

論文の内容の要旨

論文題目：特異値間隔分布によるセルオートマトンの分類

氏名：金子 勇治

1 背景・目的

セルオートマトン (CA) とは、独立変数 (時間変数・空間変数) と従属変数 (状態変数) の両方が離散値で、かつ、従属変数の値域が有限集合の系である。ノイマンが生物の自己複製を数学的に定式化する為に考案したとされる。現代では交通流のモデリング等にも利用されている。

特に単純な CA として、ウルフラムにより考案されたエレメンタリーセルオートマトン (ECA) がある。ECA には 256 種類のルール (時間発展則) が存在し、その単純さにも拘わらず、極めて多様な時間発展パターンが得られる点にある。そういった場合に、多様な時間発展の様相の分類を試みる事は自然である。ECA の分類で最も有名なものは、ウルフラムが数値実験を元に主張した次の分類 (ウルフラムの分類) であろう。

Class1 Evolves to homogeneous state.

Class2 Evolves to simple separated periodic structure.

Class3 Eyiields chaotic aperiodic patterns.

Class4 Eyiields complex pattern of localized structure.

本分類が後の研究に与えた影響は非常に大きいが問題点も存在する。根本的な問題の 1 つはその恣意性であり、クラス 2 の simple, クラス 3 の chaotic 及び、クラス 4 の localized structure は厳密に定義されたものでない。また、数値計算の時間発展をどこで打ち切るかという問題も抱えている。我々が行うべきことは、(数値計算で扱える) 十分な時間を明確に定義し、その上で、ルールの挙動を (ウルフラムの基準に沿って) 分類できる定量的な指標を与える事である。

2 提案手法

我々はウルフラムと同じく、ECA の分類とは、その出力パターン U の分類であるという立場に立つ。本研究では特異値分解を用いてパターンを解析する。以下に特異値分解の定義を記す。尚、特異値分解は任意の実行列 X に対して使用可能である。

$$\begin{aligned} {}^t X X \mathbf{v}_j &= \lambda_j \mathbf{v}_j, \quad X^t X \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j, \quad \mu_j = \sqrt{\lambda_j} \\ X &= \mu_1 \mathbf{u}_1 {}^t \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 {}^t \mathbf{v}_2 + \cdots + \mu_r \mathbf{u}_r {}^t \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

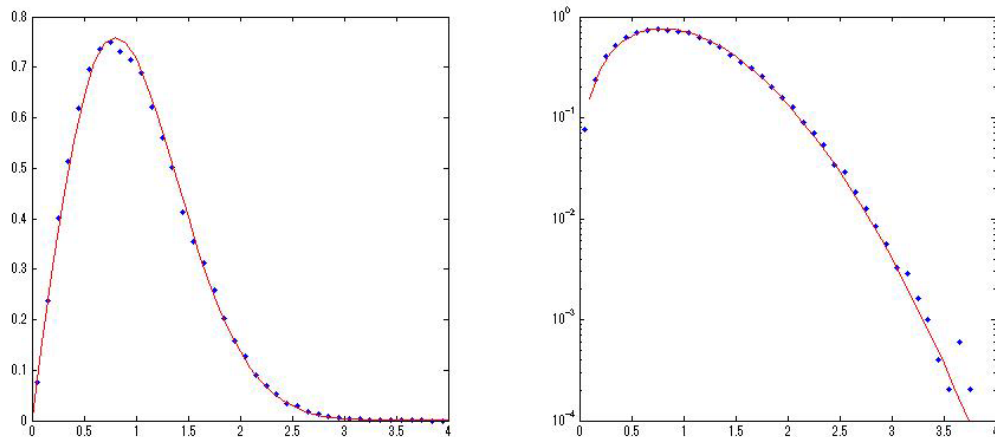
上式の右辺を X の特異値分解、 $\mu_j (1 \leq j \leq r, r$ は X の階数) を特異値という。特異値分解は基底となる長方形の線形結合 (特異値が重み) で X を表現する方法と考えることもできる。尚、特異値は降順にソートされている ($\mu_j \geq \mu_{j+1}$) とする。

特異値分解の工学的な利用という文脈では、適当な画像データ等を X として特異値分解して、特異値の大きい部分に着目することで元の画像 X の特徴を抽出すること等に利用されているようである。CA のパターンを分類する際にセンシティブな基準を選択すると、パターンの微妙な差異がクラスの違いとして認識される事がある。そこで、逆に特異値の小さい部分に着目することで、パターンの詳細によらない大まかな分類が可能になるのではないかと考えた。特異値の小さい部分も特異値と、基底の長方形に分けられるが、本研究では特異値のみを分類に用いる。

本研究では、まず、chaotic と形容されたクラス 3 のパターンの複雑さをランダムパターンとの比較によって定量化する。ランダムパターンを行列とみなせばランダム行列であり、ランダム行列の特異値の間隔の分布は次のウィグナー分布 $P(s)$ で近似されることが知られている。

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2} \quad (s \text{ は特異値の間隔})$$

3 結果



実線がウィグナー分布で点がクラス 3 に属す ECA から得られた結果である (右図は左図の縦軸を対数プロットしたもの)。提案手法を裏付ける多くの結果が得られており、特異値間隔分布は、分類指標として有効と思われる。