^{-2} + a_{k,2}T^{-1} \ln T + a_{k,3} + a_{k,4} \frac{T}{2} + a_{k,5} \frac{T^2}{3} + a_{k,6} \frac{T^3}{4} + a_{k,7} \frac{T^4}{5} + \frac{b_{k,1}}{T} \quad (2.19)$$

比熱比や音速の求め方は 2.4.1 章にて説明する．

式 (2.13) の境界条件を述べる．ポート前端部では表 2.1 のような亜音速流入条件を用いることとする．ノズル出口ではその位置での速度に応じて表 2.2 のように場合分けを行い，出口速度が亜音速であれば亜音速流出条件を，出口速度が超音速であれば超音速流出条件を用いる．解が収束する途中の段階では亜音速流出条件が用いられる可能性があるが，多くの場合は超音速流出条件が適用される．

式 (2.13) を数値的に解くにあたって，事前に質量付加量  $\dot{m}_F$  を求める必要がある．質量付加量  $\dot{m}_F$  は燃料壁面におけるエネルギー収支の式を解くことにより評価されるのであるが，

表 2.1: 流入条件．

物理量	設定方法
質量流量	任意の定数
圧力	ゼロ次外挿
温度	任意の定数
混合分率	0 (100%酸化剤)

表 2.2: 流出条件．

亜音速流出の場合	
物理量	設定方法
密度	ゼロ次外挿
圧力	大気圧 ( $1 \times 10^5$ [Pa])
速度	正の速度であればゼロ次外挿，負の速度であれば 0 m/s に設定
混合分率	ゼロ次外挿
超音速流出の場合	
物理量	設定方法
密度	ゼロ次外挿
圧力	ゼロ次外挿
速度	ゼロ次外挿
混合分率	ゼロ次外挿

それについては2.3章にて説明する。

## 2.2.2 数値解法

この章では反応流れの支配方程式 (2.13) の数値解法について説明する。

### 方程式の離散化

反応流れの支配方程式 (2.13) を有限体積法を用いて離散化する。まず初めに式 (2.13) の両辺を  $i$  番目のセルにわたって両辺を空間に関して積分する。 $i$  番目のセルの左側境界の位置は  $x_{i-1/2}$ 、右側境界の位置は  $x_{i+1/2}$  であるとする。

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\mathbf{S}'_{Q1D} + \mathbf{S}'_{Mass}) dx \quad (2.20)$$

ここでセル内での空間平均量を定義する。

$$\bar{\mathbf{Q}}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{Q} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{Q} dx}{\Delta x_i} \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{S}}'_{Q1D,i} \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}'_{Q1D} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}'_{Q1D} dx}{\Delta x_i} \quad (2.22)$$

$$\bar{\mathbf{S}}'_{Mass,i} \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}'_{Mass} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}'_{Mass} dx}{\Delta x_i} \quad (2.23)$$

これらの平均量を導入すると、上記の積分式は以下のように整理できる。

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}}{\Delta x_i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Q1D,i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Mass,i} \quad (2.24)$$

次に、時刻  $t^n$  から時刻  $t^{n+1}$  にわたって両辺を時間に関して積分する。

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}}{\Delta x_i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Q1D,i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Mass,i} \right) dt \\ \therefore \bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{Q}}_i^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}}{\Delta x_i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Q1D,i} + \bar{\mathbf{S}}'_{Mass,i} \right) dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここでは陽解法を採用することとして上式を整理する。また  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  とする。

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} (\mathbf{F}_{i-1/2}^n - \mathbf{F}_{i+1/2}^n) + \Delta t^n (\bar{\mathbf{S}}'_{Q1D,i}^n + \bar{\mathbf{S}}'_{Mass,i}^n) \quad (2.26)$$

時間幅  $\Delta t^n$  として全てのセルで同じ値を用いる手法をグローバル・タイムステップ法と呼ぶ。それに対して、以下の式 (2.27) により決められた、各セルにて異なる時間幅を用いる方法をローカル・タイムステップ法と呼ぶ。

$$\Delta t_i^n = v_{CFL} \frac{\Delta x_i}{|u_i| + a_i} \quad (2.27)$$

時間幅  $\Delta t_i^n$  は，セルの幅を最も速い特性速度である  $|u_i| + a_i$  で除した値に係数  $\nu_{CFL}$  を掛けたものである．陽解法においては，係数  $\nu_{CFL}$  の値が 1 を越えてはならないという制約がある．グローバル・タイムステップ法においては，各セルの時間幅  $\Delta t_i^n$  の中で最も小さな値のものを全体の時間幅  $\Delta t^n$  として用いる．収束解を得るにあたっては，グローバル・タイムステップ法と比べてローカル・タイムステップ法の方が一般的に解の収束が早いということが知られている．したがって，本解析手法ではローカル・タイムステップ法を採用する．また，Courant 数  $\nu_{CFL}$  には  $\nu_{CFL} = 0.3$  を用いる．ここで，時間幅  $\Delta t_i^n$  や  $\Delta t^n$  は流れ場の収束解を得るための仮想的な時間幅であり，2.1.1 章で述べたところの時間進行幅  $\Delta time$  とは異なることに注意する．

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}_i^n + \frac{\Delta t_i^n}{\Delta x_i} (\mathbf{F}_{i-1/2}^n - \mathbf{F}_{i+1/2}^n) + \Delta t_i^n (\bar{\mathbf{S}}_{Q1D,i}^n + \bar{\mathbf{S}}_{Mass,i}^n) \quad (2.28)$$

### 数値流束の評価

数値流束  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  の評価には，ロバストなスキームとして有名な AUSM 族のスキームの一つである，AUSMDV を用いる．AUSNDV は FDS から派生した AUSMD と FVS ベースの AUSMV をあるパラメータを用いて融合したもので，それによりロバスト性の向上を図ったものである [17]．

まずは流束  $\mathbf{F}$  を次のように分割する．

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \\ \rho \xi u \end{pmatrix} = \rho u \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ e_t + \frac{p}{\rho} \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \rho u \mathbf{\Psi} + \mathbf{P} \quad (2.29)$$

#### (1) 第二成分以外

速度をスプリットする．

$$u_L^+ = \begin{cases} \alpha_L \left\{ \frac{(u_L + a_m)^2}{4a_m} - \frac{u_L + |u_L|}{2} \right\} + \frac{u_L + |u_L|}{2} & \text{if } \frac{|u_L|}{a_m} \leq 1 \\ \frac{u_L + |u_L|}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$u_R^- = \begin{cases} \alpha_R \left\{ -\frac{(u_R - a_m)^2}{4a_m} - \frac{u_R - |u_R|}{2} \right\} + \frac{u_R - |u_R|}{2} & \text{if } \frac{|u_R|}{a_m} \leq 1 \\ \frac{u_R - |u_R|}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\alpha_L = \frac{2 \left( \frac{p}{\rho} \right)_L}{\left( \frac{p}{\rho} \right)_L + \left( \frac{p}{\rho} \right)_R}, \quad \alpha_R = \frac{2 \left( \frac{p}{\rho} \right)_R}{\left( \frac{p}{\rho} \right)_L + \left( \frac{p}{\rho} \right)_R} \quad (2.32)$$

$$a_m = \max(a_L, a_R) \quad (2.33)$$

この  $u_L^+, u_R^-$  を用いてセル境界での質量流束を評価する .

$$(\rho u)_{1/2} = u_L^+ \rho_L + u_R^- \rho_R \quad (2.34)$$

次に圧力をスプリットする .

$$\mathbf{P}_{1/2} = \mathbf{P}_L^+ + \mathbf{P}_R^- \quad (2.35)$$

$$\mathbf{P}_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}_{L/R}}{4} \left( \frac{u_{L/R} \pm 1}{a_m} \right)^2 \left( 2 \mp \frac{u_{L/R}}{a_m} \right) & \text{if } \frac{|u_{L/R}|}{a_m} \leq 1 \\ \mathbf{P}_{L/R} \frac{u_{L/R} \pm |u_{L/R}|}{2u_{L/R}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.36)$$

以上を用いると , 数値流束  $\mathbf{F}_{1/2}$  ( 第二成分を除く ) は次の式で表すことができる .

$$\mathbf{F}_{1/2} = \frac{1}{2} [(\rho u)_{1/2} (\Psi_L + \Psi_R) - |(\rho u)_{1/2}| (\Psi_R - \Psi_L)] + \mathbf{P}_{1/2} \quad (2.37)$$

(2) 第二成分

数値流束  $\mathbf{F}_{1/2}$  の第二成分に関して圧力を除いた項は AUSMD を用いると以下のように評価される .

$$(\rho u^2)_{AUSMD} = \frac{1}{2} [(\rho u)_{1/2} (u_L + u_R) - |(\rho u)_{1/2}| (u_R - u_L)] \quad (2.38)$$

その一方で , AUSMV を用いると以下のように評価される .

$$(\rho u^2)_{AUSMV} = u_L^+ (\rho u)_L + u_R^- (\rho u)_R \quad (2.39)$$

ここでスイッチング関数  $s$  を定義する .

$$s = \frac{1}{2} \min \left( 1, K \frac{|p_R - p_L|}{\min(p_L, p_R)} \right) \quad (2.40)$$

定数  $K$  は  $K = 10$  とする . このスイッチング関数  $s$  を用いて , AUSMD と AUSMV を融合する .

$$(\rho u^2)_{1/2} = \left( \frac{1}{2} + s \right) (\rho u^2)_{AUSMV} + \left( \frac{1}{2} - s \right) (\rho u^2)_{AUSMD} \quad (2.41)$$

最終的に数値流束  $\mathbf{F}_{1/2}$  の第二成分は以下のように求まる .

$$(\mathbf{F}_{1/2})_2 = (\rho u^2)_{1/2} + (\mathbf{P}_{1/2})_2 \quad (2.42)$$

### 空間の高次精度化

数値流束を求める際に用いるセル境界での値を隣接セルの平均量でそのまま評価すると , 空間精度は一次精度になる . 実際には各物理量はセルの内部でも何らかの分布を持っており , 空間の高次精度化を図るためにはこの分布を考慮した上でセル境界での値を評価する必要がある . そこで , 一次関数や二次関数といった分布をセル内に想定して内挿を行うこ

とで空間の高次精度化を達成する手法を MUSCL 法 [18,19] と呼ぶ．ここでは，内挿は基本量にて行う．分布関数として一次関数を想定した場合は空間二次精度となり，以下の式で  $\kappa = -1$  とした場合に相当する．一方で，分布関数として二次関数を想定した場合は空間三次精度となり， $\kappa = 1/3$  とした場合に相当する．また，パラメータ  $\phi$  は MUSCL 法の使用の有無を制御するパラメータであり， $\phi = 0$  であれば MUSCL 法を使用せず空間一次精度となり， $\phi = 1$  であれば MUSCL 法を使用して  $\kappa$  に応じた空間精度となる．本解析手法では，空間二次精度を採用する．

$$\mathbf{W}_{i+1/2}^L = \mathbf{W}_i + \frac{\phi}{4} [(1 - \kappa)\nabla\mathbf{W}_i + (1 + \kappa)\Delta\mathbf{W}_i] \quad (2.43)$$

$$\mathbf{W}_{i-1/2}^R = \mathbf{W}_i - \frac{\phi}{4} [(1 + \kappa)\nabla\mathbf{W}_i + (1 - \kappa)\Delta\mathbf{W}_i] \quad (2.44)$$

$$\nabla\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1} \quad (2.45)$$

$$\Delta\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i \quad (2.46)$$

上記のようにただ分布を仮定しただけでは解の単調性が保証されず，数値計算の安定性を損なう原因となり得る．そこで，単調性を維持するために流束制限関数を内挿の過程に導入する．本解析手法では，Anderson らによる Van Albada ベースの流束制限関数 [20] を採用する．

$$\mathbf{W}_{i+1/2}^L = \mathbf{W}_i + \frac{\phi s_L}{4} [(1 - \kappa s_L)\nabla\mathbf{W}_i + (1 + \kappa s_L)\Delta\mathbf{W}_i] \quad (2.47)$$

$$\mathbf{W}_{i-1/2}^R = \mathbf{W}_i - \frac{\phi s_L}{4} [(1 + \kappa s_L)\nabla\mathbf{W}_i + (1 - \kappa s_L)\Delta\mathbf{W}_i] \quad (2.48)$$

$$s_L = \frac{2\Delta\mathbf{W}_i\nabla\mathbf{W}_i}{(\Delta\mathbf{W}_i)^2 + (\nabla\mathbf{W}_i)^2 + \epsilon} \quad (2.49)$$

微小量  $\epsilon$  には  $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$  を用いる．

### 時間の高次精度化

時間の高次精度化を図るために，式 (2.28) に対して二段階 Runge-Kutta 時間積分法 [21] を適用する．

第一段階：

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{(1)} = \bar{\mathbf{Q}}_i^n + \frac{\Delta t_i^n}{\Delta x_i} (\mathbf{F}_{i-1/2}^n - \mathbf{F}_{i+1/2}^n) + \Delta t_i^n (\bar{\mathbf{S}}_{Q1D,i}^n + \bar{\mathbf{S}}_{Mass,i}^n) \quad (2.50)$$

第二段階：

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\mathbf{Q}}_i^n + \bar{\mathbf{Q}}_i^{(1)} + \frac{\Delta t_i^n}{\Delta x_i} (\mathbf{F}_{i-1/2}^{(1)} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{(1)}) + \Delta t_i^n (\bar{\mathbf{S}}_{Q1D,i}^{(1)} + \bar{\mathbf{S}}_{Mass,i}^{(1)}) \right\} \quad (2.51)$$

## 収束判定

燃焼器内の流れ場が定常に達したかどうかを判断するために，比全エネルギー残渣と圧力残渣を収束条件として採用する．

$$R_e \leq \epsilon \quad \text{and} \quad R_p \leq \epsilon \quad (2.52)$$

$$R_e \equiv \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_c} (e_{t,i}^{n+1} - e_{t,i}^n)^2}}{N_c} \quad (2.53)$$

$$R_p \equiv \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_c} (p_i^{n+1} - p_i^n)^2}}{N_c} \quad (2.54)$$

この収束判定に用いる微小量  $\epsilon$  として，燃料と酸化剤の組み合わせとして GOX/HDPE を想定した解析では  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  を，GOX/HTPB を想定した解析ではやや大きめの値である  $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$  を用いている．

## 計算格子

計算領域としては燃料グレインポート内部とノズル内部である．ノズル内には等間隔で 101 点の格子点を配置する．ポート内には 201 点の格子点を配置するが，その間隔は不等間隔とする．ポートとノズルの接続位置における格子点の重複を考慮すると，格子点は全体で 301 点となる．ポート内で最小の格子幅となる位置はノズルとの接続部分であるとし，その格子幅はノズル内での格子幅と等しいとする．ポート内の格子幅はノズルとの接続位置からポート前端へ向けて等比数列的に大きくなっていくものとする．その公比を  $1 + r_x$  とし，ノズル内での格子幅を  $\Delta x_N$ ，ポート内の格子点数を  $N_p$  とすると，これらの間には次のような関係式が成り立つ．

$$\Delta x_N + \Delta x_N(1 + r_x) + \Delta x_N(1 + r_x)^2 + \cdots + \Delta x_N(1 + r_x)^{N_p-2} = L_p \quad (2.55)$$

これを  $r_x$  について解くことで公比  $r_x$  を求めることができ，ポート内の格子幅を決定することができる．

## 2.3 伝熱解析

この章では伝熱解析による燃料後退速度の推算法について説明する．燃料後退速度を評価するにあたっては，各軸方向位置  $x$  において燃料壁面におけるエネルギーの収支を考えることとする．燃料壁面でのエネルギー収支の式を以下に示す．

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} + \dot{q}_{rad} = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=-0} + \rho_s \dot{h}_v \quad (2.56)$$

式 (2.56) の左辺第一項は気相から固相へと対流熱伝達により流入する熱流束を，左辺第二項は輻射熱伝達によるエネルギー流束を表す．ここでは，対流熱伝達および輻射熱伝達の評



価に際して軸方向のどの位置においても火炎は存在するとし、消炎は考慮しない。一方で、式 (2.56) の右辺第一項は熱伝導により固相中へ伝わる熱流束を、右辺第二項は固体燃料の気化に必要なエネルギーを表す。実効気化熱  $h'_v$  には、ある壁面温度に達した固体燃料が融解や気化するのに必要な潜熱、高分子中の炭素鎖が切断される熱分解反応に必要なエネルギーが含まれる。式 (2.56) の各項の評価法とその解き方を次の 2.3.1 章から 2.3.5 章で説明する。

### 2.3.1 対流熱伝達量の評価

固体燃料上に形成される火炎は拡散律速であり、流れ場の影響を受ける。ここでは流れ場の特性速度と比べて化学反応の特性速度は速く、ある流れ場の状態に対してそれに応じた化学的状态へと瞬時に達すると考える。すなわち、準定常な火炎を仮定する。この準定常な火炎を熱源として、どれだけの熱量が対流熱伝達によって固体燃料へ流入するのかを評価しなければならない。そこで、Karabeyoglu が提案したモデル [14] を対流熱伝達量の評価に採用する。Karabeyoglu のモデルは Marxman の乱流境界層燃焼モデル [22] を基礎としている。Marxman は定常状態を対象としており、空気力学的ブローイングパラメータと熱化学的ブローイングパラメータを等しいものとして扱っている。その一方で、Karabeyoglu はこれらを別個のものとして扱うことで過渡的な状態においても適用可能としている。Karabeyoglu のモデルを以下に示す。この対流熱伝達による熱流束の表式は、火炎が拡散律速であることを反映して総質量流束  $G$  に依存する形となっている。

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} = \left[ \frac{0.03q}{\mu^{-0.2}} \right]^{\frac{1}{1-k}} \left[ \frac{B_t h'_v}{\rho_s^{k/(1-k)}} \right] x^{-0.2/(1-k)} G^{0.8/(1-k)} \dot{r}^{-k/(1-k)} \quad (2.57)$$

$$G = \rho u \quad (2.58)$$

この表式 (2.57) の導出過程を参考までに C.1 章に記す。

式 (2.57) 中の  $B_t$  は熱化学的ブローイングパラメータであり、境界層中の熱伝達に関するパラメータである。熱化学的ブローイングパラメータ  $B_t$  の定義は以下の通りである。

$$B_t \equiv \frac{u_e}{u_{fl}} \frac{h_{fl} - h_S}{h'_v} \quad (2.59)$$

ここで、実効気化熱  $h'_v$  には、固体燃料の融解・気化潜熱と熱分解反応に必要な熱に加えて、固体燃料を初期温度から燃料壁面温度  $T_S$  まで引き上げるのに必要な熱も含まれている。式 (2.59) 中の速度比  $u_e/u_{fl}$  は、Marxman により以下の推算式が提案されている [23]。

$$\frac{u_e}{u_{fl}} = \frac{K_{ox_e} + (O/F + K_{ox_e}) \frac{\Delta h}{h'_v}}{O/F \frac{\Delta h}{h'_v}} \quad (2.60)$$

$$\Delta h = h_{fl} - h_S \quad (2.61)$$

主流中の酸化剤濃度  $K_{ox_e}$  は、ここでは酸化剤は 100% 酸素としているので、 $K_{ox_e} = 1$  である。式 (2.59) 中の火炎位置における比エンタルピ  $h_{fl}$  および燃料壁面における比エンタル

$h_S$  は、ある基準温度  $T_r (= 298.15 \text{ [K]})$  を用いて以下のように定義される [23] . ここで、燃料壁面でのガスの組成は 100%燃料ガスであると仮定する .

$$h_{fl} = h_P(T_{fl}) - h_P(T_r) \quad (2.62)$$

$$h_S = h_F(T_S) - h_F(T_r) \quad (2.63)$$

エンタルピーの関数には NASA 多項式 (2.19) を用いる . 式 (2.62) にて必要な火炎温度  $T_{fl}$  や燃焼ガス組成は、2.4.2 章にて説明する化学平衡計算を通して得られる . あるいは、この化学平衡計算を計算コスト削減のために望まない場合、断熱条件を仮定すると火炎位置における比エンタルピーが混合ガス単位質量あたりの燃焼熱と等しくなることを利用して、実験等で得られた燃焼熱の値を定数として用いることもできる .

$$h_{fl} = Q_c \quad (2.64)$$

式 (2.57) 中の  $q$  と  $k$  は定数であり、壁面摩擦係数と関連している . 壁面からの吹き出しがある場合とない場合の間の壁面摩擦係数の比  $C_f/C_{f0}$  は壁面からの吹き出しに起因する壁面摩擦の減少を意味しており、このことは「ブロッキング効果」と呼ばれている . Marxman はこの比  $C_f/C_{f0}$  を空気力学的ブローイングパラメータ  $B_a$  の関数として表現している [22] .

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \left[ \frac{\ln(1 + B_a)}{B_a} \right]^{0.8} \left[ \frac{1 + 1.3B_a + 0.364B_a^2}{(1 + 0.5B_a)^2(1 + B_a)} \right]^{0.2} \quad (2.65)$$

$$B_a \equiv \frac{(\rho v)_s}{\rho_e u_e C_f / 2} = \frac{\rho_s \dot{r}}{GC_f / 2} \quad (2.66)$$

Marxman はある任意の  $B_a$  の範囲において簡略化した表式も提案している .

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = q B_a^{-k} \quad (2.67)$$

式 (2.57) 中の  $q$  と  $k$  は、式 (2.67) によって定義される . ここでは  $1 \leq B_a \leq 15$  の範囲を想定し、式 (2.65) を式 (2.67) へ簡略化すると、 $q = 0.74$  と  $k = 0.53$  が得られる .

Karabeyoglu のモデルおよびそのベースとなっている Marxman のモデルでは、その導出過程において非燃焼場で見られるような通常の数値分布の形状を想定している . しかし、実際の境界層燃焼場での速度分布は、火炎位置にて極大値を持つような分布形状をしている [24, 25] . この火炎位置での速度増大の効果を取り入れると、対流熱伝達による熱流束の表式 (2.57) は次のように修正できる .

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} = a_v^{0.8} (\dot{q}_c)_{original} \quad (2.68)$$

ここで、 $(\dot{q}_c)_{original}$  は修正前の表式 (2.57) のことであり、 $a_v$  は従来の速度分布形状における火炎位置速度と極大値を有する速度分布形状における火炎位置速度の比を表す .

$$u_{fl} = a_v (u_{fl})_{mv} \quad (2.69)$$

式 (2.68) の導出過程は C.2 章に示す .

### 2.3.2 輻射熱伝達量の評価

気相側から燃料壁面へと流入する輻射エネルギー流束は以下の式で評価される．

$$\dot{q}_{rad} = \alpha_{rad,s} \varepsilon_g \sigma T_{fl}^4 + \alpha_{rad,s} \varepsilon_{soot} \sigma T_{soot}^4 - \varepsilon_s \sigma T_S^4 \quad (2.70)$$

式(2.70)の右辺第一項は燃焼ガスから燃料壁面への熱輻射，第二項はすすから燃料壁面への熱輻射，第三項は燃料表面から気相側への熱輻射を表す．ここで燃料壁面に達した輻射光の一部 ( $1 - \alpha_{rad,s}$  の割合) は反射して，残りは全て ( $\alpha_{rad,s}$  の割合) 燃料に吸収され，かつ，その吸収は全て燃料表面にて行われ，燃料内部にて吸収されることはないと仮定している．また，固体燃料の放射率と吸収率の間には，次の Kirchhoff の法則が成り立つと仮定する．

$$\varepsilon_s = \alpha_{rad,s} \quad (2.71)$$

#### 気相からの熱輻射

火炎の温度は非常に高く，かつ，火炎位置近傍には強い輻射光を発生する化学種の濃度が高くなっているため，気相の輻射源は火炎における燃焼ガスのみと考える．ここでは輻射光を発生する化学種として  $\text{CO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  のみを考慮する．気相以外の輻射源としてすすを考えるが，気相が発生した輻射光のすすによる吸収は無視することとする．これらの仮定の下，気相の放射率  $\varepsilon_g$  は Leckner の経験式 [26,27] により評価する．この経験式は，Pennsylvania State University の Chiaverini らによってハイブリッドロケット燃焼実験結果の解析に用いられた実績のある手法である [28]．この経験式中では圧力の単位は [bar] であり，光路長の単位は [cm] であることに注意を要する．まず初めに，標準圧力における  $\text{CO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  の放射率を計算する．標準圧力  $p_0$  は 1 bar である．

$$\varepsilon_{0,k}(p_k L, p_0, T_g) = \exp \left[ \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N c_{ji} \left( \frac{T_g}{T_0} \right)^j \left( \log_{10} \frac{p_k L}{(p_k L)_0} \right)^i \right] \quad (2.72)$$

ここで標準温度  $T_0$  は 1000 K であり，標準圧力・光路長  $(p_k L)_0$  は 1 bar cm である．次に，実際の圧力での放射率へと変換する．

$$\frac{\varepsilon_k(p_k L, p, T_g)}{\varepsilon_{0,k}(p_k L, p_0, T_g)} = 1 - \frac{(a-1)(1-P_E)}{a+b-1+P_E} \exp \left[ -c \left( \log_{10} \frac{(p_k L)_m}{p_k L} \right)^2 \right] \quad (2.73)$$

式(2.72) や式(2.73) におけるパラメータを以下に示す．

二酸化炭素， $\text{CO}_2$ ：

$$M = 2 \quad (2.74)$$

$$N = 3 \quad (2.75)$$

$$\begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & \dots & c_{NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.9893 & 1.2710 & -0.23678 \\ 2.7669 & -1.1090 & 0.19731 \\ -2.1081 & 1.0195 & -0.19544 \\ 0.39163 & -0.21897 & 0.044644 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$P_E = \frac{p + 0.28p_{\text{CO}_2}}{p_0} \quad (2.77)$$

$$\frac{(p_{\text{CO}_2}L)_m}{(p_{\text{CO}_2}L)_0} = \begin{cases} 0.054\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^{-2} & \text{at } \frac{T_g}{T_0} < 0.7 \\ 0.225\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^2 & \text{at } \frac{T_g}{T_0} > 0.7 \end{cases} \quad (2.78)$$

$$a = 1 + 0.1\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^{-1.45} \quad (2.79)$$

$$b = 0.23 \quad (2.80)$$

$$c = 1.47 \quad (2.81)$$

水蒸気, H<sub>2</sub>O :

$$M = 2 \quad (2.82)$$

$$N = 2 \quad (2.83)$$

$$\begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & \dots & c_{NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2118 & 0.85667 & -0.10838 \\ -1.1987 & 0.93048 & -0.17156 \\ 0.035596 & -0.14391 & 0.045915 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

$$P_E = \frac{p + 2.56p_{\text{H}_2\text{O}}/\sqrt{T_g/T_0}}{p_0} \quad (2.85)$$

$$\frac{(p_{\text{H}_2\text{O}}L)_m}{(p_{\text{H}_2\text{O}}L)_0} = 13.2\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^2 \quad (2.86)$$

$$a = \begin{cases} 2.144 & \text{at } \frac{T_g}{T_0} < 0.75 \\ 1.888 - 0.2053 \log_{10} \frac{T_g}{T_0} & \text{at } \frac{T_g}{T_0} > 0.75 \end{cases} \quad (2.87)$$

$$b = 1.10\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^{-1.4} \quad (2.88)$$

$$c = 0.5 \quad (2.89)$$

CO<sub>2</sub> と H<sub>2</sub>O から放射される輻射光のバンドは一部が重複している．そこで混合ガスの放射率を推算するためにはそのことを踏まえた補正項  $\Delta\varepsilon$  が必要となる．

$$\Delta\varepsilon = \left( \frac{\zeta}{10.7 + 101\zeta} - 0.0089\zeta^{10.4} \right) \left( \log_{10} \frac{(p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}})L}{(p_kL)_0} \right)^{2.76} \quad (2.90)$$

$$\zeta \equiv \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}}} \quad (2.91)$$

もし  $(p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}})L < (p_k L)_0$  となった場合は関数の定義域から外れてしまうので、 $\Delta\varepsilon = 0$  とする。最終的に混合ガスの放射率  $\varepsilon_g$  は以下ようになる。

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon \quad (2.92)$$

上記の放射率の推算式中に現れる気体の温度  $T_g$  には火炎温度を用いる。また分圧  $p_k$  は、流体計算にて得られた断面平均での圧力に火炎位置における化学種  $k$  のモル分率を掛け合わせて評価する。ここで火炎温度や燃焼ガス組成は、2.4.2 章で説明するように化学平衡計算により求める。光路長には火炎厚さを用いる。気相の放射率は火炎厚さに対して比較的敏感ではない [28] ので、ここでは定数とする。火炎厚さの値としては、光学撮影の結果として得られた値である 16 インチ (= 0.1524 [cm]) を用いる [22]。

### すすからの熱輻射

燃焼器内の輻射源を考えた場合、 $\text{CO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  といった燃焼ガスよりもむしろすすといった固体の微小粒子から輻射光は多く発せられることが知られている [28, 29]。そこで本解析手法ではすすからの輻射を扱う。すすの放射率の推算には Foster らによる推算式 [30] を用いる。これは理論的アプローチとカーボンの可視光スペクトルデータを用いて得られたものである。

$$\varepsilon_{\text{soot}} = 1 - \exp(-0.01017CL) \quad (2.93)$$

ここですす濃度  $C$  の単位は [mg/litre] であり、光路長  $L$  の単位は [cm] である。

すすの発生は化学量論比よりも燃料過剰側の領域にて起こる [31]。したがって、すすの濃度や温度を見積もる際には、燃料過剰側である火炎よりも下側の領域に着目する。この火炎下部の領域において、2.4.3 章で説明するように化学平衡計算を行うことですすの濃度や温度を得ることができる。光路長はすす発生領域の長さであるとする。すすは火炎下部領域全体において発生している訳ではないであろうが、ここでは簡単のための近似として、すす発生領域の長さとして火炎下部領域の長さ、つまり、火炎高さを用いる。次に火炎高さの推算方法について説明する。まず混合分率分布として近似的に二次曲線を仮定する。燃料壁面に原点が固定された、壁面垂直方向の座標  $y$  (気相方向が正方向) において、壁面位置  $y = 0$  で全て燃料ガス  $\xi = 1$  とし、火炎位置  $y = y_{fl}$  にて化学量論比  $\xi = \xi_{st}$  とすると、混合分率分布は次のようになる。

$$\xi = 1 - \frac{1 - \xi_{st}}{y_{fl}} y^2 \quad (2.94)$$

この分布 (2.94) の断面平均が、準一次元の流体計算で得られた値と一致すると考える。式 (2.94) の断面平均を取る。

$$\bar{\xi}_{Q1D} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \xi \cdot 2\pi r dr \quad (2.95)$$

座標  $r$  はポート半径方向座標であり、中心軸で  $r = 0$  である。座標  $r$  と座標  $y$  の関係を考

える .

$$r = R - y \quad (2.96)$$

$$dr = -dy \quad (2.97)$$

また ,  $r = 0$  のとき  $y = R$  であり ,  $r = R$  のとき  $y = 0$  である . これらの関係より , 式 (2.95) は以下のように変形できる .

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{Q1D} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \xi \cdot 2\pi(R-y)dy \\ &= \frac{2}{R^2} \left[ Ry - \frac{1}{2}y^2 - \frac{R}{3y_{fl}^2}(1-\xi_{st})y^3 + \frac{1-\xi_{st}}{4y_{fl}^2}y^4 \right]_0^R \\ &= 1 - \frac{R^2}{6y_{fl}^2}(1-\xi_{st}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

これより  $y_{fl} \geq 0$  を踏まえると , 火炎高さ  $y_{fl}$  は次の通りである .

$$y_{fl} = R \sqrt{\frac{1}{6} \frac{1-\xi_{st}}{1-\bar{\xi}_{Q1D}}} \quad (2.99)$$

また火炎下部領域での平均混合分率を求める . この値は化学平衡計算において必要となる値である .

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{bf} &= \frac{1}{\pi R^2 - \pi y_{fl}^2} \int_{R-y_{fl}}^R \xi \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{\pi R^2 - \pi y_{fl}^2} \int_0^{y_{fl}} \xi \cdot 2\pi(R-y)dy \\ &= \frac{2}{R^2 - y_{fl}^2} \left[ Ry - \frac{1}{2}y^2 - \frac{R}{3y_{fl}^2}(1-\xi_{st})y^3 + \frac{1-\xi_{st}}{4y_{fl}^2}y^4 \right]_0^{y_{fl}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{y_{fl}}{R^2 - y_{fl}^2} \{4R(2 + \xi_{st}) - 3y_{fl}(1 + \xi_{st})\} \end{aligned} \quad (2.100)$$

### 2.3.3 熱伝導量の評価

固体燃料中への熱伝導量进行评估するにあたって , まず固体燃料中の温度分布を求める . 静止座標系  $\bar{y}$  における熱伝導方程式は次のようになる .

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} = 0 \quad (2.101)$$

ここでは無視してるが , 気相側から入射する輻射光の固体燃料内部での吸収を考慮するのであれば , この熱伝導式中に輻射光の吸収に伴う発熱項が必要となることを記しておく .

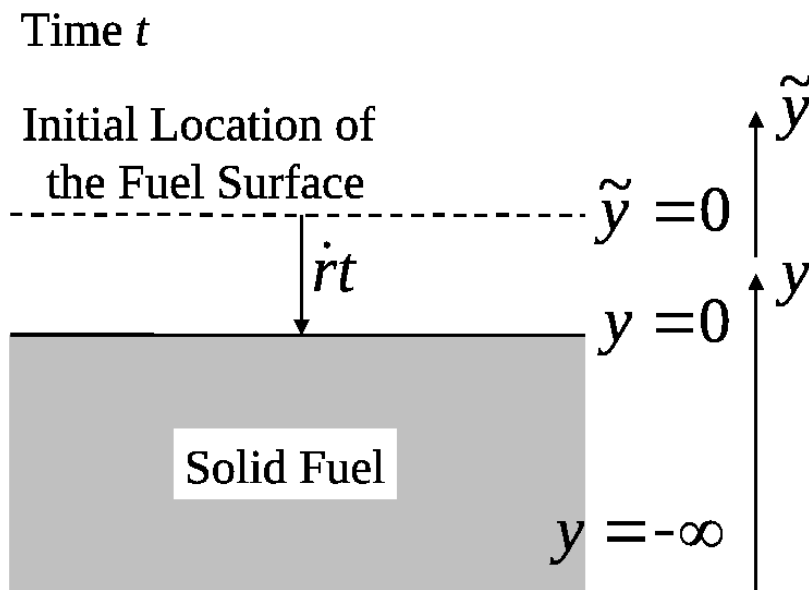


図 2.4: 燃料壁面固定座標系  $y$  .

図 2.4 のような燃料壁面に固定された座標系  $y$  を考える .

$$y = \tilde{y} + \dot{r}t \quad (2.102)$$

$$t = t \quad (2.103)$$

式 (2.101) を静止座標系  $\tilde{y}$  から燃料壁面固定座標系  $y$  へと変換する .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.104)$$

固体燃料中への熱伝導問題に関して定常状態を考える .

$$\dot{r} \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.105)$$

固体燃料は半無限であると仮定し, 境界条件を与えると, この方程式 (2.105) には解析解が存在する . その解析解を用いて固体燃料中への熱伝導量を決定する .

#### 燃料が顕著な融点を持たない場合

燃料壁面において気相側の温度分布と固相側の温度分布が連続につながる場合を考える (図 2.5 (a) を参照) . この場合, 壁面温度  $T_S$  は非常に高温となる傾向がある (図 3.1 (g) および図 3.2 (g) を参照のこと) . これは明確な融点・沸点を持たずに熱分解や気化が進む, 非結晶性の固体燃料 (例えば末端水酸基ポリブタジエン) の場合に適している .

$$(T)_{y=+0} = (T)_{y=-0} \equiv T_S \quad (2.106)$$

これが壁面における熱伝導方程式 (2.105) の境界条件の一つとなる。もう一つの境界条件として、燃料無限遠方にて温度は雰囲気温度（あるいは固体燃料初期温度）となるという条件を課す。

$$(T)_{y \rightarrow -\infty} = T_a \quad (2.107)$$

以上の境界条件を用いると、熱伝導方程式 (2.105) の解析解が得られる。

$$T(y) = T_a + (T_s - T_a) \exp\left(\frac{\dot{r}}{\alpha_s} y\right) \quad (2.108)$$

これにより固体燃料中への熱伝導量を評価するための表式が得られる。

$$\lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \lambda_s (T_s - T_a) \frac{\dot{r}}{\alpha_s} \quad (2.109)$$

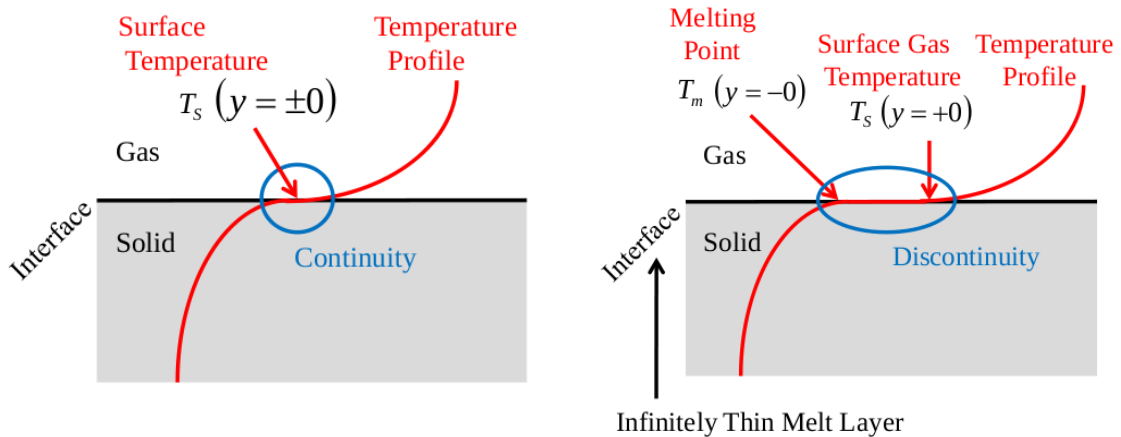
### 燃料が顕著な融点を持つ場合

明確な融点を持つ結晶性の固体燃料（例えば高密度ポリエチレン）に適用可能なモデルを検討する。そこで、燃料壁面において気相側の温度分布と固相側の温度分布が不連続につながる場合を考える（図 2.5 (b) を参照）。気相側の壁面温度は壁面ガス温度  $T_s$  とし、固相側の壁面温度を融点  $T_m$  とする。これが壁面における熱伝導方程式 (2.105) の境界条件の一つとなる。

$$(T)_{y=+0} \neq (T)_{y=-0} \quad (2.110)$$

$$(T)_{y=+0} = T_s \quad (2.111)$$

$$(T)_{y=-0} = T_m \quad (2.112)$$



(a) 燃料壁面にて連続な温度分布。

(b) 燃料壁面にて不連続な温度分布。

図 2.5: 燃料壁面近傍の温度分布。



このとき固体燃料壁面には無限に薄い液体の層（溶融層）が生じていると解釈できる。ただし、溶融層内の流れや溶融層から飛散する液滴（エントレーメント）といった効果はここでは考慮しない。もう一つの境界条件として、燃料が顕著な融点を持たない場合と同じく、燃料無限遠方にて温度は雰囲気温度（あるいは固体燃料初期温度）となるという条件を課す。

$$(T)_{y \rightarrow -\infty} = T_a \quad (2.113)$$

以上の境界条件を用いると、熱伝導方程式 (2.105) の解析解が得られる。

$$T(y) = T_a + (T_m - T_a) \exp\left(\frac{\dot{r}}{\alpha_s} y\right) \quad (2.114)$$

これにより固体燃料中への熱伝導量を評価するための表式が得られる。

$$\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_s (T_m - T_a) \frac{\dot{r}}{\alpha_s} \quad (2.115)$$

### 2.3.4 気化熱の評価

燃料壁面でのエネルギー収支式 (2.56) の右辺に現れる実効気化熱  $h_v$  には、固体燃料の融解・気化に必要な潜熱および熱分解反応に要するエネルギーが含まれる。この値の設定方法の一つは、表 A.1 や表 A.2 に記したような実験値および文献値を定数として用いることである。他の手法として、以下のように燃料壁面における燃料ガスと固体燃料の間のエンタルピの差として評価することもできる。

燃料が顕著な融点を持たない場合

$$h_v = h_{monomer,g}(T_s) - h_{polymer,s}(T_s) \quad (2.116)$$

燃料ガスとしてはモノマのみを考えており、そのエンタルピの評価には NASA 多項式 (2.19) を用いる。ポリマである固体燃料のエンタルピの評価には、比熱  $c_{polymer}$  を定数と仮定して次の式より評価する。

$$h_{polymer,s} = \Delta h_{polymer}^0 + c_{polymer}(T_s - T_r) \quad (2.117)$$

燃料が顕著な融点を持つ場合

$$h_v = h_{monomer,g}(T_s) - h_{polymer,s}(T_m) \quad (2.118)$$

燃料ガスとしてはモノマのみを考えており、そのエンタルピの評価には NASA 多項式 (2.19) を用いる。ポリマである固体燃料のエンタルピの評価には、比熱  $c_{polymer}$  を定数と仮定して次の式より評価する。

$$h_{polymer,s} = \Delta h_{polymer}^0 + c_{polymer}(T_m - T_r) \quad (2.119)$$

### 2.3.5 エネルギー収支式の解法

燃料壁面におけるエネルギー収支の式 (2.56) の各項を 2.3.1 章から 2.3.4 章にて説明したモデルにより評価すると、式 (2.56) は燃料後退速度  $\dot{r}$  と壁面温度  $T_S$  の二つの未知数を持った方程式となる。したがって、このままでは解けず、燃料後退速度  $\dot{r}$  と壁面温度  $T_S$  を関係付ける補助式が一つ必要となる。ハイブリッドロケットにおいては燃料壁面の後退は主に熱分解による燃料の気化によって生じており、ある昇温率に対応した熱分解反応の速度は経験的に Arrhenius 型の式によって表現される [32]。昇温率に関する情報は前指数因子  $A_c$  や活性化エネルギー  $E_a$  に含まれている。

$$\dot{r} = A_c \exp\left(-\frac{E_a}{R_u T_S}\right) e_{reaction} \quad (2.120)$$

この Arrhenius 型の式 (2.120) を用いてエネルギー収支の式 (2.56) より燃料後退速度  $\dot{r}$  を消去することで、式 (2.56) を壁面温度  $T_S$  を唯一の未知数とする方程式へと書き換えることができる。これを Newton 法により  $T_S$  に関して解く。ここで Newton 法のアルゴリズムを説明する。解くべき  $T_S$  の方程式を  $f$  と置く。

$$f(T_S) = 0 \quad (2.121)$$

$T_S$  の初期値を  $T_{S0}$  とする。次の操作により  $T_{S1}$  を求める。

$$T_{S1} = T_{S0} - \frac{f(T_{S0})}{f'(T_{S0})} \quad (2.122)$$

この操作を  $n+1$  回繰り返す。

$$T_{S_{n+1}} = T_{Sn} - \frac{f(T_{Sn})}{f'(T_{Sn})} \quad (2.123)$$

ここで求めた  $T_{S_{n+1}}$  に関して以下の収束判定を行う。

$$\left| \frac{T_{S_{n+1}} - T_{Sn}}{T_{S_{n+1}}} \right| < \epsilon \quad (2.124)$$

微小量  $\epsilon$  は  $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  とする。この条件 (2.124) が満たされたならば値  $T_{S_{n+1}}$  が方程式 (2.56) の解であり、条件 (2.124) が満たされなければ満たす値が見つかるまで上記の手順を繰り返すことになる。このようにして各軸方向位置  $x$  において壁面温度  $T_S$  を得る。壁面温度  $T_S$  が得られれば式 (2.120) より燃料後退速度  $\dot{r}$  が決まり、燃料壁面からの質量付加量  $\dot{m}_F$  も求まる。

$$\dot{m}_F = \rho_s \dot{r} \quad (2.125)$$

## 2.4 化学平衡計算

燃焼現象には多くの化学種と多くの素反応が関わっている。しかし燃焼を扱った数値計算を行うにあたっては、全ての化学種と全ての素反応を考慮することはその計算コストの

高さから困難である．したがって燃焼過程において重要な化学種と素反応のみを燃焼モデルに取り入れるべきである．この考察により，ここでは九化学種を対象とした化学平衡モデルを採用する．NASA CEA コード [16] を用いて，化学種に関する制限を加えない場合の火炎温度と制限を加えた場合の火炎温度がほぼ等しくなるように九化学種を選定した．その結果として選ばれた化学種は， $C_xH_y$ ， $O_2$ ， $CO_2$ ， $H_2O$ ， $CO$ ， $H_2$ ， $OH$ ， $O$  と  $H$  である．また，化学平衡計算においては特定の反応を想定してはいない．本解析手法では，化学平衡計算手法として NASA CEA コードと同様の手法を採用する．化学平衡計算は，燃料ガスと酸化剤は即座に混合および反応すると仮定した上で，原子の物質量が反応前後で保存するという拘束条件の下，Lagrange の未定乗数法により自由エネルギーを最小化することで行われる [16]．この拘束条件は混合分率  $\xi$  を指定することで与えられ，混合分率と各元素の物質量は以下のように関連付けられる．

$$b_C^0 = \frac{x'}{12x' + y'}\xi \quad (2.126)$$

$$b_H^0 = \frac{y'}{12x' + y'}\xi \quad (2.127)$$

$$b_O^0 = \frac{1}{16}(1 - \xi) \quad (2.128)$$

系の熱力学状態が密度と比内部エネルギーの二つの状態量で定められる場合，最小化される自由エネルギーとして Helmholtz エネルギーが選択される．一方で，系の熱力学状態が圧力と比エンタルピの二つの状態量で定められる場合，最小化される自由エネルギーとして Gibbs エネルギーが選択される．

本手法では，(1) 準一次元流れ場における断面平均の温度と組成を求めるとき，(2) 火炎位置における温度と組成を求めるとき，(3) 火炎下部領域における平均の温度と組成を求めるとき，の計三回，化学平衡計算を要する．各々について以下の各章にて説明する．また，(1) では化学平衡を考慮した比熱比と音速の推算法についても説明する．

これらの化学平衡計算を毎時間ステップ行うとすると多くの時間を要し，効率が悪い．そこで，これらの化学平衡計算は 1 ~ 10 ステップ毎に計算することとする．このステップ幅が大きいほど流体の繰り返し計算を早く進めることができるが，数値的な安定性が崩れる場合もある．どのステップ幅を用いることになるかは，問題ごとに設定することとなる．

#### 2.4.1 準一次元流れ場の断面平均温度および断面平均組成の推算，比熱比および音速の推算

準一次元流れ場の断面平均温度と断面平均組成を求めるために，Lagrange の未定乗数法を用いて Helmholtz エネルギーの最小化を実行する．まず初めに，以下のように熱力学状態と拘束条件を定める．

$$\rho^0 = \bar{\rho}_{Q1D} \quad (2.129)$$

$$e^0 = \bar{e}_{Q1D} \quad (2.130)$$

$$\xi^0 = \bar{\xi}_{Q1D} \quad (2.131)$$

下付き添字  $Q1D$  が付く値は全て、2.2章の準一次元流体計算により得られた値である。式(2.131)の値を用いて、式(2.126)、式(2.127)と式(2.128)により各原子の物質量保存の拘束条件が得られる。最小化する関数として、以下の評価関数  $F$  を用いる。

$$F = f + \sum_{i=1}^l \lambda_i (b_i - b_i^0) \quad (2.132)$$

各原子の物質量保存の条件の下、Helmholtz エネルギー  $f$  の最小化が行われる。

$$\delta F = \sum_{j=1}^{N_g} \left( \mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} \right) \delta n_j + \sum_{i=1}^l (b_i - b_i^0) \delta \lambda_i = 0 \quad (2.133)$$

$\delta n_j$  と  $\delta \lambda_i$  が互いに独立であるとする。

$$\mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.134)$$

$$b_i - b_i^0 = 0 \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.135)$$

化学ポテンシャル  $\mu_j$  は次のように評価する。

$$\mu_j = \mu_{0j} + R_u T \ln \rho^0 n_j R'_u T \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.136)$$

ここで  $R'_u$  は  $R'_u = R_u \times 10^{-5}$  である。標準状態における化学ポテンシャル  $\mu_{0j}$  は以下の式で求める。

$$\frac{\mu_{0j}}{R_u T} = \frac{H_j}{R_u T} - \frac{S_j}{R_u} = \frac{w_j h_j}{R_u T} - \frac{S_j}{R_u} \quad (2.137)$$

$$\frac{S_j}{R_u} = -a_{j,1} \frac{T^{-2}}{2} - a_{j,2} T^{-1} + a_{j,3} \ln T + a_{j,4} T + a_{j,5} \frac{T^2}{2} + a_{j,6} \frac{T^3}{3} + a_{j,7} \frac{T^4}{4} + b_{j,2} \quad (2.138)$$

ここで化学種  $j$  の比エンタルピ  $h_j$  には NASA 多項式 (2.19) を用いる。式(2.138)も NASA 多項式の一つである。混合ガス単位質量あたりの化学種  $j$  の物質量  $n_j$ 、Lagrange 乗数  $\lambda_i$  および温度  $T$  の初期の見積り値に対して、Newton-Raphson 法により修正を行う。修正変数は  $\Delta \ln n_j$  ( $j = 1, \dots, N_g$ )、 $\pi_i \equiv -\lambda_i / R_u T$  ( $i = 1, \dots, l$ ) および  $\Delta \ln T$  とする。

$$\Delta \ln n_j - \sum_{i=1}^l a_{ij} \pi_i - \frac{U_j}{R_u T} \Delta \ln T = -\frac{\mu_j}{R_u T} \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.139)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \Delta \ln n_j = b_i^0 - b_i \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.140)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j U_j}{R_u T} \Delta \ln n_j + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j C_{v,j}}{R_u} \right) \Delta \ln T = \frac{e^0 - e}{R_u T} \quad (2.141)$$

混合気体の比内部エネルギー  $e$  , 化学種  $j$  のモルあたりの内部エネルギー  $U_j$  および化学種  $j$  の定積モル比熱  $C_{v,j}$  は以下の通りである .

$$e = \sum_{j=1}^{N_g} n_j U_j \quad (2.142)$$

$$\frac{U_j}{R_u T} = \frac{H_j}{R_u T} - 1 = \frac{w_j h_j}{R_u T} - 1 \quad (2.143)$$

$$\frac{C_{v,j}}{R_u} = \frac{C_{p,j}}{R_u} - 1 = \frac{w_j c_{p,j}}{R_u} - 1 \quad (2.144)$$

ここで化学種  $j$  の比エンタルピ  $h_j$  と化学種  $j$  の定圧比熱  $c_{p,j}$  には NASA 多項式 (2.19) と (2.18) を用いる . 次に , 式 (2.139) を用いて , 式 (2.140) と式 (2.141) から  $\Delta \ln n_j$  を消去する .

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} a_{kj} n_j \pi_k + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j U_j}{R_u T} \right) \Delta \ln T = b_i^0 - b_i + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j \mu_j}{R_u T} \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.145)$$

$$\sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j U_j}{R_u T} \right) \pi_i + \left[ \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j C_{v,j}}{R_u} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j (U_j)^2}{R_u^2 T^2} \right] \Delta \ln T = \frac{e^0 - e}{R_u T} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j U_j \mu_j}{R_u^2 T^2} \quad (2.146)$$

これらの方程式 (2.145) と (2.146) を連立させて解くと ,  $\pi_i (i = 1, \dots, l)$  および  $\Delta \ln T$  が得られる . さらに式 (2.139) から  $\Delta \ln n_j (j = 1, \dots, N_g)$  が得られる . これらの修正変数を用いて各変数を修正する .

$$(n_j)_{new} = (n_j)_{old} (1 + \omega \Delta \ln n_j) \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.147)$$

$$(T)_{new} = (T)_{old} (1 + \omega \Delta \ln T) \quad (2.148)$$

ここで緩和係数  $\omega$  として  $\omega = 0.06$  を用いる . 新しく得られた  $n_j$  や  $T$  を用いて再度  $e$  を評価し , 次の収束判定を行う .

$$\left| \frac{e^0 - e}{e^0} \right| < \epsilon \quad (2.149)$$

微小量  $\epsilon$  には  $\epsilon = 1 \times 10^{-9}$  を用いる . この収束条件 (2.149) が満たされるまで , 上記の連立方程式 (2.145) と (2.146) の計算が繰り返し行われる . 最終的に得られた化学種  $j$  の物質質量  $n_j$  は質量分率  $Y_j$  へと変換される .

$$Y_j = \frac{w_j n_j}{\sum_{k=1}^{N_g} w_k n_k} \quad (2.150)$$

比熱比と音速においても化学平衡が関与している . これ以降は比熱比と音速の評価法について説明する . 比熱比を評価するにあたっては , まず定圧比熱と定積比熱を求める必要がある . 化学平衡状態における定圧比熱  $c_{p,e}$  は , 凍結状態の寄与分  $c_{p,f}$  と反応の寄与分  $c_{p,r}$  の和となる .

$$c_{p,e} = c_{p,f} + c_{p,r} \quad (2.151)$$

$$c_{p,f} = \sum_{j=1}^{N_g} n_j C_{p,j} \quad (2.152)$$

$$c_{p,r} = \sum_{j=1}^{N_g} n_j \frac{H_j}{T} \left( \frac{\partial \ln n_j}{\partial \ln T} \right)_p \quad (2.153)$$

式 (2.153) 中の温度微分を計算するために以下の連立方程式を解く .

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} a_{kj} n_j \left( \frac{\partial \pi_k}{\partial \ln T} \right)_p + \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \left( \frac{\partial \ln n}{\partial \ln T} \right)_p = - \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.154)$$

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial \ln T} \right)_p = - \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \quad (2.155)$$

式 (2.154) と式 (2.155) を連立させて解いた結果から , 化学平衡状態における定圧比熱  $c_{p,e}$  は次のように求まる .

$$\frac{c_{p,e}}{R_u} = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \right) \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial \ln T} \right)_p + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \right) \left( \frac{\partial \ln n}{\partial \ln T} \right)_p + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j C_{p,j}}{R_u} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j (H_j)^2}{R_u^2 T^2} \quad (2.156)$$

一方 , 化学平衡状態における定積比熱  $c_{v,e}$  は以下の式で評価する .

$$c_{v,e} = c_{p,e} + \frac{\frac{pV}{T} \left( \frac{\partial \ln V}{\partial \ln T} \right)_p^2}{\left( \frac{\partial \ln V}{\partial \ln p} \right)_T} \quad (2.157)$$

$$\left( \frac{\partial \ln V}{\partial \ln T} \right)_p = 1 + \left( \frac{\partial \ln n}{\partial \ln T} \right)_p \quad (2.158)$$

$$\left( \frac{\partial \ln V}{\partial \ln p} \right)_T = -1 + \left( \frac{\partial \ln n}{\partial \ln p} \right)_T \quad (2.159)$$

式 (2.158) は式 (2.154) と式 (2.155) の解から求めることができる . 式 (2.159) は以下の連立方程式の解から評価する .

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} a_{kj} n_j \left( \frac{\partial \pi_k}{\partial \ln p} \right)_T + \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \left( \frac{\partial \ln n}{\partial \ln p} \right)_T = \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.160)$$

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial \ln p} \right)_T = \sum_{j=1}^{N_g} n_j \quad (2.161)$$

通常 , 比熱比  $\gamma$  は定圧比熱と定積比熱を用いて次の式で定義される .

$$\gamma \equiv \frac{c_{p,e}}{c_{v,e}} \quad (2.162)$$

化学平衡を考慮すると，比熱比は次のような式となる．

$$\gamma_e \equiv \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S = - \frac{\gamma}{\left( \frac{\partial \ln V}{\partial \ln p} \right)_T} \quad (2.163)$$

この比熱比 (2.163) を用いると，音速  $a$  は以下のように求まる．

$$a = \sqrt{\gamma_e \frac{p}{\rho}} \quad (2.164)$$

## 2.4.2 火炎温度および燃焼ガス組成の推算

火炎温度と燃焼ガス組成を求めるために，Lagrange の未定乗数法を用いて Gibbs エネルギーの最小化を実行する．熱力学状態は圧力と比エンタルピで与える．境界層内は壁面垂直方向にほぼ圧力一様であると仮定すると，火炎位置の圧力には準一次元流体計算における断面平均圧力を近似的に用いることができる．火炎位置の比エンタルピを正確に推定することは困難であるため，準一次元流体計算における断面平均比エンタルピを用いることとする．これはあまり正確ではないかもしれないが，少なくとも比エンタルピの大きさのオーダーにおいてはそれほど異なっていないと考える．混合分率は，火炎位置において化学両論比の値になっていると仮定する．

$$p^0 = \bar{p}_{Q1D} \quad (2.165)$$

$$h^0 = \bar{h}_{Q1D} \quad (2.166)$$

$$\xi^0 = \xi_{st} \quad (2.167)$$

下付き添字  $Q1D$  が付く値は全て，2.2 章の準一次元流体計算により得られた値である．式 (2.167) の値を用いて，式 (2.126)，式 (2.127) と式 (2.128) により各原子の物質質量保存の拘束条件が得られる．最小化する関数として，以下の評価関数  $G$  を用いる．

$$G = g + \sum_{i=1}^l \lambda_i (b_i - b_i^0) \quad (2.168)$$

各原子の物質質量保存の条件の下，Gibbs エネルギー  $g$  の最小化が行われる．

$$\delta G = \sum_{j=1}^{N_g} \left( \mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} \right) \delta n_j + \sum_{i=1}^l (b_i - b_i^0) \delta \lambda_i = 0 \quad (2.169)$$

$\delta n_j$  と  $\delta \lambda_i$  が互いに独立であるとする．

$$\mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.170)$$

$$b_i - b_i^0 = 0 \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.171)$$

化学ポテンシャル  $\mu_j$  は次のように評価する .

$$\mu_j = \mu_{0j} + R_u T \ln \frac{n_j}{n} + R_u T \ln p^0 \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.172)$$

この式 (2.172) 中の圧力  $p^0$  の単位は [bar] であることに注意する . 混合ガス単位質量あたりの化学種  $j$  の物質質量  $n_j$  , 混合ガス単位質量あたりの気相化学種の全物質質量  $n$  , Lagrange 乗数  $\lambda_i$  および温度  $T$  の初期の見積り値に対して , Newton-Raphson 法により修正を行う . 修正変数は  $\Delta \ln n_j$  ( $j = 1, \dots, N_g$ ),  $\Delta \ln n$  ,  $\pi_i \equiv -\lambda_i/R_u T$  ( $i = 1, \dots, l$ ) および  $\Delta \ln T$  とする .

$$\Delta \ln n_j - \sum_{i=1}^l a_{ij} \pi_i - \Delta \ln n - \frac{H_j}{R_u T} \Delta \ln T = -\frac{\mu_j}{R_u T} \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.173)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \Delta \ln n_j = b_i^0 - b_i \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.174)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} n_j \Delta \ln n_j - n \Delta \ln n = n - \sum_{j=1}^{N_g} n_j \quad (2.175)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \Delta \ln n_j + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j C_{p,j}}{R_u} \right) \Delta \ln T = \frac{h^0 - h}{R_u T} \quad (2.176)$$

混合気体の比エンタルピ  $h$  は以下の通りである .

$$h = \sum_{j=1}^{N_g} n_j H_j \quad (2.177)$$

次に , 式 (2.173) を用いて , 式 (2.174) , 式 (2.175) と式 (2.176) から  $\Delta \ln n_j$  を消去する .

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} a_{kj} n_j \pi_k + \left( \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \right) \Delta \ln n + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln T \\ & = b_i^0 - b_i + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j \mu_j}{R_u T} \quad (i = 1, \dots, l) \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \pi_i + \left( \sum_{j=1}^{N_g} n_j - n \right) \Delta \ln n + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln T = n - \sum_{j=1}^{N_g} n_j + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j \mu_j}{R_u T} \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \right) \pi_i + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln n + \left[ \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j C_{p,j}}{R_u} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j (H_j)^2}{R_u^2 T^2} \right] \Delta \ln T \\ & = \frac{h^0 - h}{R_u T} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j \mu_j}{R_u^2 T^2} \end{aligned} \quad (2.180)$$



これらの方程式 (2.178), (2.179) と (2.180) を連立させて解くと,  $\pi_i (i = 1, \dots, l)$ ,  $\Delta \ln n$  および  $\Delta \ln T$  が得られる. さらに式 (2.173) から  $\Delta \ln n_j (j = 1, \dots, N_g)$  が得られる. これらの修正変数を用いて各変数を修正する.

$$(n_j)_{new} = (n_j)_{old}(1 + \omega \Delta \ln n_j) \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.181)$$

$$(T)_{new} = (T)_{old}(1 + \omega \Delta \ln T) \quad (2.182)$$

ここで緩和係数  $\omega$  として  $\omega = 0.06$  を用いる. 新しく得られた  $n_j$  や  $T$  を用いて再度  $h$  を評価し, 次の収束判定を行う.

$$\left| \frac{h^0 - h}{h^0} \right| < \epsilon \quad (2.183)$$

微小量  $\epsilon$  には  $\epsilon = 1 \times 10^{-9}$  を用いる. この収束条件 (2.183) が満たされるまで, 上記の連立方程式 (2.178), (2.179) と (2.180) の計算が繰り返し行われる. 最終的に得られた化学種  $j$  の物質質量  $n_j$  は質量分率  $Y_j$  へと変換される.

$$Y_j = \frac{w_j n_j}{\sum_{k=1}^{N_g} w_k n_k} \quad (2.184)$$

以上により, 火炎温度と燃焼ガス組成が定まる.

### 2.4.3 火炎下部領域の平均温度および平均組成の推算

すすの放射率評価に用いる火炎下部領域の平均温度および平均組成を求めるために, Lagrange の未定乗数法を用いて Gibbs エネルギーの最小化を実行する. 2.4.1 章と 2.4.2 章では気相である九化学種のみを考えていたが, ここでは凝縮相である炭素 (グラファイト) を新たに追加して考える. つまり, この炭素 (グラファイト) をすすとみなす. 2.4.2 章と同様に, 熱力学状態は圧力と比エンタルピで与える. 境界層内は壁面垂直方向にほぼ圧力一様であると仮定すると, 火炎下部領域の平均圧力には準一次元流体計算における断面平均圧力を近似的に用いることができる. 火炎下部領域の平均の比エンタルピを正確に推定することは困難であるため, 準一次元流体計算における断面平均比エンタルピを用いることとする. 混合分率は, 式 (2.100) で評価される火炎下部領域の平均混合分率  $\bar{\xi}_{bf}$  を用いる.

$$p^0 = \bar{p}_{Q1D} \quad (2.185)$$

$$h^0 = \bar{h}_{Q1D} \quad (2.186)$$

$$\xi^0 = \bar{\xi}_{bf} \quad (2.187)$$

下付き添字  $Q1D$  が付く値は全て, 2.2 章の準一次元流体計算により得られた値である. 式 (2.187) の値を用いて, 式 (2.126), 式 (2.127) と式 (2.128) により各原子の物質質量保存の拘束条件が得られる. 最小化する関数として, 以下の評価関数  $G$  を用いる.

$$G = g + \sum_{i=1}^l \lambda_i (b_i - b_i^0) \quad (2.188)$$

各原子の物質保存の条件の下，Gibbs エネルギー  $g$  の最小化が行われる．

$$\delta G = \sum_{j=1}^{N_t} \left( \mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} \right) \delta n_j + \sum_{i=1}^l (b_i - b_i^0) \delta \lambda_i = 0 \quad (2.189)$$

$\delta n_j$  と  $\delta \lambda_i$  が互いに独立であるとする．

$$\mu_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, N_t) \quad (2.190)$$

$$b_i - b_i^0 = 0 \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.191)$$

化学ポテンシャル  $\mu_j$  は次のように評価する．

$$\mu_j = \mu_{0j} + R_u T \ln \frac{n_j}{n} + R_u T \ln p^0 \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.192)$$

$$\mu_j = \mu_{0j} \quad (j = N_t = N_g + 1) \quad (2.193)$$

この式 (2.192) 中の圧力  $p^0$  の単位は [bar] であることに注意する．混合ガス単位質量あたりの化学種  $j$  の物質  $n_j$ ，混合ガス単位質量あたりの気相化学種の全物質  $n$ ，Lagrange 乗数  $\lambda_i$  および温度  $T$  の初期の見積り値に対して，Newton-Raphson 法により修正を行う．修正変数は  $\Delta \ln n_j$  ( $j = 1, \dots, N_g$ )， $\Delta n_j$  ( $j = N_t$ )， $\Delta \ln n$ ， $\pi_i \equiv -\lambda_i / R_u T$  ( $i = 1, \dots, l$ ) および  $\Delta \ln T$  とする．

$$\Delta \ln n_j - \sum_{i=1}^l a_{ij} \pi_i - \Delta \ln n - \frac{H_j}{R_u T} \Delta \ln T = -\frac{\mu_j}{R_u T} \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.194)$$

$$- \sum_{i=1}^l a_{ij} \pi_i - \frac{H_j}{R_u T} \Delta \ln T = -\frac{\mu_j}{R_u T} \quad (j = N_t) \quad (2.195)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \Delta \ln n_j + a_{iN_t} \Delta n_{N_t} = b_i^0 - b_i \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.196)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} n_j \Delta \ln n_j - n \Delta \ln n = n - \sum_{j=1}^{N_g} n_j \quad (2.197)$$

$$\sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \Delta \ln n_j + \frac{H_{N_t}}{R_u T} \Delta n_{N_t} + \left( \sum_{j=1}^{N_t} \frac{n_j C_{p,j}}{R_u} \right) \Delta \ln T = \frac{h^0 - h}{R_u T} \quad (2.198)$$

混合気体の比エンタルピ  $h$  は以下の通りである．

$$h = \sum_{j=1}^{N_t} n_j H_j \quad (2.199)$$

次に，式(2.194)を用いて，式(2.195)，式(2.196)，式(2.197)と式(2.198)から $\Delta \ln n_j$ を消去する．

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} a_{kj} n_j \pi_k + a_{iN_t} \Delta n_{N_t} + \left( \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \right) \Delta \ln n + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln T \\ & = b_i^0 - b_i + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j \mu_j}{R_u T} \quad (i = 1, \dots, l) \end{aligned} \quad (2.200)$$

$$\sum_{i=1}^l a_{ij} \pi_i + \frac{H_j}{R_u T} \Delta \ln T = \frac{\mu_j}{R_u T} \quad (j = N_t) \quad (2.201)$$

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{N_g} a_{ij} n_j \pi_i + \left( \sum_{j=1}^{N_g} n_j - n \right) \Delta \ln n + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln T = n - \sum_{j=1}^{N_g} n_j + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j \mu_j}{R_u T} \quad (2.202)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{a_{ij} n_j H_j}{R_u T} \right) \pi_i + \frac{H_{N_t}}{R_u T} \Delta n_{N_t} + \left( \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j}{R_u T} \right) \Delta \ln n + \left[ \sum_{j=1}^{N_t} \frac{n_j C_{p,j}}{R_u} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j (H_j)^2}{R_u^2 T^2} \right] \Delta \ln T \\ & = \frac{h^0 - h}{R_u T} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{n_j H_j \mu_j}{R_u^2 T^2} \end{aligned} \quad (2.203)$$

これらの方程式(2.200)，(2.201)，(2.202)と(2.203)を連立させて解くと， $\pi_i (i = 1, \dots, l)$ ， $\Delta \ln n$ ， $\Delta n_j (j = N_t)$ および $\Delta \ln T$ が得られる．さらに式(2.194)から $\Delta \ln n_j (j = 1, \dots, N_g)$ が得られる．これらの修正変数を用いて各変数を修正する．

$$(n_j)_{new} = (n_j)_{old} (1 + \omega \Delta \ln n_j) \quad (j = 1, \dots, N_g) \quad (2.204)$$

$$(n_j)_{new} = (n_j)_{old} + \omega \Delta n_j \quad (j = N_t) \quad (2.205)$$

$$(T)_{new} = (T)_{old} (1 + \omega \Delta \ln T) \quad (2.206)$$

ここで緩和係数 $\omega$ として $\omega = 0.06$ を用いる．新しく得られた $n_j$ や $T$ を用いて再度 $h$ を評価し，次の収束判定を行う．

$$\left| \frac{h^0 - h}{h^0} \right| < \epsilon \quad (2.207)$$

微小量 $\epsilon$ には $\epsilon = 1 \times 10^{-9}$ を用いる．この収束条件(2.207)が満たされるまで，上記の連立方程式(2.200)，(2.201)，(2.202)と(2.203)の計算が繰り返し行われる．最終的に得られた化学種 $j$ の物質質量 $n_j$ は質量分率 $Y_j$ へと変換される．

$$Y_j = \frac{w_j n_j}{\sum_{k=1}^{N_t} w_k n_k} \quad (2.208)$$

以上により，火炎下部領域の平均温度および平均組成が定まる．この火炎下部領域の平均温度をすすの温度として用いる．次に，火炎下部領域の平均密度を求める．

$$\bar{\rho}_{bf} = \frac{p^0}{R_u (T)_{new} \sum_{j=1}^{N_g} \frac{Y_j}{w_j}} \quad (2.209)$$

すす濃度は以下の通りである．

$$C = \bar{\rho}_{bf} Y_{N_i} \quad (2.210)$$

2.3.2 章の式 (2.93) においては， $C$  の単位を [mg/litre] に変換して用いる．

## 2.5 解析モデルの選択

2 章では，反応流・伝熱統合解析手法の詳細について述べた．この手法中には，状況に合わせて実際に使用するモデルを選択することのできる箇所が数点存在する．この章では，その解析モデルの選択肢について要約する．

### (1) 対流熱伝達モデルの選択

対流熱伝達による伝熱量を見積もるにあたって，従来の Karabeyoglu モデル (2.57)，あるいは，火炎位置における速度増大の効果を導入した修正 Karabeyoglu モデル (2.68) のいずれを適用するか，解析者に選択の余地がある．後者の修正モデル (2.68) を用いると，燃料後退速度が前者に比べて増大する．後者の修正モデル (2.68) は燃料後退速度の上界を得たい場合に適している．

また，いずれのモデルを使用する場合においても，熱化学的ブローイングパラメータ  $B_f$  (2.59) の値が必要となる．このパラメータを得るにあたっては，火炎位置における比エンタルピ  $h_{f1}$  を化学平衡計算の結果を下に評価するのであるが，もし輻射熱伝達を考慮しないのであれば，火炎位置における化学平衡計算 (2.4.2 章) を省略して燃焼熱を定数として用いるという選択肢もある．これにより火炎位置における化学平衡計算の分だけ計算時間を短縮できる．

### (2) 輻射熱伝達の有無の選択

燃料後退速度の下界を得たい場合，あるいは，輻射の効果が重要ではないことが予測されるケースの場合，輻射熱伝達の効果を考慮せず，燃料壁面におけるエネルギー収支の式 (2.56) から輻射熱伝達の項を無視するという選択肢がある．その場合，火炎位置における化学平衡計算 (2.4.2 章) や火炎下部領域における化学平衡計算 (2.4.3 章) が省略可能となり，計算時間を短縮できる．一方で，燃料後退速度の上界を得たい場合，あるいは，輻射の効果が重要であると予測されるケースの場合，輻射熱伝達の効果を無視できない．

### (3) 熱伝導解析における壁面温度モデルの選択

固体燃料中への熱伝導方程式 (2.104) を解析的に解く際には壁面近傍の温度分布を設定する必要があり，これには二通りの方法がある．一つは固体燃料壁面温度を気相側の壁面温度と等しく設定する方法 (2.106) で，非結晶性の燃料に適した設定である．もう一つは固体燃料壁面温度を気相側の壁面温度と異なるものとするので，固体燃料壁面温度を燃料の融点と設定する方法 (2.112) である．これは結晶性の燃料に適している．

#### (4) 実効気化熱の評価方法の選択

実効気化熱の値として信頼できる値を有している場合、その値を定数として用いる。そうでない場合は式 (2.116) や式 (2.118) を用いて壁面温度の関数として実効気化熱を評価する。

## 2.6 解析結果の平均化処理

この章では、反応流・伝熱統合解析により得られた結果の後処理の方法について述べる。解析の結果として得られた燃料グレインポート半径の分布を用いて、以下の式より時空間平均の燃料後退速度と時間平均の酸化剤質量流束を求める。

$$\Delta m_F = \rho_s \int_0^{L_p} \pi(r_{final}^2 - r_{initial}^2) dx \quad (2.211)$$

$$\bar{r}_{final} = \sqrt{r_{initial}^2 + \frac{\Delta m_F}{\pi \rho_s L_p}} \quad (2.212)$$

$$\bar{\dot{r}} = \frac{\bar{r}_{final} - r_{initial}}{t_b} \quad (2.213)$$

$$\bar{G}_{ox} = \frac{4\dot{m}_{ox}}{\pi(r_{initial} + \bar{r}_{final})^2} \quad (2.214)$$

これにより得られた時空間平均燃料後退速度と時間平均酸化剤質量流束に関して、複数の点を用いて次の経験式に最小二乗法を用いてフィッティングを行い、定数  $a$  と  $n$  を得る。

$$\bar{\dot{r}} = a \bar{G}_{ox}^n \quad (2.215)$$

ここで、時空間平均燃料後退速度  $\bar{\dot{r}}$  の単位は [mm/s]、時間平均酸化剤質量流束  $\bar{G}_{ox}$  の単位は [kg/m<sup>2</sup>/s] とする。

## 第3章 本数値予測技術の特性

本章では，反応流・伝熱統合解析手法を用いた本数値予測技術の特性について調査を行い，議論する．本数値予測技術を構成する各要素が燃料後退速度の予測においてどの程度影響を与えるのかを明らかにする．

### 3.1 問題設定と代表的な計算例

本数値予測技術の特性解析を実施するにあたり，そのための問題設定として Karabeyoglu らによる気体酸素（GOX）と高密度ポリエチレン（HDPE）を用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジン燃焼実験 [33] を採用する．Karabeyoglu らの実験条件を表 3.1 に示す．酸化剤流入温度  $T_{inj}$  は  $T_{inj} = 300$  [K] とし，固体燃料初期温度  $T_a$  は  $T_a = 300$  [K] とする．本数値予測技術の特性解析を実施するに先立ち，代表的な解析結果について以下に示す．

#### 火炎での速度増大および輻射を考慮しないモデルでの解析結果

ここでは，解析モデルの選択（2.5 章）として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする．この時の計算結果の例として，試験番号 1 の解析結果を図 3.1 に示す．これらの図 3.1 は燃料グレインポート内の分布のみを示しており，ノズル内の分布は省略している．これらの図 3.1 より，次の事が言える．混合ガスの密度は入口付近で高く，時間経過とともに全体的に減少していくがその変化量は小さい．燃焼室圧力は後流に行くにつれてわずかに減少し，時間経過に伴って全体的に減

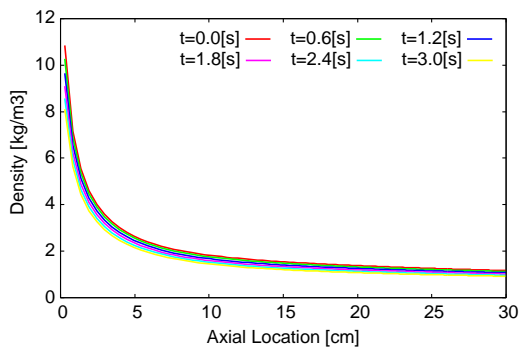
表 3.1: Karabeyoglu らの実験条件 [33] ．

試験 番号	ポート長さ $L_p$ [cm]	初期ポート径 $D_{p,0}$ [mm]	ノズルスロート径 $D_t$ [mm]	酸化剤流入 質量流量 $\dot{m}_{ox}$ [kg/s]	燃焼時間 $t_b$ [s]
No. 1	30.48	12.8	9.78	0.0454	3.0
2	30.48	17.0	9.78	0.0453	3.0
3	30.48	22.0	9.53	0.0328	3.0
4	30.48	12.8	9.91	0.0329	3.0

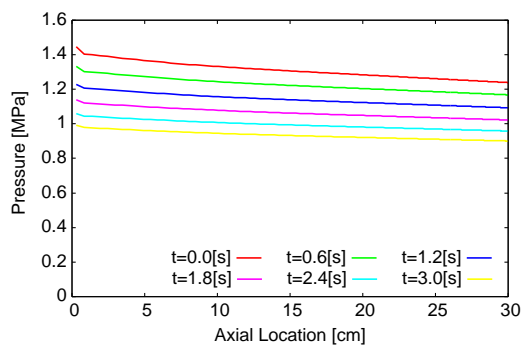
少する．混合ガスの温度は後流に行くにつれて上昇し，その上昇率は鈍くなってくる．また，時間に伴い全体的にわずかに減少する．Mach 数は後流に行くにつれて上昇し，時間経過に伴って全体的に減少する．混合分率も，Mach 数と同様な変化の傾向を示す．混合分率の値は化学量論比での値と比べて小さく，全体的に酸化剤過剰である．火炎温度はほぼ一様で，かつ，ほぼ一定である．燃料壁面温度はほぼ一様で，かつ，ほぼ一定であるように見える．しかし，後流に行くにつれて，あるいは，時間経過に伴ってごくわずかに減少しており，その微小な変化が指数関数 (2.120) により拡大されて，図 3.1 (h) に見られるような燃料後退速度の変化の傾向を生み出す．燃料後退速度は後流に行くにつれて減少し，その減少率は鈍くなってくる．また，時間の経過に伴い全体的に減少する

#### 火炎での速度増大および輻射を考慮するモデルでの解析結果

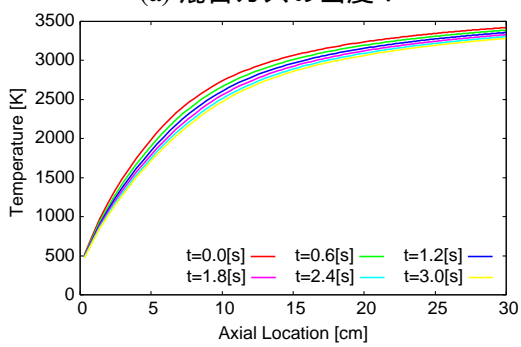
ここでは，解析モデルの選択 (2.5 章) として，(1) 火炎での速度増大の効果を考慮 ( $a_v = 2$  に設定)，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項として気相からの輻射およびすすからの輻射ともに考慮，(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする．この時の計算結果の例として，試験番号 1 の解析結果を図 3.2 と図 3.3 に示す．これらの図 3.2 と図 3.3 は燃料グレインポート内の分布のみを示しており，ノズル内の分布は省略している．これらの図 3.2 と図 3.3 より，次の事が言える．混合ガスの密度，燃焼室圧力，混合ガスの温度，Mach 数，混合分率，火炎温度，壁面ガス温度と燃料後退速度の変化の傾向は，火炎での速度増大および輻射を考慮しないモデルでの解析結果 (図 3.1) とほぼ同様である．二酸化炭素  $\text{CO}_2$  の放射率が後流に行くにつれて上昇する一方で，水蒸気  $\text{H}_2\text{O}$  の放射率は後流に行くにつれて減少する．どちらの放射率も時間経過に伴って全体的に減少する．バンド・オーバーラップに関する補正項は全域，全時間にわたって無視できるほど小さい．混合ガスの放射率は後流に行くにつれて上昇し，時間経過に伴って全体的に減少する．二酸化炭素  $\text{CO}_2$  の放射率の大きさと水蒸気  $\text{H}_2\text{O}$  の放射率の大きさを比較すると，二酸化炭素  $\text{CO}_2$  の放射率の大きさの方が一桁大きく，混合ガスの放射率はほぼ二酸化炭素  $\text{CO}_2$  の放射率から成ることが分かる．すすの放射率も概ね後流に行くにつれて上昇し，時間経過に伴って全体的に減少する．その値は混合ガスの放射率と比較すると一桁大きな値を示す．すす温度は後流に行くにつれて減少する．また，時間経過に伴ってわずかに上昇するものの，その変化量はごくわずかである．



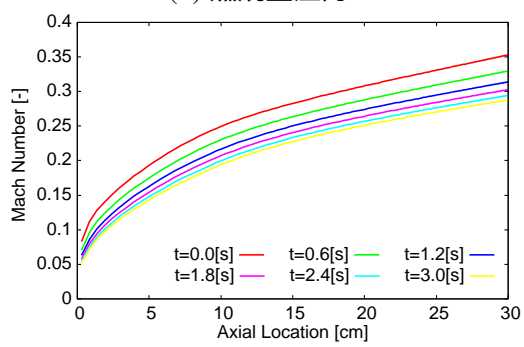
(a) 混合ガスの密度 .



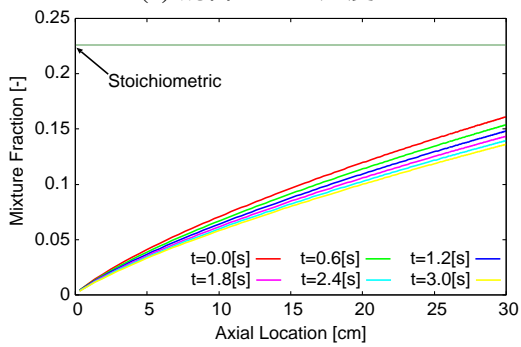
(b) 燃焼室圧力 .



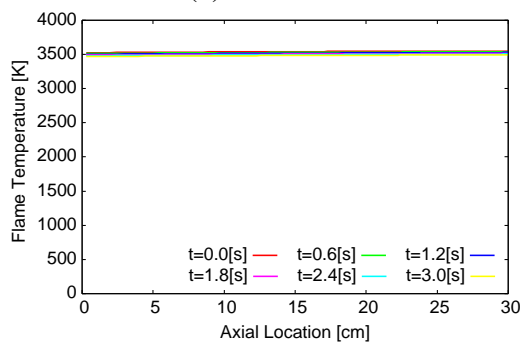
(c) 混合ガスの温度 .



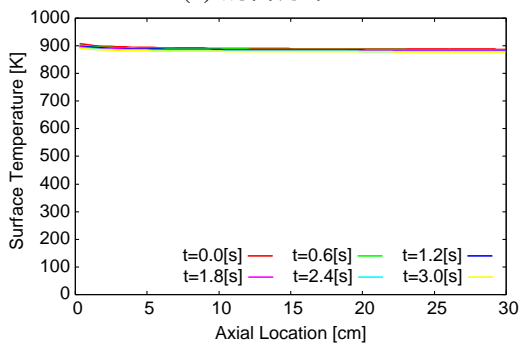
(d) Mach 数 .



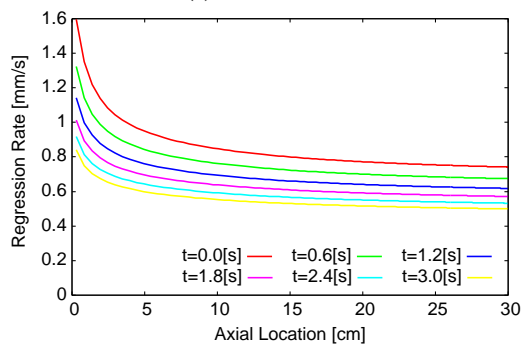
(e) 混合分率 .



(f) 火炎温度 .



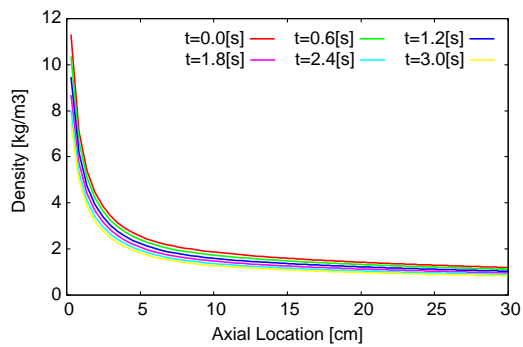
(g) 壁面ガス温度 .



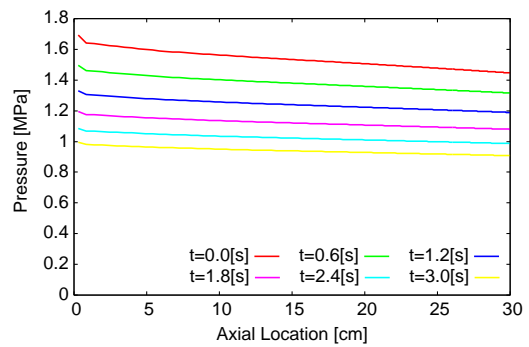
(h) 燃料後退速度 .

図 3.1: 火炎での速度増大および輻射を考慮しないモデルでの解析結果の例 (試験番号 1) .

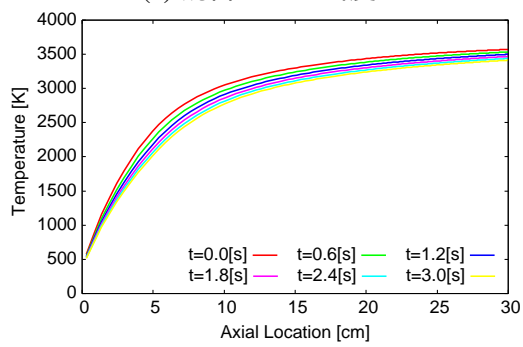




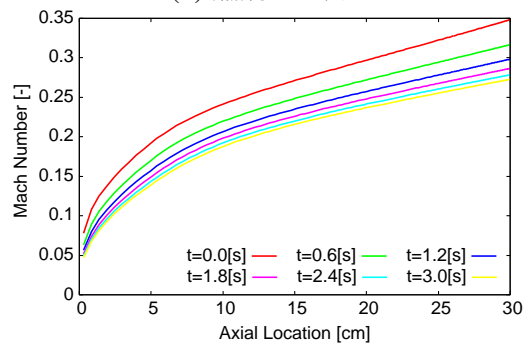
(a) 混合ガスの密度 .



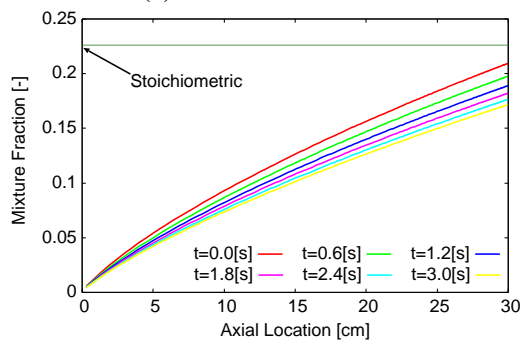
(b) 燃焼室圧力 .



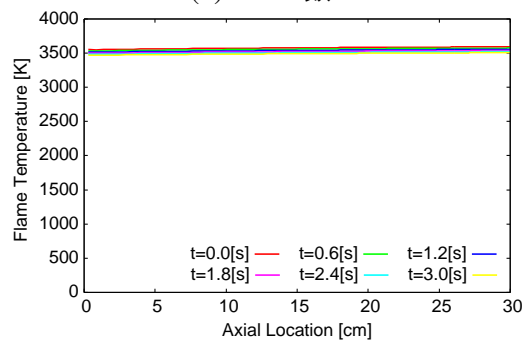
(c) 混合ガスの温度 .



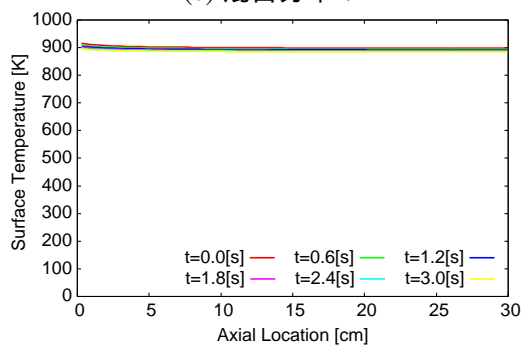
(d) Mach 数 .



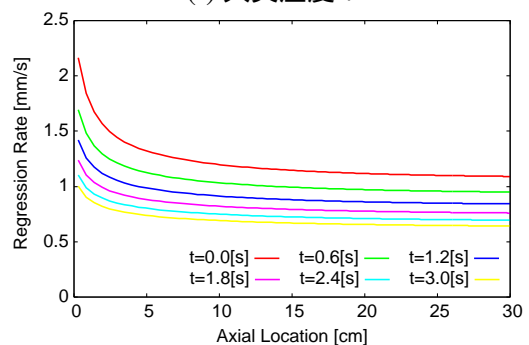
(e) 混合分率 .



(f) 火炎温度 .

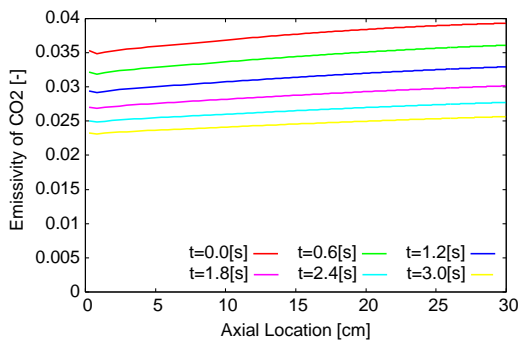


(g) 壁面ガス温度 .

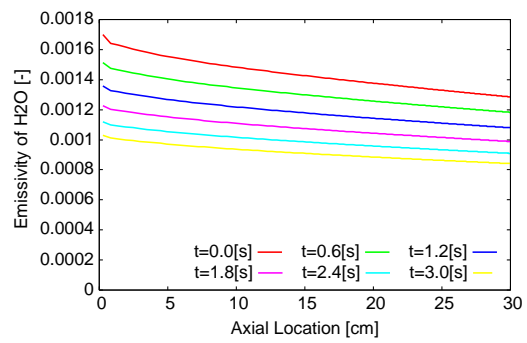


(h) 燃料後退速度 .

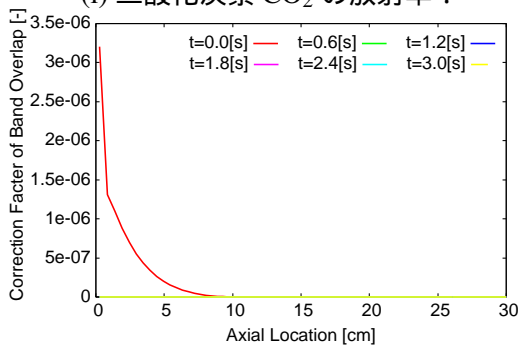
図 3.2: 火炎での速度増大および輻射を考慮するモデルでの解析結果の例 (試験番号 1) .



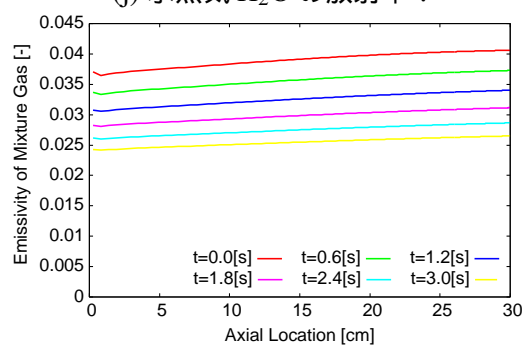
(i) 二酸化炭素 CO<sub>2</sub> の放射率 .



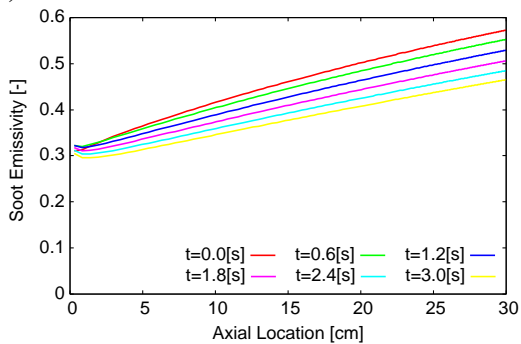
(j) 水蒸気 H<sub>2</sub>O の放射率 .



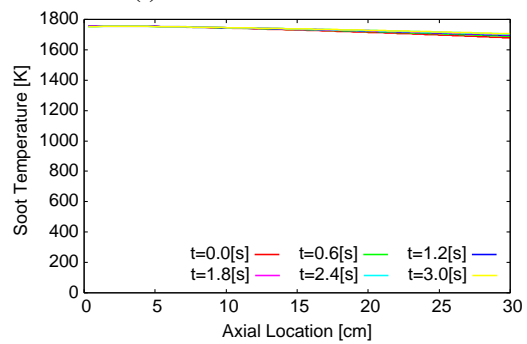
(k) バンド・オーバーラップに関する補正項 .



(l) 混合ガスの放射率 .



(m) すすの放射率 .



(n) すす温度 .

図 3.3: 火炎での速度増大および輻射を考慮するモデルでの解析結果の例 (試験番号 1) (続き) .

## 3.2 熱分解・気化速度の影響

熱分解・気化速度の評価式である Arrhenius 式 (2.120) は、局所燃料後退速度を評価する際に直接用いられる。したがって、この式 (2.120) 中に現れる活性化エネルギー  $E_a$  と前指数因子  $A_c$  は局所燃料後退速度に大きな影響を与えることが予想される。そこで、活性化エネルギー  $E_a$  と前指数因子  $A_c$  の時空間平均燃料後退速度に対する感度を調べる。ここでは、解析モデルの選択 (2.5 章) として、(1) 火炎での速度増大の効果を無視、火炎位置における比エンタルピとして燃焼熱を使用、(2) 輻射項を無視、(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用、(4) 実効気化熱として定数を使用、とする。また、熱化学的ブローイングパラメータ (2.59) の値として、Marxman らが理論的に見積もった値  $(u_{fl}/u_e)_{mv} = 0.56$  (つまり、 $(u_e/u_{fl})_{mv} \approx 1.8$ ) [23] を定数として用いる。

### 3.2.1 活性化エネルギーの感度

活性化エネルギー  $E_a$  の値をパラメトリックに変化させて計算を実施する。A.1 章の表 A.1 に記された文献値を基準値  $E_{a,r}$  として、 $1.5E_{a,r}$ 、 $1.1E_{a,r}$ 、 $1.0E_{a,r}$ 、 $0.9E_{a,r}$  と  $0.5E_{a,r}$  の五つ

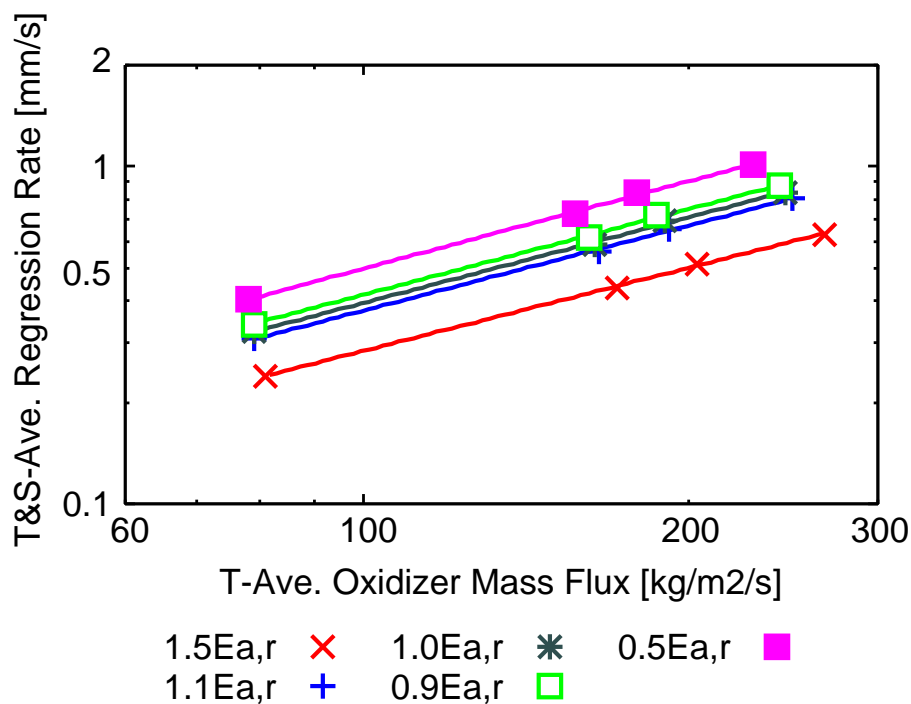


図 3.4: 活性化エネルギー  $E_a$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度。結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である。横軸・縦軸ともに log スケールである。

表 3.2: 活性化エネルギー  $E_a$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

	$1.5E_{a,r}$	$1.1E_{a,r}$	$1.0E_{a,r}$	$0.9E_{a,r}$	$0.5E_{a,r}$
a	0.00667	0.00801	0.00821	0.00864	0.00960
n	0.815	0.835	0.841	0.842	0.858

の値を計算に用いる．これらの計算の結果を図 3.4 に示す．次に，これらの結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  の値と指数  $n$  の値を表 3.2 に示す．この活性化エネルギー  $E_a$  の範囲では，指数  $n$  は  $E_a$  の減少に伴い単調に増加するものの，その値は約 0.8 から大きくは変化しない様子が見て取れる．他方で，係数  $a$  は  $E_a$  の減少に伴い単調に増加する．

### 3.2.2 前指数因子の感度

前指数因子  $A_c$  の値をパラメトリックに変化させて計算を実施する．A.1 章の表 A.1 に記された文献値を基準値  $A_{c,r}$  として， $100A_{c,r}$ ， $10A_{c,r}$ ， $1.5A_{c,r}$ ， $1.1A_{c,r}$ ， $1.0A_{c,r}$ ， $0.9A_{c,r}$ ， $0.5A_{c,r}$ ， $0.1A_{c,r}$  と  $0.01A_{c,r}$  の九つの値を計算に用いる．これらの計算の結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  の値と指数  $n$  の値を図 3.5 に示す．この前指数因子  $A_c$  の範囲では，係数  $a$  と指数  $n$  はともに単調な変化ではないが，概ね  $A_c$  の増加に伴って増加する傾向が見られる．しかし，前指数因子  $A_c$  の値を活性化エネルギー  $E_a$  の値よりも広い範囲で振っているにも関わらず，前指数因子  $A_c$  のパラメトリック解析において係数  $a$  と指数  $n$  が変化する範囲は活性化エネルギー  $E_a$  のパラメトリック解析と比べて非常に小さい．つまり，活性化エネルギー  $E_a$  は前指数因子  $A_c$  よりも係数  $a$  と指数  $n$  の評価に対して大きな影響

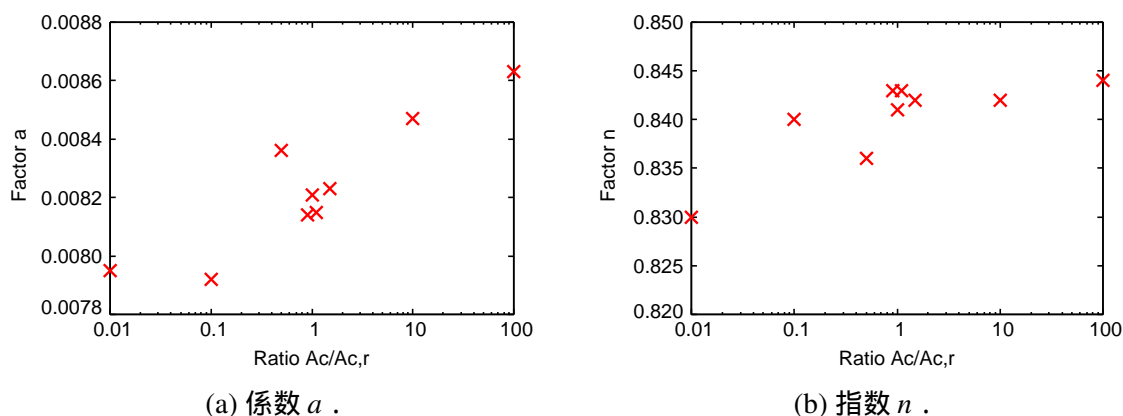


図 3.5: 前指数因子  $A_c$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

を与えるということができる。このことは、活性化エネルギー  $E_a$  が熱分解・気化速度の評価式 (2.120) において指数関数の内側に存在するパラメータであることに対して、前指数因子  $A_c$  は指数関数の外側に存在するパラメータであることに起因していると思われる。

上記の傾向は、式 (2.120) の形を見れば明らかのように、分解層厚さ  $e_{reaction}$  にも当てはまる。

### 3.3 対流熱伝達の影響

燃料後退速度を見積もるにあたって燃料壁面におけるエネルギー収支を解く訳であるが、そこで大きな役割を果たすメカニズムの一つに対流熱伝達が挙げられる。そこで、この章では対流熱伝達モデルが燃料後退速度の評価に与える影響について調査する。

#### 3.3.1 モデルにおける $G$ の指数が局所燃料後退速度に与える影響

燃料壁面におけるエネルギー収支の式 (2.56) において、固体燃料中への熱伝導量は固体燃料の熱分解・気化に必要なエネルギーと比べて十分小さいと仮定する。

$$\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=-0} \ll \rho_s \dot{r} h_v \quad (3.1)$$

実際に、計算結果において、 $\rho_s \dot{r} h_v$  の値は  $\lambda_s (\partial T / \partial y)_{y=-0}$  の値に対して 3 倍から 4 倍ほど高いものとなっている。この仮定 (3.1) を用いると、燃料壁面におけるエネルギー収支の式 (2.56) は次のように簡略化できる。ただし、ここでは輻射熱伝達の項を考慮していない。

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} \approx \rho_s \dot{r} h_v \quad (3.2)$$

式 (3.2) と対流熱伝達の式 (2.57) を用いると、以下の式が得られる。

$$\dot{r} \propto G^{0.8} \quad (3.3)$$

したがって、酸化剤質量流束  $G$  に対する局所燃料後退速度  $\dot{r}$  の依存特性は、輻射熱伝達の項が対流熱伝達の項に比べて十分小さい場合においては、対流熱伝達の式 (2.57) 中の  $G$  の指数の分子によって概ね決定されることになる。

#### 3.3.2 モデルにおける $G$ の指数が平均燃料後退速度に与える影響

対流熱伝達の式 (2.57) 中の  $G$  の指数の分子は、時空間平均の燃料後退速度  $\bar{\dot{r}}$  に対しても大きな影響を与えていることが予想される。このことを確認するために、式 (2.57) 中の  $G^{0.8/(1-k)}$  を  $G^{0.5/(1-k)}$  へと恣意的に変更して時空間平均燃料後退速度  $\bar{\dot{r}}$  を計算し、その影響を調べる。しかし、 $G$  の指数部分のみを変更するのでは、全体の次元が元の次元からずれ

てしまう．そこで，全体の次元を保ちつつ  $G$  の指数部分を変更するために対流熱伝達の式 (2.57) の導出に立ち返って考えると，ブローイングがない場合での乱流境界層における壁面摩擦係数  $C_{f0}$  の表式 (C.19) を次のように恣意的に変形すると全体の次元を保ちつつ  $G$  の指数部分を  $0.5/(1-k)$  に書き換えられることが分かる．

$$\frac{C_{f0}}{2} = 0.03 \left( \frac{Gx}{\mu} \right)^{-0.5} \quad (3.4)$$

その結果として得られる対流熱伝達の式は以下の通りである．

$$\dot{q}_c = \left( \frac{0.03q}{\mu^{-0.5}} \right)^{1/(1-k)} \frac{B_t h'_v}{\rho_s^{k/(1-k)}} x^{-0.5/(1-k)} G^{0.5/(1-k)} \bar{r}^{-k/(1-k)} \quad (3.5)$$

この変更後のモデルを「変形モデル (changed model)」と呼び，変形前のものを「基本モデル (original model)」と呼ぶ．基本モデルおよび変形モデルを用いて時空間平均燃料後退速度  $\bar{r}$  を計算する．ここでは，解析モデルの選択 (2.5 章) として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置における比エンタルピとして燃焼熱を使用，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として定数を使用，とする．また，熱化学的ブローイングパラメータ (2.59) の値として，Marxman らが理論的に見積もった値  $(u_{fl}/u_e)_{nv} = 0.56$  (つまり， $(u_e/u_{fl})_{nv} \approx 1.8$ ) [23] を定数として用いる．この計算の結果を図 3.6 に示す．図 3.6 の結果を経験式 (2.215) にフィッティングすると，基本モデルでは  $(a, n) = (0.00821, 0.841)$  が，変形モデルでは  $(a, n) = (0.00121, 0.493)$  が得られる．ただし，変形モデルにおいては，試験番号 2 と 3 の結果 (低質量流束側の二点) は数値的な理由から安定した収束解が得られなかったために経験式へのフィッティングには用いておらず，参考値として時刻 0 s における解の空間平均値を図 3.6 にプロットするのみに留めていることを記しておく．ここで得られた指数  $n$  の値は，いずれのモデルにおいても， $G$  の指数の分子とほぼ等しい．したがって，輻射熱伝達を考慮しない場合においては，対流熱伝達の式 (2.57) 中の  $G$  の指数の分子が経験式 (2.215) の指数  $n$  の値に非常に大きな影響を与えることが確認された．

次に，式 (3.1) の仮定を用いて消去することのできるパラメータ  $k$  の感度についても調査する．2.3.1 章で述べた値を基準値  $k_r$  として， $1.5k_r, 1.1k_r, 1.0k_r, 0.9k_r$  と  $0.5k_r$  の五つの値を計算に用いる．これらの計算の結果を図 3.7 に示す．次に，これらの結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  の値と指数  $n$  の値を表 3.3 に示す．このパラメータ  $k$  の範囲では，指数  $n$  の値の変化は単調ではなく，その変化の幅は非常に小さい．

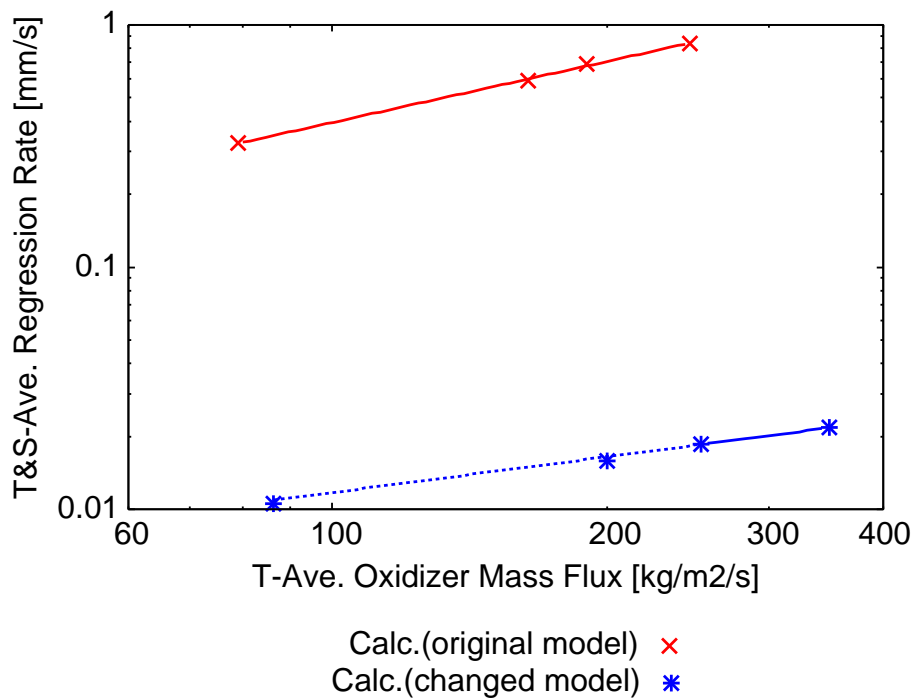


図 3.6: 質量流束  $G$  の指数を  $0.5/(1-k)$  に変更したモデル (変形モデル) にて得られた時空間平均燃料後退速度。結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である。ただし、変形モデルにおいては、試験番号 2 と 3 の結果 (低質量流束側の二点) は数値的な理由から安定した収束解が得られなかったために経験式へのフィッティングには用いておらず、参考値として時刻  $0\text{ s}$  における解の空間平均値をプロットするのみに留めている。横軸・縦軸ともに  $\log$  スケールである。

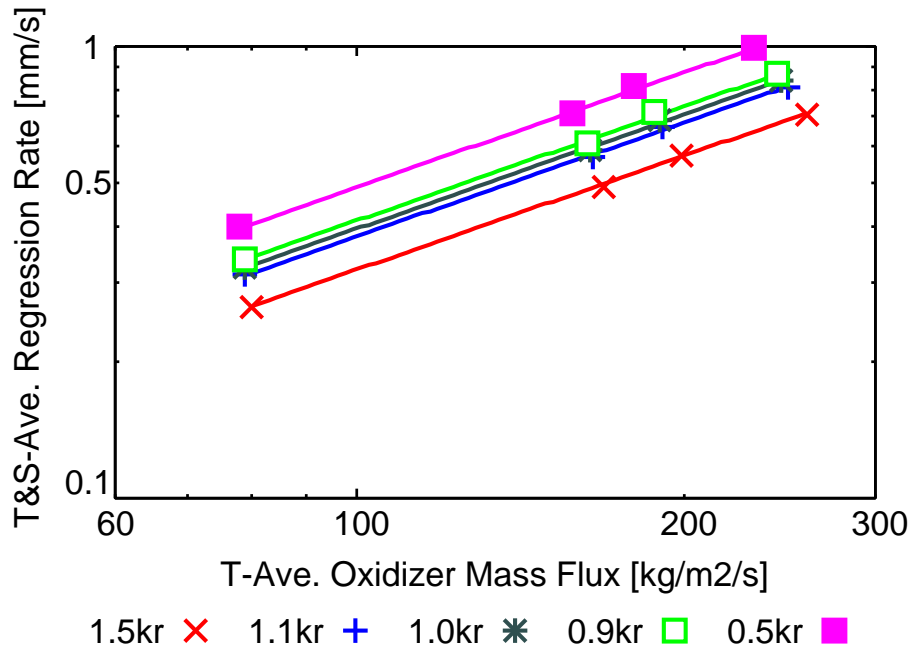


図 3.7: パラメータ  $k$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．横軸・縦軸ともに log スケールである．

表 3.3: パラメータ  $k$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

	$1.5k_r$	$1.1k_r$	$1.0k_r$	$0.9k_r$	$0.5k_r$
a	0.00679	0.00804	0.00821	0.00868	0.0101
n	0.837	0.837	0.841	0.838	0.842

### 3.3.3 火炎での速度増大の効果が平均燃料後退速度に与える影響

火炎での速度増大の効果を考慮した対流熱伝達の修正式 (2.68) 中のパラメータ  $a_v$  の感度について調査を行う．パラメータ  $a_v$  は C.2 章の表 C.1 のように位置  $x$  によって (また、時間  $t$  によって) 変化する値であるが、ここでは簡単のためにパラメータ  $a_v$  は定数として扱う．パラメータ  $a_v$  の値として、1.0, 1.5, 2.0, 2.5 の四つの値を計算に用いる．ここでは、解析モデルの選択 (2.5 章) として、(1) 火炎での速度増大の効果を考慮、火炎位置での化学平衡計算を実行、(2) 輻射項を無視、(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用、(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用、とする．これらの計算の結果を図 3.8 に示す．次に、これらの結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  の値と指数  $n$  の値を表 3.4 に示す．このパラメータ  $a_v$  の範囲では、指数  $n$  の値の変化は単調ではなく、その変化の幅は小さい．その一方で、係数  $a$  の値はパラメータ  $a_v$  の増加に伴い単調に増加する．



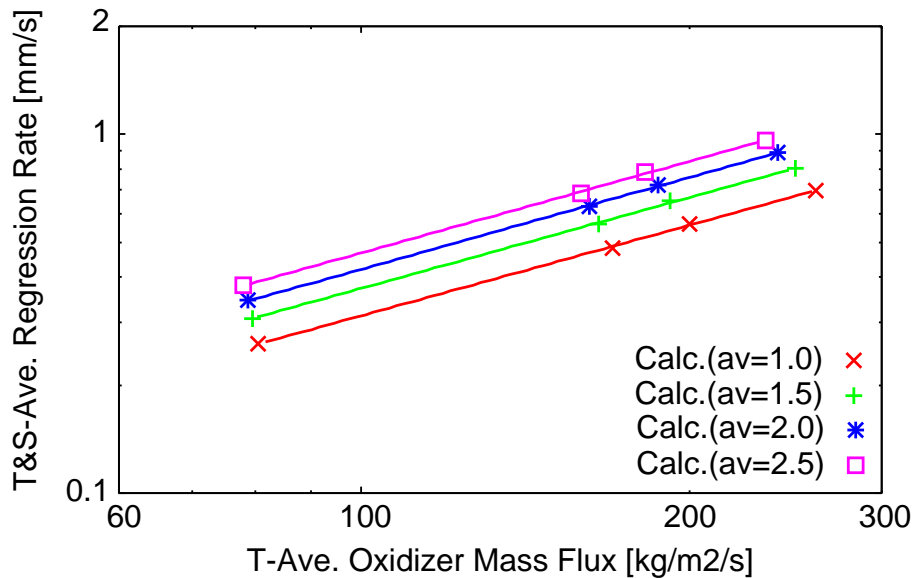


図 3.8: パラメータ  $a_v$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．横軸・縦軸ともに log スケールである．

表 3.4: パラメータ  $a_v$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

$a_v$	1.0	1.5	2.0	2.5
$a$	0.00655	0.00770	0.00831	0.00936
$n$	0.839	0.842	0.852	0.849

### 3.4 輻射熱伝達の影響

燃料後退速度評価に大きな役割を果たすメカニズムの一つとして 3.3 章では対流熱伝達を取り上げた．同様に重要なメカニズムとして輻射熱伝達があり，この章では輻射熱伝達が燃料後退速度の評価に与える影響について調査する．ここでは，解析モデルの選択（2.5 章）として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置における比エンタルピとして燃焼熱を使用，(2) 次に説明するように輻射項を考慮，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として定数を使用，とする．また，熱化学的ブローイングパラメータ (2.59) の値として，Marxman らが理論的に見積もった値  $(u_{fl}/u_e)_{nv} = 0.56$ （つまり， $(u_e/u_{fl})_{nv} \approx 1.8$ ）[23] を定数として用いる．

2.3.2 章で述べた輻射熱伝達モデルを実装するに先立って，放射率を任意に振ることで輻射熱伝達による伝熱量の大小が燃料後退速度の評価に与える影響の大きな傾向を調べる．輻射熱伝達による伝熱量の評価においては，気相から固相へと流れるエネルギー流束と

固相から気相へと流れるエネルギー流束を考える．

$$\dot{q}_{rad} = \alpha_{rad,s} \varepsilon_g \sigma T_{fl}^4 - \varepsilon_s \sigma T_s^4 \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_s = \alpha_{rad,s} \quad (\text{Kirchhoff の法則}) \quad (3.7)$$

ここでは燃料壁面を境として気相側にある輻射源すべて，つまり，凝縮相であるすすまで含めた混合ガスを上式 (3.6) の「気相」の項（右辺第一項）で扱う．そのため，二酸化炭素  $\text{CO}_2$  や水蒸気  $\text{H}_2\text{O}$  といったガス成分のみを想定した場合には過大評価となる範囲まで「気相」の放射率を振ることとする．気相放射率  $\varepsilon_g$  や固相放射率  $\varepsilon_s$  の値を任意に振ることによってパラメトリックに解析を行うのであるが，それらの値の組み合わせによって表 3.5 に記したようにケース番号 1 から 6 を定義する．気相放射率  $\varepsilon_g$  のパラメトリック解析の結果を図 3.9 に，固相放射率  $\varepsilon_s$  の結果を図 3.10 に示す．次に，これらの結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  の値と指数  $n$  の値を表 3.5 に示す．この放射率  $\varepsilon_g$  および  $\varepsilon_s$  の範囲では，指数  $n$  は  $\varepsilon_g$  の減少に伴い単調に増加する．同様に， $\varepsilon_s$  が減少すれば指数  $n$  は単調に増加する．放射率の変化に応じて，指数  $n$  の値は 0.8 から大きく変化し得ることが見て取れる．他方で，係数  $a$  の変化の傾向は指数  $n$  の逆となり， $\varepsilon_g$  や  $\varepsilon_s$  が減少

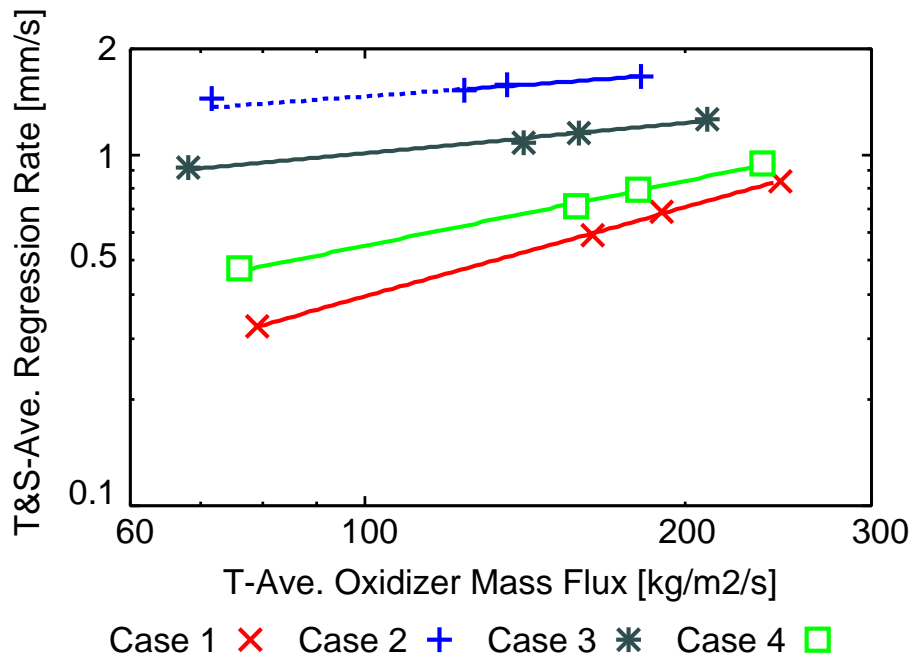


図 3.9: 気相放射率  $\varepsilon_g$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．ただし，ケース 2 の最も酸化剤質量流束の低い点（試験番号 3）は数値計算において収束性が良くなかったために，経験式へのフィッティングには用いていない．横軸・縦軸ともに log スケールである．

すれば係数  $a$  も単調に減少する。

以上から，対流熱伝達による伝熱量に対して輻射熱伝達による伝熱量が大きくなれば，指数  $n$  は対流熱伝達によって決まる値 0.8 から  $n$  が小さくなる方向へ変化することが分かる。

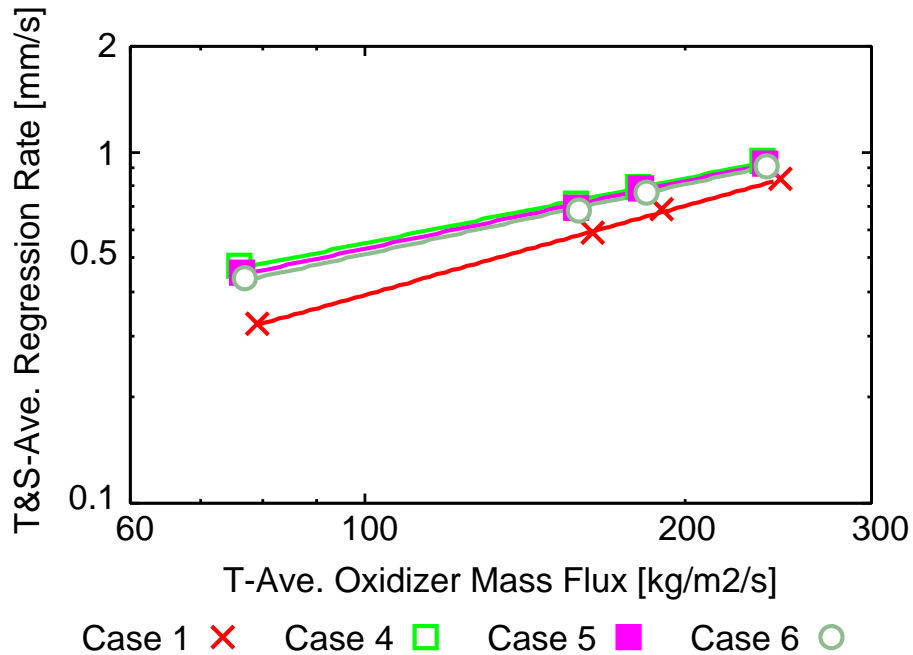


図 3.10: 固相放射率  $\varepsilon_s$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．横軸・縦軸ともに log スケールである．

表 3.5: 放射率  $\varepsilon_g$  および  $\varepsilon_s$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

ケース番号	気相放射率 $\varepsilon_g$	固相放射率 $\varepsilon_s$	係数 $a$	指数 $n$
1	0	0	0.00821	0.841
2	0.5	0.95	0.537	0.218
3	0.3	0.95	0.273	0.284
4	0.1	0.95	0.0327	0.613
5	0.1	0.85	0.0284	0.636
6	0.1	0.75	0.0245	0.660

### 3.5 固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法の影響

固体燃料中への熱伝導量や熱分解・気化に必要な熱量もまた燃料後退速度評価に大きな影響を与え得る．ここでは，固体燃料中への熱伝導量に関わる固体燃料壁面温度の評価法と実効気化熱の評価法に関して次の三通りの組み合わせを考え，それぞれのモデルにより得られた計算結果を比較する．

#### モデル1

解析モデルの選択 (2.5 章) として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として定数を使用，とする．

#### モデル2

解析モデルの選択 (2.5 章) として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする．

#### モデル3

解析モデルの選択 (2.5 章) として，(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする

また，いずれのモデルにおいても，熱化学的ブローイングパラメータ (2.59) の値として，Marxman らが理論的に見積もった値  $(u_{fl}/u_e)_{nv} = 0.56$  (つまり， $(u_e/u_{fl})_{nv} \approx 1.8$ ) [23] を定数として用いる．

時空間平均燃料後退速度について，各モデルを用いた計算によって得られた値を図 3.11 に示す．図 3.11 を見ると，モデル2およびモデル3を用いて得られた値は，モデル1を用いて得られた値と比べて低い燃料後退速度となっていることがわかる．また，モデル2とモデル3では，得られた燃料後退速度が完全に一致している．

まず，モデル2とモデル3で全く等しい燃料後退速度が得られる理由を考察する．そこで燃料後退速度の評価方法について再度考える．燃料後退速度は燃料壁面におけるエネルギー収支の式 (3.8) を解いて得られる (式 (2.56) を再掲．ただし，輻射エネルギー流束の項は無視) ．

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=-0} + \rho_s \dot{r} h_v \quad (3.8)$$

式 (3.8) 右辺第一項の固体燃料中への熱伝導量の評価式はモデル2とモデル3でそれぞれ

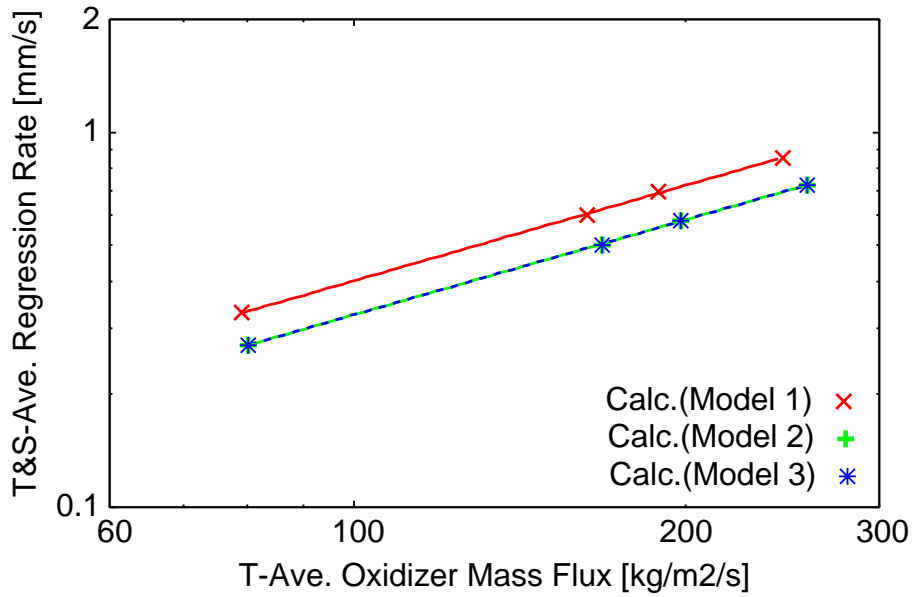


図 3.11: 異なる固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法にて得られた時空間平均燃料後退速度 .

次のようになる (式 (2.109) と式 (2.115) の再掲) .

$$\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_s (T_S - T_a) \frac{\dot{r}}{\alpha_s} \quad (\text{モデル 2}) \quad (3.9)$$

$$\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_s (T_m - T_a) \frac{\dot{r}}{\alpha_s} \quad (\text{モデル 3}) \quad (3.10)$$

式 (3.8) 右辺第二項の実効気化熱の評価式はモデル 2 とモデル 3 でそれぞれ次のようになる (式 (2.116) と式 (2.118) の再掲) .

$$h_v = h_{monomer,g}(T_S) - h_{polymer,s}(T_S) \quad (\text{モデル 2}) \quad (3.11)$$

$$h_v = h_{monomer,g}(T_S) - h_{polymer,s}(T_m) \quad (\text{モデル 3}) \quad (3.12)$$

それぞれのモデルにおいて固体燃料中への熱伝導量の評価式と実効気化熱の評価式を燃料壁面でのエネルギー収支式の右辺に入れて整理すると, モデル 2 とモデル 3 で同じ形となる.

$$[\text{RHS of Eq.(3.8)}] = \rho_s \dot{r} \{ h_{monomer,g}(T_S) - \Delta h_{polymer}^0 - c_{polymer}(T_a - T_r) \} \quad (3.13)$$

したがって, 数式上は全く同じ問題を解くことになるので, 得られる結果も同じものとなる .

次に, モデル 2 とモデル 3 においてモデル 1 よりも低い燃料後退速度が得られる理由を考察する . モデル 2 とモデル 3 で結果が一致したことから, この差は固体燃料壁面温度の

評価方法の違いから生じるものではなく、実効気化熱の評価方法の違いから生じるものである。代表ケース（試験番号 1，時刻  $t = 0[s]$ ）における実効気化熱の軸方向分布を図 3.12 に示す。この図 3.12 から明らかなように、モデル 2 とモデル 3 の実効気化熱はモデル 1 のものよりも大きく、燃料後退速度の大小関係と矛盾しない。では、この実効気化熱の差はどうか解釈できるのかについて検討する。モデル 1 で用いている値はアーク加熱風洞を用いた実験により得られた値であり [34]、燃料ガスも様々な成分を含んでいる。一方で、モデル 2 とモデル 3 では、固体燃料は気化する際にモノマまで完全に分解すると仮定しており、この点が異なっている。つまり、モデル 2 とモデル 3 では炭素の鎖を切断するエネルギー（熱分解反応に必要なエネルギー）がより多く含まれていることになる。また、アーク加熱風洞実験においては、固体燃料表面上を流れて、そのまま検査域外へ流出する液体（固体燃料が溶融したもの）の存在が観察されており、そのため完全に気化させた場合よりも低い実効気化熱となっていることが指摘されている [34]。このような液体の流出は、モデル 2 とモデル 3 では考慮していない。以上、上記の二点が実効気化熱に差が生じる主な理由であると考えられる。

得られた時空間平均の燃料後退速度を経験式 (2.215) にフィッティングした結果を表 3.6 に示す。表 3.6 を見ると、いずれのモデルにおいても、酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性、つまり、指数  $n$  の値はほとんど変わらないことが分かる。

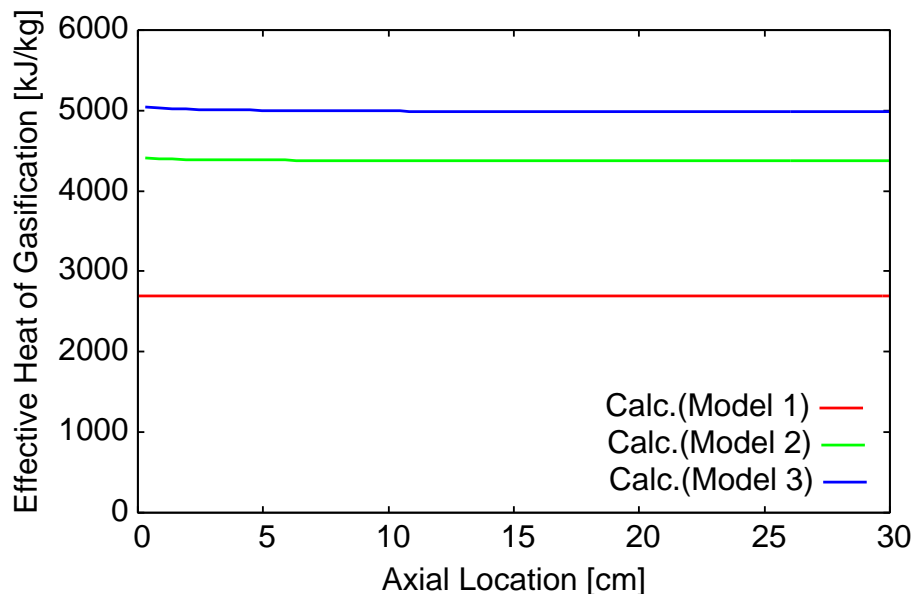


図 3.12: 実効気化熱の軸方向分布。

表 3.6: 異なる固体燃料壁面温度および実効気化熱の評価法にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

モデル	1	2	3
a	0.00820	0.00678	0.00678
n	0.845	0.841	0.841

### 3.6 特性調査の結論

第 3 章では本数値予測技術の特性について、燃料後退速度の予測の観点から調査を行った。酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性、つまり、経験式 (2.215) における指数  $n$  の値は対流熱伝達モデルに現れる総質量流束  $G$  の指数の値によりほぼ 0.8 に固定され、この値から大きく変化するのは輻射熱伝達量が大きい場合においてである。輻射熱伝達量を大きくすると、指数  $n$  の値は小さくなる方向に変化する。熱分解・気化速度に関するパラメータ、熱伝導量の評価法や気化熱の評価法の違いによっては、指数  $n$  の値は大きくは変化しない。燃料後退速度の絶対値に関しては、対流・輻射熱伝達のモデルだけでなく、活性化エネルギーや実効気化熱といったパラメータがある程度影響を与える一方で、熱分解・気化速度に関するパラメータの一つである前指数因子や分解層厚さは他のパラメータと比較してごく小さな影響しか与えない。また、固体燃料中の熱伝導量に関わる固体燃料壁面温度の与え方は、実効気化熱の評価法など他の要素が同じであれば、燃料後退速度に対して影響を与えない。

以上から、燃料後退速度の絶対値やその酸化剤質量流束に対する依存特性を予測するにあたっては、対流熱伝達や輻射熱伝達による伝熱モデルが最も大きな役割を果たしており、その次に熱分解・気化速度式中のパラメータや実効気化熱が重要となると言える。

## 第4章 本数値予測技術の評価と適用例

本章では，反応流・伝熱統合解析手法を用いたハイブリッドロケット内部弾道特性の解析例を示す．まず初めに，文献に示された実験の条件と合わせて解析を行い，計算値と文献値を比較することで，本数値予測技術の解析精度について議論する．次いで，ハイブリッドロケットエンジンの設計者が操作し得る各種パラメータに様々な値を与えて解析を行い，内部弾道特性データベースの作成例を示す．

### 4.1 文献値との比較

時空間平均の燃料後退速度に関して，反応流・伝熱統合解析手法を用いた計算結果と文献値を比較することで，本数値予測技術の解析精度について議論する．ここでは，GOX/HDPEを用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジンとGOX/HTPBを用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジンの二つを対象として解析を行う．

#### 4.1.1 GOX/HDPE系の実験結果（文献値）との比較

計算値と文献値の比較を行うにあたり，その問題設定としてKarabeyogluらによる気体酸素（GOX）と高密度ポリエチレン（HDPE）を用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジン燃焼実験 [33] を採用する．Karabeyogluらの実験条件を表 4.1 に示す（表 3.1 の再掲）．計算においては酸化剤流入温度  $T_{inj}$  は  $T_{inj} = 300$  [K] とし，固体燃料初期温度  $T_a$  は  $T_a = 300$  [K] とする．

表 4.1: Karabeyoglu らの実験条件 [33]（再掲）．

試験 番号	ポート長さ	初期ポート径	ノズルスロート径	酸化剤流入 質量流量	燃焼時間
No.	$L_p$ [cm]	$D_{p,0}$ [mm]	$D_t$ [mm]	$\dot{m}_{ox}$ [kg/s]	$t_b$ [s]
1	30.48	12.8	9.78	0.0454	3.0
2	30.48	17.0	9.78	0.0453	3.0
3	30.48	22.0	9.53	0.0328	3.0
4	30.48	12.8	9.91	0.0329	3.0



解析モデルの設定 (2.5 章) としては次の二通りを考える。

#### モデル 1

(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする。

#### モデル 2

(1) 火炎での速度増大の効果を考慮，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項として気相からの輻射およびすすからの輻射ともに考慮，(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用，(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用，とする。火炎での速度増大の効果に関するパラメータ  $a_v$  としては，燃料グレインポート内の後流部で見られるような，その範囲の下限に近い値  $a_v = 2$  を定数として用いる (C.2 章)。

時空間平均燃料後退速度に関して文献値と計算値を比較したグラフを図 4.1 に，それらの具体的な値を表 4.2 に示す。表 4.2 を見ると，モデル 1 に関しては，時空間平均燃料後退速度の計算値は文献値の-32%から+0.58%の範囲に入っており，文献値よりもやや低めに見積もられていることが分かる。一方でモデル 2 に関しては，時空間平均燃料後退速度

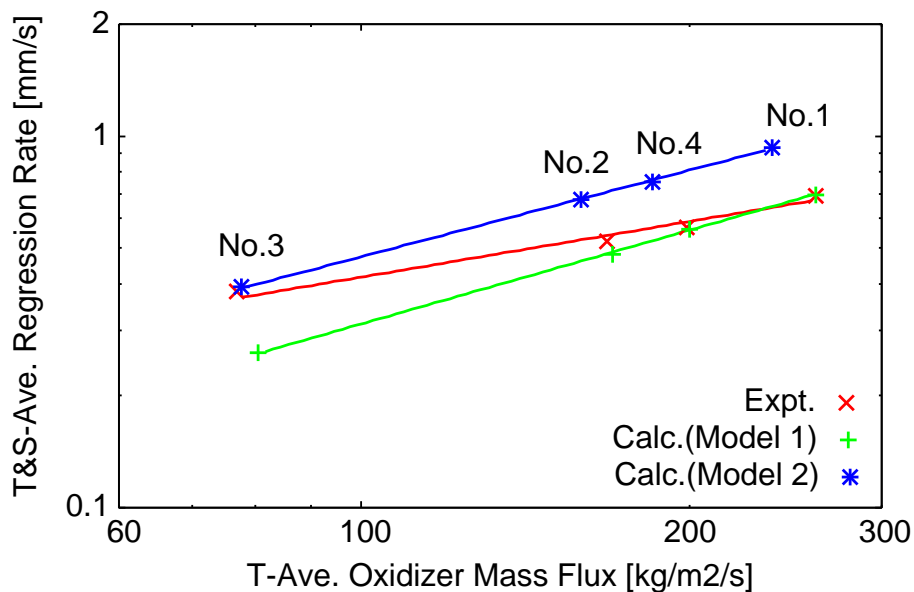


図 4.1: GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける時空間平均燃料後退速度の文献値および計算値の比較。結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である。横軸・縦軸ともに log スケールである。

表 4.2: GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の文献値および計算結果 .

文献値 [33]				
試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]		時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]	
1	261		0.692	
2	168		0.522	
3	77.0		0.381	
4	199		0.568	

モデル 1 による計算値				
試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	文献値 との差	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]	文献値 との差
1	261	±0.0%	0.696	+0.58%
2	170	+1.2%	0.481	-7.9%
3	80.5	+4.6%	0.261	-32%
4	200	+0.50%	0.562	-1.1%

モデル 2 による計算値				
試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	文献値 との差	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]	文献値 との差
1	238	-8.8%	0.929	+34%
2	159	-5.4%	0.676	+30%
3	77.7	+0.91%	0.392	+2.9%
4	185	-7.0%	0.754	+33%

表 4.3: GOX/HDPE 系ハイブリッドロケットにおける係数  $a$  と指数  $n$  .

	文献 [33]*	モデル 1 による計算	モデル 2 による計算
$a$	0.0421	0.00655	0.0134
$n$	0.498	0.839	0.774

\* 文献中に記載されている燃料後退速度と酸化剤質量流束の値を基に著者がフィッティング .

の計算値は文献値の+2.9%から+34%の範囲に入っており、文献値よりもやや高めに見積もられている。次に、これらの燃料後退速度の値を経験式 (2.215) にフィッティングして得た  $a$  と  $n$  の値を表 4.3 に示す。酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性、すなわち指数  $n$  の値を見ると、文献と計算で異なっていることが見て取れるが、輻射熱伝達を導入したモデル 2 の方がモデル 1 よりもわずかに良い値を得られていることが分かる。ただし、指数  $n$  に関してより正確な評価を行うにあたっては、指数  $n$  の値を実験的に得た

めにより多くのデータ点を必要とすることを述べておく．実際に，Karabeyoglu らは GOX とパラフィン系燃料のハイブリッドロケットにおいて指数  $n$  の値を得るために 10 以上のデータ点を用いている [35] ．

#### 4.1.2 GOX/HTPB 系の実験結果（文献値）との比較

計算値と文献値の比較を行うにあたり，その問題設定として Shanks らによる気体酸素（GOX）と末端水酸基ポリブタジエン（HTPB）を用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジン燃焼実験 [36] を採用する．Shanks らの実験条件を表 4.4 に示す．計算においては酸化剤流入温度  $T_{inj}$  は  $T_{inj} = 300$  [K] とし，固体燃料初期温度  $T_a$  は  $T_a = 300$  [K] とする．この実験で特徴的なのは，同じ形状の六個の燃料グレインを用意し，各々の燃焼後に燃料消費量から燃料後退速度を求め，そして再度燃焼させて燃料後退速度を求めるという手順を繰り返す点である．ここでは燃料グレイン番号 1 と 4 の解析を行う．

解析モデルの設定（2.5 章）としては次の二通りを考える．

##### モデル 1

(1) 火炎での速度増大の効果を無視，火炎位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項を無視，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として定数を使用，とする．

表 4.4: Shanks らの実験条件 [36] ．

燃料グレイン番号	ラン番号	ポート長さ	初期ポート径	ノズルスロート径*	酸化剤流入質量流量	燃焼時間
G. No.	R. No.	$L_p$ [cm]	$D_{p,0}$ [mm]	$D_t$ [mm]	$\dot{m}_{ox}$ [kg/s]	$t_b$ [s]
1	1	25.4	19.1	8	0.0735	3.0
1	2	25.4	-	8	0.0635	3.0
1	3	25.4	-	8	0.0544	3.0
1	4	25.4	-	8	0.0467	3.0
4	1	25.4	19.1	8	0.0508	3.0
4	2	25.4	-	8	0.0449	3.0
4	3	25.4	-	8	0.0355	3.0
4	4	25.4	-	8	0.0336	3.0
4	5	25.4	-	8	0.0262	3.0
4	6	25.4	-	8	0.0187	3.0

\* 文献中にノズルスロート径の具体的な値が記されていないため，エンジン外観図（文献中の Figure 1）より推算した．

## モデル 2

(1) 火災での速度増大の効果を考慮，火災位置での化学平衡計算を実行，(2) 輻射項として気相からの輻射およびすすからの輻射ともを考慮，(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用，(4) 実効気化熱として定数を使用，とする．火災での速度増大の効果に関するパラメータ  $a_v$  としては，燃料グレインポート内の後流部で見られるような，その範囲の下限に近い値  $a_v = 2$  を定数として用いる (C.2 章)．

時空間平均燃料後退速度に関して文献値と計算値を比較したグラフを図 4.2 に，それらの具体的な値を表 4.5 と表 4.6 に示す．表 4.6 を見ると，モデル 1 に関しては，時空間平均燃料後退速度の計算値は文献値の-41%から+6.8%の範囲に入っており，文献値よりも概ねやや低めに見積もられていることが分かる．一方でモデル 2 に関しては，時空間平均燃料後退速度の計算値は文献値の+18%から+108%の範囲に入っており，文献値よりも高めに見積もられている．モデル 2 におけるラン番号 1 の計算結果に着目すると，実験結果と

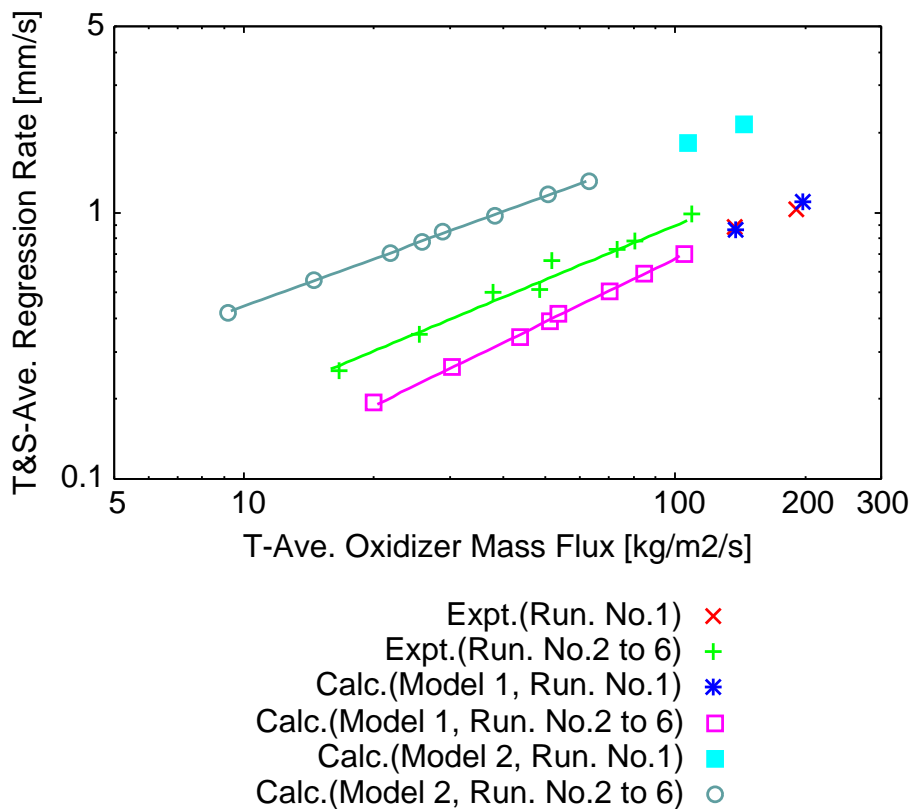


図 4.2: GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時空間平均燃料後退速度の文献値および計算値の比較．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．横軸・縦軸ともに log スケールである．

表 4.5: GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の文献値 .

文献値 [36]			
燃料グレイン番号	ラン番号	時間平均酸化剤質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料後退速度 [mm/s]
1	1	191	1.03
1	2	109	0.991
1	3	73.4	0.726
1	4	51.7	0.660
4	1	137	0.881
4	2	80.4	0.780
4	3	48.4	0.516
4	4	37.8	0.500
4	5	25.5	0.348
4	6	16.6	0.254

の差が 100% を越えるような特に大きな値となっている . 文献 [36] では , 各グレインのラン番号 1 の結果は , 図 4.3 のようにラン番号 2 以降の結果をプロットして現れる酸化剤質量流束・燃料後退速度のグラフ上の分布から外れた位置にプロットされ , 異なる傾向を示すことが指摘されている . このことは , ラン番号 1 では未燃の新しい燃料グレインを用いているために燃料壁面に炭化層が十分には形成されず , 既燃の燃料グレインを用いるラン番号 2 以降とは異なって輻射光の吸収率が小さくなり , それゆえ燃料後退速度が低くなると説明されている . 本計算ではこの炭化層の効果を考慮しておらず , また固体燃料の吸収率 (= 放射率 , 式 (2.71)) として表 A.2 に示されているような大きな値 (= 0.95) を初めから用いているために , ラン番号 1 における低い燃料後退速度を再現できていないと考えられる .

次に , これらの燃料後退速度の値を経験式 (2.215) にフィッティングする . 文献 [36] では , 上述したように各グレインのラン番号 1 の結果はラン番号 2 以降と異なる傾向を示すため , 経験式 (2.215) へのフィッティングはラン番号 2 以降の結果のみを用いて (つまりラン番号 1 の結果を除いて) 行われている . ここでは , それに倣って計算結果のフィッティングにおいてもラン番号 2 以降の結果のみを用いることとする . 燃料後退速度の値を経験式 (2.215) にフィッティングして得た  $a$  と  $n$  の値を表 4.7 に示す . 表 4.7 の文献値は , グレイン番号 1 から 6 までの結果を用いて得られた値であり , 十分なデータ点を用いて求められている (グレイン番号 1~3・ラン番号 2~4 , グレイン番号 4~6・ラン番号 2~6 の計 24 点) . 酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性 , すなわち指数  $n$  の値を見ると , 文献値はモデル 1 による計算値とモデル 2 による計算値の間に来ている . つまり , モデル 1 による計算は指数  $n$  の値をやや過大に見積もっており , モデル 2 による計算はやや過小に見積

表 4.6: GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度の計算結果 .

モデル 1 による計算値					
燃料グレイ イン番号	ラン 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	文献値 との差	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]	文献値 との差
1	1	197	+3.1%	1.10	+6.8%
1	2	105	-3.7%	0.699	-29%
1	3	70.5	-4.0%	0.505	-30%
1	4	51.3	-0.77%	0.391	-41%
4	1	138	+0.73%	0.864	-1.9%
4	2	84.5	+5.1%	0.592	-24%
4	3	53.6	+11%	0.417	-19%
4	4	43.6	+15%	0.342	-32%
4	5	30.4	+19%	0.264	-24%
4	6	20.0	+20%	0.193	-24%
モデル 2 による計算値					
燃料グレイ イン番号	ラン 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	文献値 との差	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]	文献値 との差
1	1	144	-25%	2.14	+108%
1	2	63.1	-42%	1.31	+32%
1	3	38.1	-48%	0.971	+34%
1	4	25.9	-50%	0.778	+18%
4	1	107	-22%	1.83	+108%
4	2	50.8	-37%	1.17	+50%
4	3	28.8	-40%	0.848	+64%
4	4	21.8	-42%	0.703	+41%
4	5	14.5	-43%	0.558	+60%
4	6	9.18	-54%	0.420	+65%

もる結果となっている .

#### 4.1.3 文献値との比較についての結論

時空間平均燃料後退速度に関して文献値と計算値との比較の結果を見ると、その絶対値は GOX/HDPE 系の場合には  $\pm 35\%$  の範囲で、GOX/HTPB 系の場合には  $\pm 110\%$  の範囲で得られており、精度はあまり高くないものの同程度のオーダで予測できていると言える。また、いずれの系においても輻射熱伝達および火炎位置での速度増大の効果を考慮しない場

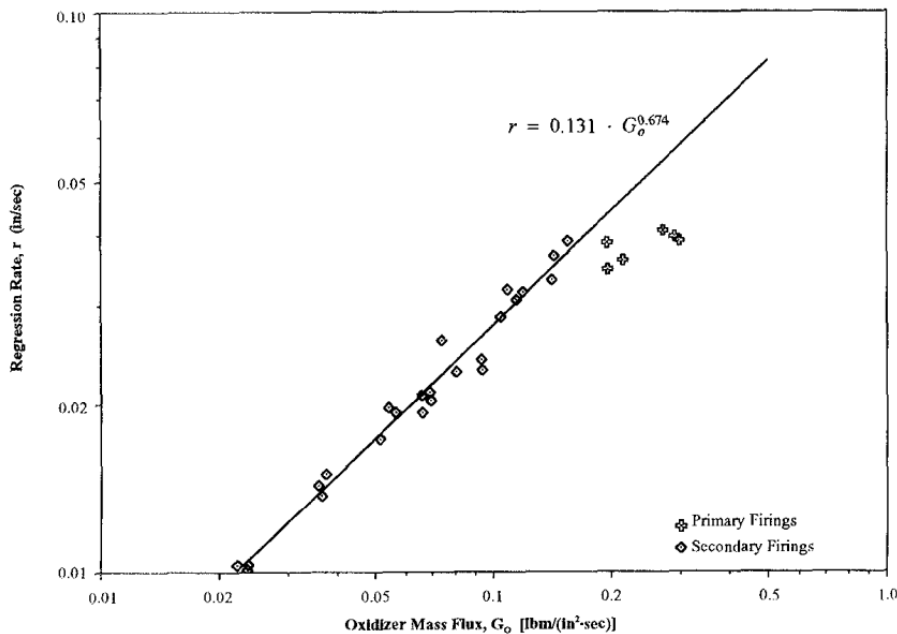


図 4.3: Shanks らによる GOX/HTPB 系ハイブリッドロケット燃焼実験の結果 [36] . ”Primary Firings”はラン番号 1 の結果を, ”Secondary Firings”はラン番号 2 以降の結果を示す. 図中の経験式の係数が表 4.7 と異なっているのは単位系が異なっているためである .

表 4.7: GOX/HTPB 系ハイブリッドロケットにおける係数  $a$  と指数  $n$  . ラン番号 2 以降の結果のみを用いて経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティング. 文献はグレイン番号 1 から 6 までの結果を用いているが, 計算はいずれのモデルの場合もグレイン番号 1 と 4 の結果のみによる .

	文献 [36]	モデル 1 による計算	モデル 2 による計算
a	0.0401	0.0176	0.116
n	0.674	0.791	0.586

合 (モデル 1) の計算値と輻射熱伝達かつ火炎位置での速度増大の効果を考慮する場合 (モデル 2) の計算値が文献値を挟み込む結果となっており, したがって, モデル 1 による計算値が時空間平均燃料後退速度の下限値を, モデル 2 による計算値が上限値を与えていると考えられる. 以上より, 時空間平均燃料後退速度の絶対値の予測においてはモデル 1 とモデル 2 を用いることで, 取り得る値の大雑把な範囲を見積もることが可能である .

酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性, すなわち指数  $n$  の値に関しては, GOX/HDPE 系では輻射熱伝達かつ火炎位置での速度増大の効果を考慮する場合 (モデル 2) の方が輻射熱伝達および火炎位置での速度増大の効果を考慮しない場合 (モデル 1) よりも良い値を得られるものの, その差は小さい. 一方, GOX/HTPB 系においては, モデ

ル1を用いると指数  $n$  の値をやや過大に見積もることとなり、モデル2を用いるとやや過小に見積もる結果となっている。よって、指数  $n$  の予測においてはまだ課題が残るものとなっている。

## 4.2 内部弾道特性データベースの作成例

ここでは本数値予測技術を用いたハイブリッドロケット内部弾道特性のデータベース作成例について示す。内部弾道特性データベース作成にあたっては、KarabeyogluらによるGOX/HDPEを用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジン燃焼実験における条件(表4.1)[33]を基本として、ハイブリッドロケットエンジンの設計者が操作し得るいくつかのパラメータを振って解析を行う。酸化剤流入温度  $T_{inj}$  と固体燃料初期温度  $T_a$  の基本値は、それぞれ  $T_{inj}=300$  [K] と  $T_a=300$  [K] に設定する。

解析モデルの設定(2.5章)としては次の二通りを考える。

### モデル1

(1) 火炎での速度増大の効果を無視、火炎位置での化学平衡計算を実行、(2) 輻射項を無視、(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用、(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用、とする。

### モデル2

(1) 火炎での速度増大の効果を考慮、火炎位置での化学平衡計算を実行、(2) 輻射項として気相からの輻射およびすすからの輻射ともに考慮、(3) 固体燃料壁面温度に融点を使用、(4) 実効気化熱として壁面温度の関数を使用、とする。火炎での速度増大の効果に関するパラメータ  $a_v$  としては、燃料グレインポート内の後流部で見られるような、その範囲の下限に近い値  $a_v=2$  を定数として用いる(C.2章)。

モデル1が燃料後退速度の下限値を、モデル2が上限値を与えるのである。

### 4.2.1 燃焼器スケールの影響

ハイブリッドロケット燃焼器のスケールを様々に変更して解析を行う。4.1.1章のKarabeyogluらの実験条件(表4.1)に示されている燃焼器のスケールを基準とし、その形状と相似形を保つようにノズルも含めた燃焼器のスケールを変更する。このとき、初期形状における酸化剤質量流束を変化させないように、酸化剤流入質量流量についても変化させる。例えば、スケールが2倍になれば酸化剤流入質量流量は4倍になる。解析対象とする燃焼器のスケールが基準に対して何倍となるかをスケール係数(Scaling Factor)として定義し、ここではスケール係数として1, 2と3を用いる。酸化剤流入温度  $T_{inj}=300$  [K]、固体燃料初期温度  $T_a=300$  [K] とする。



モデル1により得られた結果を図4.4と表4.8に，モデル2により得られた結果を図4.5と表4.9に示す．図4.4と図4.5，表4.8と表4.9を見ると，モデル1とモデル2ともに時空間平均燃料後退速度はスケール係数の増加に伴って単調に減少する．

(1) 対流熱流束

スケール係数が大きくなると時空間平均後退速度が小さくなる理由について，対流熱流束の観点から物理的に考察する．まず対流熱流束の評価式(2.57)について見てみると，2.3.1章で述べたように $k = 0.53$ を用いているので以下の関係が成り立っている．

$$\lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=+0} \propto x^{-0.43} \quad (4.1)$$

このように対流熱流束は軸方向位置 $x$ の非線形な関数となっており， $x$ が大きいほど対流熱流束が小さな値となる．このことは軸方向位置 $x$ が大きいほど境界層厚さが大きくなり，火炎が固体燃料壁面から遠ざかる効果であると解釈できる．上記の関係(4.1)に起因して燃焼器スケールが大きくなるほど全体として対流熱流束は小さくなり，空間平均燃料後退速度を下げる方向に働く．次に，全質量流量 $\dot{m}_t$ について考える．燃焼器スケールがスケール係数 $f_s$ 倍になった時に全質量流量 $\dot{m}_t$ も $f_s^2$ 倍だけ大きくなると仮定する．このときノズルスロート面積 $A_t$ は $f_s^2$ 倍だけ大きくなるように設定しているため，特性排気速度 $c^*$ は変

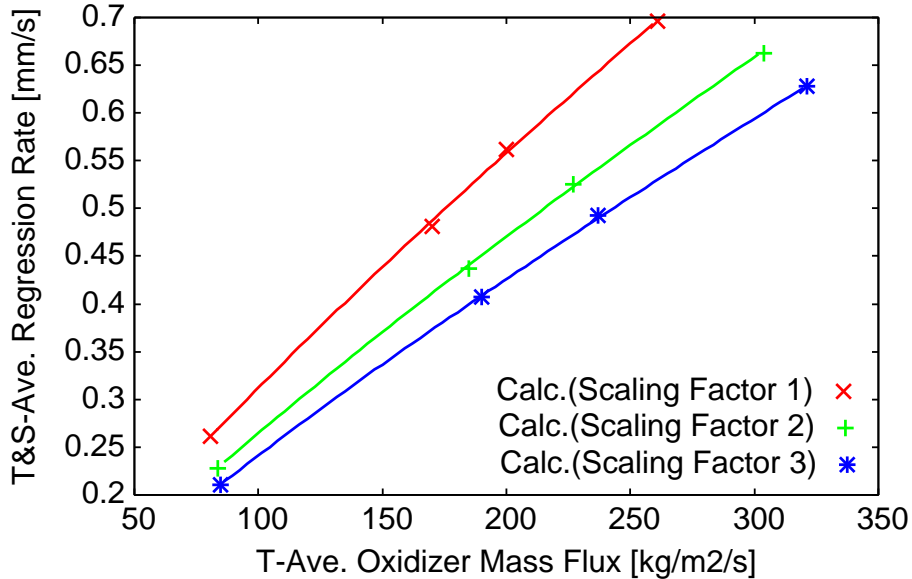


図4.4: モデル1による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式 $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$ にフィッティングして得られた線である．

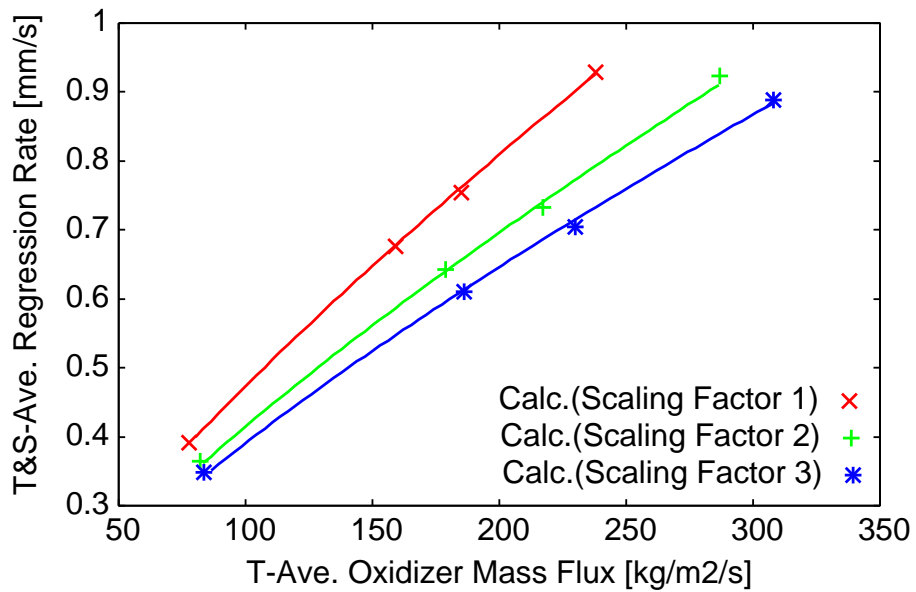


図 4.5: モデル 2 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．

表 4.8: モデル 1 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度．

スケール 係数	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
1*	1	261	0.696
	2	170	0.481
	3	80.5	0.261
	4	200	0.562
2	1	304	0.663
	2	185	0.437
	3	83.7	0.228
	4	227	0.525
3	1	321	0.628
	2	190	0.407
	3	84.7	0.211
	4	237	0.493

\* 表 4.2 の値．

表 4.9: モデル 2 による燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

スケール 係数	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
1*	1	238	0.929
	2	159	0.676
	3	77.7	0.392
	4	185	0.754
2	1	287	0.923
	2	179	0.643
	3	82.1	0.365
	4	217	0.732
3	1	308	0.889
	2	186	0.610
	3	83.6	0.348
	4	230	0.705

\* 表 4.2 の値 .

わらないとすると燃焼室圧力は

$$p = \frac{(f_s^2 \dot{m}_t) c^*}{(f_s^2 A_t)} = \frac{\dot{m}_t c^*}{A_t} \quad (4.2)$$

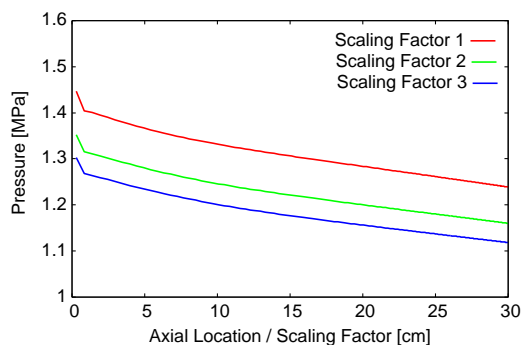
となり, 燃焼器スケールをスケール係数  $f_s$  倍する前後で燃焼室圧力は変わらないことになる. 酸化剤質量流量  $\dot{m}_{ox}$  は  $f_s^2$  倍だけ大きくなるように設定している一方で, 固体燃料表面積  $A_s$  は  $f_s^2$  倍になるものの燃料後退速度  $\dot{r}$  は式 (4.1) に起因する理由から減少するので, 燃料質量流量  $\dot{m}_f (= \rho_s \dot{r} A_s)$  は  $f_s^2$  倍した値よりも小さくなる. したがって, 全質量流量  $\dot{m}_t (= \dot{m}_{ox} + \dot{m}_f)$  も  $f_s^2$  倍にならないため, 先ほどの仮定は成り立たず, 燃焼器スケールをスケール係数  $f_s$  倍すると燃焼室圧力は減少する (図 4.6). これによって火炎温度は低下し (図 4.7), ますます対流熱流束は減少し燃料後退速度も下がることになる. 火炎温度の効果は, 熱化学的ブローイングパラメータ  $B_t$  (2.59) 中の火炎位置における比エンタルピ  $h_{fl}$  を介して, 対流熱流束 (2.57) に影響を与えている. 燃料後退速度が低下すると燃料流量が減少するので総質量流束  $G$  も小さくなり (図 4.8), 対流熱流束が小さくなる方向に働く. しかし, 燃料後退速度の低下に伴ってブロッキング効果が小さくなるので, 対流熱流束が逆に大きくなる方向に働く. これらの効果がバランスして対流熱流束はある値に定まり, 結果的に燃焼器スケールが大きいほど対流熱流束は減少する傾向を示す (図 4.9). ここで, 燃焼器スケールの効果の調査のように対流熱流束 (燃料後退速度) に対する軸方向位置の影響が大きく現れる問題に対しては, ゼロ次元モデルでは一次元モデルと異なりそのような軸方向位置の影響を扱うことができず, あくまで空間平均としての取扱いしか

できないために慎重な検討を要することになり、したがってこのような問題に対しては一次元モデルの方が適していることを述べておく。

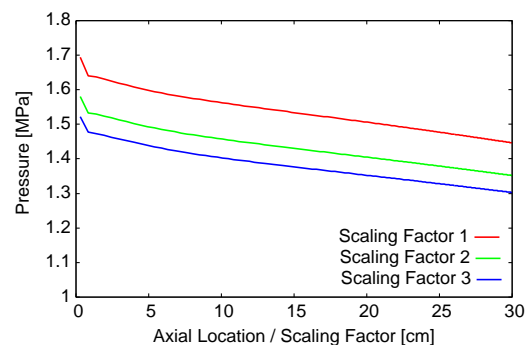
## (2) 輻射熱流束

輻射熱流束を考慮している場合は、燃焼器スケールをスケール係数  $f_s$  倍したことによる燃焼室圧力の減少（図 4.6）に伴って、混合ガスの放射率が小さくなり（図 4.10(a)）、火炎温度も低くなる（図 4.7）ことから気相からの輻射熱流束は低下する。その一方で、すすの放射率は大きくなり（図 4.10(b)）すすの温度もわずかに上昇する（図 4.10(c)）ことから、すすからの輻射熱流束は増大する。輻射熱流束全体としては、すすからの輻射熱流束の寄与の方が大きく、全輻射熱流束は増大する（図 4.10(d)）。熱流束全体を考えると、対流熱流束の寄与の方が大きく、全熱流束は小さくなる（図 4.10(e)）。以上の理由から輻射熱流束を考慮した場合においても、燃焼器スケールをスケール係数  $f_s$  倍することで燃料後退速度が低下する方向に働く。ただし放射率の予測、特にすすの放射率の予測に関しては火炎下部領域全体をすすの発生領域と見なしているなど、大きな仮定が入っており、結果に対するモデルの依存性が否定しきれないことを述べておく。この点は今後の課題となり得る。

計算結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  と指数  $n$  の値を表 4.10 に示す。表 4.10 を見ると、モデル 1 とモデル 2 とともにスケール係数の増加に伴って指数  $n$  は単調に減少する。その一方で、係数  $a$  に関しては、モデル 1 ではスケール係数の増加に伴って単調に減少するのに対し、モデル 2 では単調には変化しない。したがって、ハイブリッドロケット燃焼器の相似性を利用して、小さなスケールのエンジンで得られた経験則をそのまま大きなスケールのエンジンへと適用することは不可能であると言える。

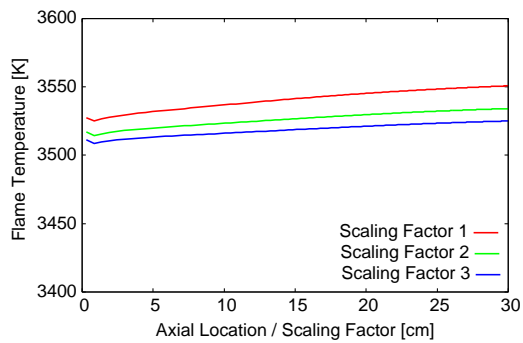


(a) モデル 1 の結果。

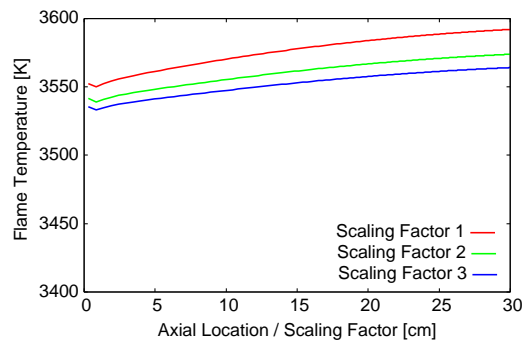


(b) モデル 2 の結果。

図 4.6: 燃焼器スケールを変化させた場合の燃焼室圧力（試験番号 1，時刻 0 s）。異なるスケールの結果を比較しやすいように、横軸を軸方向位置からスケール係数を除したものにしている。

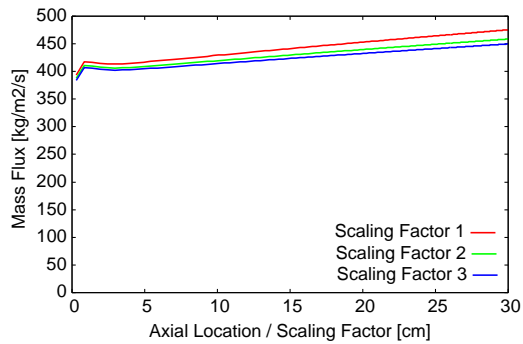


(a) モデル1の結果 .

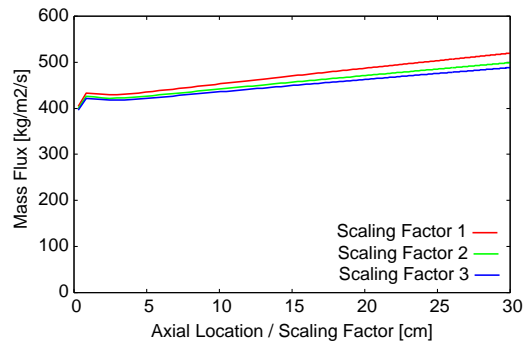


(b) モデル2の結果 .

図 4.7: 燃焼器スケールを変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) . 異なるスケールの結果を比較しやすいように, 横軸を軸方向位置からスケール係数を除したものにしている .

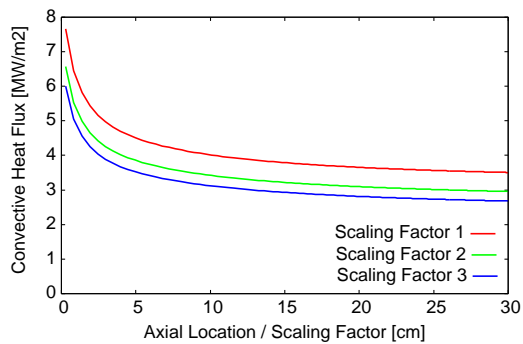


(a) モデル1の結果 .

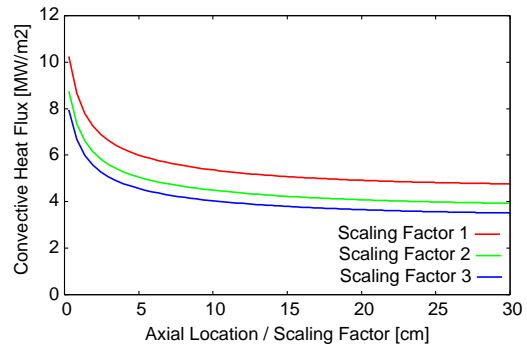


(b) モデル2の結果 .

図 4.8: 燃焼器スケールを変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . 異なるスケールの結果を比較しやすいように, 横軸を軸方向位置からスケール係数を除したものにしている .



(a) モデル 1 の結果 .

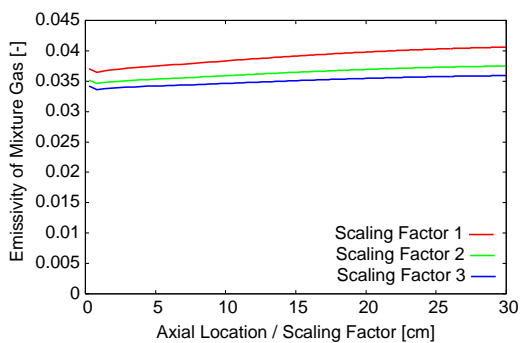


(b) モデル 2 の結果 .

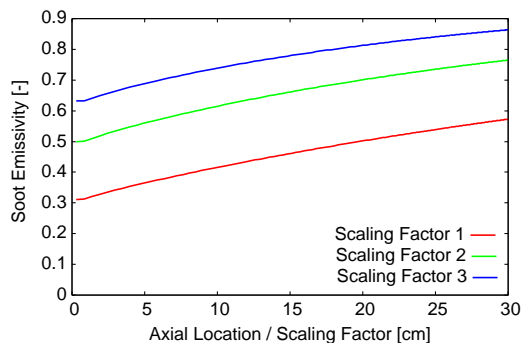
図 4.9: 燃焼器スケールを変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) . 異なるスケールの結果を比較しやすいように, 横軸を軸方向位置からスケール係数を除したものにしてある .

表 4.10: 燃焼器スケールのパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

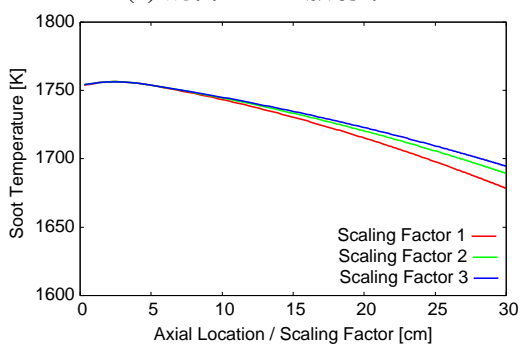
モデル 1			
スケール係数	1	2	3
$a$	0.00655	0.00579	0.00553
$n$	0.839	0.830	0.820
モデル 2			
スケール係数	1	2	3
$a$	0.0134	0.0133	0.0138
$n$	0.774	0.747	0.726



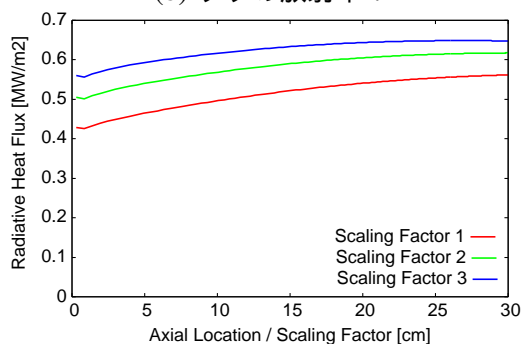
(a) 混合ガスの放射率 .



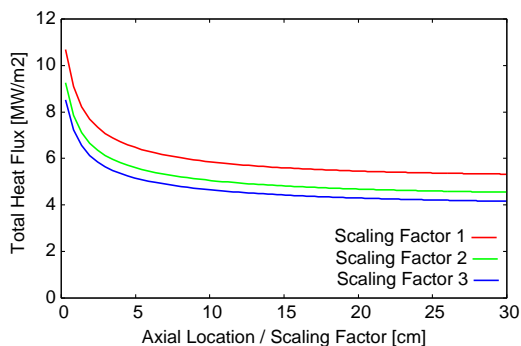
(b) すずの放射率 .



(c) すず温度 .



(d) 輻射熱流束 (気相 + すず) .



(e) 全熱流束 (対流 + 輻射) .

図 4.10: 燃焼器スケールを変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s). 異なるスケールの結果を比較しやすいように, 横軸を軸方向位置からスケール係数を除したものにしてある .

## 4.2.2 燃料グレインポート長さの影響

燃料グレインポート長さ  $L_p$  の値を振って解析を行う．4.2.1 章とは異なり，ここで変更するのは燃料グレインポート長さ  $L_p$  のみである．解析条件は，ポート長さ  $L_p$  の値を除いては，4.1.1 章の Karabeyoglu らの実験条件（表 4.1）とし，酸化剤流入温度  $T_{inj}=300$  [K]，固体燃料初期温度  $T_a=300$  [K] とする．ポート長さ  $L_p$  の値には，Karabeyoglu らの実験と同じ 30.48 cm に加えて，60 cm と 90 cm を用いる．

モデル 1 により得られた結果を図 4.11 と表 4.11 に，モデル 2 により得られた結果を図 4.12 と表 4.12 に示す．図 4.11 や表 4.11 を見ると，モデル 1 においては時空間平均燃料後退速度はポート長さ  $L_p$  の増加に伴って単調に減少する．それに対して，図 4.12 や表 4.12 を見ると，モデル 2 においては時空間平均燃料後退速度はポート長さ  $L_p$  の増加に伴って単調に増加し，モデル 1 とは逆の傾向を示す．ここでモデル 1 により得られた局所燃料後退速度を見ると，時空間平均値の変化の傾向とは異なり，ポート長さ  $L_p$  の増加に伴って増加する様子が見取れる（図 4.13(a)）．モデル 1 により得られた結果が局所的な値と時空間平均値で異なる傾向を示す原因は平均操作にある．図 4.13(a) に示した局所燃料後退速度の空間平均値を取ると，表 4.13 に示したようにポート長さ  $L_p$  の増加に伴って空間平均燃料後退速度が単調に減少する．これはポート前縁において局所的に高い値を示す局所燃料後退速度が平均を取るによりならされた結果，逆の傾向となることを示している．モデル 2 により得られた局所燃料後退速度はポート長さ  $L_p$  の増加に伴って増加し（図 4.13(b)），時空間平均燃料後退速度の変化と同様の傾向となる．輻射熱流束の軸方向分布

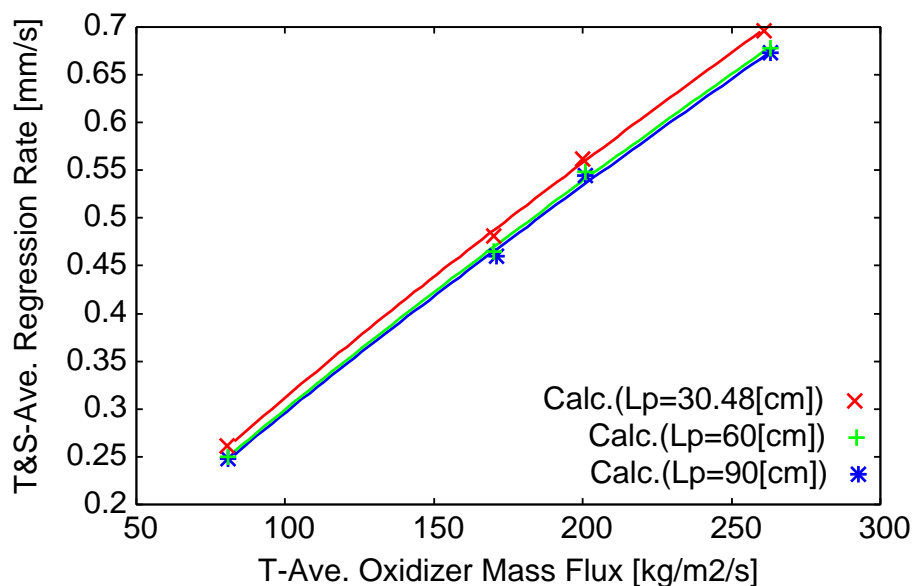


図 4.11: モデル 1 による燃料グレインポート長さ  $L_p$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．



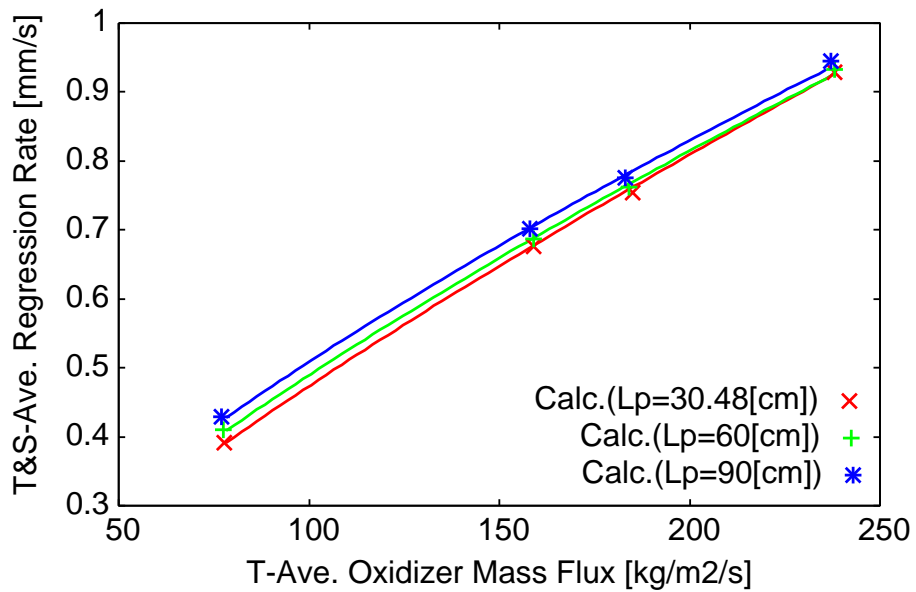


図 4.12: モデル 2 による燃料グレインポート長さ  $L_p$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度 . 結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である .

表 4.11: モデル 1 による燃料グレインポート長さ  $L_p$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

燃料グレイン ポート長さ [cm]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
30.48*	1	261	0.696
	2	170	0.481
	3	80.5	0.261
	4	200	0.562
60	1	263	0.678
	2	170	0.465
	3	80.7	0.250
	4	201	0.548
90	1	263	0.673
	2	171	0.460
	3	80.7	0.248
	4	201	0.545

\* 表 4.2 の値 .

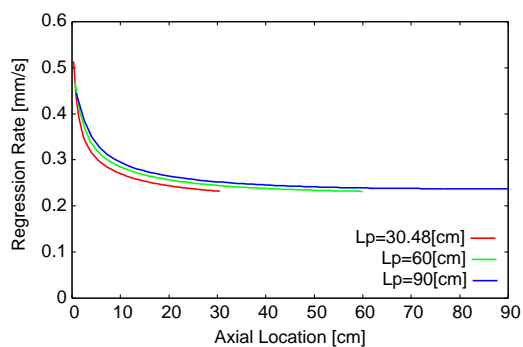
表 4.12: モデル 2 による燃料グレインポート長さ  $L_p$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

燃料グレイン ポート長さ [cm]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
30.48*	1	238	0.929
	2	159	0.676
	3	77.7	0.392
	4	185	0.754
60	1	238	0.933
	2	159	0.687
	3	77.4	0.410
	4	184	0.762
90	1	237	0.945
	2	158	0.702
	3	77.0	0.429
	4	183	0.776

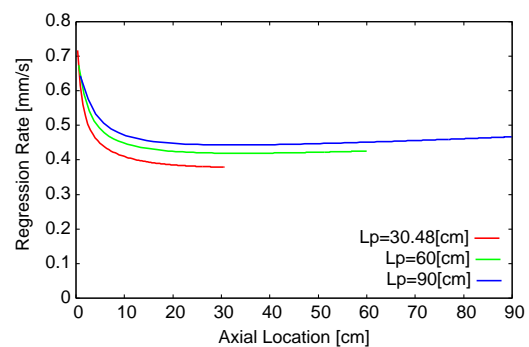
\* 表 4.2 の値 .

表 4.13: 空間平均燃料後退速度 (モデル 1, 試験番号 1, 時刻 0 s) .

ポート長さ $L_p$ [cm]	30.48	60	90
空間平均燃料後退速度 [mm]	0.851	0.830	0.829



(a) モデル 1 の結果 .



(b) モデル 2 の結果 .

図 4.13: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の局所燃料後退速度 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

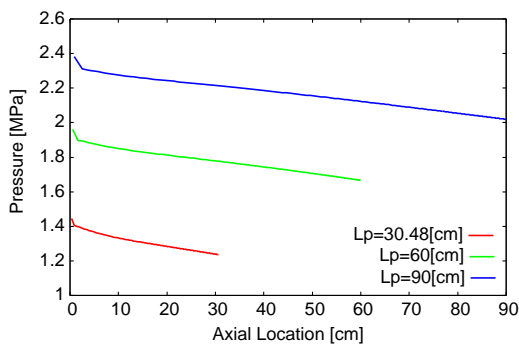
(図 4.18(d)) を見てみると後流部へ行くほど高い値となっており、この影響が局所燃料後退速度にも現れていて後流部で若干上昇する分布となっており(図 4.13(b))、前縁において局所的に高い燃料後退速度を目立たなくしている。ここで議論したような局所燃料後退速度や輻射熱流束の軸方向分布、燃料後退速度の平均化の影響は一次元モデルを用いた解析だからこそ得られる結果であり、ゼロ次元モデルでは得られないことを述べておく。

### (1) 対流熱流束

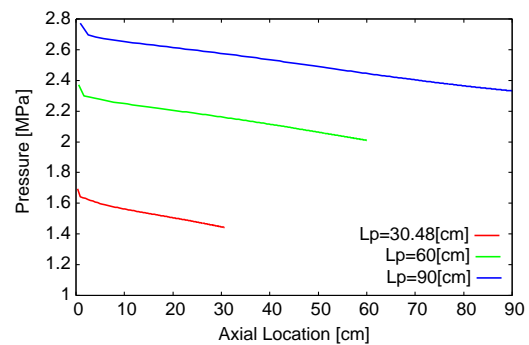
燃料グレインポート長さ  $L_p$  が大きくなると局所燃料後退速度が大きくなる理由について、対流熱流束の観点から物理的に考察する。ポート長さ  $L_p$  が大きくなるに連れて固体燃料表面積  $A_S$  は増大し、燃料質量流量  $\dot{m}_f$  が大きくなる。したがって全質量流量  $\dot{m}_t$  も増えることになるので燃焼室圧力が大きくなり(図 4.14)、火炎温度が上昇する(図 4.15)。よって対流熱流束は増加し、燃料後退速度も増加する。燃料後退速度が増加すると燃料質量流量が増えるので総質量流束  $G$  も大きくなり(図 4.16)、対流熱流束が大きくなる方向に働く。しかし、燃料後退速度の増加に伴ってブロッキング効果が大きくなるので、対流熱流束が逆に小さくなる方向に働く。これらの効果がバランスして対流熱流束はある値に定まり、結果的にポート長さ  $L_p$  が大きいほど対流熱流束は増加する傾向を示す(図 4.17)。

### (2) 輻射熱流束

輻射熱流束を考慮している場合は、燃料グレインポート長さ  $L_p$  を大きくしたことによる燃焼室圧力の増加(図 4.14)に伴って、混合ガスの放射率が大きくなり(図 4.18(a))、火炎温度も高くなる(図 4.15)ことから気相からの輻射熱流束は増大する。その一方で、すすの放射率は大きくなり(図 4.18(b))すすの温度もわずかに上昇する(図 4.18(c))ことから、すすからの輻射熱流束は増大する。したがって輻射熱流束全体としても増大する



(a) モデル 1 の結果 .

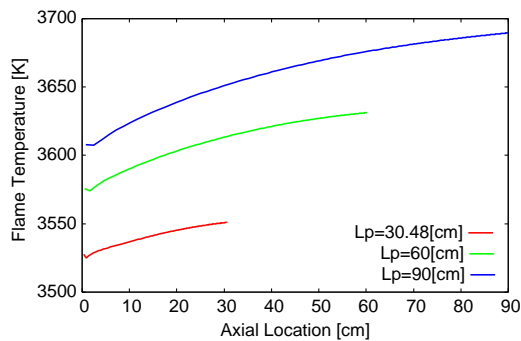


(b) モデル 2 の結果 .

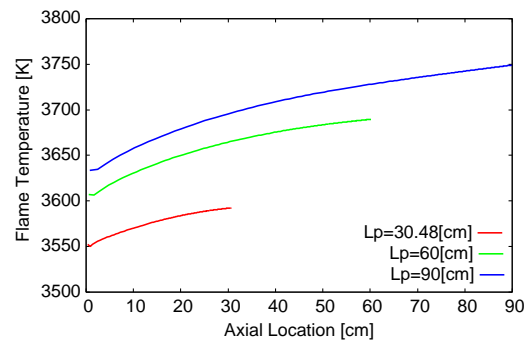
図 4.14: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の燃焼室圧力 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

(図 4.18(d)) . 熱流束全体を考えると、ポート長さ  $L_p$  が大きいほど全熱流束は増大する (図 4.18(e)) . 以上の理由から輻射熱流束を考慮した場合においても、ポート長さ  $L_p$  を大きくすることで燃料後退速度が増大する方向に働く .

計算結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  と指数  $n$  の値を表 4.14 に示す . 表 4.14 を見ると、モデル 1 においてはポート長さ  $L_p$  の増加に伴って係数  $a$  は単調に減少し、指数  $n$  は単調に増加する . それとは異なり、モデル 2 ではポート長さ  $L_p$  の増加に伴って係数  $a$  は単調に増加し、指数  $n$  は単調に減少する .

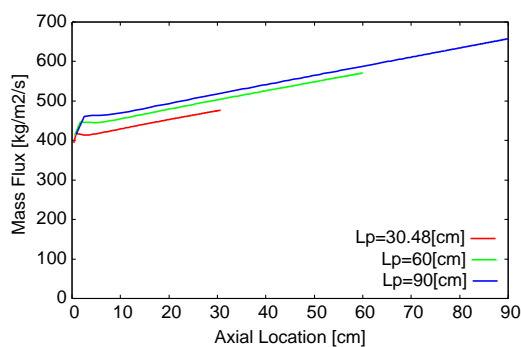


(a) モデル 1 の結果 .

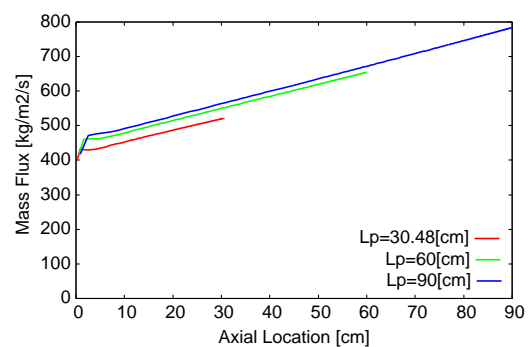


(b) モデル 2 の結果 .

図 4.15: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

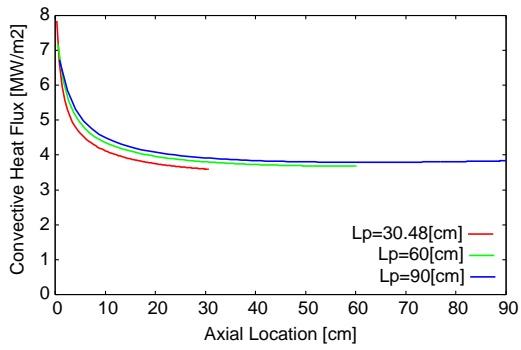


(a) モデル 1 の結果 .

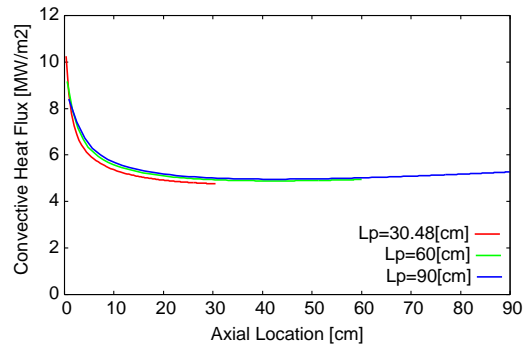


(b) モデル 2 の結果 .

図 4.16: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .



(a) モデル 1 の結果 .

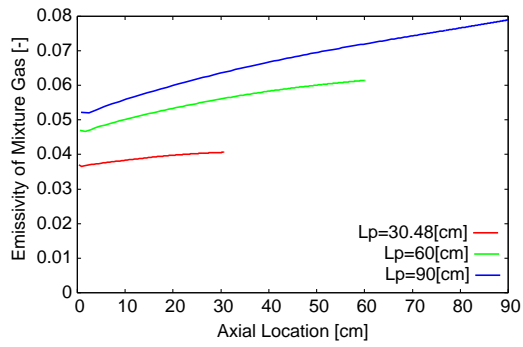


(b) モデル 2 の結果 .

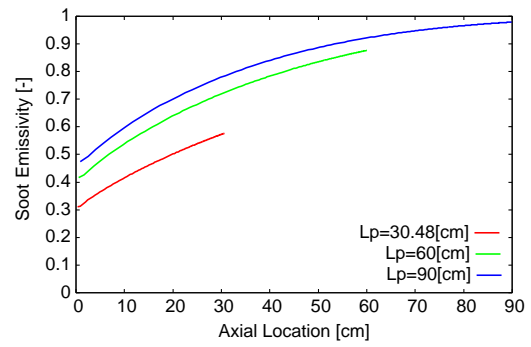
図 4.17: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

表 4.14: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

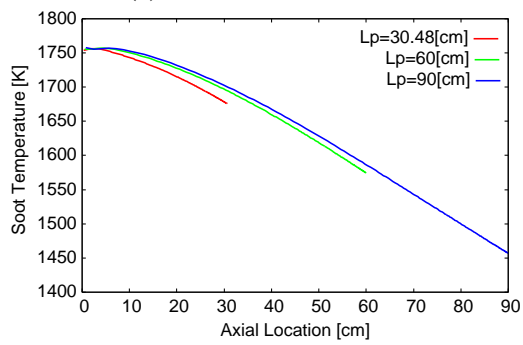
モデル 1			
$L_p$ [cm]	30.48	60	90
$a$	0.00655	0.00606	0.00588
$n$	0.839	0.847	0.851
モデル 2			
$L_p$ [cm]	30.48	60	90
$a$	0.0134	0.0165	0.0197
$n$	0.774	0.736	0.706



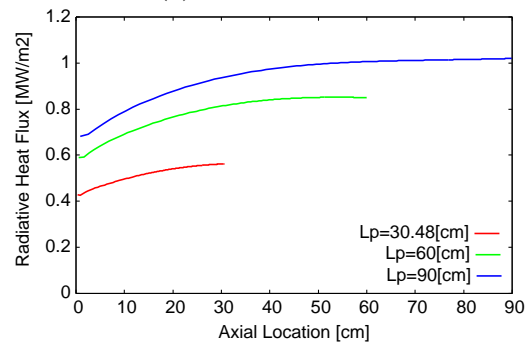
(a) 混合ガスの放射率 .



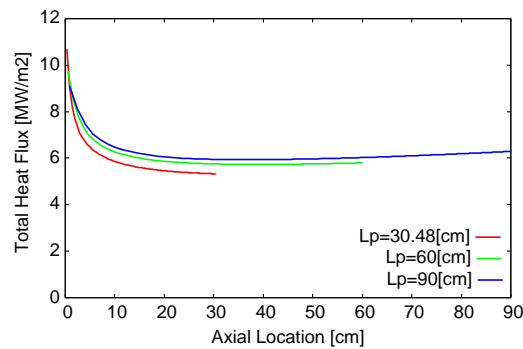
(b) すずの放射率 .



(c) すず温度 .



(d) 輻射熱流束 (気相 + すず) .



(e) 全熱流束 (対流 + 輻射) .

図 4.18: 燃料グレインポート長さ  $L_p$  を変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s) .

### 4.2.3 固体燃料初期温度の影響

固体燃料初期温度  $T_a$  の値を振って解析を行う．解析条件は 4.1.1 章の Karabeyoglu らの実験条件（表 4.1）とし，酸化剤流入温度  $T_{inj} = 300$  [K] とする．固体燃料初期温度  $T_a$  の値には，これまで用いてきた 300 K に加えて，250 K, 350 K と 400 K を用いる．

モデル 1 により得られた結果を図 4.19 と表 4.15 に，モデル 2 により得られた結果を図 4.20 と表 4.16 に示す．図 4.19 と図 4.20，表 4.15 と表 4.16 を見ると，モデル 1 とモデル 2 とともに固体燃料初期温度  $T_a$  の増加に伴って時空間平均燃料後退速度は増加するが，その変化量はごくわずかである．

固体燃料初期温度  $T_a$  が上昇すると燃料後退速度が増加するのは，熱伝導による熱流束の式 (2.115) を見れば明らかである．固体燃料初期温度  $T_a$  が高ければ固体燃料をその融点  $T_m$  まで引き上げるのに必要な熱量は少なく済み，したがって熱伝導により固体燃料中へ逃げていく熱が少なくなるので，その分だけ対流熱伝達や輻射熱伝達により固体燃料壁面へ伝わった熱が固体燃料の熱分解や気化に使われることになる．固体燃料壁面でのエネルギー流入出のバランス（図 4.21）を見ると，対流熱流束や気化に要するエネルギーに比べて，熱伝導により固体燃料中へ逃げる熱量は極めて小さく，したがって固体燃料初期温度  $T_a$  の変動の効果はごく小さいことが分かる．十分なウェブ厚さを持った固体燃料において固体燃料中への熱伝導の影響は小さいことが上記の結果から言えるが，ウェブ厚さがある程度薄い状況を考えるのであれば，固体燃料は半無限の厚さを持つという仮定を用いることができなくなり，異なる結果を与え得ることを述べておく．

計算結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  と指数  $n$  の値を表 4.17 に示す．表 4.17 を見ると，係数  $a$  と指数  $n$  の変化の傾向は単調ではなく，その変化量はごく小さい．

固体ロケットの燃焼速度は固体推進薬初期温度の影響を大きく受ける [37] のに対して，ハイブリッドロケットの燃料後退速度は固体燃料初期温度の影響をほとんど受けず，この点で固体ロケットと異なっていると言える．

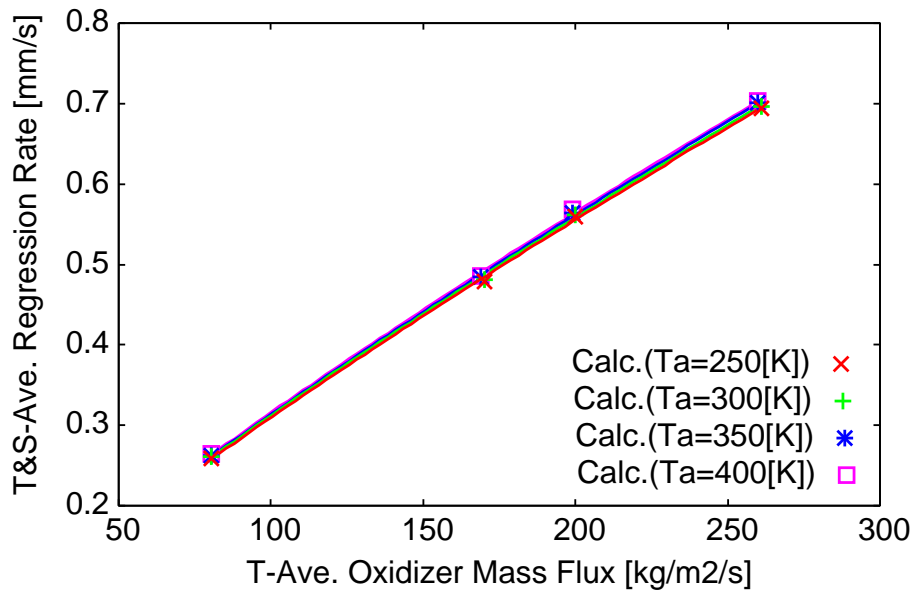


図 4.19: モデル 1 による固体燃料初期温度  $T_a$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．

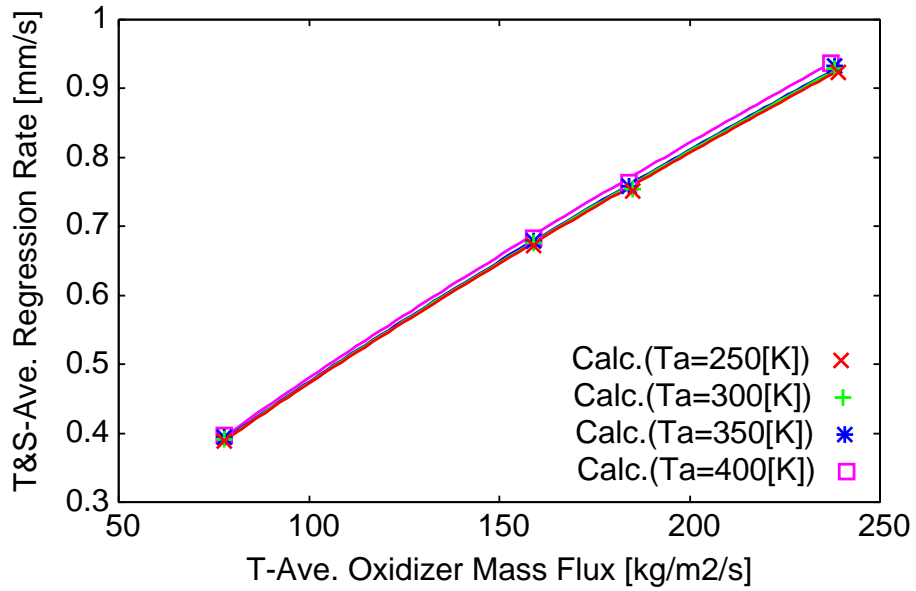


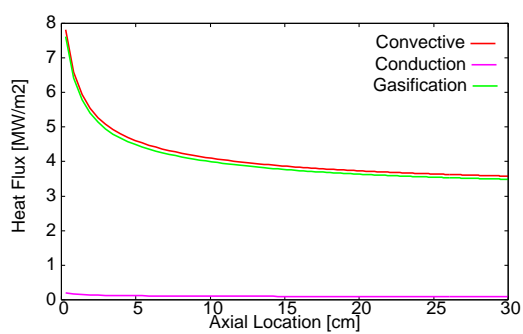
図 4.20: モデル 2 による固体燃料初期温度  $T_a$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．



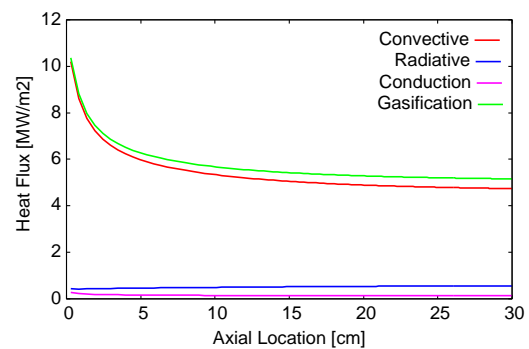
表 4.15: モデル 1 による固体燃料初期温度  $T_a$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

固体燃料 初期温度 [K]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
250	1	261	0.694
	2	170	0.479
	3	80.5	0.259
	4	200	0.559
300*	1	261	0.696
	2	170	0.481
	3	80.5	0.261
	4	200	0.562
350	1	260	0.701
	2	169	0.485
	3	80.4	0.262
	4	199	0.564
400	1	260	0.703
	2	169	0.486
	3	80.4	0.264
	4	199	0.568

\* 表 4.2 の値 .



(a) モデル 1 の結果 .



(b) モデル 2 の結果 .

図 4.21: 固体燃料初期温度  $T_a$  を変化させた場合の対流熱流束, 輻射熱流束, 伝導熱流束および気化に要するエネルギー ( $T_a = 250$  [K], 試験番号 1, 時刻 0 s) .

表 4.16: モデル 2 による固体燃料初期温度  $T_a$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

固体燃料 初期温度 [K]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
250	1	239	0.923
	2	159	0.672
	3	77.8	0.389
	4	185	0.752
300*	1	238	0.929
	2	159	0.676
	3	77.7	0.392
	4	185	0.754
350	1	238	0.933
	2	159	0.679
	3	77.7	0.394
	4	184	0.758
400	1	237	0.937
	2	159	0.683
	3	77.7	0.397
	4	184	0.763

\* 表 4.2 の値 .

表 4.17: 固体燃料初期温度  $T_a$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

モデル 1				
$T_a$ [K]	250	300	350	400
$a$	0.00638	0.00655	0.00652	0.00666
$n$	0.843	0.839	0.841	0.838
モデル 2				
$T_a$ [K]	250	300	350	400
$a$	0.0135	0.0134	0.0135	0.0136
$n$	0.772	0.774	0.773	0.774

#### 4.2.4 酸化剤流入温度の影響

酸化剤流入温度  $T_{inj}$  の値を振って解析を行う．解析条件は 4.1.1 章の Karabeyoglu らの実験条件（表 4.1）とし，固体燃料初期温度  $T_a = 300$  [K] とする．酸化剤流入温度  $T_{inj}$  の値には，これまで用いてきた 300 K に加えて，150 K, 200 K, 250 K, 350 K と 400 K を用いる．

モデル 1 により得られた結果を図 4.22 と表 4.19 に，モデル 2 により得られた結果を図 4.23 と表 4.20 に示す．図 4.22 と図 4.23，表 4.19 と表 4.20 を見ると，モデル 1 とモデル 2 とともに酸化剤流入温度  $T_{inj}$  の増加に伴って時空間平均燃料後退速度は単調に減少するが，その変化量は小さい．

酸化剤流入温度  $T_{inj}$  の増加に伴う時空間平均燃料後退速度の減少は，数値的な問題に起因する可能性がある．酸化剤流入質量流量は入口の境界条件として設定しており，計算領域外側のゴーストセルに値を与えることで決められている（2.2.1 章）．また，酸化剤流入質量流量が決まれば酸化剤流入質量流束も決まる．ゴーストセルの値を用いて AUSMDV スキームから入口境界における数値流束が求まる（2.2.2 章）．この数値流束における質量流束の値を見てみると，試験番号 1，時刻 0 s において， $T_{inj} = 150$  [K] の場合と  $T_{inj} = 400$  [K] の場合の間で設定値の割ほどの大きさの差があり， $T_{inj} = 150$  [K] の場合において大きな質量流束となっている．つまりゴーストセルでの質量流束は設定値となることが保証されているが，実際に流れ場を決めることになる入口境界での数値流束は幾分誤差を含み，設定値となることが保証されていないことになる．この数値流束の誤差が燃料後退速度を増大させている可能性があるが，この点に関しては今後更なる検討が必要である．

計算結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  と指数  $n$  の値を表 4.18 に示す．表 4.18 を見ると，係数  $a$  と指数  $n$  の変化の傾向はモデル 2 の係数  $a$  を除いて単調ではなく，その変化量はごく小さい．

表 4.18: 酸化剤流入温度  $T_{inj}$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

		モデル 1					
$T_{inj}$ [K]		150	200	250	300	350	400
$a$		0.00714	0.00653	0.00654	0.00655	0.00632	0.00630
$n$		0.834	0.847	0.843	0.839	0.843	0.842
		モデル 2					
$T_{inj}$ [K]		150	200	250	300	350	400
$a$		0.0144	0.0138	0.0135	0.0134	0.0133	0.0135
$n$		0.769	0.774	0.775	0.774	0.772	0.768

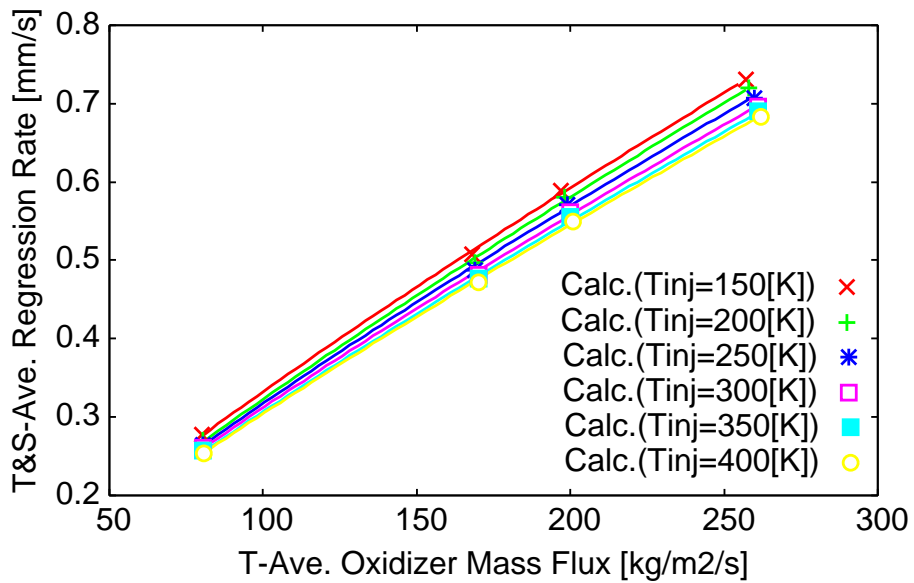


図 4.22: モデル 1 による酸化剤流入温度  $T_{inj}$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．

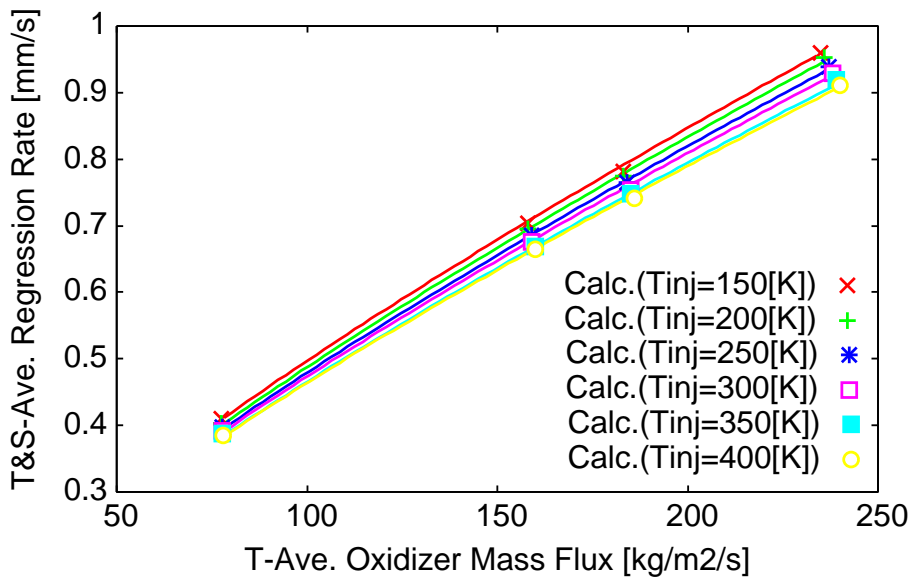


図 4.23: モデル 2 による酸化剤流入温度  $T_{inj}$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．

表 4.19: モデル 1 による酸化剤流入温度  $T_{inj}$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

酸化剤流入 温度 [K]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
150	1	257	0.731
	2	168	0.508
	3	80.1	0.278
	4	197	0.589
200	1	258	0.720
	2	169	0.497
	3	80.3	0.270
	4	198	0.580
250	1	260	0.707
	2	169	0.488
	3	80.4	0.264
	4	199	0.571
300*	1	261	0.696
	2	170	0.481
	3	80.5	0.261
	4	200	0.562
350	1	261	0.690
	2	170	0.477
	3	80.5	0.257
	4	200	0.555
400	1	262	0.683
	2	170	0.472
	3	80.6	0.254
	4	201	0.550

\* 表 4.2 の値 .

表 4.20: モデル 2 による酸化剤流入温度  $T_{inj}$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

酸化剤流入 温度 [K]	試験 番号	時間平均酸化剤 質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料 後退速度 [mm/s]
150	1	235	0.960
	2	158	0.704
	3	77.4	0.410
	4	183	0.782
200	1	236	0.952
	2	158	0.695
	3	77.5	0.403
	4	183	0.775
250	1	237	0.939
	2	159	0.685
	3	77.7	0.397
	4	184	0.765
300*	1	238	0.929
	2	159	0.676
	3	77.7	0.392
	4	185	0.754
350	1	239	0.919
	2	160	0.669
	3	77.8	0.388
	4	185	0.748
400	1	240	0.911
	2	160	0.664
	3	77.9	0.385
	4	186	0.741

\* 表 4.2 の値 .

#### 4.2.5 ノズルスロート径の影響

ノズルスロート径  $D_t$  の値を振って解析を行う。解析条件は、ノズルスロート径  $D_t$  の値を除いては、4.1.1 章の Karabeyoglu らの実験条件（表 4.1）とし、酸化剤流入温度  $T_{inj} = 300$  [K]、固体燃料初期温度  $T_a = 300$  [K] とする。ノズルスロート径  $D_t$  の値には、Karabeyoglu らの実験と同じ 9.53 ~ 9.91 mm に加えて、8 mm, 9 mm と 11 mm を用いる。

モデル 1 により得られた結果を図 4.24 と表 4.21 に、モデル 2 により得られた結果を図 4.25 と表 4.22 に示す。図 4.24 と図 4.25、表 4.21 と表 4.22 を見ると、モデル 1 とモデル 2 とともにノズルスロート径  $D_t$  の増加に伴って時空間平均燃料後退速度は単調に減少する。その減少量はモデル 1 の結果に比べてモデル 2 の結果の方が大きい。

##### (1) 対流熱流束

ノズルスロート径  $D_t$  が大きくなると時空間平均後退速度が減少する理由について、対流熱流束の観点から物理的に考察する。ノズルスロート径  $D_t$  が大きくなるに連れて燃焼室圧力が小さくなり（図 4.26）、火炎温度が低下する（図 4.27）。よって対流熱流束は減少し、燃料後退速度も減少する。燃料後退速度が減少すると燃料質量流量が少なくなるので総質量流束  $G$  も小さくなり（図 4.28）、対流熱流束が小さくなる方向に働く。しかし、燃料後退速度の低下に伴ってブロッキング効果が小さくなるので、対流熱流束が逆に大きくなる方向に働く。これらの効果がバランスして対流熱流束はある値に定まり、結果的にノズルスロート径  $D_t$  が大きいほど対流熱流束は減少する傾向を示す（図 4.29）。

##### (2) 輻射熱流束

輻射熱流束を考慮している場合は、ノズルスロート径  $D_t$  を大きくしたことによる燃焼室圧力の減少（図 4.26）に伴って、混合ガスの放射率が小さくなり（図 4.30(a)）、火炎温度も低くなる（図 4.27）ことから気相からの輻射熱流束は減少する。その一方で、すすの放射率は小さくなり（図 4.30(b)）すすの温度も減少する（図 4.30(c)）ことから、すすからの輻射熱流束は減少する。したがって輻射熱流束全体としても減少する（図 4.30(d)）。熱流束全体を考えても、ノズルスロート径  $D_t$  が大きいほど全熱流束は減少する（図 4.30(e)）。以上の理由から輻射熱流束を考慮した場合においても、ノズルスロート径  $D_t$  を大きくすることで燃料後退速度が減少する方向に働き、燃料後退速度の変化が輻射を考慮していない場合と比べて顕著に現れる。

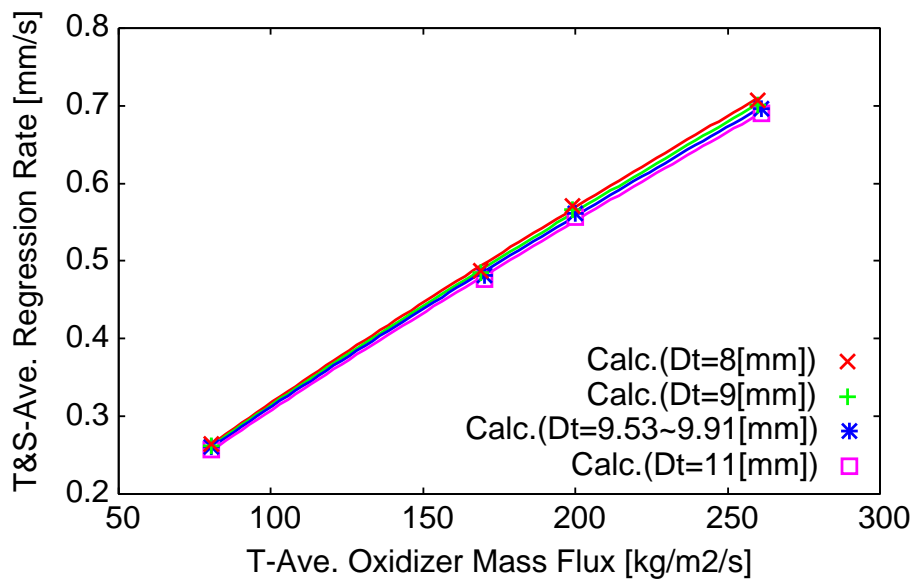


図 4.24: モデル 1 によるノズルスロート径  $D_t$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．

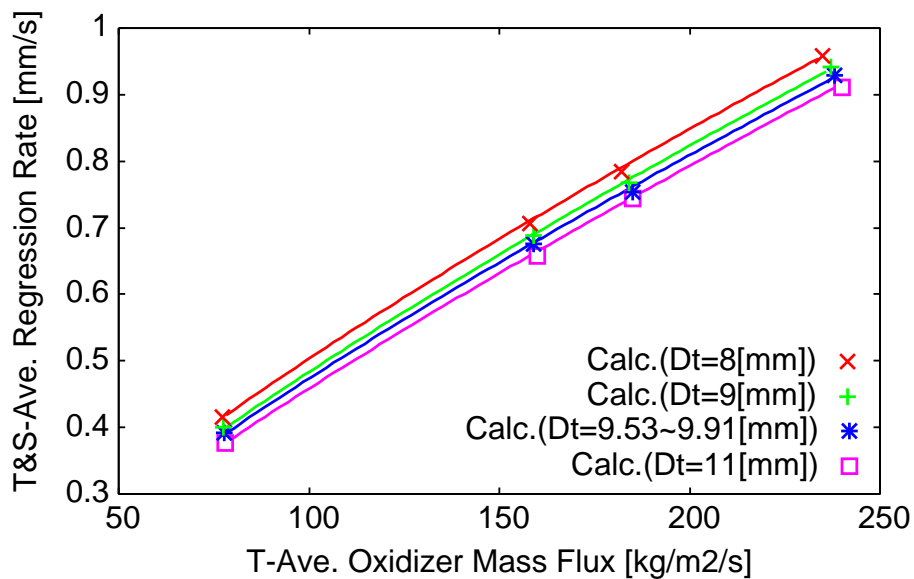


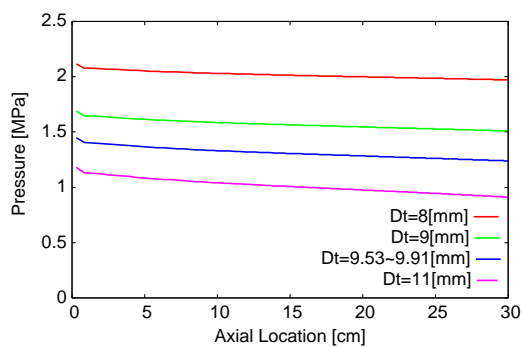
図 4.25: モデル 2 によるノズルスロート径  $D_t$  のパラメトリック解析にて得られた時空間平均燃料後退速度．結果を内挿して結んだ線は経験式  $\bar{r} = a\bar{G}_{ox}^n$  にフィッティングして得られた線である．



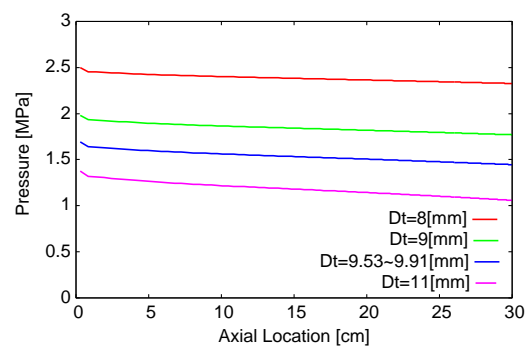
表 4.21: モデル 1 によるノズルスロート径  $D_t$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

ノズルスロート径 [mm]	試験番号	時間平均酸化剤質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料後退速度 [mm/s]
8	1	260	0.707
	2	169	0.488
	3	80.4	0.264
	4	199	0.571
9	1	260	0.701
	2	169	0.485
	3	80.4	0.262
	4	199	0.566
9.53 ~ 9.91*	1	261	0.696
	2	170	0.481
	3	80.5	0.261
	4	200	0.562
11	1	261	0.690
	2	170	0.477
	3	80.5	0.257
	4	200	0.557

\* 表 4.2 の値 .



(a) モデル 1 の結果 .



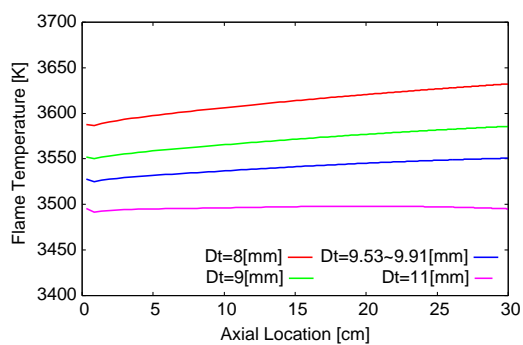
(b) モデル 2 の結果 .

図 4.26: ノズルスロート径  $D_t$  を変化させた場合の燃焼室圧力 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

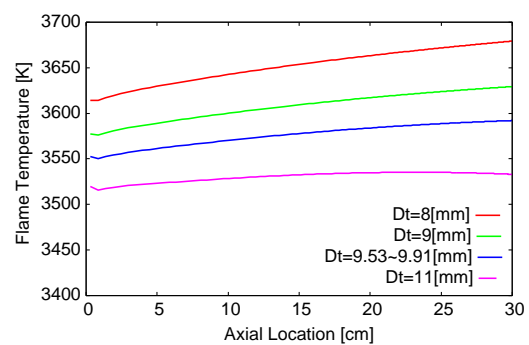
表 4.22: モデル 2 によるノズルスロート径  $D_t$  のパラメトリック解析にて得られた時間平均酸化剤質量流束と時空間平均燃料後退速度 .

ノズルスロート径 [mm]	試験番号	時間平均酸化剤質量流束 [kg/s/m <sup>2</sup> ]	時空間平均燃料後退速度 [mm/s]
8	1	235	0.958
	2	158	0.707
	3	77.3	0.416
	4	182	0.784
9	1	237	0.941
	2	159	0.688
	3	77.6	0.400
	4	184	0.767
9.53 ~ 9.91*	1	238	0.929
	2	159	0.676
	3	77.7	0.392
	4	185	0.754
11	1	240	0.911
	2	160	0.658
	3	78.1	0.376
	4	185	0.744

\* 表 4.2 の値 .

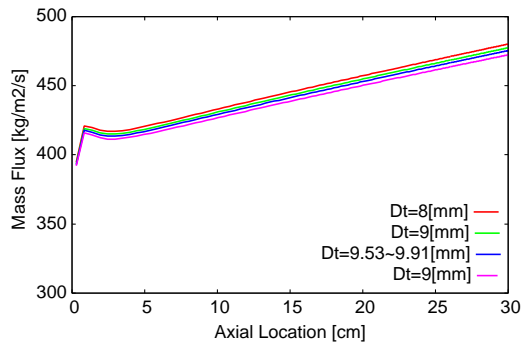


(a) モデル 1 の結果 .

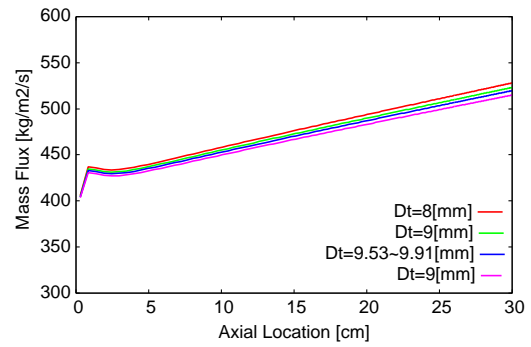


(b) モデル 2 の結果 .

図 4.27: ノズルスロート径  $D_t$  を変化させた場合の火炎温度 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

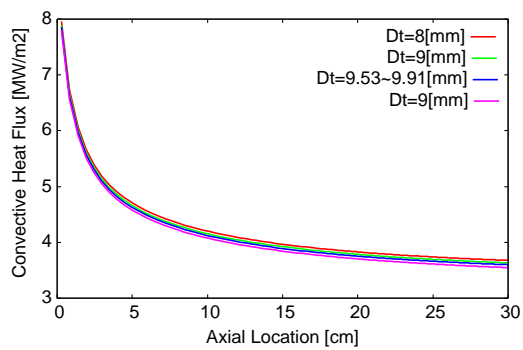


(a) モデル1の結果 .

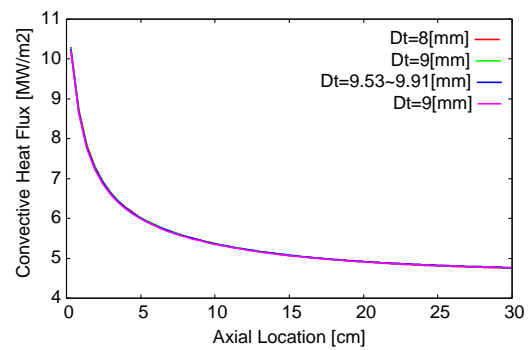


(b) モデル2の結果 .

図 4.28: ノズルスロート径  $D_t$  を変化させた場合の総質量流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .

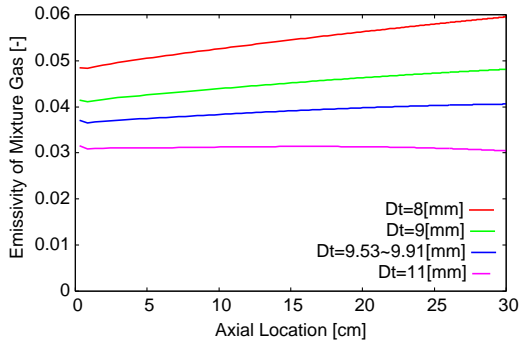


(a) モデル1の結果 .

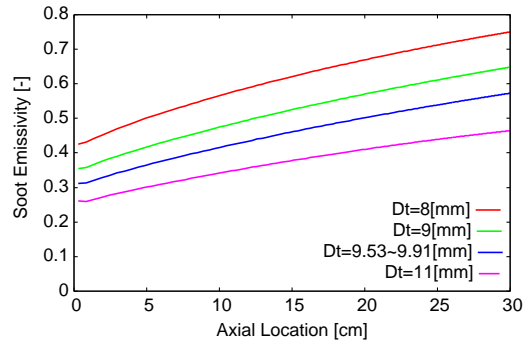


(b) モデル2の結果 .

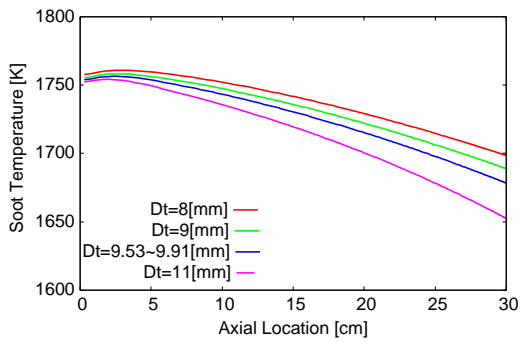
図 4.29: ノズルスロート径  $D_t$  を変化させた場合の対流熱流束 (試験番号 1, 時刻 0 s) .



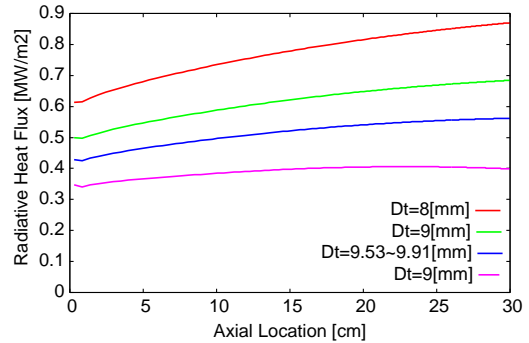
(a) 混合ガスの放射率 .



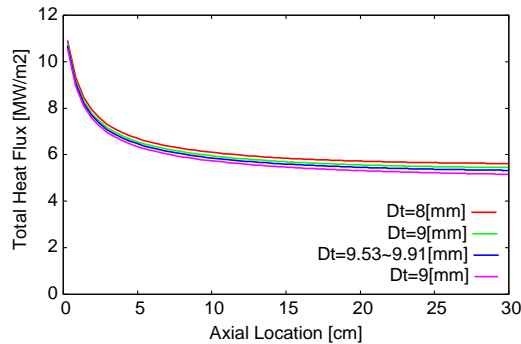
(b) すずの放射率 .



(c) すず温度 .



(d) 輻射熱流束 (気相 + すず) .



(e) 全熱流束 (対流 + 輻射) .

図 4.30: ノズルスロット径  $D_t$  を変化させた場合の輻射熱伝達に関する各種パラメータ (モデル 2, 試験番号 1, 時刻 0 s) .

表 4.23: ノズルスロート径  $D_t$  のパラメトリック解析にて得られた係数  $a$  と指数  $n$  .

モデル 1				
$D_t$ [mm]	8	9	9.53 ~ 9.91	11
$a$	0.00654	0.00654	0.00655	0.00634
$n$	0.843	0.841	0.839	0.843
モデル 2				
$D_t$ [mm]	8	9	9.53 ~ 9.91	11
$a$	0.0157	0.0140	0.0134	0.0120
$n$	0.753	0.769	0.774	0.791

計算結果を経験式 (2.215) にフィッティングして得られた係数  $a$  と指数  $n$  の値を表 4.23 に示す．表 4.23 を見ると，モデル 1 においては係数  $a$  と指数  $n$  の変化の傾向は単調ではない．その一方で，モデル 2 においては係数  $a$  はノズルスロート径  $D_t$  の増加に伴って単調に減少し，指数  $n$  は単調に増加する．

#### 4.2.6 解析時間

ここでは解析に要する時間について述べる．解析時間の測定に用いた計算環境を表 4.24 に示す．表 4.24 の計算環境を用いて，4.2 章の内部弾道特性データベース作成において測定した平均の解析時間を表 4.25 に示す．データベース作成にあたっては試験番号 1 から 4 の解析結果として得られる時空間平均燃料後退速度を経験式 (2.215) にフィッティングして係数  $a$  と指数  $n$  の値を求めているが，この値の組を一つ得るのに要する時間の平均が「一経験式あたりの平均」である．一経験式を得るにあたり試験番号 1 から 4 の四つの実験条件で解析を行っており，したがって「一実験条件あたりの平均」は「一経験式あたりの平均」の四分の一となっている．ある実験条件での解析は十一の収束計算からなっている．なぜなら，実験は 3 秒の燃焼時間となっており，また時間進行幅  $\Delta time$  を 0.3 秒と設定しているため，時刻 0 s における収束計算も含めて十一の収束計算を行うことになるからである．したがって「一収束解あたりの平均」は「一実験条件あたりの平均」の十一分の一となっている．以上の解析時間においては 1 分以下の値は切り捨てている．表 4.25 を見ると，モデル 2 よりモデル 1 の方が短い解析時間となっている．これは，モデル 1 では輻射熱伝達を考慮しておらず，火炎下部領域での状態を必要としないためその領域での化学平衡計算 (2.4.3 章) を実行していないことに主に起因する．この点に関連して，例えば 3.2 章のように火炎位置における比エンタルピを定数 (燃焼熱) とすることで火炎位置での化学平衡計算 (2.4.2 章) も省略すれば，さらに解析時間が短くなる．また，燃焼室圧力が高くなると解析時間も長くなる傾向が見られる．例えば，4.2.5 章に関して，モデル 1 を用いてノズルスロート径  $D_t = 11$  [mm] とした計算では一経験式を得るまでに約 764 分の時間を要するが， $D_t = 8$  [mm] とした計算では一経験式を得るまでに約 1340 分の時間を要し，

表 4.24: 計算環境 .

PC	DELL Precision <sup>TM</sup> T7400
CPU	Intel <sup>®</sup> Xeon <sup>®</sup> CPU X5482, 3.20 GHz, 4 コア
コンパイラ	Intel <sup>®</sup> Fortran Compiler XE 12.0 Update 5 for Linux
コンパイルオプション	自動最適化 ( -fast ), 自動並列化 ( -parallel )

表 4.25: 解析時間 .

モデル 1		
平均の種類	壁時計時間 [分]	CPU 時間 [分]
一経験式あたりの平均	1095	3597
一実験条件あたりの平均	273	899
一収束解あたりの平均	24	81
モデル 2		
平均の種類	壁時計時間 [分]	CPU 時間 [分]
一経験式あたりの平均	1698	5697
一実験条件あたりの平均	424	1424
一収束解あたりの平均	38	129

$D_t = 11$  [mm] の場合と比べて長い解析時間となる .

表 4.25 の解析時間を得るにあたってソースコード上で解析時間を短縮するような特別な工夫は行っておらず, したがって, 例えば OpenMP を用いて並列計算をより効率よく行うなどの方法を採用することで, 解析時間の短縮化を図る余地は十分に残っていることを記しておく .

#### 4.2.7 内部弾道特性データベース作成についての結論

本数値予測技術を用いてハイブリッドロケット内部弾道特性データベースの作成例を示した . 設計者が操作し得る条件として, 燃焼器スケール, 燃料グレインポート長さ, 固体燃料初期温度, 酸化剤流入温度とノズルスロート径の五つのパラメータを取り上げ, それぞれパラメトリック解析を行った . 解析には, 燃料後退速度の下限を与えるモデルとして対流熱伝達における火炎位置での速度増大の効果や輻射熱伝達を考慮しないモデル 1 と燃料後退速度の上限を与えるモデルとして対流熱伝達における火炎位置での速度増大の効果や輻射熱伝達を考慮するモデル 2 の二通りを用いた . 燃焼器スケールの与える影響として, モデル 1 とモデル 2 とともにスケールが大きくなるほど燃料後退速度が減少する傾向が得られた . また, ハイブリッドロケット燃焼器の相似性を利用して, 小さなスケールのエンジンで得られた経験則をそのまま大きなスケールのエンジンへと適用できないことが確

認められた。その一方で、燃料グレインポート長さのみを変化させた結果として、輻射熱伝達の有無の違いから、時空間平均燃料後退速度の増減に関してモデル1とモデル2で異なる傾向が得られた。固体燃料初期温度は燃料後退速度に対して大きな影響を与えることはなく、この点は固体ロケットとは異なる特徴となる。酸化剤流入温度やノズルスロート径のパラメトリック解析では燃料後退速度の増減に関してモデル1とモデル2で同じ傾向が得られたが、ノズルスロート径の変化に対してはモデル2において輻射熱伝達を通してパラメータの変化の影響が大きく現れた。以上の結果を鑑みると、このデータベースを用いることで燃料後退速度が取り得る値の幅を大まかに知ることができ、また、どのパラメータが燃料後退速度に対して大きく影響するのかについて把握することができると言える。したがって、本数値予測技術を用いて作成されたハイブリッドロケット内部弾道特性データベースは有用である。

## 第5章 結論

本論文では、ハイブリッドロケットエンジンの最適設計やスケールアップに必要な、広範な条件および多様なパラメータを含む設計データベースの効率的な作成に適用可能な、ハイブリッドロケット内部弾道特性の数値予測技術を構築することを目的として研究を実施してきた。

第2章においては、ハイブリッドロケット内部弾道特性評価のための反応流・伝熱統合解析手法の構築を行った。この解析手法は大きく分けて二つの部分から成り、一方は燃料グレインポート内およびノズル内の反応流れであり、他方は燃料壁面近傍に着目した熱の流れである。前者のモデルとして準一次元圧縮性 Euler 方程式を扱い、加えて燃料と酸化剤の混合の程度を追跡するために混合分率の輸送方程式を解く。ここで得られた混合分率と熱力学状態量は化学平衡計算と関連付けられる。後者のモデルでは燃料壁面におけるエネルギー収支を扱うことになり、ここでは対流熱伝達や輻射熱伝達によって燃料壁面へ流入する熱量、熱伝導により固体燃料中へ流入する熱量および固体燃料の熱分解・気化に必要なエネルギーが考慮される。このエネルギー収支の式を解くことで、燃料後退速度が評価される。この解析手法を用いることによって、燃料後退速度といった内部弾道特性を数値的に予測することができる。

第3章においては、第2章にて構築した反応流・伝熱統合解析手法を用いた本数値予測技術について、その特性の調査を行った。特性調査にあたって、熱分解・気化速度の評価式中のパラメータ（活性化エネルギーと前指数因子）の感度解析、対流熱伝達モデル（モデル中の質量流束の指数や火炎位置での速度増大）が与える影響の解析、輻射熱伝達が与える影響の解析（放射率のパラメトリック解析）、そして固体燃料壁面温度と実効気化熱の評価法が与える影響の解析が実施された。それらの結果を燃料後退速度の予測の観点から見ると、酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性は対流熱伝達モデルに現れる質量流束の指数に強く支配され、この依存特性が大きく変化するのには輻射熱伝達量が大きい場合においてであることが示された。燃料後退速度の絶対値に関しては、多くのパラメータがある程度の影響を与える一方で、熱分解・気化速度に関わるパラメータである前指数因子は他のパラメータと比べて極めて小さな影響しか与えないことが示された。

第4章においては、本数値予測技術を用いてハイブリッドロケット内部弾道特性の解析を実際に行い、計算値と文献値を比較することで本数値予測技術の解析精度について議論した。また、ハイブリッドロケットエンジンにおいて設計者が操作し得る各種パラメータに様々な値を与えて解析を行い、内部弾道特性データベースの作成例を示した。前者の解析精度の調査にあたっては、GOX/HDPE を用いた実験室スケールエンジンの解析と GOX/HTPB を用いた実験室スケールエンジンの解析を行った。その結果として得られた



時空間平均燃料後退速度を文献値と比較したところ、その絶対値は文献値と同程度のオーダーで得られており、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果なしのモデルでの結果が後退速度の下限值として、輻射熱伝達・火炎位置での速度増大の効果ありのモデルでの結果が後退速度の上限値として使用可能であることが示された。その一方で、酸化剤質量流束に対する燃料後退速度の依存特性の予測に関してはその精度においてまだ課題が残るものとなっているが、輻射熱伝達を考慮することでそれを考慮しない場合と比較してより良い結果を得ることができた。後者の内部弾道特性データベースの作成にあたっては、設計者が操作し得る条件として、燃焼器スケール、燃料グレインポート長さ、固体燃料初期温度、酸化剤流入温度とノズルスロート径の五つのパラメータに着目し、それらのパラメトリック解析を行った。その結果として得られたデータベースを用いることで燃料後退速度が取り得る値の幅を大まかに知ることができ、また、どのパラメータが燃料後退速度に対して大きく影響するのかについて把握することができた。したがって、本数値予測技術を用いて作成されたハイブリッドロケット内部弾道特性データベースは有用であると言える。

以上の結果から、本論文にて開発した反応流・伝熱統合解析手法を用いた本数値予測技術におけるハイブリッドロケット内部弾道特性評価の実行可能性が示された。したがって、ハイブリッドロケット設計者がこの手法を用いて広範な条件および多様なパラメータを含む設計データベースを作成し役立てることができると見込まれる。

最後に今後の展望について述べる。本数値予測技術を用いて燃料後退速度を決定するにあたり最も重要となってくるのは、燃料壁面への熱伝達量を予測するモデルである。よって、より精度良く燃料後退速度を予測するためには熱伝達モデルの改良が必要となる。例えば、本論文では火炎位置での速度増大の効果に対流熱伝達に取り込むためのパラメータ  $a_v$  を定数として扱っているが、実際には位置や時間に関する変数であるために  $a_v$  の予測モデルの導入が求められる。本論文の解析対象は酸化剤軸流流入方式のハイブリッドロケットエンジンのみであるが、今後、酸化剤旋回流方式のエンジンへと解析対象を広げていくためには旋回流下における対流熱伝達モデルを開発し、導入すればよい。本論文で扱っている従来型の燃料ではなく、パラフィン系燃料といった低融点燃料を解析対象とするのであれば、燃料壁面上に生じる有限厚さの溶融層とそこから飛散する液滴に関するモデルを導入すべきである。また酸化剤の種類を変更するのであれば、それに応じて混合分率の定義を変更する必要があるが、本論文の 2.2.1 章で用いた仮定を用いれば混合分率を再定義することができ、他の酸化剤に対応した解析手法への拡張が可能である。したがってハイブリッドロケットエンジン設計者の要望に応じて本数値予測技術を拡張・発展させる余地は十分にあり、今後も精力的に取り組むべき研究分野であると言える。

## 付録A 物性値および各種パラメータ

本章では、解析に用いる物性値および各種パラメータの値の一覧を示す。

### A.1 GOX/HDPE 系

GOX/HDPE 系の解析において用いる物性値および各種パラメータの一覧を表 A.1 に示す。

表 A.1: GOX/HDPE 系における物性値および各種パラメータ。

物理量	記号	値	注
HDPE の密度	$\rho_s$	950 kg/m <sup>3</sup>	文献 [32] .
HDPE の比熱	$c_{polymer}$	1300 J/kg/K	文献 [32] .
HDPE の熱伝導率	$\lambda_s$	0.16 W/m/K	文献 [32] .
HDPE の熱拡散率	$\alpha_s$	$1.3 \times 10^{-7}$ m <sup>2</sup> /s	$\alpha_s = \lambda_s / \rho_s c_{polymer}$ .
HDPE の実効気化熱	$h_v$	$2.7 \times 10^6$ J/kg	文献 [32, 34] . $h_v$ を定数とする場合 .
HDPE の標準生成エンタルピー	$\Delta h_{polymer}^0$	-1800 kJ/kg	文献 [38] .
HDPE の融点	$T_m$	400 K	文献 [39] .
HDPE の吸収率	$\alpha_{red,s}$	0.93	文献 [40] . 火炎が輻射源の場合の LDPE の値と等しいと仮定 .
主流の粘性係数	$\mu$	$9.7 \times 10^{-5}$ Pa·s	火炎温度における気体酸素の値* .
前指数因子	$A_c$	$2.0 \times 10^{16}$ s <sup>-1</sup>	文献 [32] .
活性化エネルギー	$E_a$	$2.5 \times 10^5$ J/mol	文献 [32] .
分解層厚さ	$e_{reaction}$	25 $\mu$ m	文献 [32] .
燃焼熱	$Q_c$	5300 kJ/kg	

\* Sutherland の式  $\mu = \mu_r [(T_r + C_s)/(T + C_s)](T/T_r)^{3/2}$  により推算 . Sutherland 係数  $C_s$  には  $C_s = 125$  を用いる [41] . 火炎温度は 3500 K を仮定する .

## A.2 GOX/HTPB 系

GOX/HTPB 系の解析において用いる物性値および各種パラメータの一覧を表 A.2 に示す .

表 A.2: GOX/HTPB 系における物性値および各種パラメータ .

物理量	記号	値	注
HTPB の密度	$\rho_s$	920 kg/m <sup>3</sup>	文献 [32] .
HTPB の比熱	$c_{polymer}$	1600 J/kg/K	文献 [32] .
HTPB の熱伝導率	$\lambda_s$	0.15 W/m/K	文献 [32] .
HTPB の熱拡散率	$\alpha_s$	$1.0 \times 10^{-7}$ m <sup>2</sup> /s	$\alpha_s = \lambda_s / \rho_s c_{polymer}$ .
HTPB の実効気化熱	$h_v$	$1.9 \times 10^6$ J/kg	文献 [32] . $h_v$ を定数とする場合 .
HTPB の標準生成エンタルピー	$\Delta h_{polymer}^0$	-310 kJ/kg	文献 [42] .
HTPB の放射率	$\alpha_{red,s}$	0.95	文献 [28] . 光沢のあるゴムの値 .
主流の粘性係数	$\mu$	$1.1 \times 10^{-4}$ Pa·s	火炎温度における気体酸素の値 * .
前指数因子	$A_c$	$2.6 \times 10^{12}$ s <sup>-1</sup>	文献 [32] .
活性化エネルギー	$E_a$	$2.0 \times 10^5$ J/mol	文献 [32] .
分解層厚さ	$e_{reaction}$	25 $\mu$ m	文献 [32] .
燃焼熱	$Q_c$	5300 kJ/kg	

\* Sutherland の式  $\mu = \mu_r [(T_r + C_s)/(T + C_s)](T/T_r)^{3/2}$  により推算 . Sutherland 係数  $C_s$  には  $C_s = 125$  を用いる [41] . 火炎温度は 4000 K を仮定する .

## 付録B 時間進行幅の選定

解析の時間進行に用いるパラメータ  $\Delta time$  の選定を行う。選定のための問題設定として Karabeyoglu らによる気体酸素 (GOX) と高密度ポリエチレン (HDPE) を用いた実験室スケールのハイブリッドロケットエンジン燃焼実験 [33] を採用する。Karabeyoglu らの実験条件のうち試験番号 1 の条件 (表 B.1) を用いる。酸化剤流入温度  $T_{inj}$  は  $T_{inj} = 300$  [K] とし、固体燃料初期温度  $T_a$  は  $T_a = 300$  [K] とする。ここでは、解析モデルの選択 (2.5 章) として、(1) 火炎での速度増大の効果を見捨てる、火炎位置における比エンタルピーとして燃焼熱を使用、(2) 輻射項を見捨てる、(3) 固体燃料壁面温度に壁面ガス温度を使用、(4) 実効気化熱として定数を使用、とする。また、熱化学的ブローイングパラメータ (2.59) の値として、Marxman らが理論的に見積もった値  $(u_{fl}/u_e)_{nv} = 0.56$  (つまり、 $(u_e/u_{fl})_{nv} \approx 1.8$ ) [23] を定数として用いる。時間進行幅  $\Delta time$  の値には 0.30 s, 0.15 s, 0.03 s の三つを用いて計算を実施し、結果を比較する。燃焼時間  $t_b$  経過後のグレインポート半径の分布を図 B.1 に示す。図 B.1 を見ると、いずれの  $\Delta time$  の場合でも、最終的に得られるグレインポート半径の分布に概ね違いがないことが分かる。したがって、時間進行幅  $\Delta time = 0.3$  [s] は十分に細かい刻み値であると判断し、以後解析にはこの値  $\Delta time = 0.3$  [s] を用いることとする。

表 B.1: Karabeyoglu らの実験条件 (試験番号 1) [33]。

試験 番号	ポート長さ	初期ポート径	ノズルスロート径	酸化剤流入 質量流量	燃焼時間
No.	$L_p$ [cm]	$D_{p,0}$ [mm]	$D_t$ [mm]	$\dot{m}_{ox}$ [kg/s]	$t_b$ [s]
1	30.48	12.8	9.78	0.0454	3.0

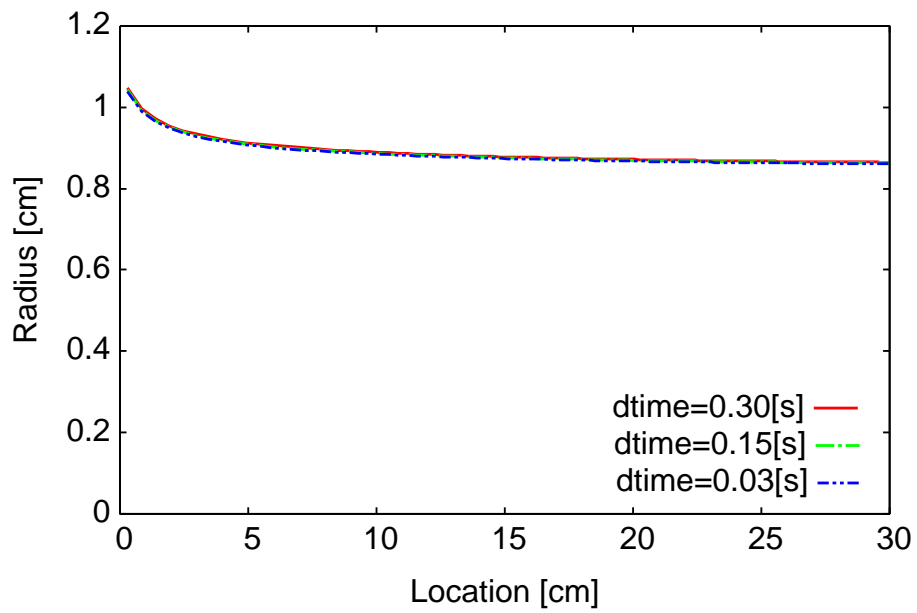


図 B.1: 時間進行幅  $\Delta time$  の影響 .

## 付録C 対流熱伝達モデルの導出と修正

2.3.1 章では燃料後退速度を評価する際に用いる対流熱伝達モデルとして、Karabeyoglu のモデルとその修正モデルを挙げた。ここではそれらのモデルの導出について説明する。

### C.1 Karabeyoglu モデルの導出

ここでは Karabeyoglu モデルの導出過程 [14] について説明する。このモデルは Marxman の乱流境界層燃焼モデル [22, 43] がベースとなっている。

熱流束  $\dot{q}$  と剪断応力  $\tau$  はそれぞれ、Fourier の法則と Newton - Stokes の法則より以下のようになる。

$$\dot{q} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial c_p T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{C.1})$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{C.2})$$

式 (C.1) 中の変形に際して、定圧比熱  $c_p$  が  $y$  方向に一定であると仮定している。式 (C.1) を式 (C.2) で割る。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}}{\tau} &= \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\partial h / \partial y}{\partial u / \partial y} \\ &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial h / \partial y}{\partial u / \partial y} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ここで、 $\text{Pr} = 1$  を仮定して整理する。

$$\frac{1}{\dot{q}} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{C.4})$$

火炎より下方の領域で Reynolds のアナロジが成り立つと仮定する。

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_S} = \frac{\tau}{\tau_S} \quad (\text{C.5})$$

式 (C.4) は以下のように変形できる。

$$\frac{1}{\dot{q}_S} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\tau_S} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{C.6})$$

燃料表面へ流れる熱流束  $\dot{q}_S$  の形態として対流熱伝達と輻射熱伝達が考えられるが，ここでは輻射熱伝達を無視している．

$$\dot{q}_S = \dot{q}_c \quad (\text{C.7})$$

式 (C.6) の両辺を 0 から  $y_{fl}$  の範囲で積分する．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{q}_c} \int_0^{y_{fl}} \frac{\partial h}{\partial y} dy &= \frac{1}{\tau_S} \int_0^{y_{fl}} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ \frac{1}{\dot{q}_c} (h_{fl} - h_S) &= \frac{1}{\tau_S} (u_{fl} - 0) \\ \therefore \frac{\dot{q}_c}{\Delta h} &= \frac{\tau_S}{u_{fl}} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

ここで，以下の式を用いた．

$$\Delta h \equiv h_{fl} - h_S \quad (\text{C.9})$$

壁面摩擦係数  $C_f$  を用いて壁面剪断応力  $\tau_S$  を表す．

$$\tau_S = \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 C_f \quad (\text{C.10})$$

この式を用いると，式 (C.8) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \dot{q}_c &= \frac{1}{2} \rho_e \frac{u_e^2}{u_{fl}} C_f \Delta h \\ &= \frac{1}{2} G \frac{u_e}{u_{fl}} C_f \Delta h \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

ただし，総質量流束  $G$  は以下のように定義される．

$$G \equiv \rho_e u_e \quad (\text{C.12})$$

壁面摩擦係数  $C_f$  を評価するために，Marxman が提案したブロッキング効果に関する式 [22] を用いる．

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = q B_a^{-k} \quad (\text{C.13})$$

$$B_a \equiv \frac{(\rho v)_S}{\rho_e u_e C_f / 2} = \frac{\dot{r} \rho_s}{G C_f / 2} \quad (\text{C.14})$$

上二式より  $C_f$  を消去する．

$$B_a = \left( \frac{\dot{r} \rho_s}{q G C_{f0} / 2} \right)^{1/(1-k)} \quad (\text{C.15})$$

また，熱化学的ブローイングパラメータ  $B_t$  の定義は以下の通りである．

$$B_t \equiv \frac{u_e \Delta h}{u_{fl} h'_v} \quad (\text{C.16})$$

式 (C.11) と式 (C.13) を用いると，次の式が得られる．

$$\dot{q}_c = \frac{1}{2} G C_{f0} q B_a^{-k} \frac{u_e}{u_{fl}} \Delta h \quad (\text{C.17})$$

さらに式 (C.15) と式 (C.16) を用いる．

$$\dot{q}_c = \left( \frac{1}{2} q G C_{f0} \right)^{1/(1-k)} (\dot{r} \rho_s)^{-k/(1-k)} B_t h'_v \quad (\text{C.18})$$

ブローイングがない場合での乱流境界層における壁面摩擦係数  $C_{f0}$  は，平板乱流境界層における表式 [44] を用いる．

$$\frac{C_{f0}}{2} = 0.03 \left( \frac{Gx}{\mu} \right)^{-0.2} \quad (\text{C.19})$$

式 (C.18) と式 (C.19) より以下の式が得られる．

$$\dot{q}_c = \left( \frac{0.03q}{\mu^{-0.2}} \right)^{1/(1-k)} \frac{B_t h'_v}{\rho_s^{k/(1-k)}} x^{-0.2/(1-k)} G^{0.8/(1-k)} \dot{r}^{-k/(1-k)} \quad (\text{C.20})$$

これが Karabeyoglu による対流熱伝達のモデルである．

次に，定常状態における燃料表面での熱の釣り合いを考える．

$$\dot{q}_c = \lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=-0} + \rho_s \dot{r} h_v \quad (\text{C.21})$$

ここで，輻射熱伝達は無視している．右辺二項目は固体燃料中への熱伝導に関する項であるが，この項を評価するために熱伝導方程式を用いる．

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at} \quad -\infty < y \leq 0 \quad (\text{C.22})$$

$$T = T_S \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$T = T_a \quad \text{at} \quad y \rightarrow -\infty \quad (\text{C.24})$$

定常状態を仮定すると，この熱伝導方程式には以下のような解析解が存在している．

$$T(y) = T_a + (T_S - T_a) \exp\left(\frac{\dot{r}}{\alpha_s} y\right) \quad (\text{C.25})$$

したがって，以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=-0} &= \lambda_s (T_S - T_a) \frac{\dot{r}}{\alpha_s} \\ &= \rho_s c_s (T_S - T_a) \dot{r} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

これを式 (C.21) に代入して整理する．

$$\dot{q}_c = \rho_s \dot{r} \{c_s (T_S - T_a) + h_v\} \quad (\text{C.27})$$



ここで,  $c_s(T_S - T_a) + h_v$  を改めて  $h'_v$  と置き直す .

$$\dot{q}_c = \rho_s \dot{r} h'_v \quad (\text{C.28})$$

このとき実効気化熱  $h'_v$  には, 融解潜熱, 気化潜熱と熱分解に要する熱に加えて, 固体燃料の昇温に必要な熱が含まれていることになる . 上式に式 (C.11) を代入する .

$$\frac{1}{2} G \frac{u_e}{u_{fl}} C_f \Delta h = \rho_s \dot{r} h'_v \quad (\text{C.29})$$

$$\therefore \frac{\dot{r} \rho_s}{G C_f / 2} = \frac{u_e}{u_{fl}} \frac{\Delta h}{h'_v} \quad (\text{C.30})$$

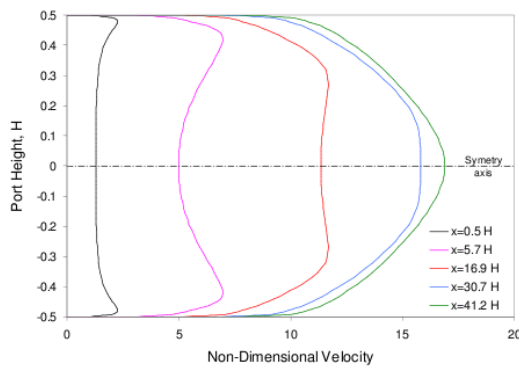
ここで式 (C.14) と式 (C.16) を用いる .

$$B_a = B_t \quad (\text{C.31})$$

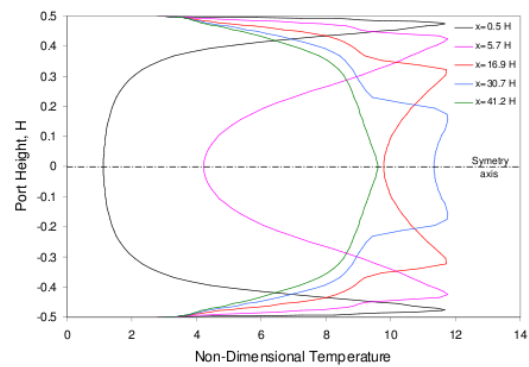
したがって, 定常状態においては Marxman のモデルと同様に, 空力的ブローイングパラメータ  $B_a$  と熱化学的ブローイングパラメータ  $B_t$  は等しくなる .

## C.2 Karabeyoglu モデルの修正

対流熱伝達モデル (C.20) には熱力学的ブローイングパラメータ  $B_t$  が含まれており, さらにこのパラメータ中には火炎位置と境界層端の間の速度比が含まれている . Marxman がこの比の値を見積もる際には, 非燃焼場で見られるような, 通常の色度分布の形状を想定している (式 (2.60), [23]) . また, Marxman がブロッキング効果の式 (C.13) を導出する際にも, 通常の色度分布の形状が想定されている [22] . しかし, 実際の境界層燃焼場での



(a) 無次元速度分布 .  $u_{ref} = 3.4$  [mm/s] .



(b) 無次元温度分布 .  $T_{ref} = 331$  [K] .

図 C.1: Serin らの計算結果 [24] . 時刻 1 s の状態 .

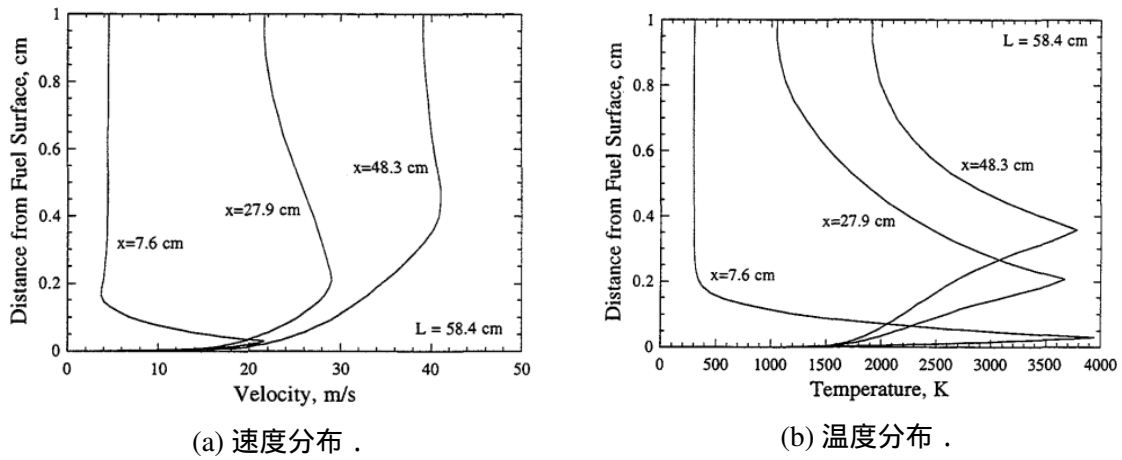


図 C.2: Chiaverini らの計算結果 [25,45] . 時刻 3.5 s の状態 .

速度分布は，図 C.1 や図 C.2 のように火炎位置にて極大値を持つような分布形状をしている．図 C.1 は Serin らの計算結果であり，GOX/HTPB のハイブリッドロケットを対象として商用コード CFD-ACE (二次元圧縮性 NS 式， $k-\varepsilon$  モデル，化学平衡モデル) を用いている [24] . 図 C.2 は Chiaverini らの計算結果であり，GOX/HTPB のハイブリッドロケットを対象として Venkateswaran らが開発したコード (二次元圧縮性 NS 式， $k-\varepsilon$  モデル，有限速度・二段階総括反応モデル) を用いている [25,45] . 温度が最大となる位置が火炎位置であると考えると，いずれの計算結果も火炎位置にて速度が極大値を持つ様子が見取れる．したがって，火炎位置と境界層端の間の速度比  $u_e/u_{fl}$  に関して，Marxman による見積り値は火炎位置での速度の増大を考慮していないために，実際の値よりも大きく見積もられている．ここではこの点の修正に取り組む．

図 C.3 中の (a) に Marxman が想定している従来型の速度プロファイルを，(b) に実際の火炎位置での速度増大を含む速度プロファイルを示す．火炎位置での速度増大の効果を考慮していない値を添字  $nv$  を付けて表記し，速度増大の効果を無視した火炎位置速度の値と実際の値の比を  $a_v$  ( $a_v \geq 1$ ) とする．

$$u_{fl} = a_v (u_{fl})_{nv} \quad (C.32)$$

境界層端速度は主流側の条件で決まる値であるので，これを火炎位置での速度増大を考慮する場合 (b) としない場合 (a) で同じ固定値であるとする，速度比  $u_e/u_{fl}$  は以下のようになる．

$$\frac{u_e}{u_{fl}} = \frac{1}{a_v} \left( \frac{u_e}{u_{fl}} \right)_{nv} \quad (C.33)$$

軸方向速度分布が火炎位置において極大値を持っていたとしても，火炎より下方にのみ着目すれば，軸方向速度分布形状と温度分布形状は相似になっている，つまり，Reynolds

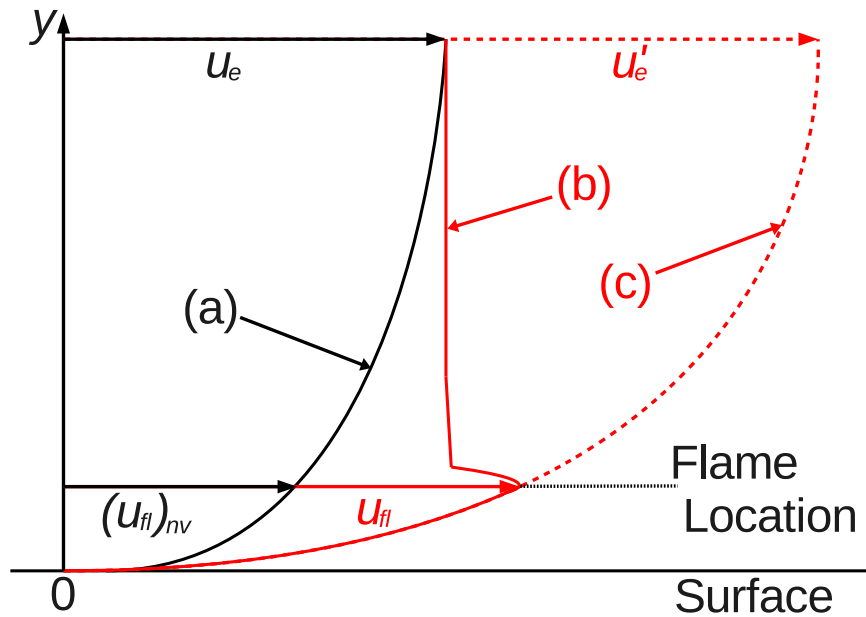


図 C.3: 境界層内速度プロファイル : (a) 従来型速度プロファイル , (b) 火炎位置での速度増大を含む速度プロファイル , (c) 火炎位置で速度  $u_{fl}$  となり , 従来型のプロファイルと相似な , 仮想的な速度プロファイル .

のアナロジが成り立つと仮定すると前章 C.1 の導出過程はここでも概ね適用できる . ただし , ブロッキング効果の式 (C.13) は火炎位置での速度増大を考慮して導出されてはならず , したがって壁面摩擦係数  $C_f$  の評価方法を修正しなければならない . 実際の壁面摩擦係数  $C_f$  には , 壁面からの吹き出しと火炎位置での速度増大の二つの効果が含まれている . ここではこれらの効果は分離できると仮定すると , 壁面からの吹き出しの効果は  $C_f/C_{f_0}$  ( $\approx (C_f/C_{f_0})_{nv}$  と近似する) と , 火炎位置での速度増大の効果は  $C_{f_0}/(C_{f_0})_{nv}$  と表せるので , これらの積から実際の壁面摩擦係数  $C_f$  と吹き出しなし , かつ , 火炎位置での速度増大なしの壁面摩擦係数 ( $C_{f_0}$ ) の比は次のように表せる .

$$\frac{C_f}{(C_{f_0})_{nv}} = \left( \frac{C_f}{C_{f_0}} \right)_{nv} \frac{C_{f_0}}{(C_{f_0})_{nv}} \tag{C.34}$$

壁面からの吹き出しの効果は  $(C_f/C_{f_0})_{nv}$  は式 (C.13) で評価できるので , 火炎位置での速度増大の効果  $C_{f_0}/(C_{f_0})_{nv}$  の評価方法を検討する . ここで , 平板乱流境界層での壁面摩擦係数の表式 (C.19) に注目する . この式を書き直す .

$$\frac{C_{f_0}}{2} = 0.03 \left( \frac{ux}{\nu} \right)^{-0.2} \tag{C.35}$$

$$\therefore \tau_S = 0.03 \left( \frac{ux}{\nu} \right)^{-0.2} \rho u^2 \quad (\text{C.36})$$

$$= 0.03 \left( \frac{x}{\nu} \right)^{-0.2} \rho u^{1.8} \quad (\text{C.37})$$

ここで上式中のパラメータである位置  $x$  , 密度  $\rho$  と動粘性係数  $\nu$  は固定値であると考える.

$$\tau_S \propto u^{1.8} \quad (\text{C.38})$$

この関係が火炎位置における速度増大がある場合 (b) の壁面摩擦係数やない場合 (a) の壁面摩擦係数でも成り立つと仮定する. また, 火炎位置で速度  $u_{fl}$  となり, 従来型のプロファイル (a) と相似な速度プロファイル (c) を考えると, その境界層端速度  $u'_e$  は以下のようになる.

$$u'_e = a_v (u_e)_{nv} \quad (\text{C.39})$$

火炎位置での速度増大を考慮した場合 (b) においては, 壁面近傍の速度分布は境界層端の速度よりもむしろ火炎位置での速度に左右されると考えられるので, その火炎位置速度から想定される仮想的な速度プロファイル (c) の境界層端速度により壁面摩擦係数が求まると仮定する. これらの仮定の下, 式 (C.38) と式 (C.39) を用いる.

$$\tau_S = a_v^{1.8} (\tau_S)_{nv} \quad (\text{C.40})$$

火炎位置における速度増大がある場合 (b), ない場合 (a) とともに無次元化の基準は揃える必要があるので, どちらも主流の動圧で無次元化する.

$$\frac{\tau_S}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} = a_v^{1.8} \frac{(\tau_S)_{nv}}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} \quad (\text{C.41})$$

$$\therefore C_{f0} = a_v^{1.8} (C_{f0})_{nv} \quad (\text{C.42})$$

これと式 (C.13) および式 (C.34) を用いる.

$$\frac{C_f}{(C_{f0})_{nv}} = q(B_a)_{nv}^{-k} a_v^{1.8} \quad (\text{C.43})$$

この式を式 (C.11) に代入する.

$$\dot{q}_c = \frac{1}{2} G (C_{f0})_{nv} q (B_a)_{nv}^{-k} a_v^{1.8} \frac{u_e}{u_{fl}} \Delta h \quad (\text{C.44})$$

ここで式 (C.16) を用いると以下のようになる.

$$\dot{q}_c = \frac{1}{2} G (C_{f0})_{nv} q (B_a)_{nv}^{-k} a_v^{1.8} B_t h'_v \quad (\text{C.45})$$

式 (C.15) と式 (C.19) を用いて整理する.

$$\dot{q}_c = a_v^{1.8} \left( \frac{0.03q}{\mu^{-0.2}} \right)^{1/(1-k)} \frac{B_t h'_v}{\rho_s^{k/(1-k)}} x^{-0.2/(1-k)} G^{0.8/(1-k)} \dot{r}^{-k/(1-k)} \quad (\text{C.46})$$

ここで，式 (C.16) と式 (C.33) より次の式が得られる．

$$B_t = \frac{1}{a_v} (B_t)_{nv} \quad (\text{C.47})$$

対流熱流束の式は最終的に以下ようになる．

$$\dot{q}_c = a_v^{0.8} \left( \frac{0.03q}{\mu^{-0.2}} \right)^{1/(1-k)} \frac{(B_t)_{nv} h'_v}{\rho_s^{k/(1-k)} x^{-0.2/(1-k)} G^{0.8/(1-k)} \dot{r}^{-k/(1-k)}} \quad (\text{C.48})$$

修正前の対流熱伝達モデル (C.20) を  $(\dot{q}_c)_{original}$  とおく．

$$\dot{q}_c = a_v^{0.8} (\dot{q}_c)_{original} \quad (\text{C.49})$$

ここで  $a_v \geq 1$  であるので，対流熱流束は火炎位置での軸方向速度の増大を受けて増加することとなる．また，火炎位置での速度増大を考慮しない場合，つまり  $a_v = 1$  の場合，この式は修正前の対流熱流束の式に帰着する．

次に， $a_v$  の取り得る範囲について検討する．ハイブリッドロケット燃焼器内の流れ場に関する数値シミュレーションの結果 [24,25] を見てみると，速度比  $u_e/u_{fl}$  の値は表 C.1 のようになる．Marxman らが理論的に見積もった値である  $(u_{fl}/u_e)_{nv} = 0.56$  (つまり， $(u_e/u_{fl})_{nv} \approx 1.8$ ) [23] を用いて，式 (C.33) により見積もった  $a_v$  の値を表 C.1 に示す． $a_v$  の値は燃焼器前方で大きな値となり，後流に行くにつれて単調に減少する様子が見取れる．これらの数値計算の結果においては， $a_v$  の値は概ね  $1 \leq a_v \leq 10$  の範囲に収まっている．

表 C.1: 速度比  $u_e/u_{fl}$  およびパラメータ  $a_v$  の値．

Serin らの計算結果 [24]		
無次元位置 $x/H[-]^*$	速度比 $u_e/u_{fl}[-]$	パラメータ $a_v[-]$
0.5	0.58	3.1
5.7	0.72	2.5
16.9	0.97	1.9
30.7	1.0	1.8
Chiaverini らの計算結果 [25]		
位置 $x[\text{cm}]$	速度比 $u_e/u_{fl}[-]$	パラメータ $a_v[-]$
7.6	0.21	8.6
27.9	0.74	2.4
48.3	0.95	1.9

\* 燃料ダクトの高さ  $H = 12.9[\text{mm}]$  ．

## 参考文献

- [1] Dan Linehan. *SpaceShipOne An Illustrated History*. Zenith Press, 2008.
- [2] Virgin Galactic ホームページ. <http://www.virgingalactic.com/>.
- [3] Saburo Yuasa, Osamu Shimada, Tohru Imamura, Takashi Tamura, and Kengo Yamamoto. A Technique for Improving the Performance of Hybrid Rocket Engines. In *35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 1999. AIAA 99-2322.
- [4] M. A. Karabeyoglu, B. J. Cantwell, and D. Altman. Development and Testing of Paraffin-Based Hybrid Rocket Fuels. In *37th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2001. AIAA 2001-4503.
- [5] 船見祐揮, 嶋田徹. ハイブリッドロケット内部弾道特性評価技術の発展経緯と課題. 平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム, 2011, STCP-2010-039.
- [6] Mikiro Motoe and Toru Shimada. Large Eddy Simulation of Swirling Combustion Flow in a Modeled Hybrid Rocket with Wall Fuel Blowing. In *49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, 2013. AIAA 2013-3644.
- [7] Takaya Koda, Yousuke Ogino, and Keisuke Sawada. Flowfield Calculation Coupled with Fuel Surface Regression in Combustion Chamber for Swirling-Oxidizer-Type Hybrid Rocket Engine. In *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2013. AIAA 2013-0715.
- [8] K. M. Akyuzulu, K. Nguyen, J. P. Arves, and H. S. Jones. A Parametric Study of Flame Propagation in Hybrid Rocket Motors. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 1998. AIAA 98-3189.
- [9] K. Akyuzulu, R. Kagoo, and A. Antoniou. A Physics Based Mathematical Model to Predict the Regression Rate in an Ablating Hybrid Rocket Solid Fuel. In *37th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2001. AIAA 2001-3242.
- [10] K. M. Akyuzulu, A. Antoniou, and M. W. Martin. Determination of Regression Rate in an Ablating Hybrid Rocket Solid Fuel Using a Physics Based Comprehensive Mathematical Model. In *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2002. AIAA 2002-3577.

- [11] Antonis Antoniou and Kazim M. Akyuzulu. A Physics Based Comprehensive Mathematical Model to Predict Motor Performance in Hybrid Rocket Propulsion Systems. In *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2005. AIAA 2005-3541.
- [12] Marius Stoia-Djeska and Florin Mingireanu. A Computational Fluid Dynamics Based Stability Analysis for Hybrid Rocket Motor Combustion. In *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2010. AIAA 2010-3909.
- [13] 白石 紀子 , 湯浅 三郎. 局所燃料後退速度に基づく酸化剤流旋回型ハイブリッドロケットエンジン性能パラメータの時刻変化予測手法について. *日本航空宇宙学会論文集*, 61(3):71–78, 2013.
- [14] Arif Karabeyoglu. Combustion Instability and Transient Behavior in Hybrid Rocket Motors. In Martin J. Chiaverini and Kenneth K. Kuo, editors, *Fundamentals of Hybrid Rocket Combustion and Propulsion*, volume 218 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*, pages 351–411. AIAA, 2007.
- [15] Forman A. Williams. *Combustion Theory*, pages 73–76. The Benjamin/Cummings Publishing Company, second edition, 1985.
- [16] Sanford Gordon and Bonnie J. McBride. Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Composition and Applications I. Analysis. NASA Reference Publication 1311, 1994.
- [17] Yasuhiro Wada and Meng-Sing Liou. A Flux Splitting Scheme With High-Resolution and Robustness for Discontinuities. NASA Technical Memorandum 106452, 1994.
- [18] Bram Van Leer. Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. *Journal of Computational Physics*, 23:276–299, 1977.
- [19] Bram Van Leer. Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method. *Journal of Computational Physics*, 32:101–136, 1979.
- [20] W. Kyle Anderson, James L. Thomas, and Bram Van Leer. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. *AIAA Journal*, 24(9):1453–1460, 1986.
- [21] Sigal Gottlieb and Chi-Wang Shu. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, 67(221):73–85, 1998.
- [22] Gerald A. Marxman. Combustion in the Turbulent Boundary Layer on a Vaporizing Surface. In *Tenth Symposium (International) on Combustion*, pages 1337–1349, 1964.
- [23] G. A. Marxman, C. E. Wooldridge, and R. J. Muzzy. Fundamentals of Hybrid Boundary Layer Combustion. In *Heterogeneous Combustion Conference*, 1963. AIAA 63-505.

- [24] Nadir Serin and Yalcin A. Gogus. Navier-Stokes Investigation on Flow Field of HTPB/O<sub>2</sub> Hybrid Motor and Regression Rate Evaluation. In *39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2003. AIAA 2003-4462.
- [25] Martin J. Chiaverini, Kenneth K. Kuo, Arie Peretz, and George C. Harting. Regression Rate and Heat Transfer Correlations for HTPB/GOX Combustion in a Hybrid Rocket Motor. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 1998. AIAA 98-3185.
- [26] B. Leckner. Spectral and Total Emissivity of Water Vapor and Carbon Dioxide. *Combustion and Flame*, 19:33–48, 1972.
- [27] Michael F. Modest. *Radiative Heat Transfer*, pages 362–367. Academic Press, third edition, 2013.
- [28] Martin J. Chiaverini, Kenneth K. Kuo, Arie Peretz, and George C. Harting. Regression-Rate and Heat-Transfer Correlations for Hybrid Rocket Combustion. *Journal of Propulsion and Power*, 17(1):99–110, 2001.
- [29] L. D. Strand, M. D. Jones, R. L. Ray, and N. S. Cohen. Characterization of Hybrid Rocket Internal Heat Flux and HTPB Fuel Pyrolysis. In *30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, 1994. AIAA 94-2876.
- [30] P. J. Foster and I. A. McGrath. Prediction of the Emissivity of Large Hydrocarbon Flames from the Mie Theory. *Combustion and Flame*, 4(2):191–192, 1960.
- [31] 新岡 嵩 , 河野 通方 , 佐藤 順一. 燃烧現象の基礎, pages 281–291. オーム社, 2001.
- [32] Guy Lengelle. Solid-Fuel Pyrolysis Phenomena and Regression Rate, Part 1: Mechanisms. In Martin J. Chiaverini and Kenneth K. Kuo, editors, *Fundamentals of Hybrid Rocket Combustion and Propulsion*, volume 218 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*, pages 127–165. AIAA, 2007.
- [33] M. Arif Karabeyglu, Brian J. Cantwell, and Jose Stevens. Evaluation of Homologous Series of Normal-Alkanes as Hybrid Rocket Fuels. In *41th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2005. AIAA 2005-3908.
- [34] Dale L. Compton, Warren Winovich, and Roy M. Wakefield. Measurements of the Effective Heats of Ablation of Teflon and Polyethylene at Convective Heating Rates from 25 to 420 btu/ft<sup>2</sup> sec. NASA Technical Note D-1332, 1962.
- [35] M. Arif Karabeyoglu, Brian J. Cantwell, and Greg Zilliac. Development of Scalable Space-Time Averaged Regression Rate Expressions for Hybrid Rockets. *Journal of Propulsion and Power*, 23(4):737–747, 2007.



- [36] Robert Shanks and M. Keith Hudson. The Design and Control of a Labscale Hybrid Rocket Facility for Spectroscopy Studies. In *30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, 1994. AIAA 94-3016.
- [37] George P. Sutton and Oscar Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*, pages 449–452. John Wiley & Sons, eighth edition, 2010.
- [38] Yong Li and Michael Overcash. Unit Process Life Cycle Inventory (LCI) Heuristic 125: Heat of Formation of Polymers. North Carolina State University, 2005.
- [39] PolyInfo. National Institute for Materials Sciences. [http://polymer.nims.go.jp/index\\_en.html](http://polymer.nims.go.jp/index_en.html).
- [40] R. E. Lyon and M. L. Janssens. *Polymer Flammability*, pages A–8. U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, DOT/FAA/AR-05/14, 2005.
- [41] 国立天文台 編. 理科年表 平成 18 年版, page 374. 丸善, 2005.
- [42] Naminosuke Kubota. *Propellants and Explosives, Thermochemical Aspects of Combustion*, pages 33–36. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007.
- [43] G. Marxman and M. Gilbert. Turbulent Boundary Layer Combustion in the Hybrid Rocket. In *Ninth Symposium (International) on Combustion*, pages 371–383, 1963.
- [44] Hermann Schlichting. *Boundary-Layer Theory*, pages 637–640. McGraw-Hill, seventh edition, 1955.
- [45] S. Venkateswaran and C. L. Merkle. Size Scale-Up in Hybrid Rocket Motors. In *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1996. AIAA 96-0647.

## 謝辞

宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所で宇宙輸送工学研究系の教授を務め、また、東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻の教授（委嘱）も兼任している嶋田徹先生には本研究を進めるにあたり常日頃から多くの御助言を賜り、様々な場面で御指導をいただきました。本論文は嶋田先生の御支援がなければ完成することはありえず、ここに深く感謝の意を表します。

宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所宇宙輸送工学研究系の北川幸樹助教には、ハイブリッドロケット燃焼実験の専門家としての視点から非常に有益な御意見をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

本学位論文の副査をお引き受けいただいた、東京大学の津江光洋教授、寺本進准教授と姫野武洋准教授、東海大学的那賀川一郎教授には大変有益なご指摘をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所が主催するハイブリッドロケット研究ワーキンググループの研究会において、本研究について議論する機会をいただき、首都大学東京の湯浅三郎客員教授をはじめとする先生方には多くの御助言を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

University of Ulster の Vasily Novozhilov 教授には、燃焼計算について御助言を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

宇宙航空研究開発機構研究開発本部の石向桂一招聘研究員には、公私両面で大変お世話になりました。ここに深く感謝の意を表します。

宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所嶋田研究室の坂本さおり秘書には、研究生活において様々な面で御支援いただきました。ここに深く感謝の意を表します。

本江幹朗氏をはじめとした研究室の諸先輩には、研究生活において非常に多くのアドバイスをいただきました。厚く御礼を申し上げます。

高田智弘君をはじめとした研究室の後輩達、奥野福実夫氏ら総合研究大学院大学の徳留研究室の学生にもお世話になりました。御礼を申し上げます。

最後となりますが、陽に陰にと支えていただいた母をはじめとする家族の皆様に対して、ここに感謝の意を表します。本当にありがとうございました。