論文の内容の要旨

GOOD REDUCTION CRITERION FOR K3 SURFACES
（K3 曲面の良い還元の判定法）

桧本雄也

数論的な体上定義された代数多様体に対し，その（l 進／ p 進）コホモロジーの定めるガロア表現はもとの多様体の幾何を反映するものと期待されている．離散付値体上のアーベル多様体が良い還元をもつこととその l 進コホモロジーが不分岐表現であることが同値であるという，いわゆる Néron–Ogg–Shafarevich の判定法（この形では Serre–Tate により示された）は，その一例であると考えられる．また，p 進コホモロジーを用いる判定法も知られている．本論文では，これらに類似する判定法が K3 曲面についても成立することを証明する．

K を完備離散付値体とし，剰余体は標数 $p > 0$ かつ完全であると仮定する．K の絶対ガロア群を G_K で表す．

次が本論文の主定理である（定理 1.1）．

定理. X を K 上定義された K3 曲面であって，$p > L^2 + 4$ を満たす豊富可逆層 L をもつものとする．次のいずれかが成り立つと仮定する：

(a) ある素数 $l \neq p$ に対し，X の l 進エタールコホモロジー $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は G_K の不分岐表現である．

(b) K の標数は 0 であり，X の p 進エタールコホモロジー $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は G_K のクリスタリン表現である．

このとき，X は代数空間の範疇で潜在的に良い還元をもつ．すなわち，K の有限次拡大体 K' が存在し，K' の整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上固有滑らかな代数空間であって K' 上のファイバーが $X_{K'}$ に一致するものが存在する．

主定理についていくつか補足する．

(1) $p > L^2 + 4$ なる豊富可逆層 L が存在するという仮定は，技術的なものであり将来的に外せる（少なくとも $p \geq 5$ に弱められる）と期待している．実際，半安定還元予想（K 上の一般の多様体 Y に対し，ある拡大体 K' の整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上の固有半安定スキームで K' 上のファイバーが $Y_{K'}$ と同型になるものが存在するという予想）が X について正しければ，この仮定は $p \geq 5$ に弱められる．
なお，$p \geq 7$ のとき，この L に対する仮定を満たす K3 曲面と満たさない K3 曲面はそれぞれ無限に多く存在する．$p \leq 5$ のときは，この仮定を満たす K3 曲面は存在しない．
(2) 定理の主張中の「代数空間」を「スキーム」に置き換えると反例が存在する（5.2 節）ので，代数空間まで含めて考えることは不可避である．
ただしスキームの範囲でも次の形の主張は成立する：定理の仮定の下で，ある拡大体 K' の整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上固有なスキームであって，K' 上のファイバーは $X_{K'}$ と同型になり，剰余体 k' 上のファイバーは高々有理二重点しかもたないものが存在する．
(3) 基礎体の拡大が本当に必要かどうかは分かっていない．$p > 9L^2 + 4$ なる (X, L) については，必要な体拡大 K'/K の次数は L の次数 L^2 にのみ依存する整数で上から評価できる（系 4.4）．
(4) 複素 K3 曲面の還元については，（L^2 に関する仮定なしに）これに相当する結果が実質的には Kulikov により得られている（ただしここに述べたような形では書かれていない）．

次に，主定理の証明について述べる．
証明は大きく 2 つの部分に分かれる：前半で，$p > L^2 + 4$ を満たす K3 曲面 X に対し，コホモロジーに関する仮定なしに，K' 上のファイバーが $X_{K'}$ と同型なる $\mathcal{O}_{K'}$ 上固有かつ半安定な代数空間 $\mathcal{X}$ でよい性質（標準因子が自明）をもつものを構成し（K' は適当な K の拡大体），さらに $\mathcal{X}$ の k' 上のファイバー $X_{k'}$ の形状としてありうるものを分類する．後半で，コホモロジーに関する仮定を用いて，この $X_{k'}$ が（したがって $\mathcal{X}$ が）実は滑らかであることを示す．
前半（3 節で扱う）の $\mathcal{X}$ の構成では，半安定還元に関する斎藤の結果および，半安定モデルに対する極小モデルプログラムに関する川又の結果を用いる．（これらを適用する手法は Maulik の論文を参考にした．）またファイバー $X_{k'}$ の分類は中島により得られている．後半では，$X_{K'}$ のコホモロジーと $X_{k'}$ のコホモロジーを比較する議論が必要となる．$\mathcal{X}$ がスキームである場合は既知の事実を用いれば十分なのだが，一般には $\mathcal{X}$ は代数空間にしかならないのでもう少し議論が必要となる（2 節で扱う）．l 進コホモロジーに関しては，半安定スキームの重さスペクトル系列の斎藤による構成が半安定代数空間に対しても適用できることを証明し，このスペクトル系列を用いる（2.3 節）．p 進コホモロジーに関しては，Olsson による，半安定代数空間に対しての兵頭–加藤型の比較同型を用いることで，必要とするスペクトル系列を得る（2.2 節）．（なお，ここで示す半安定代数空間のコホモロジーに関する結果は，K3 曲面の還元よりもう少し一般の場合に適用可能である．）

最後に主定理の応用を 2 つ挙げる．

(1) K3 曲面の周期写像（準偏極つき複素 K3 曲面 (X, L) に対し，ホッジ構造 $\langle c_1(L) \rangle^{\perp} \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ を対応させる）が $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上のモジュライ空間からの射に延長されることが最近示された．主定理（とその証明）を用いると，p が大きいという仮定の下で，この射が全射であることが従う（定理 4.1）．（なおこれも，標数 0 の場合には Kulikov の先述の結果から従うことが知られていた．）
この全射性（の証明）の系として，主定理の体拡大の次数の評価（系 4.4）が得られる．

(2) 複素数体上のアーベル多様体のうち虚数乗法をもつもの（これは代数体上定義される）は任意の素点上潜在的に良い還元をもつことが知られている（これも Serre–Tate による）．
複素数体上の K3 曲面は，その Mumford–Tate 群（Hodge 群でもよい）が可換になるとき虚数乗法をもつという．これはアーベル多様体の虚数乗法の類似とみなせる．虚数乗法をもつ K3 曲面は代数体上定義できることが知られている．主定理を用いると，虚数乗法をもつ K3 曲面は，剰余標数が L^2+4 より大きい任意の素点上で潜在的に良い還元をもつことが従う（定理 6.3）．