論文の内容の要旨

論文題目　Liouville type theorems for the Navier-Stokes equations and applications

（ナヴィエ・ストークス方程式に対するリウヴィル型定理とその応用）

氏名　許本源

本論文は以下の二つのテーマから構成されている．

(1) 歪み流を伴う定常非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式（以降 NS 方程式と書く）に対する非自明解の非存在について (リウヴィル型定理).
(2) 二次元半空間における粘着境界条件を満たす方程式に対するリウヴィル型定理及びその応用.

【第一章　歪み流を伴う定常非圧縮性 NS 方程式に対するリウヴィル型定理】

本章では三次元非圧縮性 NS 方程式に関連した次の方程式を考察する．

$$\begin{cases} -\Delta U + Mx\cdot\nabla U + MU + U\cdot\nabla U + \nabla P = 0, & x\in\mathbb{R}^3 \\ \nabla\cdot U = 0, & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (\mathrm{NS_M})$$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

ここで $U(x) = (U_1(x), U_2(x), U_3(x))$ と $P(x)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力場を表す．方程式 $(\mathrm{NS_M})$ の第一式は，形式的には通常の定常 NS 方程式の解として，$U(x) + Mx$ の形を仮定することで導かれる．行列 M のトレースが 0 のときは，第二式も含めて $(\mathrm{NS_M})$ が得られ，これは歪み流 Mx を伴う NS 方程式の定常解を表す．

行列 M のトレースが正（負）のときは，ある歪み流を伴う NS 方程式の後ろ向き（前向き）自己相似解に対する方程式となることが確かめられる．行

列 M の固有値 λ_i の符号は $(\mathrm{NS_M})$ の非自明解の存在・非存在と密接に関わっており，本章ではその関係を解析した．

非定常 NS 方程式に対し，一般に解が有限時間で爆発するかという問題は有名な未解決問題として知られている．この問題に対して，ルレイ氏は後ろ向き自己相似解を用いて有限時間で爆発する解を構成することを提唱した．これは，$(\mathrm{NS_M})$ において $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ とした場合（ルレイの方程式とも呼ばれている）の非自明解の存在・非存在問題に帰着される．この問題については，先行研究（Necas 氏，Ruzicka 氏及び Sverak 氏の研究, 以降 [NRS] と書く）によって，$U \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3$ であるようなルレイの方程式の解は自明なものに限ることが証明され，ルレイ氏の提唱した方法では爆発解は構成されないことが示された．なお，[NRS] の結果は，その後 Tsai 氏によって解の空間遠方での減衰条件が改良され，$U \in (L^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ の仮定の下でもルレイの方程式の解は自明となることが示された．これらの先行研究では M の固有値 λ_i が全て正でかつ同じ値をとる場合が考察されている．しかし，特に Tsai 氏の手法は各 λ_i が全て正でありさえすれば適用でき，その場合には λ_i が同じ値でなくても，$(\mathrm{NS_M})$ に対して同様の非自明解の非存在定理を得られることが確かめられる．

一方，例えば $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ の場合には，$(\mathrm{NS_M})$ は NS 方程式の前向き自己相似解に対する方程式となり，非自明解の存在が知られている．さらに，λ_1 と λ_2 が負で λ_3 が正となる場合でも，例えばバーガーズ渦のような非自明解の存在が知られているため，M の固有値のうち二つ以上が負の場合には，一般に非自明解が存在するものと思われる．

以上を踏まえて本章では，未だ本質的に明らかにされていなかった「λ_1 が負で λ_2 と λ_3 が正」の場合を考察した．上記の場合，歪み流 Mx が (x_2, x_3) 方向への発散を促すため，一般に解は存在しにくくなると考えられる．しかし一方で，Mx は x_1 方向には流れを局所化し，さらにそれらの効果が拡散項と非線形項によって相互作用するため，問題はより複雑になる．本研究では渦度場 $\Omega = \nabla \times U$ に着目し，Ω に空間遠方での適当な減衰条件を課すことで，非自明解の非存在定理 (リウヴィル型定理) を得ることができた．言い換えると，渦度場が十分に速く減衰する $(\mathrm{NS_M})$ の解は自明なものに限ることを示していた．

【第二章　粘着境界条件を満たす NS 方程式に対するリウヴィル型定理】

本章は粘着境界条件の下で二次元半空間 NS 方程式の後向き大域解に対するリウヴィル型定理を考察した．ここでは解が必ずしも空間遠方で減衰しない場合を取り扱うことに注意して欲しい．

三次元 NS 方程式に対して「ふくらまし法」(blow up argument) を施した時に，二次元 NS 方程式のリウヴィル型問題が自然と現れる．実際に，渦度

方向に対して一様連続の条件を仮定したら，三次元流のふくらまし極限は有界で非自明な二次元流となる．よって，問題は対応してる二次元のリウヴィル型問題に帰着する．さらに，爆発としたときに可能な爆発はI型爆発とすると，「ふくらまし極限」は定数となることは許されない．ここで対応してるリウヴィル型定理を証明することによってI型爆発の仮定との矛盾を導いて，それにより元の三次元流のI型爆発がおこりえないことを示した.（渦度方向に対して正則性の仮定下）

先行研究では三次元全空間の場合及び三次元半空間において完全スリップ境界条件の場合には上記の議論は成功したが，三次元半空間において粘着境界条件の場合は未解決問題だった．本章はこの場合を解析して，上記の論法（つまり「ふくらまし法」及び二次元半空間NS方程式の解に対するリウヴィル型定理）は粘着条件の場合でも通じることを証明した．

二次元のリウヴィル型問題であるため，渦度方程式を考察することは一つの有効なアプローチである．しかし，この場合は全空間や速度場が完全スリップ条件を満たす場合と異なり，一般に境界上で，渦度場が生成される可能性がある．そのため，渦度場に着目してリウヴィル型定理を示すには，何らかの形で境界上での渦度場の生成をコントロールしなければならない．本章では「解の滑らかさの条件」,「圧力項の構造に関する条件」,「速度場のI型時間減衰評価」及び「渦度場の符号条件」の下，リウヴィル型定理を示した．特に圧力項の条件は解が積分方程式の解となることを要請するもので，ポアズイユ流のような粘着条件における反例を排除する条件になっている．

リウヴィル型定理を証明する時に最大値原理は常に重要な役割である．しかし，第一章で取り扱った全空間の定常問題，本章の先行研究で示された全空間の非定常問題及び半空間における完全スリップ条件の場合と異なって，最大値原理から直接渦度場に対する先験的評価が得られないため，ここでは渦度場の境界条件に着目して解析することによってリウヴィル型定理を示した．さらに，前述の「ふくらまし法」を使って幾何的正則性判定法を確立した．

「ふくらまし法」を使うときに，二次元半空間NS方程式の解の低階微分の L^∞ 評価を示された．本章の最後はそれを踏まえて高階微分の評価も考察した．