

遭遇型形状提示システムにおける 任意曲面の形状提示に関する一考察

星野 洋*¹ 舘 暲*²

A Method to Represent an Arbitrary Surface in Encounter Type Shape Representation System

Hiroshi Hoshino*¹ and Susumu Tachi*²

Abstract - It is important to represent the shape of an object in a virtual environment (a virtual object), because it enhances ambience in case an operator contacts a virtual object. Recently several systems have been proposed which aims to represent the shape of a virtual object and they are classified into "encounter type." In encounter type an operator feels touching a virtual object by measuring his/her motion and locating a corresponding real object in order to approximate the shape around the contact point. However, it is not proper to directly locate the real object so that it approximates around the contact point because the contact point is not always continuous and therefore the trajectory of the real object will not be continuous. In this paper we consider the continuity of the contact point and propose a method to set up the continuous trajectory of the real object when representing arbitrary surface in encounter type. Proposed method realizes its continuous trajectory by changing the manner of setting up its trajectory according to the distance between the fingertip and the represented surface, and by interpolating the trajectory between both manners. Results of numerical simulation applying a proposed method to several quadratic surfaces show its validity.

Keywords : shape representation, encounter type, real object, continuity of trajectory, principal curvature

1. はじめに

人工現実感システムの中でも、仮想空間内の物体(仮想物体)に触ったときにその形状を提示することは、とくに接触作業を想定したシステムにおいて臨場感を高める点で有意義であり、例えばCADシステムと組合せることで製品を実際に製造しなくても操作したときの感覚が得られる、といった応用が期待できる。

仮想物体の形状提示を目的とするシステムは、従来より数多く提案されている[1]~[4]が、これらはMcNeelyの分類[8]によれば「装着型・把持型」と分類されるものである。すなわち操作者はアクチュエータの取り付けられたリンク機構を装着・把持し、アクチュエータの駆動トルクを制御することで、操作者に仮想物体との接触によって生じる反力を提示し、形状提示を行うものである。これに対して近年、「遭遇型」とよばれる形状提示システムが提案されている[9]~[15]。

遭遇型は、操作者の運動を計測し、それに応じて予め用意した実物体が、操作者と仮想物体との接触している部分の形状を近似するように、その位置・姿勢を制御して形状提示を行なう方式であり、装着型・把持型と比較して、

- 操作者の運動計測部と操作者に対する形状提示部が分離しているので、操作者が仮想物体と接触していないときには、その運動を拘束しない。
- 予め実物体を待機させて形状提示を行なうので、剛な物体の形状提示に有利である。

という特長が期待できる。

しかし装着型・把持型の研究[5]~[7]でなされてきた、一般的な形状をいかにして取扱い提示するか、という点に関する検討は、提示可能な形状の種類を考察する上で重要であるにもかかわらず、遭遇型では研究の歴史が浅いために殆どなされて来なかった。

例えばMcNeelyらのRobotic Graphics[9]では飛行機の操作パネルを操作したときの感覚を提示するシミュレーションシステムの構築を目的としているので、提示可能な形状は操作パネル上のボタン等に限定されており、一般的な形状の提示に関しては言及されてい

*1: 東京大学工学部, 現在松下電工株式会社ウエル・ラボ

*2: 東京大学工学部

*1: Faculty of Engineering, University of Tokyo, Currently with Advanced Technology Research Lab., Matsushita Electric Works, Ltd.

*2: Faculty of Engineering, University of Tokyo

ない。

また横小路らの WYSIWYF システム [14] では仮想物体の運動特性の実現および仮想物体の視覚提示と触覚提示の整合性に関する考察を主としており、やはり一般的な形状提示に関する議論はなされていない。

広田らは [10], [11] において、任意の凹凸を有する 2 次元曲面の形状提示に関する検討を行ない、これらの形状提示に成功しているが、これは、提示すべき曲面形状を世界座標系で陽関数で表現しているために、そのまま 3 次元空間内の一般的な曲面に対して適用するのは困難である。

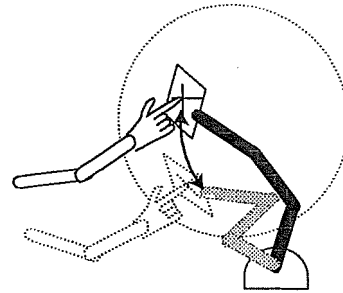
吉川らは遭遇型形状システムの「操作者が仮想物体と接触していないときにはその運動を拘束しない」という上記の特長を活かして、操作者が仮想物体と接触している時には形状提示を行なうが、非接触時には操作者の指先に追従するシステムを提案した [15]。しかしこのシステムでは、接触・非接触の切替えを、形状提示機構のパラメータを用いて判定している一方で、提示可能な形状の種類に関しては言及されていないので、一般的な形状がどの程度まで提示可能であるかが不明瞭である。

これに対して我々は 3 次元空間内で曲面と曲稜が任意に組合わさった形状の提示を目的とした遭遇型形状提示システム [12] を開発し、実時間でそれらを提示することに成功している [13] が、実時間性を確保するために曲面の形状を 4 階の Bezier 曲面に限定しており、また暗に曲面の曲率が比較的小さいことを仮定してしまっている。

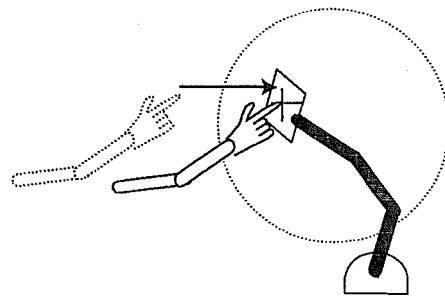
そこで本論文では、3 次元空間内の任意の曲面を対象として、遭遇型形状提示システムにおいてこれらの形状の提示法を提案する。

一般に遭遇型形状提示システムでは、操作者は仮想物体と指先で点接触するとすれば、Fig.1(a) に示すように予め平面状の実物体を用意しておき、この実物体が、つねに操作者の指先と仮想物体との接触点における接平面となるように、その位置・姿勢を制御すれば、任意の曲面が提示可能である。また操作者が仮想物体と接触していない場合でも、Fig.1(b) に示すように接触点を予測し、形状提示に用いる実物体が接平面となるように予め待機させておくことで、剛な形状提示が可能となる。

しかし、これらは操作者の指先が形状提示すべき曲面に対して充分近い場合には有効であるが、指先が曲面に対して遠くなったり、凹曲面のような形状を提示する場合には、操作者の指先の位置に対して接触点は一意に求まらない、あるいは求めたとしても不連続に求まるため、予測した接触点をそのまま形状提示に用いる実物体の軌跡の設定に用いるのは好ましくない



(a) 接平面近似による形状提示



(b) 接触点予測による剛な形状提示

図 1 遭遇型形状提示システムの原理

Fig. 1 Principle of shape representation in encounter type

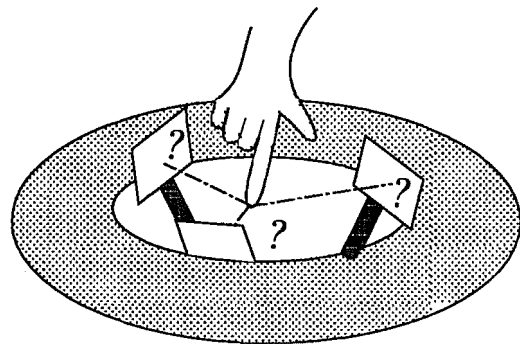


図 2 接触点の不連続性

Fig. 2 Uncontinuity of the contact point

(Fig.2)。

以上を踏まえて本論文では、まず2.節において、一般的な曲面に対して接触点が一意かつ連続になる条件が曲面の形状を規定する量である主曲率で表されることを示す。つぎに3.節では、この条件を用いて形状提示に用いる実物体の軌跡をつねに連続とする設定法を提案する。提案する手法では、実物体の軌跡の設定法を、接触点の連続性に応じて切替え、両者を補間することで連続性を確保している。そして4.節で、提案する手法を二次曲面に対して適用し、その妥当性を数値計算によって確認した結果を示す。5.節は本論文のまとめである。

2. 接触点の連続性と一意性

遭遇型形状提示システムでは、1.節で述べたように、仮想物体に対して操作者が「接触している点」、「接触するであろう点」付近の形状を、予め実物体を用いて近似・構成しておくことで形状提示を行なう。

したがって実物体の軌跡を連続とするためには、少なくとも指先が仮想物体と接触している、あるいは仮想物体に「充分近い」場合に、「接触している点」、「接触するであろう点」が連続に求まらなくてはならない。

そこで本節では一般的な曲面に対して、この「接触している点」、「接触するであろう点」の連続性に関する条件を定式化する。なお以下では「接触している点」、「接触するであろう点」の両者を区別しないで「接触点」と呼ぶことにする。

まず曲面の形状はパラメータ (u, v) によって $p(u, v)$ と表されているとする。また $p(u, v)$ に対して

- $p(u, v)$ は連続2回微分可能かつ正則である
- パラメータ (u, v) は $p_u \times p_v$ の向きが面の外向き法線ベクトルと一致するように取る

とする。このとき時刻 t における指先の位置 $q(t)$ に対して、接触点の位置 $r_0(t)$ と単位法線ベクトル $n_0(t)$ を

$$r_0(t) = p(u_0(t), v_0(t)) \quad (1)$$

$$n_0(t) = \xi(u_0(t), v_0(t)) \quad (2)$$

$$\xi \equiv \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} \quad (3)$$

$$(u_0(t), v_0(t)) \equiv \{(u, v) \mid \|q(t) - p(u, v)\|^2 : \text{最小}\}$$

として求める。つまり曲面 $p(u, v)$ 上の点のうち、指先の位置 $q(t)$ から最も近い点として接触点を求める (Fig.3)。このとき接触点は、指先から曲面 $p(u, v)$ に降ろした垂線の足になるから、接触点の位置 $r_0(t)$ と指先の位置 $q(t)$ との間には、

$$q(t) = p(u_0(t), v_0(t)) + l(t)\xi(u_0(t), v_0(t))$$

$$= r_0(t) + l(t)n_0(t) \quad (4)$$

という線形関係が成立する。ここで $l(t)$ は指先の位置から接触点までの距離に相当し、パラメータ (u, v) の取り方より常に非負である。

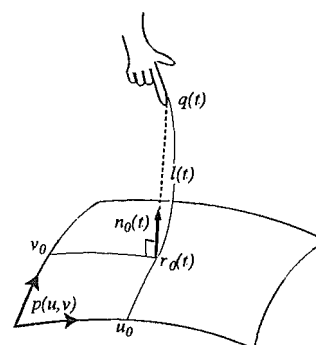


図3 指先と接触点との関係

Fig.3 Relationship between the fingertip and the contact point

そして以上の条件のもとで曲面 $p(u, v)$ の正の主曲率の最大値を κ_M としたとき

$$l(t)\kappa_M < 1 \quad (5)$$

が成立するならば、接触点 $r_0(t)$ は必ず一意に定まり常に連続となることが言える。またとくに曲面が凸の場合にはパラメータ (u, v) の取り方より、 κ_M は負になるので式 (5) は常に成立し、接触点は指先の位置によらず常に一意かつ連続となる。

証明は付録 A. 節に示すが、以後、指先の位置 $q(t)$ が式 (5) を満たすとき、曲面に「充分近い」ということにする。

3. 実物体の位置と姿勢の設定

指先が曲面に「充分近い」場合、つまり式 (5) の条件が成立する場合には、形状提示に用いる実物体の軌跡は接触点と一致するように設定すれば、付録 A. 節で示すように連続であることは保証されるので、この設定法は妥当である。しかし式 (5) の条件が成立しない場合には、もはや接触点の連続性は保証されないため、形状提示に用いる実物体の軌跡を連続とするためには設定法を変える必要がある。そこで形状提示に用いる実物体の軌跡を以下のように設定することで連続性を確保する。

まず指先の位置 $q(t)$ に対して状態

$$\begin{cases} \text{提示状態} & l(t)\kappa_M < 1 \text{ を満たす状態} \\ \text{追従状態} & l(t)\kappa_M \geq 1 \text{ を満たす状態} \end{cases}$$

と定義する。ここで $l(t)$, κ_M は2.節で述べたように、それぞれ指先から接触点までの距離、および曲面 $p(u, v)$ の正の主曲率の最大値である。そしてこのように状態

1: 曲面 $p(u, v)$ の p_u と p_v が線形独立であるということ

を定義した上で、指先の位置 $q(t)$ に対して、実物体の位置・姿勢 $r(t), n(t)$ を

$$r(t) = q(t) + w(t)s_r(t) \quad (6)$$

$$n(t) = s_n(t) \quad (7)$$

と設定する。ただし $w(t), s_r(t), s_n(t)$ は、指先の向き $q_n(t)$ および、式 (8) で定義される、指先から接触点に向かう単位ベクトル $m(t)$ を用いて以下のように定義する (Fig.4)。

$$m(t) \equiv \frac{r(t) - q(t)}{\|r(t) - q(t)\|} \quad (8)$$

・提示状態 ($t = t_0$ で追従状態から遷移)

$$w(t) = (1 - h(t - t_0))\|r(t_0) - q(t_0)\| + h(t - t_0)l(t) \quad (9)$$

$$s_r(t) = s(m(t_0), -n_0(t), \phi_r(t)) \quad (10)$$

$$s_n(t) = s(n(t_0), n_0(t), \phi_n(t)) \quad (11)$$

$$\phi_r(t) = h(t) \cos^{-1}((m(t_0), -n_0(t))) \quad (12)$$

$$\phi_n(t) = h(t) \cos^{-1}((n(t_0), n_0(t))) \quad (13)$$

・追従状態 ($t = t_1$ で提示状態から遷移)

$$w(t) = (1 - h(t - t_1))\|r(t_1) - q(t_1)\| + h(t - t_1)R \quad (14)$$

$$s_r(t) = s(m(t_1), q_n(t), \phi_r(t)) \quad (15)$$

$$s_n(t) = s(n(t_1), -q_n(t), \phi_n(t)) \quad (16)$$

$$\phi_r(t) = h(t) \cos^{-1}((m(t_1), q_n(t))) \quad (17)$$

$$\phi_n(t) = h(t) \cos^{-1}((n(t_1), -q_n(t))) \quad (18)$$

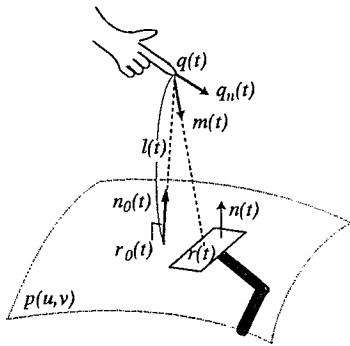


図4 各ベクトルの関係
Fig.4 Relationship among each vectors

ここで R は適当な定数、 $h(t)$ は

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(t) = 1 & (t \geq T) \\ h(t_1) \leq h(t_2) & (t_1 < t_2) \end{cases} \quad (19)$$

を満たす単調増加な補間関数であり、また $s(m, n, \phi)$ は線形独立な単位ベクトル m, n に対して、

$$s(m, n, \phi) \equiv \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin \theta} m + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} n \quad (20)$$

$$\theta \equiv \cos^{-1}(m, n) \quad (21)$$

として定義する。すなわち $s(m, n, \phi)$ は、 m, n の張る平面の法線ベクトルを軸として m を ϕ だけ回転させて得られる単位ベクトルである (Fig.5)。そして

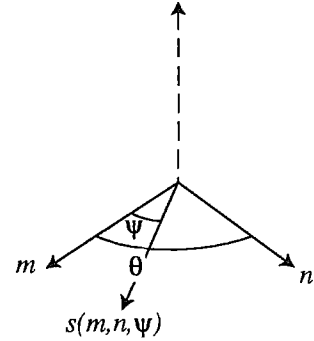


図5 $s(m, n, \phi)$ の定義
Fig.5 Definition of $s(m, n, \phi)$

$\phi_r(t), \phi_n(t)$ は、状態遷移が生じた時点でのベクトル m あるいは n と、遷移後の目標ベクトル $\pm n_0(t), \pm q_n(t)$ とのなす角度を補間した角度であり、 $s_r(t), s_n(t)$ はこれらを補間したベクトルに相当する。

まず式 (6)~(18) のように設定したとき、提示状態および追従状態での $r(t), n(t)$ はそれぞれ連続関数の合成関数であるから、明らかに時刻 t に関して連続である。

また提示状態で $t = t_0$ の場合ならびに追従状態で $t = t_1$ の場合は、簡単な計算により

$$\begin{cases} r(t) = r(t_0) \\ n(t) = n(t_0) \end{cases} \quad (\text{提示状態})$$

$$\begin{cases} r(t) = r(t_1) \\ n(t) = n(t_1) \end{cases} \quad (\text{追従状態})$$

となることが判る。つまり一方の状態から他方の状態に遷移する際も値が一致するので連続となる。

さらに提示状態で $t \geq t_0 + T$ の場合ならびに追従状態で $t \geq t_1 + T$ の場合は式 (19) より

$$\begin{cases} r(t) = q(t) - l(t)n_0(t) \\ = r_0(t) \\ n(t) = n_0(t) \end{cases} \quad (\text{提示状態})$$

$$\begin{cases} r(t) = q(t) + Rq_n(t) \\ n(t) = -q_n(t) \end{cases} \quad (\text{追従状態})$$

となる。

すなわちこれらの式は実物体の軌跡がつねに連続であり、かつ下記を満たすことを意味する。

- 提示状態では最終的に接触点における接平面と一致する (Fig.6)。
- 追従状態では最終的に指先から指の方向に一定の距離 R をおいて追従する (Fig.7)。
- 両方の状態を遷移する際には、指先を廻込みながら次第に接触点での接平面と一致するように (Fig.8(a))、あるいは接触点から離れつつ最終的に指先から距離をおいて追従する (Fig.8(b))。

なお式 (19) 中の T は、状態遷移が生じたときに、一方の状態から他方の状態に完全に遷移するまでに要する期間に相当する。

4. 数値計算結果

3. 節で提案した実物体の軌跡の設定法を Fig.9 に示す 4 種類の二次曲面に対して適用しその妥当性を確認した。なお数値計算に際して制御周期、指先の最大移動速度、状態遷移期間 (式 (19) 中の T)、指先からの追従距離 (式 (14) 中の R) は、それぞれ実機 [12], [13] でのパラメータを元に Table1 のように設定し、各形

表 1 各パラメータ値
Table 1 Values of parameters

制御周期	3ms
指先の最大移動速度	1mm/ms
状態遷移期間 (T)	50ms
指先からの追従距離 (R)	50mm

状の曲率も数 100mm 程度とした。また提示状態・追従状態間の補間関数 $h(t)$ は

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & (0 \leq t < T) \\ 1 & (T \leq t) \end{cases} \quad (22)$$

と一次関数で設定した。さらに式 (14)~(18) に現れる指先の向き $q_n(t)$ は簡単のため、つねに

$$q_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

で固定した。

まず球面の場合に、操作者の指の運動の軌跡 (図中緑線) とこれに対応する実物体の軌跡 (図中赤線) をプロットした結果を Fig.10 に示す。操作者の指先の軌跡は、球面に近づいて球面上をなぞったのち、ふたたび球面から遠ざかるように設定した。球面は凸面であるので、2. 節で述べたように接触点は指先の位置にかかわらず一意かつ連続に求まり、つねに提示状態となる。したがって実物体の軌跡はつねに球面上を動く。また指先が曲面をなぞっている間は、指先の軌跡と実物体の軌跡は一致している。

つぎに一葉双曲面の場合の結果を Fig.11 に示す。図中の緑線・赤線の対応関係は球面の場合と同様である。まず Fig.11(1) は、開始点を変えた 2 通りの指の軌跡

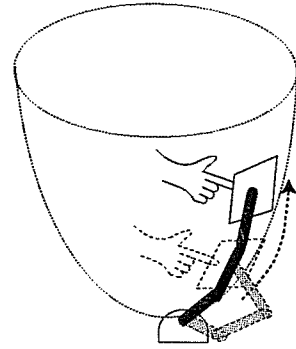


図 6 提示状態

Fig.6 Representative state

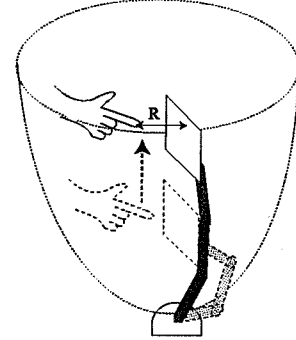
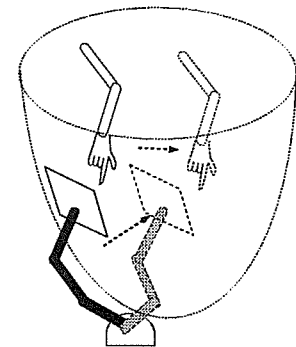
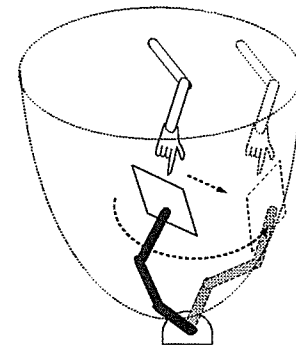


図 7 追従状態

Fig.7 Pursuant state



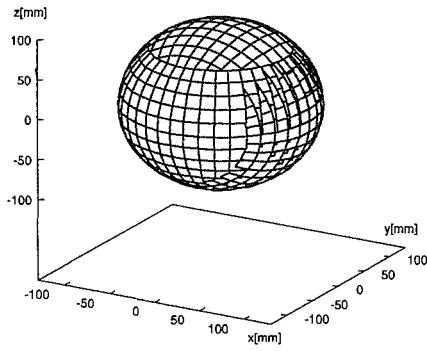
(a) 提示状態→追従状態



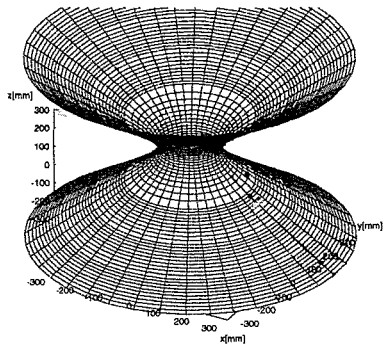
(b) 追従状態→提示状態

図 8 状態遷移時の補間

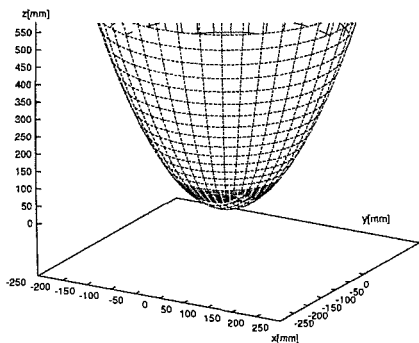
Fig.8 Interpolation during state transition



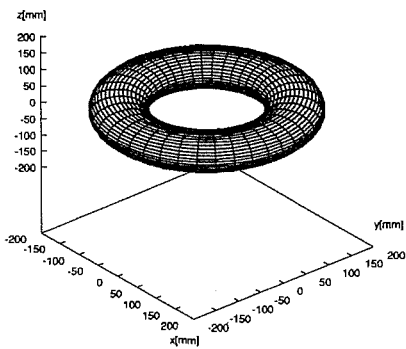
(1) 球面



(2) 一葉双曲面



(3) 楕円放物面

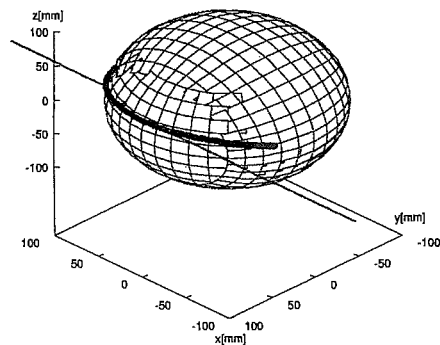


(4) トーラス

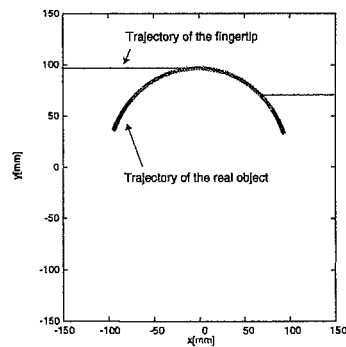
と、それぞれに対応する実物体の軌跡をプロットしたものである。指の軌跡はともに、はじめ曲面に充分近くにある状態から、次第に遠ざかった後に向かい合う曲面に近づき、最後はそれをなぞるように設定してある。一葉双曲面は鞍状面なので指先と曲面との距離に応じて提示状態と追従状態と両方が生じる。Fig.11(2)は、指先が曲面とつねに近い場合の結果で、つねに提示状態になっている。それに対して Fig.11(3)は、指先が曲面から遠くなる場合の結果である。実物体の軌跡は、指先と曲面との遠近に応じて

- 指先が曲面に充分近い場合には、実物体は赤線で示すように形状を提示すべく曲面に沿って移動する(提示状態)。
- 指先が曲面から遠い場合には、実物体は青線で示すように指先から一定の距離をおいて追従する(追従状態)。
- 上記の両状態の間では、実物体は水色線で示すように、その軌跡が連続となるよう移動する(状態遷移)。

となっている状況が窺える。



(1) 概観図



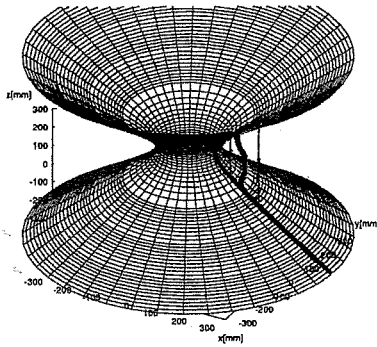
(2) 上面図

図9 検証した曲面
Fig.9 Applied surfaces

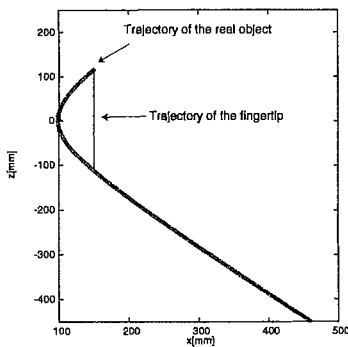
図10 球面の場合の結果
Fig.10 Results of a sphere

さらに楕円放物面の場合に、2通りの指先の軌跡に対応する結果を Fig.12,13 に示す。図中の緑線・赤線の対応関係はいままでと同様である。楕円放物面は凹面なのでやはり提示状態と追従状態の両方が生じており、指先と曲面との距離に応じてそれぞれの状態に遷移し、実物体は、曲面に沿って移動する、あるいは指先に追従して移動する軌跡を示している。

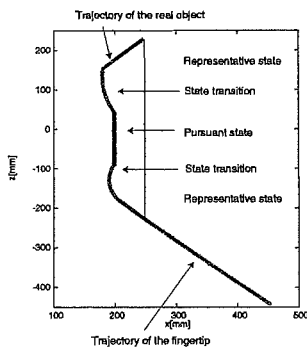
れる指先の軌跡は遠方より曲面に近づきトーラスの上面をなぞった後、トーラスの輪の中を横切って向かい合う面を再びなぞり、最後にトーラスより遠ざかるように設定した。これに対応して図中赤線の軌跡で示される実物体は、指先が上面をなぞっている間は提示状態にあるので、曲面に沿って指先と一致して移動するが、輪の中の部分を通っている間は途中で追従状態に遷移するので、指先と一定の距離をおいて追従している。



(1) 概観図



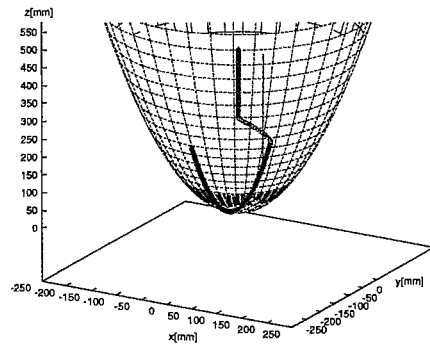
(2) 側面図 (近い場合)



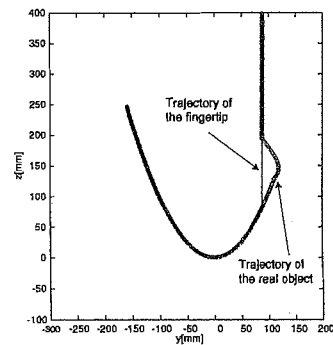
(3) 側面図 (遠い場合)

図 11 一葉双曲面の場合の結果
Fig. 11 Results of a hyperboloid of one sheet

以上の形状は凹・凸・鞍状のいずれかの面のみで構成されているが、これらが組合わさった形状としてトーラスの場合の結果を Fig.14 に示す。図中の緑線で示さ



(1) 概観図



(2) 側面図

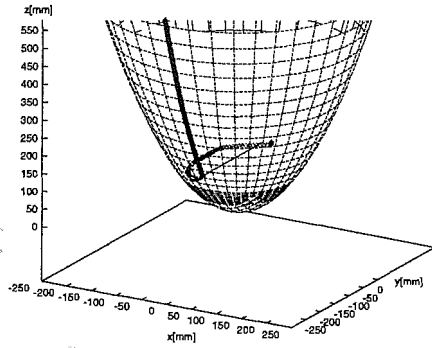
図 12 楕円放物面の場合の結果 (1)
Fig. 12 Results of an elliptic paraboloid

5. おわりに

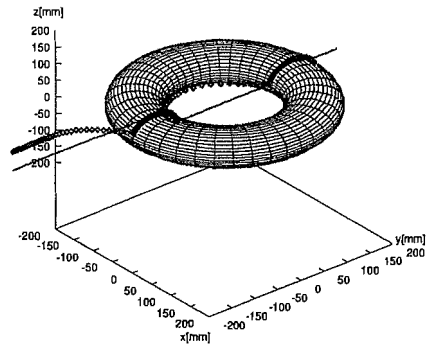
本論文では、遭遇型形状提示システムにおいて曲面形状を提示する場合に、提示に用いる実物体の位置と姿勢が、時間に関して連続となるような設定法を提案した。

提案した手法では、接触点の連続性が 2. 節で述べたように曲面の最大主曲率によって規定されることを用いて、形状提示に用いる実物体の軌跡を

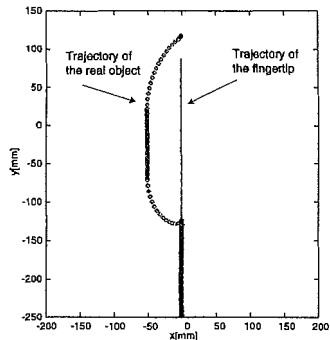
1. まず指先との曲面との遠近を曲面の最大主曲率で判定する。
2. つぎに、その遠近に応じて曲面形状を提示すべきか (提示状態)、あるいは指先から一定の距離をお



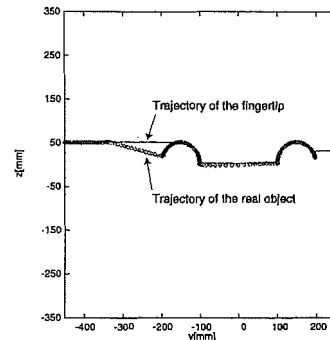
(1) 概観図



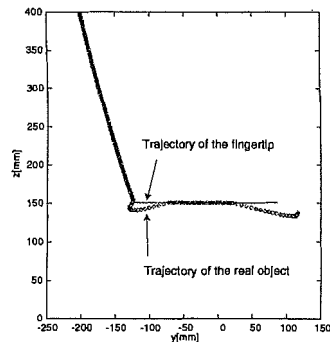
(1) 概観図



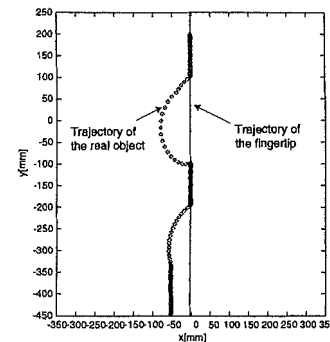
(2) 上面図



(2) 側面図



(3) 側面図



(3) 上面図

図 13 楕円放物面の場合の結果 (2)
Fig. 13 Other results of an elliptic paraboloid

図 14 トーラスの場合の結果
Fig. 14 Results of a torus

いて追従するか(追従状態)を決定する。

3. さらに両方の状態を遷移するとき、実物体の軌跡がその間で連続となるように補間する。

とすることで、その連続性を確保している。本手法は曲面の形状として連続2回微分可能性のみを仮定しており、これを満たす任意の曲面に対して適用可能である。さらに本手法を4種類の曲面形状に対して適用し、その妥当性を示した。

なお本論文では曲面の条件として連続2回微分可能性を仮定したが、この仮定は容易に、実用上よく用いられる区分的連続2回微分可能性に拡張できるので問題ないと思われる。

参考文献

- [1] 平田幸広, 猿渡基裕, 佐藤誠: “モータ駆動による力覚制御能力をもつ空間インタフェース装置の提案”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J74-D-2, No.7, pp.887-894, 1991.
- [2] 岩田洋夫, 中川隆志, 矢野博明: “広稼働範囲フォースディスプレイの開発”, ヒューマンインタフェース, pp.54-64, 1992.
- [3] Lionel Fabiani and Grigore Burdea: “Human Interface Using the Rutgers Master II Force Feedback Interface”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'96)*, pp.54-59, 1996.
- [4] Thomas H. Massie: “Virtual Through Point Interaction”, *International Conference on Artificial Reality and Tele-Existence (ICAT'96)*, pp.19-38, 1996.
- [5] 神徳徹雄, 谷江和雄: “仮想環境のための干渉力発生アルゴリズム”, 計測自動制御学会論文集, Vol.29, No.3, pp.347-355, 1993.
- [6] Yoshitaka Adachi, Takahiro Kumano and Kouichi Ogino: “Intermediate Representation for Stiff Virtual Objects”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'95)*, pp. 203-210, 1995.
- [7] Thomas V Thompson II, David Johnson and Elaine Cohen: “Direct Haptic Rendering of Sculptured Models”, *Symposium on Interactive 3D Graphics '97*, 1997.
- [8] William A. McNeely: “Robotic Graphics: A New Approach to Force Feedback for Virtual Reality”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'93)*, pp. 336-341, 1993.
- [9] Boeing Defense & Space Group: “Implementation of Robotic Graphics for A Virtual Control Panel”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'95)*, Video Proceeding, 1995.
- [10] Koichi Hirota and Michitaka Hirose: “Development of Surface Display”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'93)*, pp. 256-262, 1993.
- [11] Koichi Hirota and Michitaka Hirose: “Simulation and Presentation of Curved Surface in Virtual Reality Environment through Surface Display”, *Virtual Reality Annual International Symposium (VRAIS'95)*, pp. 211-216, 1995.
- [12] 平田亮吉, 星野洋, 前田太郎, 館暉: “人工現実感システムにおける物体形状を提示する力覚ディスプレイ”, 日本バーチャルリアリティ学会論文集, Vol.1, No.1, pp.23-32, 1996.

- [13] 星野洋, 平田亮吉, 前田太郎, 館暉: “仮想触空間における物体形状の実時間提示法”. 日本ロボット学会誌, Vol.15, No.6, pp.868-877, 1997.
- [14] 横小路泰義, ラルフホリス, 金出武雄: “仮想環境への視覚/力覚インタフェース”, 日本バーチャルリアリティ学会論文集, Vol.2, No.4, pp.17-26, 1997.
- [15] 吉川恒夫, 名倉彰宏: “3次元空間用無負荷時非接触型力覚提示装置”, 日本バーチャルリアリティ学会論文集, Vol.3, No.3, pp.75-82, 1998.
- [16] 杉浦光夫: “解析入門II”, 東京大学出版会, 1989.
- [17] 荻上統一: “多様体”, 共立出版株式会社, 1997.

付録

A. 連続性と一意性の証明

A.1 連続性について

指先の位置 $q(t)$ は明らかに時間 t に関して連続であるから、式(1)~(4)で求められる接触点の位置 $r_0(t)$ が指先の位置 $q(t)$ に関して連続であることが言えれば、時間 t に関して連続であることも同時に言える。そこで接触点の位置 $r_0(t)$ が指先の位置 $q(t)$ に関して連続となることを示す。なお以下、時間に関する関数であることを示す (t) は略す。

いま接触点の定義より、接触点の位置 r_0 と指先の位置 q との間には、式(4)で示した線形関係が成立する。ここで新たに関数 f を

$$f(u, v, l) \equiv p(u, v) + l\xi(u, v) \quad (A.1)$$

と定義し、 $f(u, v, l) = q$ を満たす (u, v, l) が連続となる条件を考える。すると逆関数定理より、 $f(u, v, l)$ の Jacobi 行列 $J_f(u, v, l)$ が正則であれば、解が存在する場合、その解は連続となることが言える[16]から、 J_f の行列式 $|J_f|$ が0でないことを示す。まず

$$\begin{aligned} |J_f| &= \begin{vmatrix} p_u + l\xi_u & p_v + l\xi_v & \xi \\ p_u & p_v & \xi \end{vmatrix} \\ &= \begin{cases} \begin{vmatrix} p_u & p_v & \xi \\ p_u & p_v & \xi \end{vmatrix} & (l=0) \\ \begin{vmatrix} p_u & p_v & \xi \\ p_u & p_v & \xi \end{vmatrix} \cdot g\left(\frac{1}{l}\right) \cdot l^2 & (l \neq 0) \end{cases} \quad (A.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\lambda) &\equiv \lambda^2 + \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \lambda + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (A.3) \end{aligned}$$

である。ただし E, F, G, L, M, N はそれぞれ下式の内積で定義される。

$$E \equiv (p_u, p_u), \quad F \equiv (p_u, p_v), \quad G \equiv (p_v, p_v)$$

$$L \equiv (p_{uu}, \xi), \quad M \equiv (p_{uv}, \xi), \quad N \equiv (p_{vv}, \xi)$$

ところで $p(u, v)$ は正則であるから、

$$\begin{vmatrix} p_u & p_v & \xi \end{vmatrix} \neq 0 \quad (A.4)$$

であり、また

$$g(\lambda) = 0 \iff \lambda = \kappa_1, \kappa_2$$

ただし κ_1, κ_2 は曲面 $p(u, v)$ の主曲率

ゆえ、式 (5) の条件のもとでは $g(\frac{1}{l}) \neq 0$ である。したがって連続性が成立する (証明終)。

なお行列 J_f^{-1} は指先の移動に対する接触点の移動の感度を表し、 J_f が正則でない指先の位置は、感度が無限大の点、すなわち特異点に相当する。したがって実物体の軌跡として接触点をそのまま用いた場合、特異点では指先の微小移動に対して、実物体が無限大の感度で移動することが要求されるので、本質的に実現不能となる。

A.2 一意性について

いま曲面 $p(u, v)$ に対して新たに曲面 $p'(u, v)$ を式 (A.5) で定義し

$$p'(u, v) \equiv p(u, v) + l\xi(u, v) \tag{A.5}$$

そして Fig.A.1 のように、この l を 0 から次第に大きくしていく場合を考える。

もし曲面 $p(u, v)$ が自分自身と交わらないにもかかわらず、曲面 $p'(u, v)$ が自分自身と交わる場合には、この $p'(u, v)$ 上の交点に対応する $p(u, v)$ 上の点が複数存在することになる。つまり式 (4) を満たす (u, v, l) が複数存在し接触点の一意性が成立しなくなる。

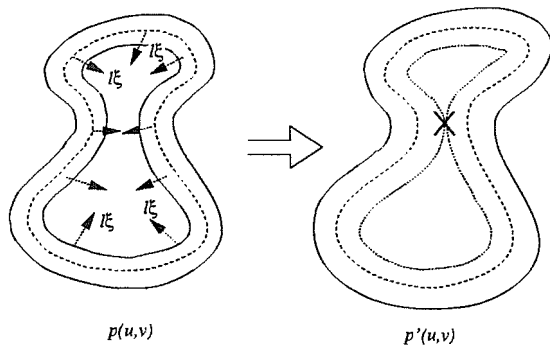


図 A.1 曲面 $p(u, v)$ と $p'(u, v)$ の対応
Fig. A.1 Correspondence of $p'(u, v)$ to $p(u, v)$

そこで式 (A.5) の l が式 (5) の条件を満たしかつ、曲面 $p(u, v)$ が自分自身と交わらないにもかかわらず、曲面 $p'(u, v)$ が自分自身と交わるとして矛盾を導く。

まず一般性を失わずに p_u, p_v が主曲率ベクトルに一致すると仮定して良い。そしてこの仮定の下で曲面 $p'(u, v)$ の主曲率 κ'_1, κ'_2 を求めると、簡単な計算により

$$\kappa'_1(u, v) = \frac{\kappa_1}{1 - l\kappa_1}, \quad \kappa'_2(u, v) = \frac{\kappa_2}{1 - l\kappa_2} \tag{A.6}$$

となる。 l に対する仮定より式 (A.6) の κ'_1, κ'_2 はつねに連続である。ここでさらに曲面 $p'(u, v)$ 上の局所座標系 (u', v') として

$$\begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l\kappa_1(u, v) & 0 \\ 0 & 1 - l\kappa_2(u, v) \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

を満たす偏微分方程式の解 (u', v') を新たに設定する。すると p'_u, p'_v はやはり曲面 $p'(u', v')$ の主曲率ベクトルと一致する。そしてこのとき、曲面 $p(u, v)$ 上の任意の領域 A と、式 (A.7) で定義される $(u, v), (u', v')$ 間の座標変換に対して、積分の変数変換に関する公式より

$$\int_A \kappa_1 \kappa_2 du dv = \int_{A'} \kappa'_1 \kappa'_2 du' dv' \tag{A.8}$$

が成立する。ただし A が曲面 $p(u, v)$ 上の任意の領域、 A' は A が $(u, v) \rightarrow (u', v')$ の座標変換によって移された曲面 $p'(u', v')$ 上の領域である。

一方、Gauss-Bonnet の定理より、 $p(u, v)$ が閉曲面で p_u, p_v が曲面の主曲率ベクトルと一致している場合、上式の積分に対して

$$\int_S \kappa_1 \kappa_2 du dv = 2\pi\chi(S) \tag{A.9}$$

が成立することが知られている [17]。ここで S は閉曲面全域を表し、また右辺の $\chi(S)$ は S の Euler 数と呼ばれる整数値で曲面が自分自身と交わる度に値が変化する。

ところで最初の仮定より、曲面 $p(u, v)$ は自分自身と交わらないとしているが、曲面 $p'(u, v)$ は自分自身と交わるとしているので、明らかに両者の Euler 数は異なり矛盾が生じる (証明終)。

なお証明の途中で曲面が閉曲面であるとしたが、これは議論の本質は変えずに閉曲面でない場合にも拡張できるので問題ない。

(1998年10月26日受付)