論文の内容の要旨

論文題目　Spaces of stability conditions on Calabi-Yau categories associated with quivers

(箙に付随するCalabi-Yau圏の安定性条件の空間について)

氏名　　　池田　暁志

三角圏 $\mathcal{D}$ に対する安定性条件とは, 弦理論における D-ブレーンに対して Douglas の Π 安定性の仕事を動機付けとして Bridgeland ([Bri07]) により導入された概念である. Bridgeland はまた, 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ は複素多様体の構造を持ち, 局所同型写像

$$\pi\colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$$

が存在することを示した. ここで, $K(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ の K-群である.

最も重要な三角圏の例として, 代数多様体上の連接層の導来圏や代数上の加群の導来圏が挙げられる. 安定性条件の空間は, 元の三角圏 $\mathcal{D}$ を調べるための幾何学的方法を与えるので, 導来圏の安定性条件の空間の構造を調べることは重要な問題である.

三角圏の中の重要なクラスとして, Calabi-Yau 三角圏と呼ばれるものがある. 体 k 上の三角圏 $\mathcal{D}$ が Calabi-Yau N (CY_N) 三角圏であるとは, 任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して, 自然なベクトル空間の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, E[N])^*$$

が存在するときを言う. ここで $[N]$ は N シフト関手であり, $*$ は双対 k ベクトル空間を表す. 重要な CY_N 圏の例として, 箙 Q に付随した Ginzburg の CY_N 次数付き微分代数 $\Gamma_N Q$ の有限次元次数付き加群の導来圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{fd}}(\Gamma_N Q)$ がある.

本論文では我々はこのような CY_N 圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{fd}}(\Gamma_N Q)$ のうち, 次のような 2 つのタイプのものの上の安定性条件の空間について考察する. ひとつめは $N=2$ であり Q は連結なループを持たない箙の場合, もう一方は $N \geq 3$ であり Q が A_n-型箙である場合である.

論文の前半部分の Part I では, $N=2$ であり Q が連結なループを持たない箙の場合について考える. もし Q が ADE 型でないとき, 次数付き微分代数 $\Gamma_2 Q$ は preprojective algebra と呼ばれる次数付き代数 $\Pi(Q)$ と擬同型となる. したがって, $\Gamma_2 Q$ 上の有限次元次数付き微分加群の導来圏は, preprojective algebra $\Pi(Q)$ 上の冪零加群の有界導来圏 $\mathcal{D}_Q$ に三角圏同値である. したがって, 我々は CY_2 圏 $\mathcal{D}_Q$ 上の安定性条件の空間について考察する.

幾何学的な背景を持つ CY_2 三角圏 $\mathcal{D}$ 上の安定性条件の空間については [Bri08, Bri09, IUU10, Oka06] などで研究がなされている. 三角圏 $\mathcal{D}$ が 代数的 K3 曲面上の連接層の有界導来圏であるとき, あるいはクライ

ン特異点の特異点解消の例外因子上の連接層の導来圏のある特別な部分三角圏として得られる CY_2 圏の時は, 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ の中の特別な連結成分が, ルート系の性質から決まる $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}),\mathbb{C})$ の中のある開集合上の被覆空間となることが [Bri08, Bri09, Tho06] で示されている. また, 被覆変換群がどのように $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ に作用するかも, 圏 $\mathcal{D}$ の自己圏同値群を用いて記述が与えられている. さらにこのような $\mathcal{D}$ に対して, $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ の連結性や単連結性の問題が [IUU10, Oka06, ST01] などで部分的に解かれている.

ここでは先行的な仕事である [Bri08, Bri09, Tho06] を拡張する形で, 特別な連結成分 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_Q) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_Q)$ を Q に付随する Kac-Moody Lie 環のルート系の言葉を用いて記述し, 空間 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_Q)$ がルート系の性質から決まるある開集合 $X_{\mathrm{reg}} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}_Q),\mathbb{C})$ 上の被覆空間となることを示す. さらに, 被覆変換群と $\mathcal{D}_Q$ の自己圏同値群の関係性について説明する. この結果は, ADE 型箙, あるいはアフィン ADE 型箙に対する [Bri09, Tho06] の結果を全てのループを持たない箙に拡張するものである.

後半部の Part II では, 我々は $N \geq 3$ であり Q が A_n 型箙である場合を考察する.. 論文 [ST01, Tho06] の中で Seidel と Thomas は, A_n 型特異点のミルナーファイバーの中で, 消滅サイクルにより構成されるラグランジアン部分多様体の導来深谷圏のミラーとして, CY_N 三角圏 $\mathcal{D}_n^N$ を考察した. この圏は, 先ほど述べた Ginzburg の次数付き微分代数を A_n 型箙に対して考えることで, その上の有限次元次数付き微分加群の導来圏としても実現することが出来る. Part II の主題は, この圏 $\mathcal{D}_n^N$ に対する安定性条件の空間の考察である.

最近, Brideland と Smith は単純零点を持つ有理型 2 次微分のモジュライ空間が, 曲面の三角形分割に付随した Ginzburg の次数付き微分代数上の有限次元次数付き微分加群の導来圏として与えられる CY_3 三角圏の安定性条件の空間と同一視できることを証明した. 2 次微分から安定性条件を構成するアイディアは, 物理学者 Gaiotto-Moore-Neitzke の仕事 [GMN] に由来するものである. 論文 [BS] の中で, Bridgeland と Smith は 2 次微分のモジュライ空間に対する数学的な基礎確立し, 仕事 [GMN] の数学的な理解を与えた.

Part II では, 我々は $\mathcal{D}_n^N$ に対する安定性条件の空間を, Bridgeland と Smith の理論のある特別な場合への一般化を用いることで考察する. [BS] における仮定, 単純零点を $(N-2)$ 位の零点, 三角形分割を N 角形分割に一般化することで, 我々は一番簡単な場合, 境界に点を持つ円盤の N 角形の場合にのみ CY_3 三角圏についての結果を CY_N 三角圏に拡張することができる. 結果として, 我々は特別な連結成分 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_n^N) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_n^N)$ が多項式 $p_n(z) = z^{n+1} + u_1 z^{n-1} + \cdots + u_n \, (u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C})$ で単純零点を持つもの全体の空間の普遍被覆空間と同型になることを示す. さらに, 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_n^N)$ の中心電荷に対して, Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の $p_n(z)^{N-2} dz^{\otimes 2}$ という形の 2 次微分の周期を用いて記述を与える.

参考文献

[Bri07] T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):317–345, 2007, arXiv:math/0212237.

[Bri08] T. Bridgeland. Stability conditions on $K3$ surfaces. *Duke Math. J.*, 141(2):241–291, 2008, arXiv:math/0307164.

[Bri09] T. Bridgeland. Stability conditions and Kleinian singularities. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21):4142–4157, 2009, arXiv:math/0508257.

[BS] T. Bridgeland and I. Smith. Quadratic differentials as stability conditions. arXiv:1302.7030.

[GMN] D. Gaiotto, G. Moore, and A. Neitzke. Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation. arXiv:0907.3987.

[IUU10] A. Ishii, K. Ueda, and H. Uehara. Stability conditions on A_n-singularities. *J. Differential Geom.*, 84(1):87–126, 2010, arXiv:math/0609551.

[Oka06] S. Okada. On stability manifolds of Calabi-Yau surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 58743, 16 pages, 2006, arXiv:math/0608361.

[ST01] P. Seidel and R. P. Thomas. Braid group actions on derived categories of coherent sheaves. *Duke Math. J.*, 108(1):37–108, 2001, arXiv:math/0001043.

[Tho06] R. P. Thomas. Stability conditions and the braid group. *Comm. Anal. Geom.*, 14(1):135–161, 2006, arXiv:math/0212214.