

## 論文審査の結果の要旨

氏名 柏原 崇人

本学位論文は、

- 摩擦型滑り境界条件の下でのストークス方程式の有限要素解析 [Jpn. J. Ind. Appl. Math. 30 (2013) 227-261 に掲載済み (単著) ]
- 第2章 摩擦型漏れ境界条件の下でのストークス方程式の有限要素解析 [SIAM J. Numer. Anal. 51 (2013) 2448-2469 に掲載済み (単著) ]
- 第3章 摩擦型滑り・漏れ境界条件の下での非定常ナビエ・ストークス方程式の可解性 [J. Differential Equations 254 (2013) 756-778 に掲載済み (単著) ]

の3章と、参考論文

- Remarks on numerical integration of  $L^1$  norm [JSIAM Letters Vol.5 (2013) 5-8 に掲載済み (共著) ]

からなり、非線形境界条件の下での非圧縮性粘性流体の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式の数学解析および数値解析に寄与をなすものである。

摩擦型境界条件は、非圧縮性粘性流体の壁面応力が閾値に達した際に、壁面に沿った、あるいは、壁面を通過する流動が起こる非線形の現象を記述するために導入された数理モデルである。もともとは、固体力学における弾性体の摩擦条件のアナロジーとして、1993年に藤田宏教授によって、数学的な興味から導入されたものであるが、現実の複雑な流体现象を数理モデル化し、解析するためには、このような非線形の境界条件が有用であり、実際に、砂浜における漏出油の吸着、脳脊髄液の流動のシミュレーションなどに応用され、成功をおさめている。一方で、ナビエ・ストークス方程式に対する数学的研究は、ディリクレ境界条件を課した場合に集中しており、摩擦型境界条件下での数学的な結果としては、定常ストークス問題の弱解の一意存在と正則性が知られているのみであった。また、数値解析的な立場からの研究もほとんどなされていなかった。

第1章と第2章では、時間定常のストークス問題に対する有限要素近似を研究している。この問題を素直に定式化すると、変分不等式の形を取る。安定性解析や誤差解析は、この変分不等式の形が扱いやすいが、実際に計算する際には、変分等式に変形する必要がある。微分方程式のレベルでは、この2つの問題は確かに同値であるが、実は、有限要素近似を適切に導入しないと、離散化

問題のレベルでは必ずしも同値にならない。この事実は、本論文で（弾性体の摩擦問題を含めても）はじめて指摘されたと言える。さらに、この変分不等式と等式と同値性を保存するような有限要素近似を提案し、安定性解析や誤差解析などの詳細な解析を行っている。有限要素法の誤差解析は、通常、解の正則性に関する仮定のもので行われるが、それだけでは、数値解の挙動を精密に評価することはできない。本論文では、有限要素解に対する様々な仮定の下で、誤差の挙動を具体的に表現しており、従来の誤差解析よりも一段レベルの高い結果を提出していると言える。さらに、本論文では、実際に計算するためのアルゴリズムの設計も行われており、論文で報告されている数値計算で、理論の妥当性や拡張可能性が検討されている。

第3章では、非定常ナビエ・ストークス方程式に、摩擦型境界条件を課した問題の可解性について研究している。境界条件が非線形・非標準なので、ラシアン生成する解析半群の平滑化効果などの、ナビエ・ストークス方程式の解析に役立つ技巧は使えない。また、漏れ条件の場合には、ア・プリオリ評価（エネルギー不等式）も成り立たないので、コンパクト性の議論にも直ちには持ち込めないという、難点がある。しかし、本論文では、これらの点を克服するために、適切な正則化問題を導入し、標準的な境界条件の元でしか使えなかった様々な不等式の改良や、それにかわるもの開発を行い、解析に成功している。摩擦型条件を超えて、今後、非標準的な境界条件を考察する際の基本文献となり得る結果である。

本論文は、個々の結果だけでなく、数値シミュレーション分野への実用性と、純粋な解析理論の端正さが統合されているという観点からも、大変優れたものであり、数理学の論文として大変質の高いものであると言える。実際、解析的な結果は *Journal of Differential Equations*、数値解析の結果は *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*、*SIAM Journal of Numerical Analysis* という、いずれも各分野でステータスの高い雑誌に掲載されている。また、応用家からは、現実問題のシミュレーションで採用されている数理モデルの多くは、実験等で直ちに正当性が保証できるわけではなく、そうであればこそ、数理モデルが数学的に筋の通ったものであるということが保証されていると数理モデルへの信頼度は格段にあがるのが、常に指摘されるが、その意味でも、本論文の成果は、数学そのもののみならず、多様な現実問題への数値解析の応用において重要な基盤となるものであり、高く評価できる。

よって、論文提出者 柏原崇人 は、博士（数理学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。