論文の内容の要旨

論文題目: A cellular approach to the Hecke–Clifford superalgebra (セルラー代数の手法による Hecke–Clifford スーパー代数の研究)

氏名: 森 真樹

この論文の目的は Hecke–Clifford スーパー代数の単純加群を, 拡張されたセルラー代数の手法を用いて分類することである. セルラー代数は Graham と Lehrer により導入された代数のクラスであり, Brauer 代数など古典群や量子群の自然な表現の自己同型環として現れる様々な代数の構造を抽象化した公理化である. これはまた半単純代数の一般化でもある. よく知られているように, 半単純代数は単純な行列代数の直和であり, それぞれの行列のベクトル表現でその単純加群全体が与えられる. これの拡張として, セルラー代数は行列によく似たセルと呼ばれる商代数の両側イデアルを集めて構成されており, そのうちの一部から一つ一つの単純加群を作ることができる. このようにセルラー代数については体の標数等に依存しない統一的な単純加群の分類方法が知られている.

特に A 型岩堀–Hecke 代数 $H_n(q)$ はセルラー代数の重要な例である. これの持つセルラー代数の構造は Kazhdan と Lusztig の標準基底または Murphy の構成した基底によって与えられ, それぞれのセルは n の分割に対応する Specht 加群とその双対のテンソル積になる. 上述の単純加群の分類を具体的に $H_n(q)$ に対し適用すると, 体の q-標数を e とするとき e-restricted と呼ばれる性質を持つ分割のセルから一つずつ単純加群が構成され, $H_n(q)$ の単純加群全体と e-restricted な n の分割という組み合わせ的対象が 1:1 対応するという結果が得られる. なお岩堀–Hecke 代数の単純加群の分類には $\mathsf{A}^{(1)}_{e-1}$ 型アフィン量子包絡代数 $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の圏論化を用いた, Lascoux–Leclerc–Thibon 予想に端を発するエレガントな別手法も知られている. これによると, $n \geq 0$ について全ての岩堀–Hecke 代数 $H_n(q)$ の単純加群を集めた集合は柏原クリスタルの構造を持ち, 基本ウェイト Λ_0 を最高ウェイトとする既約表現 $V(\Lambda_0)$ の標準基底 $B(\Lambda_0)$ とちょうど同型となる. Misra–三輪によって得られた $B(\Lambda_0)$ の組み合わせ的記述を用いると, これら 2 つの分類は (勿論) 一致することがわかる.

一方, Hecke–Clifford スーパー代数 $H^c_n(a;q)$ は Olshanski により導入された A 型岩堀–Hecke 代数 $H_n(q)$ のスーパー類似である. これについても圏論化の手法による単純加群の分類は既に行われており, e が奇数の場合には Brundan と Kleshchev により $\mathsf{A}^{(2)}_{e-1}$ 型の, 偶数の場合には土岡により $\mathsf{D}^{(2)}_{e/2}$ 型の量子包絡代数が用いられた. どちらにせよ Kang と Hu によりそれぞれ得られたクリスタルの記述を用いると, パリティの偶奇の

違いを除けば $H_n^c(a;q)$ の単純加群は n の分割全体の部分集合と 1:1 対応するという結果が得られる．本論文では拡張されたセルラー代数の理論を用いこの分類結果の別証明を行う．この手法では圏論化を用いた単純加群の構成よりも広い状況で適用でき, また具体的で構造がよりわかりやすいという利点がある．ここで既存のセルラー代数の理論がそのまま適用できなかったのは次のような理由による．スーパー代数の表現論においては通常の行列代数以外にも Clifford スーパー代数上の行列代数という別の単純スーパー代数が存在する．セルラー代数は半単純代数の一般化であると述べたが, 半単純なスーパー代数はこのような 2 種類の行列代数の直和に分解する．これを一般化するためには, 通常の行列に由来するセルの他に, 新たに Clifford スーパー代数上の行列に似せた新しい種類のセルを考えなければいけない．そこで用いられるのが二つの代数の間を繋ぐ森田コンテクストという概念である．セルラー代数の持つセルは実は森田コンテクストの特別な場合であり, 単純加群の分類理論の中では暗黙に (おそらくそれと気づかれること無く) 森田コンテクストの理論が使われていた．ここでの森田コンテクストはセルラー代数の商代数と基礎体との間を繋ぐものである．これを商代数と Clifford スーパー代数との間の森田コンテクストに置き換えることで, 上述の新しい種類のセルをセルラー代数の理論に取り入れることができる．

そこで本論文ではまず森田コンテクストの概念を用いセルラー代数をより一般化した標準フィルター付き代数 (standardly filtered algebra) という新しい代数のクラスを導入し, その単純加群の分類をセルラー代数と同様に行えることを証明する．さらに Hecke–Clifford スーパー代数 $H_n^c(a;q)$ 上の Specht 加群のスーパー類似を導入し, これによって $H_n^c(a;q)$ が標準フィルター付き代数の構造を持つことを証明する．ここで理論の鍵となるのは Specht 加群上に右から Clifford スーパー代数が作用することである．$H_n^c(a;q)$ の商代数とこの Clifford スーパー代数とを繋ぐ森田コンテクストを通じて, Clifford スーパー代数の単純加群の一部が $H_n^c(a;q)$ の単純加群へと写される．それを全ての n の分割上で集めることで単純加群の分類が完成する．

また本論文では「非整数次数における岩堀–Hecke 代数と Hecke–Clifford スーパー代数上の加群圏」という異なる主題についても取り扱っている．これは Deligne により構成された「非整数次数における対称群の表現圏」の q-類似, またそのスーパー類似として著者が導入したものである．この圏は $H_n(q)$ や $H_n^c(a;q)$ の加群圏の n を大きくした時の安定構造を捕まえたものと考えることができ, この性質を応用して, 上述の分類を証明する中で道具として用いられた．

本論文の構成は 3 つの部に分かれている．Part I ではセルラー代数の理論の拡張と標準フィルター付き代数の導入を行う．Part II の前半ではこの拡張された視点から岩堀–Hecke 代数の単純加群のセルラー的分類理論を再構築する．後半において非整数次数における加群圏を定義し, これもまたある種のセルラー構造を持つことを見る．Part III では Part II で行った分類手法をスーパー版に拡張し, Hecke–Clifford スーパー代数について適用する．