

論文内容の要旨

論文題目 On contact submanifolds of
the odd dimensional Euclidean spaces
(奇数次元ユークリッド空間の
接触部分多様体について)

氏名 粕谷 直彦

接触構造とは奇数次元多様体 N 上の局所的に最も非可積分な超平面場 η のことである。接触構造 η はそれを定義する大域的な微分 1 形式 α がとれるとき, co-oriented であるという。これは η の法方向が向き付け可能であることを同値である。このとき、接触形式 α の微分 $d\alpha$ は η 上にシンプレクティックベクトル束構造を定める。シンプレクティックベクトル束構造の共形類は、接触形式の取り方によらない。接触多様体 (N, η) の埋め込まれた奇数次元部分多様体 M が η に横断的でかつ、交わり $\xi = TM \cap \eta|_M$ が η のシンプレクティック部分束となっているとき、 (M, ξ) は (N, η) の接触部分多様体と呼ばれ、埋め込み $M \rightarrow N$ は接触埋め込みと呼ばれる。同様にはめ込まれた接触部分多様体 (M, ξ) 、接触はめ込み $M \rightarrow N$ が定義される。

M. Gromov はホモトピー原理 (h -原理) と呼ばれる、偏微分方程式あるいはその一般化である偏微分関係式の形式的解から真の解を構成する方法を定式化した。ホモトピー原理は、はめ込みや等長はめ込みの問題やシンpleクティック幾何の問題など、微分位相幾何学の様々な分野に応用がある。はめ込みに関する Smale-Hirsch 理論は h -原理の典型的な例である。その理論によれば、余次元が正の場合、はめ込みの正則ホモトピー類の分類問題は形式のはめ込み、即ち、接束の間の单射準同型のホモトピー類の分類問題に帰着する。このように微分位相幾何的な問題をよりホモトピー論的な問題に帰着させることができるとき、 h -原理が成り立つという。Gromov は接触幾何の分野に関しても様々な状況で h -原理が成立することを証明した。次の定理はよく知られている。

定理 1 (Gromov) 奇数次元開多様体上の概接触構造全体の集合と接触構造全体の集合とは弱ホモトピー同値である。

ただし、概接触構造とは向き付け可能奇数次元多様体 N^{2n+1} 上の大域的微分 1 形式 α と大域的微分 2 形式 β の組で、微分 $(2n+1)$ 形式 $\alpha \wedge \beta^n$ が N^{2n+1} 上の体積形式を定めるもののことである。接触はめ込み、接触埋め込みについても以下が証明されている。

定理 2 (Gromov) 余次元が正ならば接触はめ込みについて h -原理が成立する。また、余次元が 2 より大ならば接触埋め込みについても h -原理は成立する。

この場合 (M, ξ) から (N, η) への形式的接触はめ込みとは、 TM から TN への单射準同型であって、 η に横断的であり、 ξ を η のシンプレクティック部分束へ送るもののことである。形式的接触埋め込みとは、底写像が埋め込みである形式的接触はめ込みであって、その埋め込みの微分と单射準同型としてホモトピックであるもののことである。

この論文の目的は上の 2 つの h -原理を利用して、奇数次元ユークリッド空間の接触部分多様体を調べることである。具体的には以下の 3 つの問題を考える。

- (1) 余次元 2 接触埋め込みの存在に関する自明でない障害は存在するか。
- (2) \mathbb{R}^{2n+1} 上の接触構造を固定しない場合に、余次元 2 接触部分多様体として実現可能なものを決定せよ。
- (3) $(2n+1)$ 次元接触多様体を \mathbb{R}^{4n+1} 上の標準的接触構造へ接触埋め込みすることは可能か。

上記 3 つの問題に対し、筆者は以下のようないくつかの結果を得た。定理 3, 4 は問題 (1) に対する回答である。接触構造が co-oriented であるとき、接触超平面場上の共形シンプレクティック構造に両立する複素ベクトル束構造を考えることで、接触構造のチャーン類が定義できる。

定理 3 整係数 2 次元コホモロジーグループが自明である co-oriented な接触多様体 (N^{2n+1}, η) に対し、その余次元 2 閉接触部分多様体 (M^{2n-1}, ξ) の第 1 チャーン類は自明である。さらに N^{2n+1} の整係数 $2j$ 次元コホモロジーグループも自明ならば、 (M^{2n-1}, ξ) の第 j チャーン類は自明である。

定理 4 7 次元球面 S^7 上の接触構造で、 \mathbb{R}^9 上のいかなる接触構造に対しても接触埋め込み不可能なものが無限個存在する。

定理 3 より、 \mathbb{R}^{2n+1} の余次元 2 閉接触部分多様体の全チャーン類は自明である。特に、第 1 チャーン類が消えていない閉 3 次元接触多様体（そのようなものは無限個ある）は \mathbb{R}^5 へ接触埋め込み不可能であることがわかる。逆に、問題 (2) への回答として以下の定理を得た。

定理 5 第1チャーン類の自明な閉3次元接触多様体に対し、接触埋め込みを許容する \mathbb{R}^5 上の接触構造が存在する。また、第1チャーン類の自明な単連結閉5次元接触多様体に対し、接触埋め込みを許容する \mathbb{R}^7 上の接触構造が存在する。

定理 5 の証明では、定理 1 の相対版を \mathbb{R}^{2n+1} に対して適用した。一方、問題(3)に対する回答を得るために定理 2 の適用が有効である。接触多様体 (M^{2n+1}, ξ) の標準的接触構造 $(\mathbb{R}^{4n+1}, \eta_0)$ への接触埋め込みは余次元が $2n$ なので、 $n \geq 2$ の場合に h -原理が成立する。即ち、形式的接触埋め込みの存在は接触埋め込みの存在を意味する。このことを用いて、以下の定理を証明した。

定理 6 (M^{2n+1}, ξ) を co-oriented な $(2n+1)$ 次元閉接触多様体とする。これが以下の条件のいずれかを満たす場合、 $(\mathbb{R}^{4n+1}, \eta_0)$ への接触埋め込みが存在する。

- (i) n は 3 以上の奇数で、 M^{2n+1} の整係数 1 次元ホモロジ一群が自明である。
- (ii) n は 4 以上の偶数で、 M^{2n+1} は 2 連結。
- (iii) $n = 2$ で、 M^5 は単連結。

証明においては、形式的接触埋め込みの存在を示すのであるが、そのためには埋め込みを含むはめ込みの正則ホモトピー類全体と接触はめ込みを含むはめ込みの正則ホモトピー類全体に共通部分が存在することを示せば十分である。従って、それぞれの正則ホモトピー類全体を決定することに問題が帰着する。最終的には $SO(2n)$ や $U(n)$ の不安定ホモトピー群に関する Kervaire の結果を用いて、2つの集合の共通部分は空でないことを示した。

また、 \mathbb{R}^{2n+1} 上の標準的接触構造への形式的接触埋め込みの存在問題と \mathbb{R}^{2n+1} 上の接触構造を固定せずに接触埋め込みの存在を考える問題は同値であることを証明した。

定理 7 (M^{2m+1}, ξ) を接触多様体、 $f : M^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ を埋め込みとする。このとき、以下の 3 条件は同値である。

- (i) 埋め込み f を底写像とする (M^{2m+1}, ξ) から $(\mathbb{R}^{2n+1}, \eta_0)$ への形式的接触埋め込みが存在する。
- (ii) 埋め込み f に正則ホモトピックな接触はめ込み $(M^{2m+1}, \xi) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n+1}, \eta_0)$ が存在する。
- (iii) \mathbb{R}^{2n+1} 上の接触構造 η であって、埋め込み $f : (M^{2m+1}, \xi) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n+1}, \eta)$ が接触埋め込みとなるものが存在する。

従って、定理 5, 6 は形式的接触埋め込みの存在に関する定理である。