

## 論文の内容の要旨

論文題目 **Vortex structures created by  
the Casimir invariants of plasma dynamics**  
(プラズマの力学における  
カシミール不変量によって生成される渦構造)  
氏名 江本 伸悟

渦、それはモノとコトの間を揺れる幽かな存在である。第一義的にはそれは流れのパターンでありコトの世界へと属する。一方で、一度そこに立ち現れた渦は、たとえそれが束の間の存在であったとしても、そこに自己同一性=アイデンティティを携える。それが故に私たちは、ときに渦のことをモノとみなし、例えば台風という渦に対してカトリーナといったような名前を与えもする。それでは、私たちは一体どのようにして「渦のアイデンティティ」といったものを捉えていけばいいのだろうか。

本論文第1章において、この一見して抽象的な問いかけが、物理学の問題として位置づけられていく。物理学においては何よりも大切なことは、関心となる対象がどのようにして「測られる」かということである。本論文では、渦度を測る作用素である curl 作用素の固有関数、すなわち「ベルトラミ渦」が、最も基本的な渦構造として登場する。また、物理学の関心そのものは対象の変化にあるが、物理学の視線はしばしば、変化のただなかでそれでも変化をしない「不変量」へと向けられる。渦というのは生成流転の象徴とみなされるほどに変化に富んだ現象であるが、そうした変化のなかにおいて保たれる不変量こそが、渦のアイデンティティを支えていると考えられる。

渦のアイデンティティを不変量から考えていくための舞台を整えてくれるのが、非正準ハミルトン力学系の理論である。通常、ハミルトン力学系の性質は、運動の設計図であるハミルトニアンによって定められ、そこでの「平衡構造」というのは、流れを持たないエネルギー最小状態であると予想される。しかし非正準ハミルトン力学系においては、こうしたハミルトニアンとは独立に保存する「カシミール不変量」が、運動の生じる相空間へと「葉層構造」を与えることになる。運動はそれぞれの「葉」の上へと束縛され、そこにおいては空間の距離（エネルギーノルム）が歪んでいる。この歪みが故に、非正準ハミルトン力学系においては流れを含むような多様な平衡構造が得られる。長らく自己同一性をたもつ渦のことを、ひとつの「平衡構造」として捉えるならば、カシミールこそが、渦のそのアイデンティティを与えているものである。例えばベルトラミ渦は、ヘリシティというカシミールによって特徴付けられている。

注意すべきは、非正準ハミルトン力学系において、全ての平衡構造がカシミールによって特徴付けられるわけではないということである。そこで近年「特異的カシミール」についての研究が進められている。カシミールの概念を一般化することによって、通常のカシミールでは捉えられなかった渦のアイデンティティを捉えていくことができる。このような特異的カシミールによっ

て初めてそのアイデンティティが捉えられた渦構造として「テアリングモード」がある。テアリングモードというのは、磁力線の繋ぎかえによって磁場のトポロジーが変化することで生じる渦構造であり、宇宙プラズマ、実験プラズマを問わず、様々なシア磁場のもとに観測されている普遍的／典型的な磁場渦構造である。

プラズマというのは「粒子の運動」と「場の変動」とが分かち難く結びついた「非線形系」であるが、上記のテアリングモード理論には（１）流れ（粒子の運動）が含まれていないという問題と（２）背景磁場が固定された線形理論で書かれているという問題がある。流れの存在はテアリングモードの性質を著しく変化させるので、流れの存在下においてもテアリングモードがカシミールによって特徴付けられるのかというのは非自明な問題である。またテアリングモードがともなう「電流シート」はデルタ関数によって表現されるようなものであり、それは高次項ですらも大きな振幅をもっている。しかし上記の理論においてはこれら高次項を線形化によって落としているため、線形解として得られた磁力線の構造に不具合がみられる。そこで本論文では上記の理論を「流れのある線形テアリングモード理論」と「流れのない非線形テアリングモード理論」の2通りの方向へと拡張していく。プラズマ中にみられる典型的な渦構造であるテアリングモードを具体例として、特異的カシミールの理論を発展させていく狙いが込められている。

流れのあるテアリングモード理論に先駆けて、第2章において先ず、2つのベルトラミ渦の重ね合わせとして得られる「ダブルベルトラミ場」の分岐理論が与えられる。先行研究においてはシングルベルトラミ場に対して生じるテアリングモードが解析されていたが、プラズマが流れを含む場合にはこのダブルベルトラミ場のほうが（１）イオン流と電子流を区別できる（２）ミクロとマクロの階層構造を考慮することができるなどの点で優れているからである。この分岐理論は、磁気フラックスと正準フラックスと呼ばれるカシミールを固定パラメータとし、磁気ヘリシティと正準ヘリシティと呼ばれるカシミールをコントロールパラメータとしている。ヘリシティの値を変化させるに応じて、ダブルベルトラミ場を与える「ダブルベルトラミ方程式」のパラメータが変化していき、それに応じてまた方程式の解空間が変化していく。例えば、磁気ヘリシティが低い値をもっているときには、磁気シアーだけをもった「シンメトリックベルトラミ場」しか存在しなかった状況から、磁気ヘリシティの値が高まることによって、「磁気島」とよばれる磁力線の渦巻き構造をもった「ヘリカルベルトラミ場」が現れるようになる。これはカシミール不変量が渦を特徴付けていることを示す、1つの典型例である。本理論においては、フラックスカシミールによって付与された葉層構造の上に、ヘリシティカシミールによって更なる葉層構造が重ねられることになるので、相空間の構造はいよいよ複雑となる。プラズマの運動が生じる相空間は無限次元の関数空間であるので、その様子を想像することは難しいが、2次元のベルトラミパラメータ空間上に射影されたヘリシティ葉が、フラックスカシミールからの影響によって「引き裂かれている」ことが観察されている。

第3章においては、第2章で得られたシンメトリックベルトラミ場周りの線形解析がなされる。このベルトラミ場は流れを携えている点が、先行研究との大きな違いである。しかしこの流れの存在にも関わらず、そこに生じるテアリングモードが、先行研究とおなじく「ヘリカルフラックスカシミール」によって特徴付けられることが明らかになった。しかし得られたテアリングモードの構造自体には大きな変化が見られた。先行研究におけるテアリングモードは curl 作用素の特異的固有関数1つによって与えられていたが、本研究におけるテアリングモードはこうした特異的固有関数2つの重ねあわせとして与えられる。特異的カシミールが同じなのにも関わらず、こうした異なる構造が得られるのは、背景場となっているベルトラミ場を特徴付けているカシミールが、先行研究のシングルベルトラミ場と本研究のダブルベルトラミ場とで異なるからである。シングルベルトラミ場を特徴付けていた磁気ヘリシティに加えて、ダブルベルトラミ場

は正準ヘリシティをそのアイデンティティとして備えている。この正準ヘリシティの存在が、テアリングモードに新たな構造を与えたのであった。本研究においてはテアリングモードは平衡構造として与えられているが、このモードが何らかの散逸のもとに「自己組織化」していくためには、モードが「負のエネルギー」をもち「不安定」であることが必要である。テアリングモード不安定性の伝統的な指標である  $\Delta'$  が、ハミルトニアン、磁気ヘリシティ、正準ヘリシティを組み合わせることによって得られるエネルギーカシミール汎関数と直接に結びついていることが示された。しかしその不安定性の振る舞いは複雑である。流れが強くなったとき、主要な不安定モードがテアリング不安定性から「ケルビン-ヘルムホルツ不安定性」へと転移することが、この複雑性の原因でないかと考えられている。

第4章においては、「プラトー特異点」を拡張した「極値特異点」なる概念が提案され、それを用いた非線形テアリングモード理論が展開されている。この章は線形理論の復習から始まる。線形テアリングモードを特徴付けていたヘリカルフラックスカシミール（線形特異的カシミール）は、磁場の共鳴面にちなんだ「レゾナンス特異点」から生じていた。このレゾナンス特異点が、実は「磁気フラックス関数」の極値にちなんだ極値特異点に他ならないことが始めに示される。続いて話は非線形理論へと移り、極値特異点から生じる非線形特異的カシミールが考案される。この特異的カシミールが、平衡方程式に新たな境界条件をもたらし、そのことによってテアリングモードという渦構造が平衡解として得られることになる。波の理論を思い出してみると、波の構造というのは境界条件によってこそ定められるのであった。とくに線形理論の場合は、境界条件というのは外部から与えられるものである。一方、本理論においては、境界条件は渦の存在そのものによってもたらされ、その境界条件がまた渦を平衡状態として存在させているという、非線形な自己言及構造がある。その意味で、渦のアイデンティティとは外来的なものではなく、内在的なものである。一度そこに立ち現れると、長らくそこに自己同一性を保ち続ける渦、それは、自らがそこに存在することによって、自らの存在を支えている、そのような非線形自己言及構造なのだと言える。