論文審査の結果の要旨

氏名　池 田 曉 志

論文題目　Spaces of stability conditions on Calabi-Yau categories associated with quivers
(箙(えびら)に付随する Calabi-Yau 圏の安定性条件の空間について)

三角圏に対する安定性条件とは、弦理論におけるＤブレーンの安定性を動機とし、モジュライ理論におけるベクトル束の安定性条件を特別な場合として含む概念で、Bridgeland により導入された。彼は「安定性条件の空間」が複素多様体の構造を持ち，K-群 (Grothendieck 群) の複素化と局所同相であることを証明したが、その大域的な構造は全く謎であった。最も重要な三角圏の例として、代数多様体上の連接層の導来圏や代数上の加群の導来圏が挙げられる．安定性条件の空間の構造を明らかにすることは、元の三角圏 $\mathcal{D}$ について非常に詳細な幾何学的情報をもたらすという点で、極めて重要な意味を持つ．

三角圏の中の重要なクラスとして、Calabi-Yau 三角圏と呼ばれるものがある．これは Calabi-Yau 多様体が持つ圏論的性質を抽象化した概念である。体 k 上の三角圏 $\mathcal{D}$ が Calabi-Yau N 三角圏 (CY_N-category) であるとは、任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して, 自然なベクトル空間の同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, E[N])^*$ が存在するときを言う．ここで $[N] = T \circ \cdots \circ T$ はシフト関手の N 回行うことを表し, $*$ は双対 k ベクトル空間を表す．重要な CY_N 圏の例として、箙 (えびら, quiver) Q に付随する Ginzburg 代数 $\Gamma_N Q$ の有限次元次数付き加群の導来圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{fd}}(\Gamma_N Q)$ がある．池田氏は博士論文においてこれらの安定性条件の空間について考察した．

論文前半部分の Part I では、N=2 かつ Q が連結なループを持たない箙の場合について考察されている．特別な連結成分 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_Q) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_Q)$ についての先行する研究は、Bridgeland, Thomas, Ishii-Ueda-Uehara, Okada らにより ADE 型箙、あるいはアフィン ADE 型箙に対してなされていたが、これらの方法は、特異点解消の例外因子など幾何学的な背景を持つ CY_2 三角圏特有の方法を用いており、そのまま一般化を考えることは困難であった。池田氏は、Q が ADE 型でないとき、Ginzburg 代数 $\Gamma_2 Q$ は preprojective algebra $\Pi(Q)$ と擬同型であり、導来圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{fd}}(\Gamma_2 Q)$ は, $\Pi(Q)$ 上の冪零加群の有界導来圏 $\mathcal{D}_Q$ に三角圏同値となることに着目した。従って、安定性条件の空間は、後者のものを調べれば良いことになる。彼はまず安定性条件を一般の Kac-Moody Lie 環のルート系の言葉を用いて記述し, 空間 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_Q)$ がルート系の性質から決まるある開集合 $X_{\mathrm{reg}} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}_Q), \mathbb{C})$ 上の被覆空間となることを示した．さらに、被覆変換群と $\mathcal{D}_Q$ の自己圏同値群の関係を明らかにした。これらは、従来の結果を一気に任意のループを持たない箙に対して拡張するものである。

論文後半部分の Part II では、$N \geq 3$ かつ Q が A_n 型箙の場合が考察されている．最近、Bridgeland と Smith は、物理学者 Gaiotto-Moore-Neitzke らのアイデアに触発されて、単純零点を持つ有理型 2 次微分のモジュライ空間が、曲面の三角形分割に付随した Ginzburg の次数付

き微分代数上の有限次元次数付き微分加群の導来圏として与えられる CY_3 三角圏の安定性条件の空間と同一視できることを証明した．池田氏は、彼らの用いた単純零点という仮定を $(N-2)$ 位の零点に、また三角形分割を N 角形分割に一般化することで, CY_3 三角圏についての結果を CY_N 三角圏に拡張した。その結果、境界に点を持つ円盤の N 角形の場合に、特別な連結成分 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_n^N) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_n^N)$ が多項式 $p_n(z) = z^{n+1} + u_1 z^{n-1} + \cdots + u_n\,(u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C})$ で単純零点を持つもの全体の空間の普遍被覆空間と同型になることを示した．さらに、安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}^\circ(\mathcal{D}_n^N)$ の中心電荷が、Riemann 球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の $p_n(z)^{N-2} dz^{\otimes 2}$ という形の 2 次微分の周期を用いて具体的に表せることを証明した．

池田氏の博士論文は、安定性条件の空間の構造について、２つの方向で新しい知見をもたらしたといえる。すなわち、(i) 従来知られていた有限・アフィン型を超え、loop を持たない一般の箙に附随する Calabi-Yau N=2 圏の安定性の空間の構造を決定し、また (ii) A_n 型の箙に附随する Calabi-Yau N 圏について、安定性条件の基本データである中心電荷が、リーマン球面上のある 2 次微分の周期積分として非常に具体的に、かつ、すべての N について統一的に記述されることを証明した。更に、cluster tilting 理論と安定性条件との関係を明らかにした。池田氏の研究は、従来の方法では手が付かなかったクラスの三角圏について初めてその安定性条件の空間の構造を明らかにしただけでなく、今後のさらなる一般化のための手法を開発したという点でも画期的である。よって、論文提出者 池田曉志 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。