論文の内容の要旨

論文題目： A construction of a universal finite type invariant of homology 3-spheres

（ホモロジー3球面の普遍有限型不変量のひとつの構成）

氏名　清水 達郎

本論文では，複数のベクトル場を補助的に用いた有理ホモロジー 3 球面の位相不変量 $\widetilde{z}$ の構成を与える．$\widetilde{z}$ はホモロジー 3 球面の有限型不変量に対して普遍的である．不変量の構成は，Chern-Simons 摂動論と関わる 2 つの位相不変量，Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量 (論文中では記号 z^{KKT} を用いる) と Fukaya-Watanabe による不変量 (同 z^{FW}) の拡張と捉えられる．これにより，$z^{\mathrm{KKT}} = z^{\mathrm{FW}}$ が任意の有理ホモロジー 3 球面に対して成り立つことが従う．z_n^{KKT}, z^{FW}，$\widetilde{z}$ は Jacobi diagram が生成するベクトル空間をある relation で割ったベクトル空間 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をもつ．

1989 年，E. Witten は Chern-Simons 汎関数をラグランジアンとする場の量子論の分配関数が，3 次元多様体の位相不変量を与えることを提唱した．S. Axelrod，I. M. Singer と M. Kontsevich ([2]) らは独立に，Chern-Simons 摂動論によって 3 次元多様体の不変量を構成した．G. Kuperberg と D. Thurston は [3] において Kontsevich の構成をもとに，有理ホモロジー 3 球面の位相不変量 z^{KKT} をあたえ，z^{KKT} がホモロジー 3 球面の有限型不変量に対して普遍であることを示した．ホモロジー 3 球面の普遍有限型不変量としては LMO 不変量が知られているが，z^{KKT} はその主要項が配置空間積分で書かれる為，手術公式を求めるのに適している．実際，C. Lescop は z^{KKT} の研究を深め，いくつかの手術に関する手術公式を得ているほか，z^{KKT} の拡張と位置づけられる不変量を構成している．

一方 K. Fukaya [1] は，3 次元多様体とその上の非輪状な局所系 2 つの組に対し相対的

な不変量の構成を提示した．深谷の構成は補助的に 4 つの Morse 関数を用いる．Fukaya は，頂点が 2 つのラベルつき 3 価グラフの 3 つの辺のうちいくつかを切ったグラフの flow graph の Moduli を考えた．ここで，flow graph とは，グラフから多様体への写像であって，各辺の像がその辺のラベルに対応する Morse 関数の trajectory になっているものをいう．ジェネリックな Morse 関数に対し，flow graph のモジュライ空間はコンパクト 0 次元多様体となる．Fukaya はこの flow graph を graph のループから定まるホロノミーの情報を用いて定まる重み付きで数えあげてできる量を考えた．この量は局所系にも Morse 関数にも依存する．Fukaya は Morse 関数の選択に依存しないよう補正項を加え，さらに 2 つの局所系について差を取ることで，Morse 関数によらない不変量が得られると考えた．しかし，Fukaya の加えた補正項では，局所系によっては Morse 関数の選択に依存することがあることを M. Futaki が指摘した．

T. Watanabe ([4]) は，局所系が自明な状況で有理ホモロジー 3 球面に対し, Fukaya の構成を行った．局所系が自明なときには Futaki の指摘した問題は起きず，Morse 関数の選択によらない．ただし，Fukaya の局所系の相対的な不変量は意味を成さない．そこで，あらたに anomaly と呼ばれる Morse 関数の選択の曖昧さを補正する項を導入することで，有理ホモロジー 3 球面単体に対する不変量を確立した．Watanabe はさらにループ数の高いグラフに関する flow graph のモジュライも考えることで $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をとる不変量 z_n^{FW} を構成した．Watanabe はこの不変量が Chern-Simons 摂動論から得られる Kuperberg-Thurston 不変量等となんらかの関係があると予想した．

主結果

本論文では，z^{KKT} や z^{FW} の構成を含むより広い枠組みで有理ホモロジー 3 球面の不変量の新しい構成法を与えた．Y を有理ホモロジー 3 球面，$\infty \in Y$ を基点とする．$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_{3n})$ を $Y \setminus \infty$ のベクトル場の組で，各ベクトル場は ∞ 付近ではある標準的なベクトル場に一致するものとする．我々は，Y と $\vec{\gamma}$ の組に対して，配置空間積分で定まる主要項 $\widetilde{z}_n(Y;\vec{\gamma}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ と，$\vec{\gamma}$ のチョイスの曖昧さを取り除く項 (anomaly term と呼んでいる) $\widetilde{z}^{\mathrm{anomaly}}(\vec{\gamma})$ を導入し，次の主定理を証明する．

Theorem 1.

$$\widetilde{z}_n(Y) = \widetilde{z}_n(Y;\vec{\gamma}) - \widetilde{z}_n^{\mathrm{anomaly}}(\vec{\gamma})$$

は $\vec{\gamma}$ によらない Y の位相不変量である．

この不変量の構成は z^{KKT}, z^{FW} の構成の拡張として捉えられる．

Theorem 2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の有理ホモロジー *3* 球面 Y に対して次が成り立つ．$z_n^{\mathrm{KKT}}(Y) = \widetilde{z}_n(Y)$.

Theorem 3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の有理ホモロジー *3* 球面 Y に対して次が成り立つ．

$z_n^{\mathrm{FW}}(Y) = \widetilde{z}_n(Y)$.

具体的には，z^{KKT} は $\widetilde{z}$ においてベクトル場の組が与えられた有理ホモロジー 3 球面の framing から得られる non-vanishing vector field の組である場合と捉えられるし，また，z^{FW} は $\widetilde{z}$ においてベクトル場の組が Morse 関数の gradient vector field の組である場合と捉えられる．系として次が直ちに従う．

Corollary 4. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の有理ホモロジー *3* 球面 Y に対して次が成り立つ．$z_n^{\mathrm{FW}}(Y) = z_n^{\mathrm{KKT}}(Y)$.

$\widetilde{z}_n(Y)$ の主要項 $\widetilde{z}_n(Y;\vec{\gamma})$ は z_n^{KKT} の構成を拡張することによって定義している．また，補正項 $z_n^{\mathrm{anomaly}}(\vec{\gamma})$ は Watanabe による z^{FW} の補正項 (これはベクトル場に対する定義と捉えられる) を用いるが，reformulate する．我々の補正項の構成は Watanabe のオリジナルのものと異なる部分がある．我々の補正項の構成も Watanabe のオリジナルのものも共に cobordism を用いる．しかし，cobordism の条件が異なる．この差異により，補正項を有理ホモロジー球面，より一般に 3 次元多様体に対して拡張することができた．また，Watanabe による補正項の定義で現れ，決定されていない定数と本質的に等価な定数 μ_n を決定した．

Theorem 5. $\mu_n = \frac{3}{4}\delta_n$.

ここで，δ_n は C. Lescop によって決定されている定数である．本文参照．

参考文献

[1] K. Fukaya, *Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), no. 1, 37–90. MR 1410567 (98b:57048)

[2] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 97–121. MR 1341841 (96h:57027)

[3] G. Kuperberg and D. P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, ArXiv Mathematics e-prints (1999).

[4] T. Watanabe, *Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. Invariants of homology 3-spheres*, ArXiv e-prints (2012).