論文の内容の要旨

論文題目：Quasi-Likelihood Analysis for Diffusion Processes and Diffusion Processes with Jumps

(拡散過程及びジャンプ型拡散過程に対する疑似尤度解析)

氏　　名：　荻原　哲平

本論文では, パラメータをもつ拡散型過程及びジャンプ型拡散過程の離散観測に対する最尤型推定量及びベイズ型推定量の漸近挙動について議論する.

パラメータ付き拡散過程に対する統計推測の漸近理論は既に多くの研究がある. d 次元確率過程 $X = \{X_t\}_{0\le t<\infty}$ が確率微分方程式

$$dX_t = \mu(X_t, \theta)dt + b(X_t, \sigma)dW_t, \quad t \in [0, \infty) \tag{1}$$

を満たすとする. ここで $\{W_t\}_{0\le t\le\infty}$ は m 次元標準ブラウン運動, μ は d 次元ベクトル値関数, b は $d \times m$ 行列値関数であるとする. このときパラメータ θ, σ の真値 θ_*, σ_* を X の観測データから推定する問題を考える. X の観測データとしては, 時間に関して連続的に観測される状況と離散的に観測される状況が考えられるが, 実用的な観点からは離散的な観測を前提に議論することが望ましい.

確率過程 X がエルゴード性をもち, X の観測がある $h_n > 0$ に対して $\{X_{kh_n}\}_{k=0}^n$ と表されるとすると, Euler-Maruyama 型の疑似対数尤度関数（対数尤度関数の近似関数）から生成されるパラメータの最尤型推定量 $\hat{\theta}_n, \hat{\sigma}_n$ が一定の条件の下で $n \to \infty, h_n \to 0, nh_n \to \infty$ のとき, 一致性：

$$(\hat{\sigma}_n, \hat{\theta}_n) \to^p (\sigma_*, \theta_*), \tag{2}$$

漸近正規性：

$$(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*), \sqrt{nh}(\hat{\theta}_n - \theta_*)) \to^d \zeta, \tag{3}$$

さらに強く, モーメント収束：

$$E[\mathsf{f}(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*), \sqrt{nh}(\hat{\theta}_n - \theta_*))] \to \mathbb{E}[\mathsf{f}(\zeta)] \tag{4}$$

を満たすことが知られている. ここで, ζ はある多変量正規分布に従う確率変数, f は任意の連続関数で高々多項式増大のものである. (2)-(4) において, $\hat{\theta}_n, \hat{\sigma}_n$ をベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_n, \tilde{\sigma}_n$ で置き換えても同様の結果が得られる.

上の結果は, 観測データの最終時刻 $T = nh_n$ が無限大に発散することを仮定しているが, 最終時刻 $T > 0$ が固定された場合に対する結果も知られている. X の観測が $\{X_{kT/n}\}_{k=0}^n$ と表されるときに, Euler-Maruyama 型の疑似対数尤度関数から生成されるパラメータ σ の最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n$ に対して, $n \to \infty$ のとき, 一致性：

$$\hat{\sigma}_n \to^p \sigma_*, \tag{5}$$

漸近混合正規性：

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_0^{-1/2}\mathcal{N}_0, \tag{6}$$

モーメント収束：

$$E[\mathsf{f}(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*))] \to \mathbb{E}[\mathsf{f}(\Gamma_0^{-1/2}\mathcal{N}_0)] \tag{7}$$

が成り立つ．ただし, $\to^{s\text{-}\mathcal{L}}$ は安定的収束を表し, Γ_0 はある確率行列, $\mathcal{N}_0$ は Γ_0 と独立に標準正規分布に従う確率ベクトル, f は任意の連続関数で高々多項式増大のものとする．ベイズ型推定量 $\tilde{\sigma}_n$ に対しても同様の結果が成り立つ．

本論文では, これらの拡散過程の等間隔観測に対する最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近挙動に関する結果を, 非同期観測された拡散型過程や, ジャンプ型拡散過程に拡張していく．

第一章では, 確率積分方程式

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t b(X_s, \sigma)dW_s, \quad t \in [0,T] \tag{8}$$

を満たす 2 次元連続時間確率過程 $Y = \{(Y_t^1, Y_t^2)\}_{0\leq t\leq T}$ を扱う．ここで, 最終時刻 $T > 0$ は定数, $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ は 2 次元標準ブラウン運動, $\{\mu_t\}_{0\leq t\leq T}, X = \{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ はそれぞれ 2 次元, n_2 次元確率過程, b は 2×2 行列値関数である．$\mu_t = \mu(t, Y_t),\ X_t = (t, Y_t)$ のとき, Y は拡散過程となるため, このモデルは拡散過程よりもやや広いクラスを扱っている．確率過程 Y, X の観測は非同期, つまり, $n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n_2$ に対し, $\{S^{n,i}\}_{i=0}^l, \{T^{n,j}\}_{j=0}^m, \{\mathcal{T}_k^{n,j}\}_{j=0}^{m_k}$ を単調増大な $[0,T]$ 値確率過程とし, 観測が $\{Y^1_{S^{n,i}}\}_{i=0}^l, \{Y^2_{T^{n,j}}\}_{j=0}^m, \{X^k_{\mathcal{T}_k^{n,j}}\}_{k,j}$ と表されるとする．このとき, 高頻度観測の極限, すなわち, $\max_{i,j,k}(|S^{n,i} - S^{n,i-1}| \vee |T^{n,j} - T^{n,j-1}| \vee |\mathcal{T}_k^{n,j} - \mathcal{T}_k^{n,j-1}|) \to^p 0\ (n \to \infty)$ のときの最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近挙動を調べる．

非同期観測の問題は, 金融データ解析において日内の価格データなどの高頻度観測データを用いて二証券対数価格の共分散を推定する際に現れる．日内データにおいて証券価格が観測されるのはその証券の取引が発生したときであり, 異なる証券では観測時点は一致しないため, 必然的に非同期観測となる．このとき, 価格データの線形補完や直前のデータを用いることによる簡易な”同期化”により計算された共分散推定量には深刻なバイアスが存在することが知られている．この効果は”Epps 効果”と呼ばれており, この問題を解消するための推定量について近年活発に研究されている．

しかし, これまでの非同期観測下の共分散推定に関する研究は, ノンパラメトリック推定量の研究が中心であった．本論文では, (8) のパラメトリック・モデルを満たす確率過程 Y の非同期観測の下, 疑似対数尤度関数 $H_n(\sigma)$ を構成し, H_n から生成される最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n$ が $n \to \infty$ のとき, 一致性, 漸近混合正規性： $b_n^{1/2}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma^{-1/2}\mathcal{N}$, モーメント収束：$E[\mathsf{f}(b_n^{1/2}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*))] \to \mathbb{E}[\mathsf{f}(\Gamma^{-1/2}\mathcal{N})]$ を満たすことを示す．ただし, σ_* はパラメータ σ の真値, $\{b_n\}_n$ は観測数のオーダーに関連する正数列で $b_n \to \infty$ を満たすもの, Γ はある確率行列, $\mathcal{N}$ は Γ と独立に標準正規分布に従う確率ベクトル, f は任意の連続関数で高々多項式増大のものとする．また, ベイズ型推定量 $\tilde{\sigma}_n$ に対しても同様の結果が成り立つ．

尤度比確率場の理論を用いることで, 最尤型推定量やベイズ型推定量の漸近挙動に関する問題は, 疑似対数尤度関数 H_n の漸近挙動の問題に帰着することができる．疑似対数尤度関数 H_n の漸近挙動を特定するためには, 観測時間の漸近挙動に対して何らかの仮定を置く必要があり, 論文中の 1.3 節の $[A3]$ において観測時間のある関数が確率収束することを仮定する．最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近分散にあたる Γ^{-1} は $[A3]$ の極限関数を用いて記述されるため, 非同期観測の効果が推定量の漸近論においても本質的に現れることが確認される．

関数 H_n の具体的な表現は論文中の 1.2 節にあり, Y の増分の二次形式を含む形で与えられている．観測が同期している状況では, 二次形式の係数が増分に対応する区間よりも前の時間に観測される量で書けるため, マルチンゲールに関する極限定理等を用いて, H_n の漸近挙動に関する各種の結果を導くことができる．しかし, 非同期観測下においては分散共分散行列に対応する S の非対角要素の影響により, H_n における二次形式の係数が増分に対応する区間よりも将来の時間を参照するため, そのままではマルチンゲール性を用いた議論ができない．この問題を解決するために, 論文中の補題 1.12, 1.13 において, Burkholder-Devis-Gundy の不等式をある意味で一般化した不

等式を導出することで, H_n と H_n の二次形式の係数が参照する時間をずらした関数が漸近同等であることを導く. その他に S の非対角要素の和の評価や各 X_t^k の参照時刻のずれにより生じる S^{-1} のモーメントの非有界性などの非同期観測特有の問題を解決しながら, マルチンゲール性を用いた議論を適用する.

最尤推定量とベイズ推定量は前述の拡散過程の同期観測の二つの設定において漸近有効性を持つ, つまりある意味で推定誤差が最小であることが知られているが, 非同期観測下の拡散過程に対する対応する結果は未解決である. しかし, 論文中の 1.6 節 例 1.1 では, 二次共変動 $\langle Y^1, Y^2\rangle_T$ の最尤型推定量とノンパラメトリック推定量のパフォーマンスを比較し, 最尤型推定量の推定誤差の標本分散がノンパラメトリック推定量のものの 1/2 程度となることを示している. これは, モデルの構造に関する情報があるときにパラメトリック推定量がノンパラメトリック推定量よりも優れたパフォーマンスを示す一つの例となっている.

第二章では, ジャンプ型確率微分方程式

$$dX_t = a(X_{t-},\theta)dt + b(X_{t-},\sigma)dW_t + \int_E c(X_{t-},z,\theta)p(dt,dz), \quad t \in [0,\infty) \tag{9}$$

を満たすジャンプ型拡散過程 $X = \{X_t\}_{0\le t<\infty}$ を扱い, X がエルゴード性を満たし, その観測がある $h_n > 0$ に対し, $\{X_{kh_n}\}_{k=0}^n$ とあらわされる場合の最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近挙動を調べる.

Shimizu and Yoshida (2006) では, ジャンプ型拡散過程に対して観測の増分の絶対値 $|X_{kh_n} - X_{(k-1)h_n}|$ の大きさで, 対応する区間にジャンプが発生したかどうかを判別する閾値を設定し, 疑似対数尤度関数の構成と最尤型推定量の一致性, 漸近正規性を示した. 本論文では, 彼らの疑似対数尤度関数を改良した疑似対数尤度関数 $H_n(\sigma,\theta)$ を用いて, $n\to\infty, h_n\to 0, nh_n\to\infty$ のとき, 最尤型推定量とベイズ型推定量の (2)-(4) の形の一致性, 漸近正規性及び推定誤差のモーメント収束を証明する. 特にジャンプ型拡散過程におけるベイズ型推定量の漸近挙動に関する結果は筆者の知る限り存在せず, 新しい結果である. 推定誤差のモーメント収束は, 情報量規準や漸近展開などの統計理論を構築する上で重要な役割を果たす.

ベイズ型推定量の一致性, 漸近正規性や, 推定量の推定誤差のモーメント収束を示すには, 推定誤差の絶対値の大きい事象に対する確率評価が必要となる. 本論文では, 最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n, \hat{\theta}_n$ に対し, 多項式型大偏差不等式 : 任意の $L>0$ に対し, ある $C_L>0$ があって, 任意の $r>0$ に対し,

$$\begin{aligned}
P\Bigg[\sup_{(u_1,\theta)\in V_n^1(r)\times\Theta}\exp\Big\{H_n\Big(\sigma^*+\frac{u_1}{\sqrt{n}},\theta\Big)-H_n(\sigma^*,\theta)\Big\}\ge e^{-\frac{r}{2}}\Bigg] &\le \frac{C_L}{r^L},\\
P\Bigg[\sup_{u_2\in V_n^2(r)}\exp\Big\{H_n\Big(\hat{\sigma}_n,\theta^*+\frac{u_2}{\sqrt{nh_n}}\Big)-H_n(\hat{\sigma}_n,\theta^*)\Big\}\ge e^{-\frac{r}{2}}\Bigg] &\le \frac{C_L}{r^L}
\end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つことを示す. ただし, σ^*, θ^* はパラメータ σ,θ の真値, Π, Θ はユークリッド空間の有界開集合で, それぞれパラメータ σ,θ の定義域を表し, さらに

$$V_n^1(r) = \{u_1; \sigma^* + n^{-1/2}u_1 \in \Pi, |u_1|\ge r\}, \quad V_n^2(r) = \{u_2; \theta^* + (nh_n)^{-1/2}u_2 \in \Theta, |u_2|\ge r\}$$

とする.

ジャンプ型拡散過程モデルで観測の最終時刻 nh_n が無限大に発散するような我々の設定では, 多項式型大偏差不等式を導出するには, H_n とその極限 H_∞ との差 $H_n - H_\infty$ とその導関数のモーメントの評価が本質的になる. この評価は, モデルが拡散過程の場合, 伊藤の公式や Burkholder-Devis-Gundy の不等式等を用いて評価することができるが, 閾値付きの疑似対数尤度関数であるジャンプ型拡散過程の場合は, 同様の手法による評価では不十分である. この問題を解決するため, 論文中の Proposition 2.3 において確率変数の和のモーメント評価に関する不等式を導出した. この不等式は, Burkholder-Devis-Gundy の不等式においてマルチンゲール階差の二乗和からマルチンゲール部分を抽出して繰り返し Burkholder-Devis-Gundy の不等式を適用することで得られ, 多項式型大偏差不等式の証明において重要な役割を果たす.

また, Proposition 2.3 の導入や $H_n - H_\infty$ のモーメント評価の精緻化により, Shimizu and Yoshida (2006) で最尤型推定量の漸近正規性を示すうえで仮定されている, ジャンプの大きさの確率密度 f に対する条件 (原点の近傍

である定数 $C > 0$ と $\gamma > 3$ に対し, $|f(z)| \le C|z|^{\gamma}$) を緩めることができる. よって, 最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近挙動に関する上記の結果を, ジャンプの大きさの分布の密度関数が原点の近傍で非零となるような様々な分布に対して適用可能となっている. さらに f が零点を持たないときに, Shimizu and Yoshida (2006) で定義されている, f の零点付近での挙動を制御する任意性を含むパラメータ φ_n を H_n から除去できることを示し, 実用上より使いやすい推定量となっている.