論文の内容の要旨

論文題目

Mathematical and Numerical Analysis for Incompressible Fluid Equations under Friction Boundary Conditions

（摩擦型境界条件下での非圧縮流体の方程式に対する数学解析と数値解析）

氏名

柏原 崇人

流体の数値シミュレーションは理工医学の諸分野で幅広く利用されており，Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題が数理モデルとして採用されることが多い．解を求めるには領域の境界で何らかの境界条件を与えねばならないが，理論解析では考察の対象を Dirichlet 境界条件に限ることが珍しくない．境界が固定壁の場合等であれば，これが物理的にも正しい境界条件であることが受け入れられている一方で，現実の複雑な現象を数理モデル化する際には，粘着境界条件以外の非標準的な境界条件を考えたい場合がある．本論文では，そのような非標準的な境界条件として，摩擦型滑り境界条件 (slip boundary condition of friction type) と摩擦型漏れ境界条件 (leak boundary condition of friction type) を対象に，数学解析と数値解析の研究を行う．

第 1 章では，次の定常 Stokes 方程式の境界値問題を考える：

$$
\begin{cases}
-\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \quad (1a)\\
u = 0 & \text{on } \Gamma_0, \quad (1b)\\
u_n = 0, \quad |\sigma_\tau| \le g, \quad \sigma_\tau \cdot u_\tau + g|u_\tau| = 0 & \text{on } \Gamma_1. \quad (1c)
\end{cases}
$$

ここで，ν, u, p, f はそれぞれ粘性係数・流速・圧力・外力である．Ω は2次元多角形領域で，境界 $\partial\Omega$ のうちある1辺を Γ_1 として，Γ_1 で摩擦型滑り境界条件 (1c) を課し，残りの境界 $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_1$ では斉次 Dirichlet 境界条件 (1b) を課している．n は境界上での外向き単位法線ベクトルを表し，ベクトル A に対してその法成分と接成分をそれぞれ $A_n = A \cdot n$, $A_\tau = A - A_n n$ と書く．$\sigma = -pI + \nu(\nabla u + (\nabla u)^T)$ は応力テンソルで，$\sigma_\tau = (\sigma n)_\tau$ は応力ベクトルの接成分（接線応力）である．g は摩擦係数で，流体の滑りが発生する（つまり $u_\tau \neq 0$ となる）のに必要な接線応力の閾値を表す．実際，(1c) の第3式より $|\sigma_\tau| < g$ ならば滑りは起こらないが，$|\sigma_\tau| = g$ ならば滑りが発生し得る．

境界値問題 (1a)–(1c) の弱形式は，$u \in V = \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0, v_n = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$ と $p \in Q = L^2_0(\Omega)$ で次の変分不等式問題を満たすものを求める問題として定式化される：

$$\begin{cases} a(u, v-u) + b(v-u, p) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) & \forall v \in V, \\ b(u,q) = 0 & \forall q \in Q. \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$a(u,v) = \frac{\nu}{2}\int_\Omega (\nabla u + (\nabla u)^T) : (\nabla v + (\nabla v)^T)\, dx$, $b(v,q) = -\int_\Omega \operatorname{div} v\, q\, dx$ は双線形形式であり，摩擦型滑り境界条件から由来する非線形項 $j(v)$ は重み付き $L^1(\Gamma_1)$ ノルム

$$j(v) = \int_{\Gamma_1} g|v_\tau|\, ds \tag{3}$$

で定義される．

本章では，変分不等式 (2) に対して，有限要素法による離散化問題を提案する（P2/P1 有限要素を用いる）．離散化問題において，非線形項 (3) をそのまま用いるのではなく，適当な数値積分近似を導入する点に特色があり，これにより変分不等式 (2) を同値な変分方程式問題に書き換えることができ，さらに離散化問題の解が (1c) の第3式の離散版を満たすことも示される．

本章の主結果について述べる．理論の面からは，離散化問題の解が一意に存在すること（定理 1.4.1）と，有限要素法における三角形分割の幅を0にする極限において離散化問題の解が (2) の解に収束すること（1.4.2 節）を証明している．一方で，数値計算においては変分不等式を直接解くことは難しいので，上で示唆した同値な変分方程式に注目する．この変分方程式の解は Uzawa 法というアルゴリズムで得られることを示し（定理 1.4.4），数値解が計算できることを保証している．第1.5節では実際に数値計算した例を提示し，理論的結果と合致することを述べる．

第 2 章では，定常 Stokes 方程式の摩擦型漏れ境界条件問題を考える：

$$
\begin{cases}
-\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, & \text{(4a)} \\
u = 0 & \text{on } \Gamma_0, & \text{(4b)} \\
u_\tau = 0, \quad |\sigma_n| \le g, \quad \sigma_n u_n + g|u_n| = 0 & \text{on } \Gamma_1. & \text{(4c)}
\end{cases}
$$

摩擦型漏れ境界条件 (4c) は，摩擦型滑り境界条件 (1c) と比べると，法成分と接成分の役割が入れかわっているだけであるが，その取り扱いは自明ではない．実際，境界上の流速の法成分は接成分と異なり非圧縮条件と相互作用がある．さらに，σ_n は σ_τ と異なり圧力に依存するので，Dirichlet 境界条件や滑り境界条件では無視される圧力の加法定数を考慮する必要がある．このような場合でも，前章のような有限要素近似がうまく構成できることを示したのが本章の結果である．

本章では，Ω としては 2 次元多角形領域または 3 次元多面体領域を考え，有限要素法としては inf-sup 条件を満たす P1b/P1 要素および P2/P1 要素に加えて，圧力安定化 P1/P1 要素も考察する．非線形項である重み付き L^1 ノルムに対しては前章と同様に適当な数値積分公式を導入する．理論的な主結果は，離散解の存在と一意性（定理 2.3.2）および離散解と厳密解の誤差評価（定理 2.3.4）である．数値計算の観点からは，反復回数が多くなりがちな Uzawa 法の代わりに，最適制御の分野で利用されている Active/inactive 集合の概念を用いた新しいアルゴリズムを提案し，数値例において反復回数を 3 分の 1 程度に押さえることに成功した．第 2.5 節では実際に数値計算した例を提示し，理論的結果と合致することを述べる．

第 3 章では，非定常 Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega,
\end{cases}
$$

（u_0 は初期流速）を滑らかな有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^d\,(d=2,3)$ で考える．$\partial\Omega = \Gamma_0\cup\Gamma_1$, $\overline{\Gamma}_0\cap\overline{\Gamma}_1=\emptyset$ となっているものとし，$\Gamma_0\times(0,T)$ 上では斉次 Dirichlet 境界条件を課す．$\Gamma_1\times(0,T)$ 上では，摩擦型滑り境界条件 (1c) もしくは摩擦型漏れ境界条件 (4c) を課す．このとき摩擦係数 $g>0$ は時空間に依存する関数であるものとする．

本章の目的は，この初期値境界値問題の解の存在と一意性を示すことである．考える解のクラスは，Ladyzhenskaya の強解，つまり

$$
\begin{cases}
u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^d), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)^d), \\
p\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{cases}
$$

を満たすものを考察する．

解の存在の証明はGalerkin法にもとづいて行うが，元々の問題は放物型の変分不等式で表されており，そのままではGalerkin法が使えない．そこで，絶対値関数を滑らかな近似凸関数で近似した正則化変分不等式を考える．正則化変分不等式は変分方程式に変形できるので，その変分方程式に対してGalerkin法を適用し，正則化パラメータに依存しないアプリオリ評価を得ることが鍵となる（命題3.3.4および命題3.4.1）．強解を考えるため，初期値u_0が$t=0$で摩擦型滑り（漏れ）境界条件を満たすという適合性の条件が必要であり，変分不等式の正則化と適合性条件がうまく組み合わされるような工夫が必要である．

摩擦型滑り境界条件の場合は，2次元のとき解は時間大域的に存在し，3次元のとき解は時間局所的に存在する（データのノルムが十分小さければ時間大域的に存在する）．一方で，摩擦型漏れ境界条件の場合は，2次元のときでも（当然3次元のときも）時間局所的な解の存在しか得られず，しかも「初期流速の漏れ」$\|u_{0n}\|_{L^2(\Gamma_1)}$が十分小さいという仮定が必要である．この違いは，アプリオリ評価において$\int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot u\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} u_n|u|^2\,ds$という項を処理するとき，漏れ境界条件ではこの項が0にならないという難しさが生じることに起因している．