

東京大学大学院 新領域創成科学研究科  
先端エネルギー工学専攻

平成26年度  
修士論文

電子乱流スペクトルのジャイロ運動論的シミュレーション

2015年2月提出  
指導教員 小川 雄一 教授

47-136053 河合 智賀

# 目次

第 1 章	序	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	2
1.3	全体の構成	3
第 2 章	ジャイロ運動論モデル	4
2.1	ジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 系	5
2.2	電子温度勾配駆動 (ETG) モード: 線形分散関係	9
第 3 章	準 2 次元乱流と自己組織化	15
3.1	ジャイロ運動論モデルと流体モデルとの比較	15
3.2	準 2 次元乱流のスペクトル構造:デュアルカスケードと Rhines スケール	17
第 4 章	電子乱流スペクトルと構造形成	21
4.1	シミュレーションモデルと設定	21
4.2	ジャイロ運動論モデルと流体モデルとの比較	22
4.3	2 次元エネルギースペクトルの非等方構造: $\tau, \rho_s$ 依存性	30
4.4	ETG 乱流における帯状流の形成過程の差異	33
第 5 章	結論	35
付録 A	Landau 減衰	38
	参考文献	43

# 第 1 章

## 序

### 1.1 研究の背景

一般にプラズマの物理は通常の中性流体における物理と比較して波動、不安定性、乱流などにおいて大きな違いが見られ、中性流体には見られないような多種多様な現象に支配されている。これらはプラズマを構成する電子やイオンといった多数の荷電粒子がそれら自身が作り出す電磁場と強く結合し、粒子間の衝突にとどまらない集団的な運動を引き起こすためである。核融合プラズマの研究においては、熱や粒子の輸送現象を理解することは高性能な閉じ込めの達成に向けて重要な研究課題であり、これまでに様々な観点から研究が重点的に行われてきた。プラズマの輸送現象に関して、荷電粒子同士の Coulomb 衝突によって説明される（新）古典輸送による予測を大きく上回る輸送係数が実験において観測されており、「異常輸送」として核融合研究の初期の段階からその存在が知られているものの、その統一的な理論モデルは今も議論の対象である。核融合炉心プラズマは高温・希薄な気体であるために Coulomb 衝突による粒子間の衝突周波数が中性流体に比べて極めて小さい（ほぼ）無衝突の状態であるという特徴を持っており、そのような領域における異常輸送はプラズマ中の乱流が主要な原因と考えられている [1]。このため、異常輸送は「乱流輸送」とも呼ばれている。イオン/電子温度勾配 (ITG/ETG) モードは磁場閉じ込めプラズマ中に存在する密度・温度勾配によって駆動される微視的な不安定性であるドリフト波不安定性の一種で、この不安定性によって駆動される乱流が炉心プラズマにおける乱流輸送を引き起こす原因の一つと考えられている [2]。ドリフト波は磁力線方向の波長は装置スケール程度である一方、磁力線と垂直方向の波長はイオン/電子のジャイロ半径程度、という非等方なモード構造を持つ。このため、ドリフト波乱流の解析は核融合プラズマの研究に広く用いられる MHD(電磁流体力学) による記述では不十分である。MHD で記述されるようなプラズマの巨視的な運動 (特性スケール長 装置サイズ) と異なり、プラズマの微視的乱流 (特性スケール長  $\sim$  イオン/電子のジャイロ半径) においては有限ジャイロ半径効果が現れる。また、プラズマ中の波と粒子の相互作用によって引き起こされる Landau 減衰のような無衝突

減衰機構は、速度空間構造を扱う運動論によって初めて取り扱うことが可能となる。したがって、プラズマ乱流を記述する際は空間・速度の計6次元の位相空間における粒子運動論を解く必要がある。一方、ITG/ETGモードの時間スケール(反磁性ドリフト周波数)はプラズマにおける最も速い時間スケールであるジャイロ周波数 $\Omega_s$ と大きな隔たりがあり、6次元の大きな自由度を持つ粒子分布関数を直接扱うことは現代の大型計算機を用いても困難である。この問題に対して、有限Larmor半径効果やLandau減衰などの運動論的效果は残しつつ粒子の速いジャイロ運動の位相について平均化したジャイロ運動論が導出された[3, 4]。この平均化により、速度空間次元を1つ落とすとともに計算のタイムステップを通過時間 $\omega_t = \frac{v_{th}}{L_n} \ll \Omega_s$ 程度に取ることが可能となり、プラズマ乱流の時空間スケールに着目したときに必要とされる計算資源を大幅に節約することが可能となる。近年の計算機資源の発達に伴い、ジャイロ運動論を第一原理モデルとしたプラズマ乱流の数値シミュレーションが盛んに行われている。

## 1.2 研究の目的

プラズマ乱流輸送の研究において、ある条件のもとで密度・温度勾配が急峻となるH-modeや内部輸送障壁が形成され乱流輸送が低減される、という現象が知られている。そのようなプラズマ乱流を抑制して閉じ込め改善に寄与する現象として、磁気面(あるいは等圧面)に沿ってプラズマ中に励起される帯状のシア流(帯状流)がプラズマ乱流による輸送レベルを抑制する、ということが数値シミュレーションによって見出され[5]、実験でも確認されている[6]。この帯状流を励起する機構として様々な経路が考えられているが、そのうちのひとつとしてプラズマ乱流が非線形効果によって大きな構造を自発的に創り出す「自己組織化現象」が提案されている[7, 8]。核融合プラズマは強い閉じ込め磁場がもたらす非等方性により、ポロイダル断面上の準2次元系としてみなすことができる。このような準2次元系流体の乱流に関して、エネルギースペクトルが通常とは逆向きに長波長側へとカスケードすることでより大きな構造をつくろうとすることが知られている[9]。プラズマ乱流における長波長の構造形成に関しては、以上に述べた帯状流やトロイダル系の電子スケール乱流におけるストリーマ(小半径方向に細長く伸びた構造を持つモード)が熱・粒子の輸送との関連から研究されてきたが、そのような流れをもたらす乱流スペクトル構造はよくわかっていない。運動論的プラズマのスペクトル構造に関する先行研究では、中性流体には見られない運動論的效果の一つである有限Larmor半径効果による修正を受けた $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの位相混合が引き起こす乱流エントロピーのカスケードが極短波長領域のスペクトル構造のべき乗則を決定することが示された[10, 11]。一方、上に述べたような例の中間的な波数領域に位置する現象についてはプラズマ乱流の流体近似であるHasegawa-Mima(H-M)方程式におけるデュアルカスケードが知られているが、運動論的プラズマ乱流においてはその性質がこれまで詳しく検討されてこなかった。当研究において、高解像度のジャイロ運動論的Vlasovシミュレーションを行うことで、プラズマ乱流中での

構造形成と中性流体における乱流理論との関連を2次元エネルギースペクトルによる詳細な解析を通じて明らかにすることを目的とした。これまでのジャイロ運動論的シミュレーションにおいては、多数のプラズマ粒子を仮想的な超粒子にまとめてその移流を解く粒子法コードによる計算が広く行われてきた。粒子法は計算コストを比較的小さく抑えられる一方、離散的な粒子を扱う上でサンプリングノイズの問題があり、乱流場のエネルギースペクトルの詳細な構造を検討することは困難であった。一方、粒子の分布関数を6次元位相空間における流体と見なしてその連続体の移流を解く Vlasov コードにおいては、粒子法コードと比較して計算量は増大するがサンプリングノイズのような問題がなく、スペクトル構造の議論を行う際に有効な手法であると考えられる。本研究では、電子の運動が主要な役割を果たすスケールにおける減衰乱流、ETG 乱流についての非線形シミュレーションを高解像度の運動論的 Vlasov コードを用いて行い、自己組織化による流れの構造形成とエネルギースペクトルの関連を検討した。

### 1.3 全体の構成

本論文は次のように構成される。第2章では、本研究におけるモデリングであるジャイロ運動論と ETG モードの性質についてその概略を説明する。ここではジャイロ運動論的 Vlasov-Maxwell 系とそれが満たすべき保存則、運動論的効果の一例である Landau 減衰、そして乱流を駆動するエネルギーソースとなる ETG モードの線形分散関係について確認する。第3章において、準2次元系乱流の特徴をエネルギースペクトルの構造との関連から述べる。ここでは流体近似としての H-M 方程式を導出し、帯状流のような流れの構造形成がおきる背景について議論する。以上の背景知識を元に、第4章では非線形シミュレーションを行った結果について、第2,3章で確認した事項をもとに検討する。

## 第 2 章

# ジャイロ運動論モデル

本章では、本研究での解析に用いた基礎方程式であるジャイロ運動論的方程式系について説明する。

核融合プラズマにおいて、高温の炉心領域では粒子間の Coulomb 衝突周波数は  $\omega_c \propto T^{-3/2}$  の依存性があり、高温になるほど衝突効果は小さくなる。着目している物理現象の時間スケールにおいて局所的な熱的平衡を保つほど粒子間の衝突が十分でない場合、Maxwell-Boltzman 分布に従わないような速度空間構造がプラズマのダイナミクスにおいて重要な役割を果たす。このような場合においては必然的に運動論的記述が必要となる。運動論モデルは 6 次元位相空間（空間 3 次元×速度 3 次元）における粒子の分布関数によって記述される。原理的にはプラズマに含まれる粒子すべてについての位置と速度が求めればプラズマ全体のダイナミクスは決まるが、粒子数は  $\sim 10^{20} m^3$  のオーダーでありこれらすべての運動について解くことは現実的ではない。したがって、何らかの統計的な描像が必要となる。N 個の粒子によって構成される系について関数  $N_s$  を「s 種の粒子 1 が位相空間中の  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  の位置にあり、粒子 2 が…あるときにそれぞれの位置で値をもつ関数」と定義したとき、すなわち

$$N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)) \quad (2.1)$$

としたとき、関数  $N_s$  は次のような式に従う。

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{\partial N_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E}^M + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}^M \right) \cdot \frac{\partial N_s}{\partial \mathbf{v}_i} \quad (2.2)$$

ここで加速度の項は電場による力と Lorentz 力によって表され、電場  $\mathbf{E}^M$  と磁場  $\mathbf{B}^M$  は Maxwell 方程式より求められる：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_s q_s \int N_s d^3v \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s \int \mathbf{v} N_s d^3v \quad (2.4)$$

これは単に  $N$  個の粒子が電磁的な力を感じながら運動する様子を一つの関数にまとめただけなので、統計的な記述を用いるため、関数  $F_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_1 \cdots d\mathbf{v}_N$  を「粒子1が位相空間中の  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1)$  を中心とした  $(d\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{v}_1)$  の粒子2が…となる確率」と定義する。この関数  $F_N$  は Liouville 方程式として知られる次のような式に従って時間発展する。

$$\frac{DF_N}{Dt} \equiv \frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_i \left( v_i \frac{\partial F_N}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial F_N}{\partial v_i} \right) = 0 \quad (2.5)$$

この表式は  $N$  個すべての運動に関する情報を含んでいるので、これを粒子1以外について積分して1体分布関数  $f_1$  を得る。

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int F_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2, \dots, d\mathbf{v}_N \quad (2.6)$$

これは  $6N$  次元位相空間における確率密度を表す関数  $F_N$  によって離散的な粒子密度  $N_s$  の重み付け平均をとったものに相当する：

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \langle N_s \rangle \equiv \int F_N N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2, \dots, d\mathbf{v}_N \quad (2.7)$$

式(2.2)をこの意味において平均をとり、次の式を得る。

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = C_s(f_s, f_{s'}) \quad (2.8)$$

ただし  $s$  は粒子種 (電子ないしイオン)、 $C_s(f_s, f_{s'})$  は粒子種  $s$  と  $s'$  の二体間相互作用の効果を1体分布関数で近似的に表したもので、衝突項 (Collision term) と呼ばれる。マクロな場の量  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  については、例えば電場  $\mathbf{E}$  は次のように定義される。

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^M \rangle = \int F_N \mathbf{E}^M d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2, \dots, d\mathbf{v}_N \quad (2.9)$$

式(2.8)は Boltzmann 方程式、衝突項を無視したものは Vlasov 方程式と呼ばれる。

## 2.1 ジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 系

異常輸送はプラズマ中の微視的不安定性によって駆動される乱流 (特に密度・温度勾配によって駆動される不安定性が引き起こすドリフト波乱流) に起因すると考えられる。プラズマ中の特徴的な時空間スケールとしては背景磁場中での荷電粒子のジャイロ運動に伴うジャイロ周波数  $\Omega_s = \frac{eB_0}{mc}$ , ジャイロ半径  $\rho_{ts} = \frac{v_{ts}}{\Omega_s}$  ( $v_{ts}$  は粒子種  $s$  における熱速度) が挙げられるが、ドリフト波乱流の周波数  $\omega$  がジャイロ周波数  $\Omega_s$  よりずっと小さいため、粒子の速いジャイロ運動に関して平均化して速度空間依存性を1次元落とすことによって着目する物

理現象を捉えつつ数値計算のコストを削減することができる。今回の研究ではプラズマの圧力が磁気圧  $\frac{B_0^2}{8\pi}$  に対して十分低い低ベータ極限を扱っているため、以下では磁場揺動の影響を無視した静電近似での定式化を述べる。

### 2.1.1 ジャイロ運動論的オーダーリング

Vlasov 方程式 (2.8) は原理的にプラズマ中に含まれる現象が、ドリフト波とそれに関わる乱流輸送のみならず、サイクロトロン波や光速の電磁波など非常に幅広い時間・空間スケールを内包されており、解析的にも数値的にも取り扱いが困難である。プラズマ乱流を取り扱う場合は着目する時間・空間スケールは粒子のジャイロ周波数  $\Omega_s$  よりずっと遅く、揺動成分の波長が  $\rho_{ts}$  程度となり、装置サイズ  $L$ 、あるいは密度勾配のスケール長  $L_n \equiv |\nabla \ln n|^{-1}$  に比べてずっと小さいものを考える。ジャイロ運動論では Vlasov 方程式についてジャイロ運動による位相の速い変化に対して平均化することで、ジャイロ位相に依存しない方程式系を得る。この平均化の操作によりサイクロトロン波のようなジャイロ周波数より速いスケールの変化が無視され、速度空間方向の次元が1つ落ちた5次元位相空間腕で Boltzmann 方程式を扱うことができるようになる。位相空間上で Boltzmann 方程式を扱うことが可能になる。ジャイロ運動論的オーダーリングとして、考察の対象とする乱流について次のようなものを仮定する。

$$\begin{aligned}
 \text{空間スケール: } \frac{k_{\perp}^{-1}}{L_n} &\sim \frac{\rho_{ts}}{L_n} \\
 \text{時間スケール: } \frac{\omega}{\Omega_s} &\ll 1 \\
 \text{乱流場の非等方性: } \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} &\sim \frac{\rho_{ts}}{qR} \ll 1 \\
 \text{揺動振幅: } \frac{\delta n}{n} &\sim \frac{e\phi}{T} \ll 1 \\
 \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} &\sim \frac{\omega}{\Omega_s} \sim \frac{e\phi}{T} \sim \frac{\rho_{ts}}{L_n} \sim O(\epsilon_g)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$qR$  は磁力線方向の連結長 ( $q$  は安全係数) である。ここで導入された微小パラメータ  $\epsilon_g$  は摂動展開パラメータとして用いられる。ジャイロ運動論的方程式系の導出は、位相空間の座標  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  をジャイロ位相に依存しない新しい座標系  $(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}})$  に変換することに帰着される。この方法ははじめパルレーニング表示と呼ばれる表式に対して再帰的な摂動法を用いることで求められたが [4]、近年 Hamiltonian による定式化と Lie 変換による系統的な導出も広く用いられている。ここではその詳細な導出は参考資料 [3] に譲り、その基本的な性質を述べるに留める。位相空間中の座標  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  はジャイロ半径から定まるドリフトパラメータ  $\epsilon_D$  についての摂動展開により、ジャイロ位相に依存しない案内中心座標  $(\mathbf{R} = \mathbf{x} - \rho_{ts} \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}, \mu = mv_{\perp}^2 / (2B), \xi)$  に変換される。ただし  $\rho_{ts} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{v}}{\Omega_s}$  はジャイロ半径の向きと大きさを持つベクトルで、 $\mathbf{R}$  がジャイロ運動をする粒子の旋回の中



心となるように定義されている。さらにそこから、揺動成分が存在しても  $\mu$  が揺動振幅の大きさを表す微小パラメータ  $\epsilon_g$  について任意の次数まで厳密に保存するジャイロ中心座標  $(\bar{\mathbf{R}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\mu})$  に変換される。このような変換により、乱流による揺動成分が存在するときでも系はジャイロ位相  $\xi$  に依存しないようなものとなり、速度空間依存性が1次元落ちた数値計算しやすい形となる。ジャイロ中心座標での Hamiltonian は以下のように与えられる。

$$H_s = \frac{1}{2} m_s v_{\parallel}^2 + \mu B_0 + q_s \langle \phi(\bar{\mathbf{R}} + \bar{\rho}_{ts}) \rangle_{\alpha} \quad (2.11)$$

ただし、ここで  $\langle \bullet \rangle_{\alpha} \equiv \frac{1}{2\pi} \int \bullet d\alpha$  はジャイロ位相に関する平均化である。ここから、次のようなジャイロ運動論的 Vlasov 方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{F}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\mu}; t)}{\partial t} + \{\bar{\mathbf{R}}, H_s\} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{R}}} \bar{F} + \{\bar{v}_{\parallel}, H_s\} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{v}_{\parallel}} = C(\bar{F}) \quad (2.12)$$

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 4\pi q_e (n_i(\mathbf{x}) - n_e(\mathbf{x})) \quad (2.13)$$

ここで  $\{, \}$  は  $(\bar{\mathbf{R}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\mu})$  に関する Poisson 括弧である。当研究では簡単のため、背景磁場が曲率をもたず空間一様であるシアレスラブ配位を用いている。この近似において移流項は Poisson 括弧から次式のように求められる。

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \{\bar{\mathbf{R}}, H_s\} = \bar{v}_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{c}{B_0} \mathbf{b} \times \nabla \langle \phi \rangle_{\alpha} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\bar{v}_{\parallel}}{dt} = \{\bar{v}_{\parallel}, H_s\} = \frac{q_s}{m_s} \mathbf{b} \cdot \nabla \langle \phi \rangle_{\alpha} \quad (2.15)$$

ここで Poisson 方程式に現れる粒子密度は粒子位置による分布関数から求められることに注意する。ジャイロ中心座標で定義された分布関数  $\bar{F}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\mu}; t)$  により求めた粒子密度  $n^{(g)}(\bar{\mathbf{R}})$  と粒子位置によって定義された分布関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  より求めた密度  $n(\mathbf{x})$  は一致せず、次のような関係となる。

$$\begin{aligned} n_s(\mathbf{x}) &= \int \bar{F}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) \delta[(\bar{\mathbf{R}} + \bar{\rho}) - \bar{\mathbf{x}}] d^6 \bar{\mathbf{Z}} \\ &- \frac{n_0 q_s}{T_s} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} (1 - \exp(-k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2) I_0(k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2)) \exp(i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{R}}) \\ &= \int \sum_{\mathbf{k}} \bar{F}_{\mathbf{k}}(\bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) J_0(k_{\perp} \rho_{ts}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{R}}) d\mathbf{v} \\ &- \frac{n_0 q_s}{T_s} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} (1 - \exp(-k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2) I_0(k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2)) \exp(i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし  $J_0$  は0次のベッセル関数、 $I_0$  は0次の変形ベッセル関数である。また

$$F_{\mathbf{k}}(\bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) = \left( \frac{1}{2L} \right)^3 \int_{-L}^L F(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{R}}) d^3 \bar{\mathbf{R}} \quad (2.17)$$

は分布関数の Fourier 成分である。式 (2.17) は、粒子位置での密度は第 1 項の「ジャイロ中心密度 (に有限 Larmor 半径効果を表す  $J_0$  を加味したもの)」と第 2 項のジャイロ中心変換による分極密度の和によって表されることを意味する。

#### 近似式：断熱応答と長波長近似

プラズマ中における代表的な時空間スケールとしてジャイロ周波数  $\Omega_s$  と熱速度で評価したジャイロ半径  $\rho_{ts}$  を考えると、イオンが主な役割を担う空間スケールと電子が主な役割を担う時空間スケールに  $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \sim 43$  程度の違いが生じる。(ジャイロ運動論的)Vlasov コードは 5 次元位相空間の自由度があるため、電子とイオン双方の時空間スケールを取り込むような解像度を要求すると計算コストが跳ね上がり、現実的に解くことが極めて困難となるこれを回避するために、着目する粒子種を限定し他の粒子種の応答について近似的な取り扱いをすることが行われる。ここで簡単のため分布関数を巨視的な平衡分布を表す  $F_0$  と電子スケールの乱流を表す擾乱  $\delta F$  に分離する： $F = F_0 + \delta F, F_0 \gg \delta F$  平衡分布  $F_0$  においては電子とイオンの密度は準中性条件により等しいとし、密度擾乱  $\delta n$  について考えると、粒子位置の密度の式 (2.17) より次のように表される。

$$\delta n_s(\mathbf{x}) = \int \sum_{\mathbf{k}} \delta \bar{F}_{\mathbf{k}}(\bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) J_0(k_{\perp} \rho_{ts}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{R}}) d^3 \mathbf{v} - \frac{n_0 q_s}{T_s} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} (1 - \exp(k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2) I_0(k_{\perp}^2 \rho_s^2)) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.18)$$

電子乱流の空間スケール  $k_{\perp} \rho_{te} \sim 1$  に着目する場合、イオン密度において最右辺第 1 項の  $J_0(k_{\perp} \rho_{ti}) \sim 0$  また最右辺 2 項の  $\Gamma_0(k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2) \equiv \exp(-k_{\perp}^2 \rho_{te}^2) I_0(k_{\perp}^2 \rho_{te}^2) \sim 0$  とみなせる。これはイオンの密度変化について Boltzmann 分布

$$n_i(\mathbf{x}) = n_0 \exp\left(\frac{q_i \phi}{T_i}\right) \sim n_0 \left[1 + \frac{q_i \phi}{T_i} + \dots\right] \quad (2.19)$$

で近似されるような断熱応答を仮定できる、ということの意味する。上式的最右辺第 2 項が  $\delta n_i \sim \frac{n_0 q_i}{T_i} \phi$  と表せられることに相当する。電子に関しては、当研究では  $k_{\perp} \rho_{te} < 1$  の長波長であることを仮定して  $k_{\perp}^2 \rho_{te}^2$  について 1 次の項までとって分極密度の項について  $\Gamma_0(k_{\perp}^2 \rho_{te}^2) \sim 1 - k_{\perp}^2 \rho_{te}^2$  としている。これを実空間で表示すると、Poisson 方程式は

$$-\left(\nabla^2 + \frac{\rho_{te}^2}{\lambda_{De}^2} \nabla_{\perp}^2\right) \phi + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \phi = 4\pi \left(q_e \int \bar{F}_e(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) J_0(k_{\perp} \rho_{te}) d^3 \mathbf{v} + q_i n_0\right) \quad (2.20)$$

と表される。ただし  $\lambda_{Ds}^2 = \frac{T_s}{4\pi q_s^2 n_s}$  は粒子種  $s$  の Debye 長である。一方、イオン乱流の空間スケール  $k_{\perp} \rho_{ti} \sim 1$  に着目する場合、 $k_{\perp} \rho_{te} \ll 1$  より  $\Gamma(k_{\perp}^2 \rho_{te}^2) \sim 1$  なので最右辺の電子に関する項は第 1 項のみが残る。ここでイオンに比べて電子の運動は十分速く  $k_{\parallel}$  方向に移動できると考えると、電子密度について断熱応答を仮定する扱いが妥当となる。ただし、電子は  $k_{\parallel} = 0$  の磁気面上で一定の帯状流ポテンシャルに対しては電場を感じ

ず応答できないため、Poisson 方程式は次のように修正される。

$$-\left(\nabla^2 + \frac{\rho_{ti}^2}{\lambda_{Di}^2} \nabla_{\perp}^2\right) \phi + \frac{1}{\lambda_{De}^2} (\phi - \langle \phi \rangle_f) = 4\pi \left( q_i \int \bar{F}_e(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mu}, \bar{v}_{\parallel}; t) J_0(k_{\perp} \rho_{ti}) d^3 \mathbf{v} + q_e n_0 \right) \quad (2.21)$$

ただしここで  $\langle \bullet \rangle_f$  は磁気面上でとった平均である。イオンを運動論的に、電子を断熱応答と仮定した場合はこのような効果から静電ポテンシャルの帯状流成分が発達しやすいと考えられる。一方、電子を運動論的に扱いイオンを断熱応答と仮定する際は、物理的な描像としては電子スケールのドリフト波周波数がイオンのジャイロ運動周波数より十分遅いという点を考慮したものであり、イオン系と比べて帯状流の形成にかかる物理機構は異なったものが予想される。この点に関して、流体近似における考察の観点から次章で議論する。

### エネルギー保存則

式 (2.12) に関して、式 (2.20) における  $\phi$  の表式を用いて (イオンについて断熱近似を仮定して) 速度空間で  $H_e$  のモーメントを取ると実空間におけるエネルギー保存則が誘導される。

$$\frac{dE_{total}}{dt} \equiv \int H_e \frac{\partial \bar{F}_e}{\partial t} D d^6 \bar{\mathbf{Z}} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_f}{dt} = \frac{\partial \bar{F}_e}{\partial t} \Big|_c \quad (2.22)$$

$$E_k = \int \left( \frac{1}{2} m \bar{v}_{\parallel}^2 + \bar{\mu} B_0 \right) \bar{F}_e D d^6 \bar{\mathbf{Z}} \quad (2.23)$$

$$E_f = \int (q_e \langle \phi \rangle_{\alpha}) \bar{F}_e D d^6 \bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{8\pi} \int \left( |\nabla \phi|^2 + \frac{\rho_{te}^2}{\lambda_{De}^2} |\nabla_{\perp} \phi|^2 + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} |\phi|^2 \right) d^3 \bar{\mathbf{R}} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_e}{\partial t} \Big|_c = \int q_e \langle \phi \rangle_{\alpha} C(\bar{F}_e) D d^6 \bar{\mathbf{Z}} \quad (2.25)$$

ただし  $D d^6 \bar{\mathbf{Z}}$  はヤコビアンを含んだ積分要素である。式 (2.22) を導出する際、 $F$  の境界条件として実空間方向に対して周期境界条件と速度空間方向について境界値で 0 とする固定端条件を仮定した。非線形相互作用が支配的な乱流状態においてもこれらは厳密に保存するため、これらの量が保存しているかどうかは非線形領域におけるコードの健全性を検討する上で重要である。

## 2.2 電子温度勾配駆動 (ETG) モード：線形分散関係

密度・温度勾配によって駆動されるドリフト波の不安定性は磁化プラズマ中における乱流を駆動するエネルギーの注入源として考えられる。電子の運動が主な役割を果たすスケールで、温度勾配が一定値を超えたときに励起されるような不安定性を電子温度勾配駆動 (ETG) モードと呼ぶ。以下では後に説明するように本研究で用いたシアレスラブ配位における ETG モードの線形分散関係について説明する [12]。電子プラズマのジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 方程式系 (2.13),(2.13),(2.17) を線形化して、1 次の項の方程式系として以

下のようなものを得る:  $\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1, F_0 \gg F_1$

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t} + v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{R}}} \bar{F}_1 + \frac{c}{B_0} (\mathbf{b} \times \nabla \langle \phi \rangle_{\alpha}) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{R}}} \bar{F}_0 - \frac{e}{m} \mathbf{b} \cdot \nabla \langle \phi \rangle_{\alpha} \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial v_{\parallel}} = 0 \quad (2.26)$$

$$n_{1e}(\mathbf{x}) = \int \bar{F}_1(\bar{\mathbf{R}}, \mu, v_{\parallel}; t) \delta[(\bar{\mathbf{R}} + \bar{\rho}_{te}) - \mathbf{x}] d^6 \bar{\mathbf{Z}} \quad (2.27)$$

$$- \frac{q_e n_0}{T_e} \sum_k [1 - \exp(-k_{\perp}^2 \rho_{te}^2) I_0(k_{\perp}^2 \rho_{te}^2)] \phi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi(q_e n_e(\mathbf{x}) + q_i n_i(\mathbf{x})) \quad (2.28)$$

ただし  $\Gamma(b_e k)$

ここで y, z 方向に周期境界条件を仮定し、この方向には平面波で表されるとすると

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{R}}, \mu, v_{\parallel}; t) = \bar{F}_1(\bar{R}_x, \mu, v_{\parallel}; t) \exp(ik_y \bar{R}_y + ik_z \bar{R}_z - i\omega t) \quad (2.29)$$

となる。一方、x 方向には温度・密度の平衡分布があると仮定すると、解をこのような単一の平面波で近似することは妥当ではない。分布関数と静電ポテンシャルについて x 方向に Fourier 級数展開すると

$$\bar{F}_1(\bar{\mathbf{R}}, \mu, v_{\parallel}; t) = \sum_{k_x} \bar{F}_{1k_x}(\mu, v_{\parallel}; t) \exp(ik_x \bar{R}_x + ik_y \bar{R}_y + ik_z \bar{R}_z - i\omega t) \quad (2.30)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{k_x} \phi_{k_x} \exp(ik_x \bar{R}_x + ik_y \bar{R}_y + ik_z \bar{R}_z - i\omega t) \quad (2.31)$$

$$\langle \phi(\bar{\mathbf{R}} + \bar{\rho}_{te}) \rangle_{\alpha} = \sum_k \phi_{k_x} J_0(k_{\perp} \bar{\rho}_{te}) \exp(ik_x \bar{R}_x + ik_y \bar{R}_y + ik_z \bar{R}_z - i\omega t) \quad (2.32)$$

と表される。ここでは平衡分布関数  $F_0$  について Maxwell 分布を仮定する。

$$\bar{F}_0 = \frac{n_0(x)}{(2\pi T_e(x))^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mu B_0 + \frac{1}{2} m_e v_{\parallel}^2)}{T_e(x)}\right] \quad (2.33)$$

これらを式 (2.27) に代入すると  $\bar{F}_1$  について

$$\bar{F}_1 = \frac{\omega_e^* (1 - \eta[\frac{3}{2} - (\mu B_0 + \frac{1}{2} m_e v_{\parallel}^2)/T_e]) - k_{\parallel} \bar{v}_{\parallel} \frac{q_e}{T_e} \bar{F}_0}{k_{\parallel} \bar{v}_{\parallel} - \omega} \quad (2.34)$$

$$\times \sum_{k_x} \phi_{k_x} J_0(k_{\perp} \bar{\rho}_{te}) \exp(ik_x \bar{R}_x + ik_y \bar{R}_y + ik_z \bar{R}_z - i\omega t)$$

を得る。ただしここで  $L_n = (-\frac{1}{n} \frac{dn}{dx})^{-1}$ ,  $L_{T_e} = (-\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx})^{-1}$  を平衡分布の勾配長さとして  $\eta = \frac{L_n}{L_{T_e}}$ 、 $\omega_e^* = \frac{ck_y T_e}{q_e B_0 L_n}$  は反磁性ドリフト周波数である。これを式 (2.27) に代入すると、密度擾乱として次のような表

式を得る。

$$n_1(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2L_x} \sum_k \sum_{k'} \int_{-L_x}^{L_x} dx' \exp(ik_x(x-x') + ik'_x x') \quad (2.35)$$

$$\times \frac{qn_0}{T_e} \phi_{k'_x} \left[ \left\{ \Gamma_0 - \eta \left( \frac{1}{2} + b_a \right) \Gamma_0 + \eta b_g \Gamma_1 \right\} \times \xi^* Z + \Gamma_0 (\eta \xi^* \xi - 1) (1 + \xi Z) \right]$$

$$- \frac{qn_0}{T_e} \sum_{k'_x} (1 - \exp(-b')) I_0(b') \phi_{k'_x} \exp(ik'_x x')$$

ただしここで式 (2.35) の  $k_x$  を  $k'_x$  とし、各変数の規格化を次のように定めた： $b = (k_x^2 + k_y^2) \rho_{te}^2, b' = (k_x'^2 + k_y'^2) \rho_{te}^2, b_a = (b + b')/2, b_g = \sqrt{bb'}, \xi \equiv \frac{\omega}{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{te}}, \xi^* \equiv \frac{\omega^*}{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{th}}$ .  $Z$  はプラスマ分散関数

$$Z(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v^2)}{v - \xi} dv, \quad (2.36)$$

$$\frac{dZ}{d\xi} = -(1 + \xi Z(\xi)) \quad (2.37)$$

である。また次の積分公式

$$\int_0^{\infty} J_0(px) J_0(qx) \exp(-a^2 x^2) x dx = \frac{1}{2a^2} \exp\left(-\frac{p^2 + q^2}{4a^2}\right) I_0\left(\frac{pq}{2a^2}\right) \quad (2.38)$$

と  $a$  に関して偏微分して得られる

$$\int_0^{\infty} J_0(px) J_0(qx) \exp(-a^2 x^2) x^3 dx = \frac{1}{2a^2} \left( a^2 + \frac{p^2 + q^2}{4a^2} \right) \exp\left(-\frac{p^2 + q^2}{4a^2}\right) I_0\left(\frac{pq}{2a^2}\right) \quad (2.39)$$

$$+ \frac{pq}{4a^2} \exp\left(-\frac{p^2 + q^2}{4a^2}\right) I_1\left(\frac{pq}{2a^2}\right)$$

を用いた。これを式 (2.28) の Poisson 方程式に代入し、前節で述べたようにイオン密度に関して断熱応答を仮定すると  $\phi_{k_x}$  が満たすべき次のような方程式を得る。

$$\sum_{k'_x} \mathcal{L}_{k_x, k'_x} \phi_{k'_x} = 0 \quad (2.40)$$

$$\mathcal{L}_{k_x, k'_x} = \frac{1}{2L_x} \int_{-L_x}^{L_x} dx' \exp(ik_x(x-x')) \quad (2.41)$$

$$\times \left[ -(k_x'^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \left\{ \Gamma_0 - \eta \left( \frac{1}{2} + b_a \right) \Gamma_0 + \eta b_g \Gamma_1 \right\} \times \xi^* Z \right.$$

$$\left. + \Gamma_0 (\eta \xi^* \xi - 1) (1 + \xi Z) (1 - \exp(-b')) I_0(b') \phi_{k'_x} \exp(ik'_x x') \right] + \frac{1}{\lambda_{Di}^2}$$

この方程式が非自明な解を持つ条件は左辺の行列式がゼロとなることである。平衡分布が非一様なプラズマにおいては、上に述べたように密度・温度ないしその勾配の不均一性が無視できない場合は解の形を単純

に平面波近似することが妥当ではなくなる。このような場合、波の分散関係式はこれまでに示してきたように固有方程式を解いてその固有値と固有関数を得ることに帰着される。得られた固有値は複素数値でこれを  $\omega_i = \omega_r - i\gamma$  とおくと、 $\gamma$  は ETG モードの線形成長率を与える。ETG モードで励起された場のエネルギーが散逸により緩和する過程として、荷電粒子間の衝突効果がほとんど無視できるような高温プラズマにおいては運動論的効果のひとつである Landau 減衰が主な役割をはたす。詳細な議論は付録に譲るが、背景磁場と平行な向きへの振動（プラズマ振動）に対する波の成長率  $\gamma$  の表式からもわかる通り、Landau 減衰は磁力線方向への位相速度と熱速度の比  $\left(\frac{\omega_e}{k_{\parallel} v_{te}}\right)$  によってその強さが特徴づけられる。そこで、電子ドリフト波の磁力線方向への位相速度と熱速度の比  $\Theta = \left(\frac{\omega_e^*}{k_{\parallel} v_{te}}\right)^{-1}$  を Landau 減衰の強さを特徴付けるパラメータとして以降の数値計算において導入した。 $\Theta = \frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}}$  とも表されるので、これは ETG モードの不安定性にも関係する。この点について以下で議論する。式 (2.42) において、ETG モードの不安定性に影響を与えるパラメータとして  $\Theta = \left(\frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}}\right)$  と  $\eta$  を考える。以下のパラメータを平衡配位の基準として、 $\Theta$  と  $\eta$  に対するパラメータスキャンを行い固有方程式 (2.42) の固有値の虚部として得られる  $\gamma$  を数値計算によって得た結果が図 (2.1),(2.2) である。表 (2.1) の設定において、図 (2.1) からは  $\Theta \sim 0.75$  の付近で ETG モードが最も不安定化されることが、また図 (2.2) からは ETG モードが不安定 ( $\gamma > 0$ ) になる  $\eta$  しきい値が  $\sim 4$  であることがわかる。以上のように  $\Theta$  と  $\eta$  の値は ETG モードの不安定性に大きな影響を与える。以上の結果は、第4章にて ETG 乱流を初期値問題として解く数値計算の線形領域における計算結果を固有値問題の数値解と比較検討する際に再度触れられる。

$n_{i,e}, T_{i,e}(t=0)$	$n_{(i,e)0}, T_{(i,e)0} \exp\left(-\frac{0.3L_x}{L_n} \tanh\left(\frac{x-0.5L_x}{0.3L_x}\right)\right)$
ボックスサイズ $L_x$	$1200\rho_{te}$
$\tau \equiv T_e/T_i$	$\sim 0.3$
$\rho_s^2 \equiv (1 + \lambda_{De}^2/\rho_{te}^2)$	$\sim 11$
$L_n$	$1500\rho_{te}$
$k_y \rho_{te}$	0.5

表 2.1 ETG モード：固有方程式ソルバーでの設定

### 2.2.1 衝突項の導入

線形化 Vlasov 方程式における速度空間構造の時間発展に関して簡単な概略をつかむため、式 (A.8) の  $F$  に関する時間発展を考える。式 (A.8) で  $\phi_k$  について得たのと同様に、 $\tilde{F}_{1k}$  に関して次のような解を得る。

$$\tilde{F}_{1k} = \frac{F_{1,k}(t=0)}{p + ik_x v_x} + \frac{q}{m} \frac{i\tilde{\phi}_k \frac{\partial F_0}{\partial v_x}}{p + ik_x v_x} \quad (2.42)$$

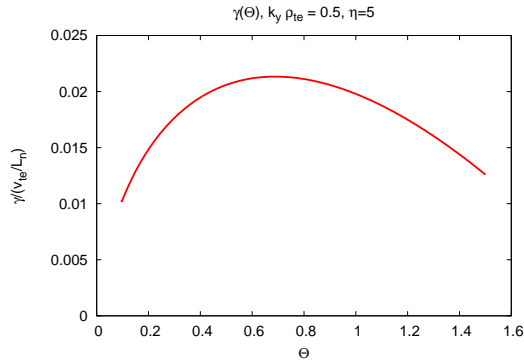


図 2.1  $k_y$  を固定したときの  $\gamma$  の  $\Theta$  依存性：固有方程式の数値解より

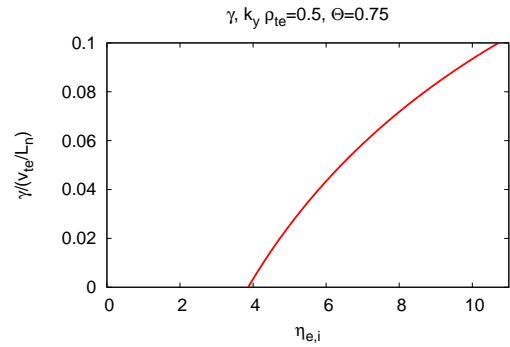


図 2.2  $\gamma$  の  $\eta$  依存性：固有方程式の数値解より

上式の右辺第 1 項は系の初期状態に依存する項で、Ballistic term と呼ばれる。この項は  $\exp(ik_x v_x t)$  の依存性を持ち、時間  $t$  が進むとともに速度空間方向に激しく振動するようになる。連続系では速度空間の微細構造が発達し続けるが、

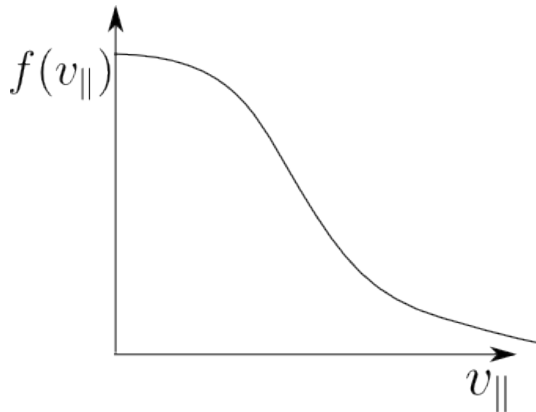


図 2.3 分布関数の速度空間方向の構造  $f(v_{||}), t = 0$

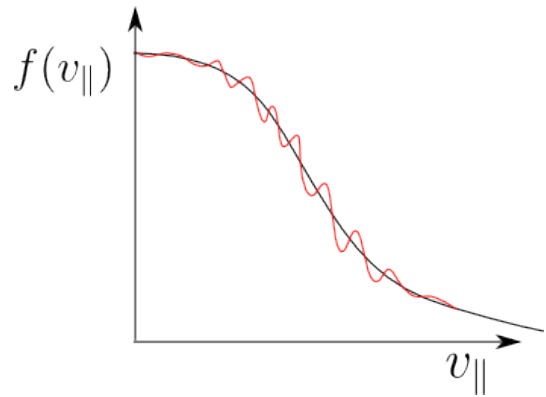


図 2.4 分布関数の速度空間方向の構造  $f(v_{||}), t \rightarrow \infty$

離散化した系ではある一定の時間を過ぎた後に分布関数が初期値に戻ってしまう回帰現象という問題がおきる [13]。これは非物理的な解であり、この問題を回避するためには速度空間方向の微細構造の発展をならすような何らかの散逸項を導入する必要がある。当研究では、物理的に妥当な散逸として線形化 Fokker-Planck 衝

突項を導入した。

$$C(f_s, f'_s) = \sum_{s'} \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( f_s \frac{\partial h'_s}{\partial \mathbf{v}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} : \left( f_s \frac{\partial^2 g'_s}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \right) \right] \quad (2.43)$$

$$h'_s = \left( 1 + \frac{m_s}{m'_s} \right) \int \frac{f'_s(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}' \quad (2.44)$$

$$g'_s = \int f'_s(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}' \quad (2.45)$$

ここで Rosenbluth ポテンシャルと呼ばれる式 (2.43), (2.44) について、field particle となる  $f'_s(\mathbf{v})$  は Maxwell 分布を仮定して解く。これは速度空間方向における拡散項の形をした演算子である。その物理的描像は以下のように考えられる。まず磁力線方向への移流による位相混合によって平衡分布から外れた速度空間の微細構造が形成されながら場のエネルギーが粒子の運動エネルギーに変換される。そこで、この微細構造が粒子間の弱い衝突によって散逸することにより、より温度の高い熱平衡状態に至ることとなる。このような散逸過程によって、有限の分解能の運動論シミュレーションを長時間にわたって時間発展させることが初めて可能となる。



## 第 3 章

# 準 2 次元乱流と自己組織化

本章では、乱流のエネルギースペクトルに関する理論的背景を説明する。

### 3.1 ジャイロ運動論モデルと流体モデルとの比較

ジャイロ運動論的オーダーリングでは、揺動の構造について磁力線に対する非等方性を仮定した。

$$\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \ll 1 \quad (3.1)$$

乱流の構造は磁力線方向にほとんど一様となるため、ポロイダル断面上での準 2 次元的なものとみなすことができる。簡単のため、以下ではジャイロ運動論的方程式系に対して流体近似をとり、その結果得られる H-M 方程式について乱流スペクトルの構造を議論する。ジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 系 (式 (2.27~ 2.28)) に対して  $k_{\parallel} = 0, C(F) = 0$  を仮定し、有限 Larmor 半径効果を見捨てて粒子位置の密度保存則

$$\frac{\partial n_e(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{c}{B_0} (\mathbf{b} \times \nabla \phi(\mathbf{x})) \cdot \nabla n_e(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2)$$

を得る。一方、Poisson 方程式より、

$$n_e(\mathbf{x}) = n_0 - \frac{1}{4\pi q_e} \left( \left( \nabla^2 + \frac{\rho_{te}^2}{\lambda_{De}^2} \nabla_{\perp}^2 \right) - \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \right) \phi \quad (3.3)$$

となる。ただしここで  $\nabla_{\perp} \equiv \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y}$  は磁力線に対して垂直方向への微分演算子である:  $\nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$ . ここで、式 (2.13), (2.20) に対して次のような規格化を導入する。

$$\hat{x} = x/\rho_{te}, \quad \hat{t} = \Omega_e t, \quad \hat{\phi} = q_e \phi / T_e, \quad \hat{n}_e = n_e / n_0 \quad (3.4)$$

ハットがついた量は無次元化されていることを意味する。上2式に関して次のように規格化される。

$$\frac{\partial \hat{n}_e}{\partial t} + (\mathbf{b} \times \hat{\nabla} \hat{\phi}) \cdot \hat{\nabla} \hat{n}_e = 0 \quad (3.5)$$

$$\hat{n}_e = \hat{n}_0 - \left( \rho_s^2 \hat{\nabla}^2 \hat{\phi} + \tau \hat{\phi} \right) \quad (3.6)$$

静電ポテンシャル  $\phi$  に関する表式に書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s^2 \nabla^2 \phi - \tau \phi) + (\mathbf{b} \times \nabla \phi) \cdot \nabla [\rho_s^2 \nabla^2 \phi - \ln n_0] = 0 \quad (3.7)$$

ただし簡単のため規格化を意味するハットは省略し、

$$\rho_s^2 \equiv 1 + \frac{\lambda_{De}^2}{\rho_{te}^2}, \tau = \frac{T_e}{T_i} \quad (3.8)$$

という定数を導入した。式(3.7)はH-M方程式と呼ばれ、磁化プラズマ中の静電的な乱流を流体近似で記述する基礎的な方程式である。ただし、通常のH-M方程式がイオンスケールの乱流に対して導出されるのに対して式(3.7)は電子乱流を対象としているため、スケール長  $\rho_s$  にデバイ遮蔽効果が含まれており、慣性項にイオンと電子の温度比の効果が含まれているという相違点がある[14]。式(3.7)の大カッコ内第2項は  $\phi$  に対して線形項で、ここからドリフト波の線形分散関係

$$\omega_e^* = \frac{(L_n)^{-1} k_y}{\tau + k^2 \rho_s^2} \quad (3.9)$$

を得る。ここで系の非均一な方向を  $x$  方向に取り、密度勾配のスケール長を  $L_n = \left( -\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \right)$  と表した。式(3.7)の大カッコ内第1項は  $\phi$  に関して非線形な項となる。式(3.7)について、 $\phi$  を次のような形に仮定して波数空間で表す。

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_k [\phi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \text{c.c.}] \quad (3.10)$$

となる。ここで c.c. は直前の項について複素共役をとる。非線形項について  $\mathbf{k}$  のある成分をとりだすと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} (\mathbf{k}' \times \mathbf{k}'') \cdot \hat{\mathbf{b}} k''^2 [\phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}''} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \text{c.c.}] \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} (\mathbf{k}' \times \mathbf{k}'') \cdot \hat{\mathbf{b}} k''^2 [\phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}''}^* \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \text{c.c.}] \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} (\mathbf{k}' \times \mathbf{k}'') \cdot \hat{\mathbf{b}} k''^2 [\phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}''} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \text{c.c.}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。ここで最後の等式で  $k'' \rightarrow -k''$  の読み替えを行った。総和は  $k = k' + k''$  を満たすような  $k', k''$  のすべての組についてとる。 $k'$  と  $k''$  を交換しても同じ式が成り立つので、結局

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_k + \frac{1}{\tau + k^2 \rho_s^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{x}} (L_n^{-1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=k'+k''} \Lambda_{k',k''}^k \phi_{k'} \phi_{k''} = 0 \quad (3.12)$$

$$\Lambda_{k',k''}^k = \frac{1}{\tau + k^2 \rho_s^2} (\mathbf{k}'' \times \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} (k''^2 - k'^2) \rho_s^2$$

となり、左辺第3項の非線形項は波数の異なるスケール間での相互作用があることを示している。

### 3.2 準2次元乱流のスペクトル構造:デュアルカスケードと Rhines スケール

ここで式 (3.7) について、 $\phi, \nabla \phi$  をかけて解析領域の全域で積分し、境界条件として  $\nabla \phi = 0$  ないし周期境界条件をおくと、以下の2つの保存量が導かれる。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int (\tau \phi^2 + \rho_s^2 |\nabla \phi|^2) d^3 \mathbf{x} \quad (3.13)$$

$$+ \oint (\phi \rho_s^2 \nabla^2 \phi (\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}) - \phi (\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}) \ln n_0 - \phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_s^2 \nabla \phi) d\mathbf{x} = 0$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int (\tau |\nabla \phi|^2 + \rho_s^2 (\nabla^2 \phi)^2) d^3 \mathbf{x} \quad (3.14)$$

$$+ \oint \left( -\frac{1}{2} \rho_s^2 (\nabla^2 \phi)^2 (\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}) + \rho_s^2 \nabla^2 \phi (\nabla \times \hat{\mathbf{z}} \ln n_0 - \nabla \phi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi) \right) d\mathbf{x} = 0$$

式 (3.14) の  $E$  は乱流場のエネルギーで、式 (3.15) の  $W$  は渦度の2乗の量に相当するエンストロフィーと呼ばれる量である。3次元の乱流と異なり、2次元の乱流においてはエンストロフィーの保存という新たな保存則が入るため、3次元とは大きく異なる性質を持つ。これを確認するため、以上のような設定に対して、乱流場のエネルギースペクトル  $E_k = (\tau + \rho_s^2 k^2) |\phi_k|^2$  の構造を検討する。そのなかでも特に一般に Kolmogorov の-5/3乗則として知られるような、エネルギースペクトルに対するべき乗則を2次元乱流に対して考察する。ここでは式 (3.13) において非線形項が線形項より十分大きく一様等方性かつ自己相似性 (波数  $k$  についてのスケール変換にたいして不変) が成立し、また非線形結合によるエネルギーのやりとりが波数空間において局所的であることを仮定する。乱流場は外部から何らかのエネルギーが注入されることにより駆動されるが、このエネルギーのソースについてある波数領域  $k_s$  の周辺に局在したものを考える。乱流場に加えられたエネルギーは非線形相互作用により短波長側に移送されていき、細かい構造を形成して最終的には粘性などの散逸機構によってある波数領域  $k_\mu$  より短波長側にあるエネルギーシンクから減衰していく。これをスペクトル上で模式的に表したのが図 (3.1) である。一般に乱流を駆動するエネルギーソースは装置スケールなどで決まる長

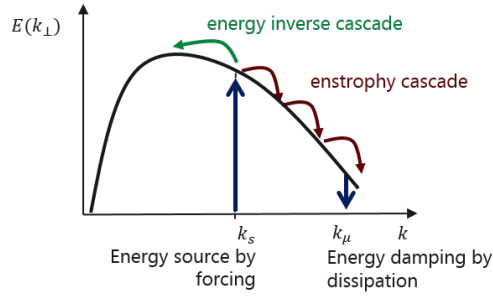


図 3.1 エネルギースペクトルにおけるデュアルカスケード：2つの慣性領域

波長側に存在し、散逸領域となるエネルギーシンクは短波長側にあるため、その間にはエネルギーの注入も散逸も起きない慣性領域と呼ばれる波数領域がある。エネルギースペクトルの中でもこの領域ではエネルギー保存則が満たされ、先においた自己相似性や非線形相互作用が波数空間において局所的であるという仮定合わせると  $|k_s| \ll |k| \ll |k_\mu|$  の慣性領域ではエネルギーの局所的な移送率  $\epsilon \equiv |v_k|^2 \times kv_k$  は一定であると考えられる。ただしエネルギーの移送に係る特性的な時間を波数  $k$  の成分における渦の回転時間  $\omega_{turb} = kv_k$  で見積もった。ここで、乱流場のエネルギースペクトル  $E(k)$  を  $E_f = \int E(k)dk$  で定義すると  $[E(k)k]$  がエネルギー  $|v_k|^2$  と同じ次元を持つので、 $\epsilon = \text{const.}$  と合わせるとエネルギーの慣性領域が満たすべき冪乗則として知られる Kolmogorov の-5/3 則

$$E(k) \sim \epsilon^{-2/3} k^{-5/3} \tag{3.15}$$

を得る。3次元の一様等方乱流においてはエネルギー保存則と自己相似性からこのような法則が得られるが、2次元乱流の場合はエネルギーに加えてエンストロフィーも保存するという点で相違がある。エネルギーと同様に長波長領域のソースから注入され短波長領域のシンクで粘性散逸すると考えると、その間の慣性領域においてエンストロフィーの局所的な移送率  $\epsilon' \equiv |kv_k|^2 \times kv_k$  が定まる。エンストロフィーの保存則に加えて先ほどと同様な仮定を置くと、エンストロフィーの慣性領域においてエネルギースペクトルの満たすべき冪乗則として

$$E(k) \sim \left(\frac{\epsilon'}{\rho}\right)^{-2/3} k^{-3} \tag{3.16}$$

を得る。この  $E(k)$  に対する2つの条件は同時に満たすことはできないので、これら2つの冪乗則のうちどちらか一方のみが実際に得られる。エネルギーとエンストロフィーの  $k$  依存性の違いにより短波長側ではエン

トロフィーが優先的に散逸するという観点から、Kraichnan は次のようなべき乗則を得た [9]。

$$E(k) \propto k^{-5/3}, k < k_s \quad (3.17)$$

$$E(k) \propto k^{-3}, k > k_s \quad (3.18)$$

詳細な導出は参考文献 [9] に譲るが、 $k < k_s$  では  $\epsilon' = 0$ ,  $k > k_s$  では  $\epsilon = 0$  であることが示さる。これはエネルギーソースとなる波数  $k_s$  を中心として長波長側と短波長側がそれぞれ、エネルギーとエントロピーのカスケードによる慣性領域となっていることを示す。特にエネルギーの慣性領域について、エネルギーソースの波数領域  $k_s$  よりも長波長側に (3次元乱流におけるものと逆である、という意味で) 逆カスケードするという点は2次元乱流に特徴的なものであり、これによって系は自発的に大域的な構造を作り出すことが示唆される。以上の議論は、非線形項が線形項に比べて十分強く乱流が支配的となる状況を考えてものだった。一方、低波数側  $k < 1$  では線形項が支配的となり、式 (3.9) の分散関係で表されるドリフト波のモード構造が現れる。高波数側では渦の回転時間が  $\omega_{turb} \sim k^2 \phi$  で表されるような一様等方な乱流で、そこでは式 (3.18) で示したようなデュアルカスケードによる慣性領域が期待される。一方、低波数側では式 (3.9) で示したような線形モード構造が支配的となる。式 (3.13) において線形項と非線形項の釣り合う波数  $k_c$  の付近でエネルギーの長波長側への逆カスケードが留まると見積もると、エネルギースペクトルは

$$(L_n)^{-1} k_c \sim k_c^4 \phi_k \quad (3.19)$$

程度で表される臨界波数  $k_c$  付近にピークを持つようになると考えられる。ここで波のドリフト速度のオーダーは  $v_k \sim k \phi_k$  となることから乱流場の平均的なエネルギー  $\epsilon$  を下のように定義し、臨界波数を

$$k_c \propto L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4}, \epsilon = \frac{1}{V} \int (\nabla \phi(x))^2 dV \quad (3.20)$$

と見積もる。この関係は Rhines スケールと呼ばれ、Rhines によって惑星表面大気の準2次元乱流について導出された。[15] 今ここで、線形項の大きさについて非等方性を考慮に入れると式 (3.20) は  $L_n^{-1} k_y = L_n^{-1} k_c \cos \theta \sim k^4 \phi_k (\theta \equiv \tan^{-1} k_y/k_x)$  となり、臨界波数が  $k_c \propto L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4} \cos^{1/2} \theta$  と見積もられるので Rhines スケールは以下のような非等方な構造を持つと考えられる。

$$k_{cx} = L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4} \cos \theta \sin^{1/2} \theta \quad (3.21)$$

$$k_{cy} = L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4} \sin^{3/2} \theta \quad (3.22)$$

$$\theta \equiv \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x}$$

Rhines スケールより長波長側では線形分散関係で決められる強い分散があるため、乱流の非線形相互作用による逆カスケードは  $k_y \sim 0$  付近に留まるものと考えられる。2次元乱流系での自己組織化による  $k_y \sim 0$  の帯

状流の形成はこのように説明される。

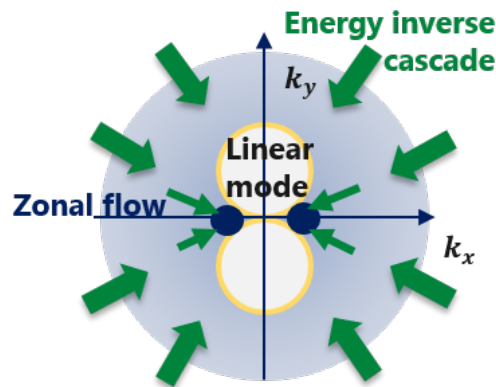


図 3.2 エネルギースペクトルにおけるデュアルカスケード：2つの慣性領域

2次元回転流体乱流のシミュレーションにおいても、このような長波長領域での非等方なエネルギースペクトルの構造形成が確認されている [16, 17, 18]。中性流体乱流におけるエネルギー散逸の主要な要因としては渦が短波長側へとカスケードすることによる粘性散逸が挙げられるが、高温の無衝突プラズマにおいては第2章で述べたような Landau 減衰が主要な機構であると考えられる。このような差異がある一方で、H-M 方程式から予測されるようなデュアルカスケードのスペクトル構造を電子スケールのプラズマ乱流における第一原理的シミュレーションによって検討する取り組みはなされてこなかった。本研究では、H-M 方程式でよく知られた2次元回転流体乱流のスペクトル構造をジャイロ運動論的シミュレーションによって解析し、核融合プラズマの電子乱流におけるスペクトル構造を明らかにした。

## 第 4 章

# 電子乱流スペクトルと構造形成

第 1 章でも述べたとおり、プラズマ乱流における非等方な構造の形成の例として ITG/ETG 乱流における磁気面（あるいは等圧面）に等ポテンシャル面を持つ帯状流が知られている。これについて、第 3 章に述べたような準 2 次元回転流体乱流における自己組織化との関連から研究がなされてきた [7, 8, 14]。中性流体乱流における定常的な乱流は、外部からの駆動による長波長領域でのエネルギー注入と粘性散逸による短波長領域でのエネルギー減衰が釣り合うような状況から得られる。一方、本研究で考察の対象とするような磁化プラズマ乱流においては ETG モードによる乱流場へのエネルギー注入と Landau 減衰によるエネルギー散逸が釣り合う状況で達成されることが考えられる。本研究では、高解像度の Vlasov シミュレーションにおいて 2 次元エネルギースペクトルの詳細な解析を行うことで、自己組織化によるプラズマ乱流中での構造形成を明らかにした。以降では、前章において確認された事項をもとに、ジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 系について非線形シミュレーションを行い、電子乱流のエネルギースペクトルにおける構造形成について検討する。

### 4.1 シミュレーションモデルと設定

プラズマの分布関数の時間発展を初期値問題として解く計算には、日本原子力研究開発機構で開発されたジャイロ運動論的 Vlasov コードである G5D を用いた [19]。Vlasov コードを解く際に分布関数を平衡成分  $F_0$  と揺動成分  $\delta F$  に分離して  $\delta F$  のみについての式を解く  $\delta F$  モデルとは異なり、G5D コードでは分布関数の全体を解く。 $\delta F$  モデルにおいては密度・温度の平衡分布とその勾配について局所的な値を仮定するが、G5D コードのような Full-F モデルにおいては平衡分布の空間不均一性についての影響が含まれる。また平衡磁場配位に関しては磁力線のシアと曲率の効果を無視したシアレスラブ配位の設定を用いている。これにより、磁気シアやトロイダル効果による磁気ドリフト効果を含まないような解析領域の設定となっている。ポロイダル ( $y$ ) 方向と磁力線 ( $z$ ) 方向には周期境界条件を仮定し、小半径 ( $x$ ) 方向へは密度・温度分布の勾配があるこ

とを考慮に入れ固定端の境界条件を設定した。今回の計算では計算負荷を低減するため、y 方向の波数と磁力線方向の波数が 1 対 1 に対応するシングルヘリシティモデルを採用し、空間自由度を 2 次元に落とした設定とした。図 (4.1) に解析領域の模式図をしめす。シアレスラブ配位は、図中左に示すようなトロイダル系におけるある磁気面まわりに着目し、その周囲を取り出したような構成となる。表 (4.1) はシミュレーションに用いた解析領域の設定である。乱流計算における固定端の影響を避けるため、 $L_x > L_y$  として x 方向にバッファ領域を含むような設定としている。空間解像度に関して、系のボックスサイズから決まる最も長波長なモードの波数が形成される帯状流の波数より十分小さく、グリッド数から決まる最も短波長なモードの波数が ETG モードの波数領域より十分大きくなるように設定した。

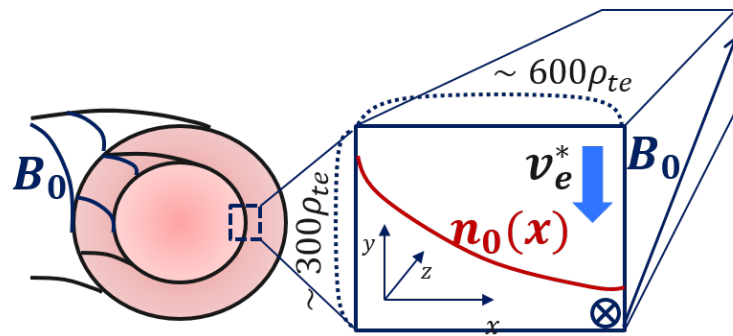


図 4.1 G5D コード：計算領域の設定の模式図

$(N_x, N_y, N_{v_{\parallel}}, N_{v_{\perp}})$	(512, 256, 64, 8)
$(L_x, L_y)$	$(600, 300)\rho_{te}$
$(k_x\rho_{te}, k_y\rho_{te})$	$(0.01 \sim 2.6, 0.02 \sim 2.6)$
$(\pm v_{\parallel,max}, v_{\perp,max})$	$(\pm 5, 5)v_{te}$

表 4.1 シミュレーション領域の設定

## 4.2 ジャイロ運動論モデルと流体モデルとの比較

第3章では磁化プラズマの運動論モデルに対して流体近似をとることで、乱流のエネルギースペクトルが満たす関係について考察した。本章の冒頭でも述べたとおり、磁化プラズマ乱流と流体モデルでは定常的な乱流が維持される機構が異なり、特に磁化プラズマ乱流においてはスペクトル空間でのエネルギーのソース領域とシンク領域がプラズマパラメータの背景分布に大きく依存する。このため、流体モデルとは異なり、乱流スペクトルにおける慣性領域の存在は必ずしも自明ではない。しかしながら、適当な条件のもとでは磁化プラズマ



乱流においても流体モデルと同様のエネルギースペクトルの構造が得られることが以下の通り確認された。

#### 4.2.1 減衰乱流シミュレーション

はじめに最も基礎的な設定として、平衡分布として線形安定な配位を設定し初期条件として与えた擾乱が Landau 減衰する様子を追った減衰乱流シミュレーションを行った。ここでは初期密度擾乱として、ETG モードの最も不安定となる波数領域として特徴的な  $k_y \rho_{te} \sim 0.45$  をスペクトルのピークに含む一様等方な擾乱を設定した。

$$\delta n_e(\mathbf{x}; t = 0) = A(x) \times \delta n_0 \exp\left(-\frac{(|k_\perp| - |k_s|)^2}{|3\Delta k_\perp|}\right) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + 2\pi r_n)) \quad (4.1)$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh\left(\frac{x - 0.2L_x}{0.05}\right) \tanh\left(\frac{x - 0.8L_x}{0.05}\right) \right)$$

ここで  $k_s \rho_{te} = 0.45$ ,  $k_\perp \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , そして  $r_n$  は  $[0, 1]$  の乱数で、ランダムな位相を加えて乱流場を与えるように設定している。図 4.2 に  $e\phi/T_e(\mathbf{x}; t = 0)$  の実空間プロットを、図 4.3 にエネルギースペクトル  $E(k_x, k_y)$  を示す。ただし  $E(k_x, k_y)$  は式 (3.14) より次のように定義される。

$$E(k_x, k_y) = (\tau + \rho_s^2 k_\perp^2) |\phi(k_x, k_y)|^2 \quad (4.2)$$

ここで、 $\tau = T_e/T_i$ ,  $\rho_s^2 = 1 + \lambda_{De}^2/\rho_{te}^2$  と与えられる。

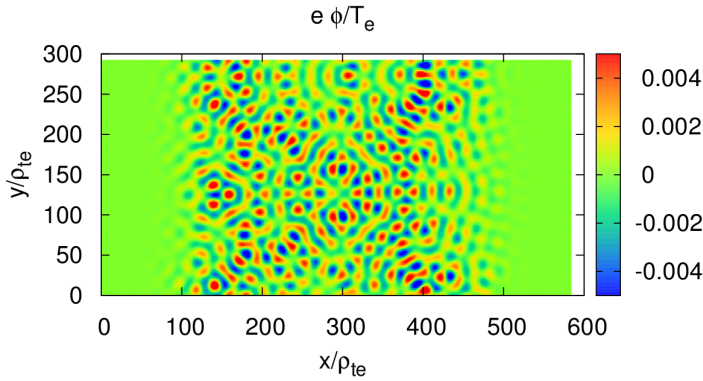


図 4.2 減衰乱流シミュレーションの初期擾乱  $e\phi/T_e(\mathbf{x}; t = 0)$

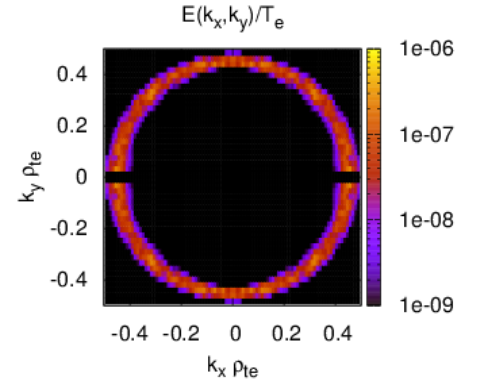


図 4.3  $E_{k_x, k_y} = (\tau + k^2 \rho_s^2) |\phi_k|^2, t = 0$  (中心部を拡大)

密度擾乱の大きさ  $\delta n_0$  は初期条件における静電ポテンシャルが ETG 乱流の非線形飽和段階における振幅と

同程度のオーダーである  $e\phi/T_e(\mathbf{x}; t=0) \sim 0.5\%$  となるように選んだ。平衡分布として下表のような設定を用いた。これは反磁性ドリフト速度  $v_e^* = \frac{cT_e}{q_e B_0 L_n}$  を固定端の付近で遅くし、固定端付近で数値的な不安定性が生じやすくなる影響を回避するためである。

$n_e(t=0)$	$n_{e0} \exp\left(-\frac{0.3L_x}{L_n} \tanh\left(\frac{x-0.5L_x}{0.3L_x}\right)\right)$
$T_e(t=0)$	const.
$L_n \equiv \left(-\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}\right)^{-1}$	$(1, 2, 4, 8) \times 1500\rho_{te}$

表 4.2 減衰乱流シミュレーションにおける平衡分布の設定

$L_n/\rho_{te} = 6.0 \times 10^3$  でのエネルギーの相対変化について、時間推移を図 4.4 に示す。初期条件に与えた場のエネルギー  $E_f = \frac{1}{V} \int (\tau|\phi|^2 + \rho_s^2 |\nabla_\perp \phi|^2) d^3\mathbf{R}$  が Landau 減衰と衝突項によって運動エネルギー  $E_k = \frac{1}{V} \int (\frac{1}{2}m_e v_\parallel^2 + \mu B_0) \bar{F} D d^6\mathbf{Z}$  へと散逸し、全エネルギーが保存していることがわかる。乱流場の Landau 減衰は反磁性ドリフトの磁力線方向の速度と熱速度の比  $\left(\frac{\omega_e^*}{k_\parallel v_{te}}\right) = \left(\frac{k_\parallel L_n}{k_y \rho_{te}}\right)^{-1}$  によってその減衰率が決まる。表 4.5 に示されるように、 $\Theta = \left(\frac{k_\parallel L_n}{k_y \rho_{te}}\right)$  は  $L_n/\rho_{te} = 12000$  のとき  $\Theta \sim 1$  となり  $L_n$  が小さく (密度勾配が急峻に) なるにつれ  $\omega_e^*/k_\parallel \gg v_{te}$  の流体近似の極限に近づくので乱流場の Landau 減衰の効果が弱まる。これについて各  $L_n$  の値について乱流場のエネルギー  $E_f$  の時間推移を表したのが図 4.5 である。第 2 章に述べたように、2次元乱流の自己組織化においてエネルギーが長波長側に逆カスケードしていくのに対してエンストロフィーは短波長側に順カスケードしていく。エンストロフィーのほうが  $k$  依存性が強く、Landau 減衰による影響をより強く受けると考えるとエンストロフィーの減衰率はエネルギーのそれを上回ることが予想される。これは 2次元流体の乱流においてエンストロフィーの選択的散逸として知られており [7]、当研究で解析した電子プラズマ乱流についても確認された。図 (4.6) は  $L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$  のケースについてエネルギー  $E_f$  とエンストロフィー  $W = \frac{1}{V} \int (\tau|\nabla_\perp \phi|^2 + \rho_s^2 (\nabla_\perp^2 \phi)^2) dV$  の時間推移を示したものである。エンストロフィーの選択的散逸から、エネルギーが逆カスケードする過程が示唆される。

#### 4.2.2 自己組織化による構造形成:Rhines スケール

前章に示した Rhines スケールについて検証するため、次のようなパラメータ  $k_{ZF}$  を定める。これはエネルギースペクトルの  $k_y = 0$  の帯状流成分に対して特徴的な  $x$  方向の波数を重み付け平均により求めたものである。

$$k_{ZF} = \frac{\int k_x E(k_x, k_y) dk_x dk_y}{\int E(k_x, k_y) dk_x dk_y} \quad (4.3)$$

Rhines スケールによって決まる波数  $k_c$  について  $k_c \propto L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4}$  の依存性があることから、 $L_n$  を表 4.2

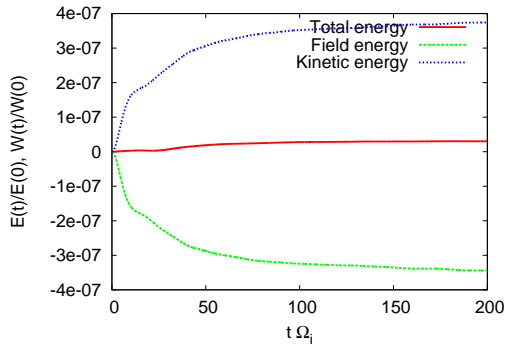


図 4.4 エネルギーの時間推移  $L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$

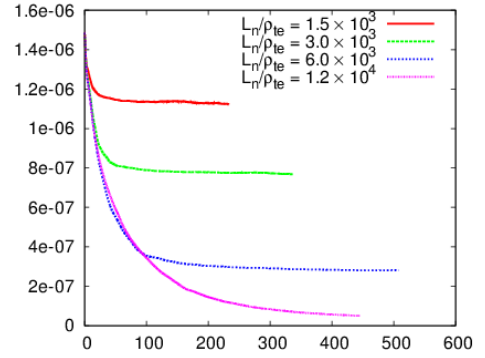


図 4.5 乱流場エネルギーの時間推移,  $L_n$  スキャン:  $\Theta \equiv \frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}} \rightarrow 0$  の流体極限で Landau 減衰の効果が弱まる。

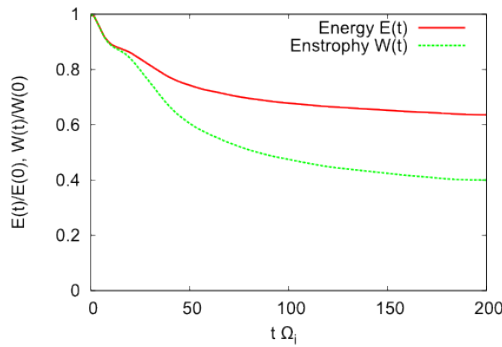


図 4.6 エネルギー  $E(t)$  とエンストロフィー  $W(t)$  の時間推移  $L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$

のように変化させたときの  $k_{ZF}\epsilon^{1/4}$  と  $L_n^{-1/2}$  の比例関係を求めた。図 4.7 において、左下の基準点における密度勾配は  $L_n/\rho_{te} = 1.2 \times 10^4$  を基準とした。赤破線が  $k_{ZF} \propto L_n^{-1}\epsilon^{-1/4}$  の比例関係を、青線が G5D コードによる数値計算結果を表す。数値計算はどれも Rhines スケールの比例とよい一致を示していることがわかる。これは先行研究での粒子コードで検証された点であるが、粒子コードではサンプリングノイズの問題があるため乱流場のエネルギースペクトル構造に関する詳細な検討はされていなかった [14]。

### 4.2.3 帯状流の形成：2次元エネルギースペクトルの非等方性

$L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$  の設定において、初期擾乱の減衰が飽和し準定常状態に至った段階での  $e\phi/T_e(\mathbf{x}; t = 0)$  の実空間プロットを図 4.8 に、エネルギースペクトル  $E(k_x, k_y)$  を図 4.9 に示す。

実空間プロットより、 $y$  方向に補足引き伸ばされた帯状流の構造が発達していることがわかる。これはエネ

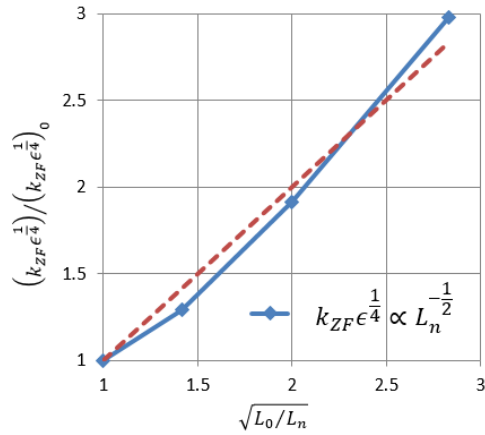


図 4.7 減衰乱流シミュレーション：Rhines スケール

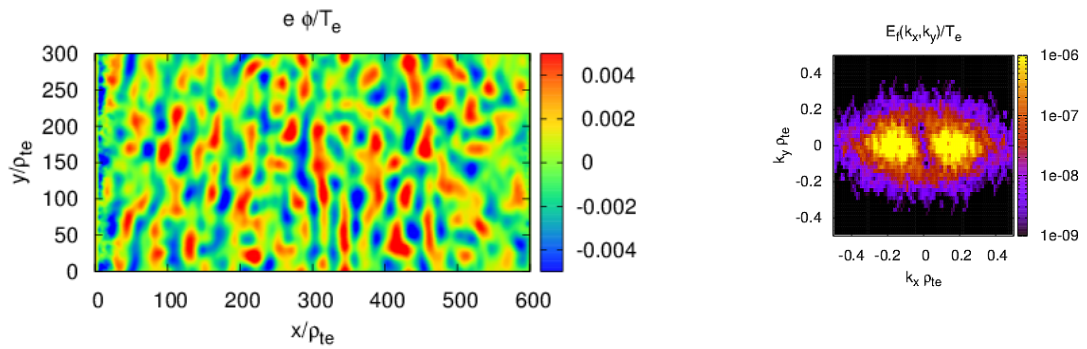


図 4.8  $e\phi/T_e(\mathbf{x})$ , 準定常状態

図 4.9  $E_{k_x, k_y} = (\tau + k^2 \rho_s^2) |\phi_k|^2$ , 準定常状態 (中心部を拡大)

ルギースペクトル (図 4.9) を見ると  $k_y = 0, k_x \rho_{te} \sim \pm 0.2$  の 2 点の周りでもっとも大きな振幅となっていることから明らかである。このようにエネルギースペクトルの長波長側に現れるダンベル型の非等方な構造は、第 3 章で H-M 方程式についての理論考察から得られたもの、あるいは 2 次元 Rossby 波乱流において Vallis らにより数値計算から明らかにされていたものと同様である [16]。ジャイロ運動論モデルによる電子プラズマ乱流の第一原理計算において、自己組織化によるこのような 2 次元エネルギースペクトルの非等方な構造の形成が初めて示された。

#### 4.2.4 1次元エネルギースペクトル：デュアルカスケード

第3章で述べたような次にエネルギースペクトルの示すべき乗則について検討するため、次のように  $\int E(k_{\perp}) dk_{\perp} = E_f$  となるように1次元の等方的なエネルギースペクトル  $E(k_{\perp})$  を定める。

$$E(k_{\perp}) = \int_k^{k+\Delta k} E(k_x, k_y) 2\pi k dk \quad (4.4)$$

$L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$  の結果に対して  $t\Omega_e = 0, 560$  のときの  $E(k_{\perp})$  を図4.10に示す。図中、緑線と青線はそれぞれ  $\propto k_{\perp}^{-3}$ ,  $\propto k_{\perp}^{-5/3}$  に比例する直線を示す。エネルギーソースから短波長側へのエンストロフィーの順カスケードと長波長側へのエネルギーの逆カスケードが存在する場合、エネルギースペクトルはこの2つの線で表したようなべき乗則に従うと考えられる。 $t\Omega_i = 560$  は準定常状態段階で、このとき  $k_{ZF}\rho_{te} \sim 0.18$  を得た。しかしながら減衰乱流シミュレーションの準定常状態では慣性領域におけるエネルギーやエンストロフィーのカスケードが与えるべき乗則を確認できなかった。この原因として、初期擾乱の減衰による過渡的な応答を見る減衰乱流シミュレーションでは、エネルギーの注入と散逸が釣り合ったような定常的な乱流の構造を見ることが難しいためと考えられる。この点を考慮し、エネルギーのソースとして物理的に妥当であると考えられるETGモードの不安定性を励起した系の乱流について考察する。

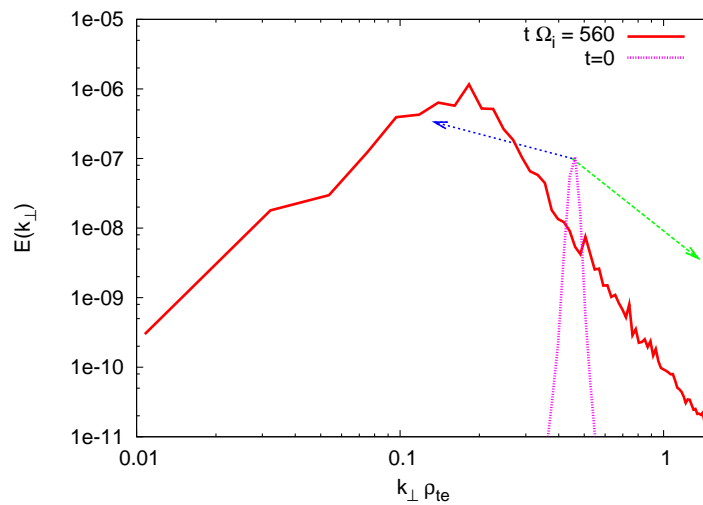


図4.10 減衰乱流シミュレーションにおける1次元エネルギースペクトル  $E_{k_{\perp}}$ ,  $L_n/\rho_{te} = 1.5 \times 10^3$

## ETG 乱流シミュレーション

ここまでのシミュレーションは、乱流の渦構造における特性的なスケール長を人為的に決めた一様等方的な初期擾乱を外部からのエネルギーソースとして系に加えるような設定だった。一方、第2章でも述べたように密度・温度勾配のある磁化プラズマにおいては平衡分布の不均一性によって駆動されるドリフト波が不安定となりうる。Full-F モデルにおける分散関係は第2章で述べた式 (2.42) を解くことによって求められるが、主として密度勾配と温度勾配の比  $\eta = L_n/L_{Te}$ 、ドリフト波の磁力線方向への位相速度と熱速度の比  $\Theta = \left(\frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}}\right)^{-1}$  の大きさと空間分布によって固有値と固有関数がそれぞれ決まる。ETG モードの不安定性による線形成長はポテンシャル  $\phi$  がある程度の大きさになった時に非線形項からの寄与により飽和し、最も不安定な波数周辺の領域をエネルギーソースとした定常的な乱流状態に移行する。

ETG 乱流の飽和振幅を解析的に見積もることは困難だが、密度・温度の平衡分布の勾配が摂動量の勾配によって打ち消される程度の振幅で線形成長が留まるといような混合長理論の観点から  $|\phi| \propto \gamma$  であると見積もられる。ここでは表 4.3 に表されるような設定の2ケースについて非線形シミュレーションを行った。Run#1,2 は  $L_n$  を上述の減衰乱流シミュレーションと揃えて、なおかつ ETG 乱流の飽和振幅のレベルがそれぞれ  $e|\phi|/T_e \sim 0.2\%$  or  $5\%$  となるように  $\Theta$  と  $\eta$  を定めた。

	$\tau$	$\rho_s^2$	$L_n/\rho_{te}$	$\Theta \equiv \frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}}$	$\eta_e = \frac{L_n}{L_{Te}}$	$k_{ZF}\rho_{te}$	$\epsilon = \frac{1}{V} \int (\nabla\phi)^2 dV$
Run #1	$\sim 0.3$	$\sim 11$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.188$	$\sim 2.1$	0.23	$\sim 9.9 \times 10^{-6}$
Run #2	$\sim 1.0$	$\sim 2$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.750$	$\sim 5$	0.33	$\sim 1.1 \times 10^{-4}$

表 4.3 ETG 乱流シミュレーション:パラメータスキャンの設定

Run #1 に対して第 2.2 節で導いた固有方程式 ( 2.42 ) を数値計算により解いて  $k_{\parallel}/k_y$  一定に保ったときの線形成長率  $\gamma$  の  $k_y$  依存性を求めたのが図 4.11 である。G5D コードで Run #1 の設定でシミュレーションを行った際の乱流場エネルギーの成長率が  $\phi_k$  の最も不安定なモードからの寄与でほとんど決まると考えて線形成長率を見積もると、表 4.4 の通りとなる。固有値問題の数値解と G5D コードによる初期値問題の解がよい一致を示している。小さな差異は、G5D コードにおいて設定されている衝突項の存在によるものと考えられる。このときエネルギー収支の時間発展を図 4.12 に示す。乱流の非線形飽和段階において、場のエネルギーの成長と粒子の運動エネルギーの減少が釣り合うことを確認した。これは、第2章でも述べたとおり、衝突項の寄与によるものである。一方、非線形発展段階において全体としてエネルギー保存則が破れているが、これに関しては非線形領域において時間積分に誤差が生じることや、分布関数の速度空間に固定端の境界条件を課しているためにそこから粒子が流出しうる、という点が挙げられる。誤差が場のエネルギーと同程度まで成長した時点で計算を終了している。

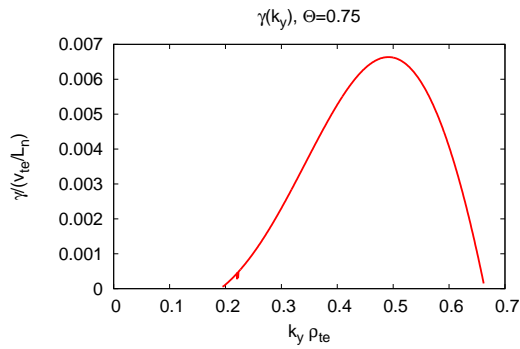


図 4.11 Run #1 の設定における  $\gamma$  の  $k_y$  依存性：固有方程式の数値解より導出

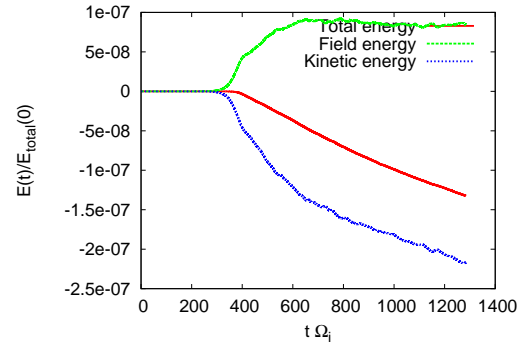


図 4.12 ETG 乱流シミュレーション Run # 1: エネルギーバランス

$\gamma/(v_{te}/L_n)$	固有方程式の数値解	G5D コードによる初期値問題の解
	$6.5 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-3}$

表 4.4 ETG 乱流シミュレーション：線形成長率の比較

Run#1,2 について非線形飽和にいたる初期段階と、準定常状態における 1 次元エネルギースペクトル  $E(k_{\perp})$  を図 4.13,4.14 に示す。図中、緑線と青線は図 4.10 と同様の意味である。

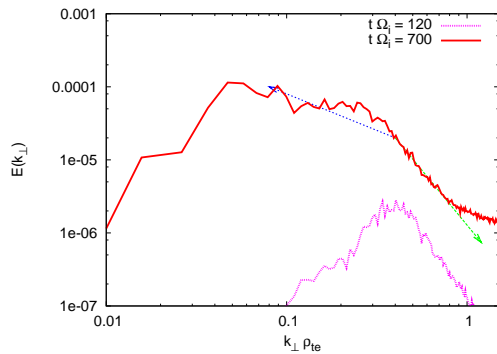


図 4.13 1 次元エネルギースペクトル  $E_{k_{\perp}}$ : ETG 乱流シミュレーション Run # 1

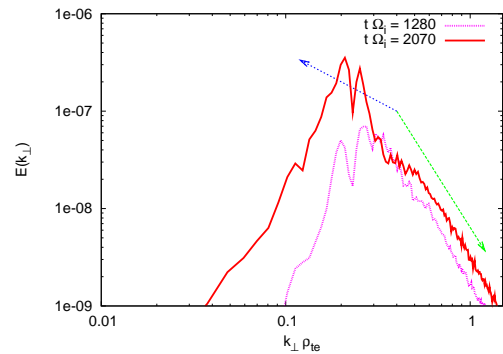


図 4.14 1 次元エネルギースペクトル  $E_{k_{\perp}}$ : ETG 乱流シミュレーション Run # 2

いずれの結果も、ETG モードが最も不安定となる波数を中心としたエネルギーソース領域  $k_s$  より短波長側で  $E(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{-3}$  の冪乗則に従っている。これは第 3 章でも述べられたように、エンストロフィーのカスケードによる慣性領域であると考えられる。一方、 $k_s$  より長波長側でのエネルギースペクトルの構造は 2 つの結果で大きく異なる。Run #1 の結果において、長波長側では  $E(k_{\perp})$  は  $k_{\perp}^{-5/3}$  から大きく離れている。この原

因としては、ETG 乱流の飽和振幅  $q_e\phi/T_e \sim 0.2\%$  が減衰乱流で設定した値  $q_e\phi/T_e \sim 0.5\%$  よりも小さく、 $k_{ZF}$  が  $k_s$  と接近しすぎているため、と考えられる。この点を踏まえ、Run #2 では#1 と比較して線形成長率を大きくとることで飽和振幅  $q_e\phi/T_e \sim 5\%$  としている。この設定について ETG 乱流の準定常状態での1次元エネルギースペクトル (図 4.14) は、 $k_s$  より長波長側において  $E(k_\perp) \propto k_\perp^{-5/3}$  の冪乗則に従っている。これは第3章でも述べられたように、エネルギーの逆カスケードによる慣性領域であると考えられる。このようにして、エネルギーとエンストロフィーのデュアルカスケードによる2つの慣性領域が、適当な条件のもとジャイロ運動論的プラズマ乱流においても再現されることがはじめて確認された。

### 4.3 2次元エネルギースペクトルの非等方構造: $\tau, \rho_s$ 依存性

H-M 方程式の線形分散関係

$$\omega_k = \frac{k_y L_n^{-1}}{\tau + k_\perp^2 \rho_s^2} \quad (4.5)$$

は式 (3.8) で導入されたパラメータ  $\rho_s, \tau$  を含むため、Rhines スケールで留まる波数  $k_c$  周辺での線形分散の強さはこの2つのパラメータによって変化するものと考えられる。ここで2通りの極限について考える。

$\tau \ll \rho_s^2 k_c^2$  の場合

この場合、線形分散関係は2次元系における回転流体である Rossby 波のものに漸近する。N-S 方程式の2次元回転乱流におけるエネルギースペクトルの非等方性については図 3.2 と同様なものが得られている [16, 17, 18]。

$\tau \gg \rho_s^2 k_c^2$  の場合

この場合、線形分散関係は

$$\frac{\omega_k}{k_y} = \frac{1}{\tau L_n} (\text{const.}) \quad (4.6)$$

に漸近する。線形モードは波長にかかわらず  $y$  方向に一定の位相速度を持つため、移動座標系  $(x', y') \equiv (x, y - 1/(\tau L_n))$  から見ると線形項からの寄与が無視できるような系を考えていることになる。したがって、第3章で述べたようなエネルギーのインバースカスケードによる非等方な構造の出現は期待されないと考えられる。

この効果について検討するため、表 4.5 の Run #3~#6 に示されるように  $\tau, \rho_s$  をスキャンして式 (4.1), 図 4.2, 4.3 と同じ初期条件から減衰乱流シミュレーションを実施した。表 (4.5) の各計算はそれぞれ

- Run #3, #4 はイオン温度を下げた断熱応答を弱くした



- Run #5,#6 は Debye 長とジャイロ半径の比を下げた (密度を増大した)
- Run #7 は #6 と比べて初期密度擾乱の振幅を 4 倍に増大した

設定となっている。上述の考察より

- Run # 0  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  4
- Run # 0  $\rightarrow$  5  $\rightarrow$  6

の順に、エネルギースペクトルはより等方的な構造に移行するものと考えられる。

	$\tau$	$\rho_s^2$	$L_n/\rho_{te}$	$\Theta \equiv \frac{k_{\parallel} L_n}{k_y \rho_{te}}$	$k_{ZF}\rho_{te}$	$\epsilon = \frac{1}{V} \int (\nabla\phi)^2 dV$
Run #3	$\sim 0.6$	$\sim 11$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.117$	$\sim 0.20$	$\sim 7.1 \times 10^{-5}$
Run #4	$\sim 1.0$	$\sim 11$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.117$	$\sim 0.16$	$\sim 4.8 \times 10^{-5}$
Run #5	$\sim 0.3$	$\sim 5$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.117$	$\sim 0.23$	$\sim 4.5 \times 10^{-5}$
Run #6	$\sim 0.3$	$\sim 2$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.117$	$\sim 0.30$	$\sim 1.4 \times 10^{-5}$
Run #7	$\sim 0.3$	$\sim 2$	$1.5 \times 10^3$	$\sim 0.117$	$\sim 0.19$	$\sim 9.1 \times 10^{-5}$

表 4.5 減衰乱流シミュレーション:パラメータスキャンの設定

図 4.15-4.18 に、準定常状態に至った段階で時間平均をとったエネルギースペクトルを示す。Run #3,4 では  $\tau$  を増大する、すなわちイオン温度を下げることでエネルギースペクトルが等方的な構造をとるように変化することを確認した。一方、Run#5,6 において  $\rho_s$  を減少させることによって線形分散の影響が弱くなることを期待したが、Run #3,4 で得られたのと同様な等方化は確認されなかった。その要因として、ジャイロ運動論的 Poisson 方程式で Debye 長を下げたことによるスペクトルの高波数側へのシフトが観測されている。この影響を修正するため、Run #6 と同じ平衡分布の設定で初期擾乱の大きさ  $\delta n_e(t=0)/n_0$  のみを 4 倍にしたシミュレーション Run #7 を行った。図 4.19,4.20 に、Run #7 の初期条件と準定常状態における 2 次元エネルギースペクトル  $E(k_x, k_y)$  を示す。準定常状態の段階における  $\epsilon$  を増大させて Rhines スケールを長波長側にシフトさせた結果、Run #4 と同様にエネルギースペクトルが等方化されることが確認された。ここまでに示したパラメータスキャンの結果より、一様等方な擾乱から時間発展した減衰乱流シミュレーションにおいて 3 つのパラメータ  $\tau = T_e/T_i, \rho_s^2 = 1 + \frac{\lambda_{De}^2}{\rho_{te}}, \epsilon$  の値によって帯状流のような非等方な構造形成に至るかどうか変化する、という知見が新たに得られた。

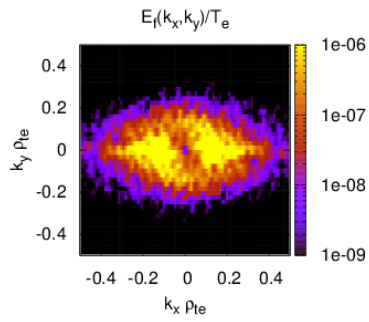


図 4.15 2次元エネルギースペクトル  $E_{k_x, k_y}$ , Run #3

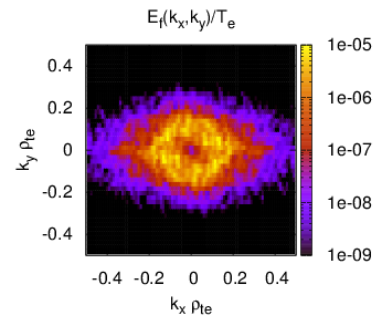


図 4.16  $E_{k_x, k_y}$ , Run #4

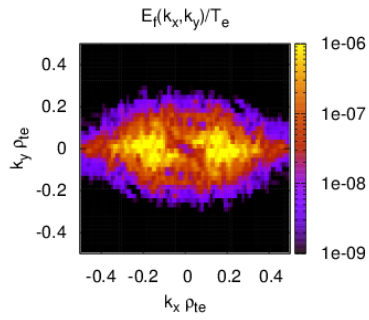


図 4.17  $E_{k_x, k_y}$ , Run #5

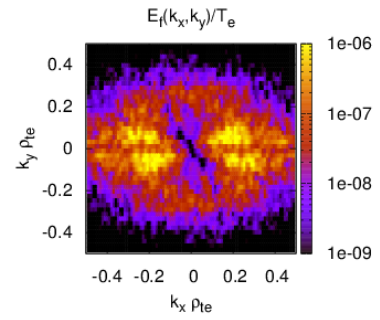


図 4.18  $E_{k_x, k_y}$ , Run #6

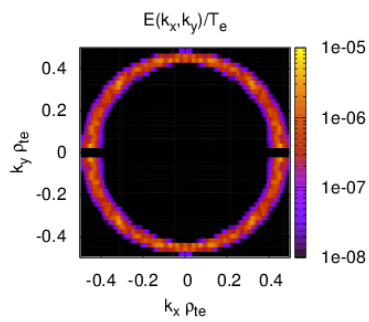


図 4.19 Run #7,  $E_{k_x, k_y}$

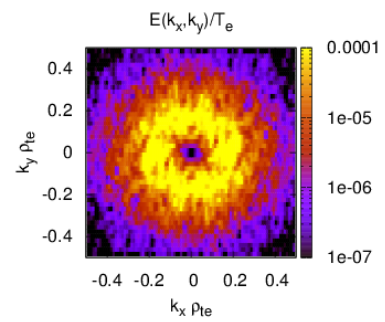


図 4.20 Run #7,  $E_{k_x, k_y}$

### 4.4 ETG 乱流における帯状流の形成過程の差異

表 4.3 における Run # 1,2 について非線形飽和にいたる初期段階と、準定常状態における 2 次元エネルギースペクトル  $E(k_x, k_y)$  を図 4.21~4.24 に示す。

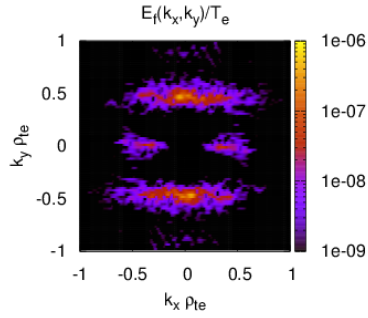


図 4.21 2 次元エネルギースペクトル  $E_{k_x, k_y}, t\Omega_e = 1280$ , ETG 乱流シミュレーション Run # 1

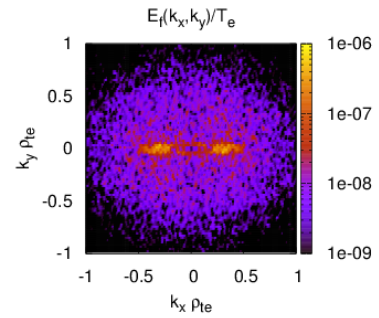


図 4.22  $E_{k_x, k_y}, t\Omega_e = 2070$ , Run # 1

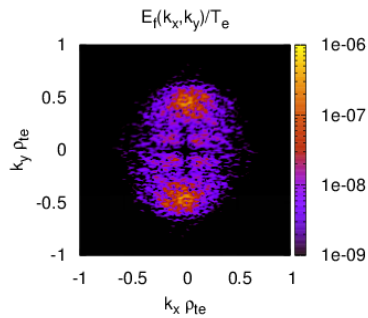


図 4.23 2 次元エネルギースペクトル  $E_{k_x, k_y}, t\Omega_e = 98$ , ETG 乱流シミュレーション Run #2

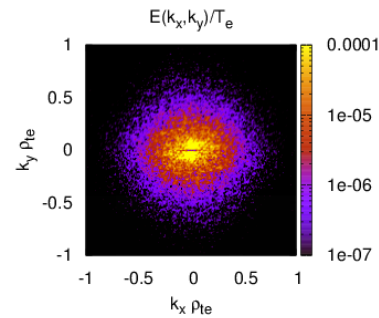


図 4.24 2 次元エネルギースペクトル  $E_{k_x, k_y}, t\Omega_e = 700$ , ETG 乱流シミュレーション Run #2

2 次元エネルギースペクトルを見ると、エネルギーの逆カスケードによって長波長構造が形成されている Run # 2 と異なり、Run # 1 においては  $k_y = 0$  の帯状流成分はエネルギーの逆カスケードによるというよりもむしろ ETG モードの線形成長率が大きな成分同士による 3 波結合により直接励起されているようである。表 4.3 と表 4.5 について  $\epsilon$  の値を比較すると、Run #10, #11 の結果は Run #7, #0 と比べて小さな値となっている。このため、前者の Rhines スケール  $k_c \sim L_n^{-1/2} \epsilon^{-1/4}$  は後者に比べて短波長側にシフトすると考えら

れる。一方、Run#10,11 のいずれにおいても ETG モードが最も不安定化される波数  $k_y \rho_{te} \sim 0.3 \sim 0.4$  となっている。エネルギーソースの波数  $k_s$  と Rhines スケール  $k_{ZF}$  の間のレンジがこのように接近しているため、構造形成の機構としてはエネルギーの逆カスケードによるものよりも変調不安定性によって  $k_y = 0$  の帯状流成分を直接励起するようなものが支配的となっていると考えられる [20]。このように、プラズマパラメータの設定によって帯状流成分が形成される過程が異なることが示唆されるが、この相違が何によって引き起こされるかは本研究の範疇では明らかにされなかった。

## 第 5 章

### 結論

今回の研究において、磁化プラズマ中の乱流における帯状流のような構造形成の仕組みについて、2次元流体における乱流でよく知られた自己組織化現象との関連から Vlasov シミュレーションによる詳細なエネルギースペクトルの解析によりその物理機構を検討した。初期条件として密度擾乱を与えた減衰乱流シミュレーションにおいて、以下のことが確認された。

- 自己組織化によって生じるメソスケール構造の特徴的な波数が Rhines スケールと呼ばれるスケールリングに沿うこと
- 乱流場の 2次元エネルギースペクトルの長波長領域において、H-M 方程式の解析で得られたものと同様なダンベル型の非等方な構造がエネルギーの逆カスケードによって形成されたこと
- 磁化プラズマ乱流の 2次元エネルギースペクトルにおいて
  1. 電子とイオンの温度比
  2. Debye 長とジャイロ半径の比 ( $\sim$  プラズマ密度)
  3. 乱流場の飽和振幅
 を変えたときにスペクトルの非等方性をもたらす自己組織化現象が大きく変化すること

一方、エネルギーとエンストロフィーのデュアルカスケードにより 1次元の等方的なエネルギースペクトルが従うと考えられる 2つの慣性領域は、減衰乱流シミュレーションからは得られなかった。準定常的な乱流におけるスペクトル構造を考察するため、ETG モードの不安定性によって乱流場が駆動されるエネルギー注入と Landau 減衰による散逸が釣り合うような ETG 乱流について高解像度 Vlasov シミュレーションを行った。この結果から以下のことが確認された。

- 磁化プラズマ乱流の 1次元エネルギースペクトルが、2次元回転流体乱流と同様にエネルギーとエン

トロフィーのデュアルカスケードによって生じる2つの慣性領域を持つこと

- $k_y \sim 0$  の帯状流が形成される過程は、エネルギーの逆カスケードによる自己組織化が留まる Rhines スケールの波数領域によってエネルギーの逆カスケードによる自己組織化か ETG モードの不安定性による3波結合によるかの差異が生じる。

一方、今回の研究においては Landau 減衰による散逸の強さが変わった時 ( $\Theta = \frac{k_{\parallel}}{k_y} \frac{L_n}{\rho_{te}}$  をスキャンした際) にエネルギースペクトルの構造にどのような変化がみられるか系統的な検討をしなかった。運動論的プラズマにおける減衰機構が中性流体と大きく異なる点でもあり、別途解析を要すると思われる。また「帯状流の形成による電子熱輸送係数の低減」という観点から考えると、重要なパラメータである  $\tau, \rho_s$  が電子熱輸送係数にどのような影響をあたえるかについての考察が必要と考えられる。

## 謝辞

本研究の遂行および本稿執筆の全体を通して、お忙しい中も熱心な御指導・助言をいただきました日本原子力研究開発機構の井戸村泰宏博士及び前山伸也博士に心から感謝申し上げます。また、研究室セミナーなどの機会での研究についての貴重なご助言をいただいた小川雄一教授に心から感謝申し上げます。本研究における数値シミュレーションは国際核融合エネルギー研究センターの Helios スーパーコンピュータを用いて遂行されました。また、様々な事務手続きなどでお世話になりました日本原子力研究開発機構システム計算科学センターおよび東京大学大学院新領域創成科学研究科のスタッフの皆様に感謝いたします。

## 付録 A

### Landau 減衰

乱流は熱的平衡から大きく離れたような系である一方、第 3 章で述べるようにエネルギーの注入と散逸が釣り合う定常的な状態に達しうる。高温プラズマ中での乱流場のエネルギー散逸は、運動論的效果の一つである Landau 減衰による過程が存在するという点で特徴がある。これは粒子間の衝突による散逸が小さい無衝突プラズマにおいても存在する場のエネルギーの減衰機構として重要な意味を持つ。電子プラズマの線形化ジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 方程式系 (2.27,2.28,2.28) において磁力線と垂直方向に一樣なものを考えると、次のような 1 次元系に帰着する。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F + \frac{q_e}{m_e} \nabla \phi \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi \left[ q_e \int F d^3v + q_i n_0 \right] \quad (\text{A.2})$$

ただし、簡単のためイオン密度に関しては電子より変化が十分遅いとして定数  $n_0$  に置き換えている。分布関数  $F$  について平衡分布  $F_0$  と揺動分布  $F_1$  に分離し、方程式系を線形化する。 $F = F_0 + F_1, F_0 \gg F_1, e|\phi|/T_e \ll 1$  平衡分布は空間一様だとし準中性条件より  $n_0 = \int F_0 d^3v$  として、次のような線形化方程式を得る。

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F_1 + \frac{q_e}{m_e} \nabla \phi \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi q_e \int F_1 d^3v \quad (\text{A.4})$$



これを次に示すように時間について Laplace 変換、空間について Fourier 変換する。

$$F_k(v, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int F_1(x, v; t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dx \quad (\text{A.5})$$

$$\phi_k(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int \phi(x; t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dx \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{F}_k(v_x; p) = \tilde{F}_k \equiv \int_0^\infty F_k(v, t) \exp(-pt) dt, \quad \text{Re}(p) > p_0 \quad (\text{A.7})$$

ただし第 3 式に関して  $p_0$  は右辺の積分が収束するような適切な値を選ぶ。簡単のため、 $x$  方向に向いた波数ベクトル  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}}$  を考えると、上述の Fourier-Laplace より  $\phi_k$  について次の表式を得る。

$$k^2 \phi_k = -\frac{4\pi q_e}{k_x^2} \frac{\int \frac{F_{1k}(t=0)}{p + ik_x v_x} dv}{1 - \frac{4\pi i q_e}{k_x^2 m_e} \int \frac{\partial F_0}{\partial v_x} \frac{d^3 v}{p + ik_x v_x}} \quad (\text{A.8})$$

式 (A.8) を実時間に逆 Laplace 変換することで  $\phi_k(t)$  の挙動を得るが、このとき Laplace 変換 (A.7) において定義域を  $\text{Re } p < p_0$  に広げることで逆変換の積分が容易となる。

### A.0.1 $N(p) \equiv \int \frac{F_{1k}(t=0)(v)}{u - ip/|k|} dv$ の評価

$F_{1k}(t=0)(v)$  が複素平面の全域で正則ならば被積分関数は  $v = ip/k_x$  でのみ極を持つ。Cauchy の積分定理より、 $\text{Re } p > 0$  なら図 (A.1) のような積分路をとって

$$\oint \frac{F_{1k}(t=0)(v)}{u - ip/|k|} dv = \frac{2\pi}{k_x} F_{1k}(t=0) \frac{ip}{k_x} \quad (\text{A.9})$$

となる。 $R \rightarrow \infty$  で半円部での積分は 0 となるので、これが  $\int \frac{F_{1k}(t=0)(v)}{u - ip/|k|} dv$  に一致する。一方、 $\text{Re } p < p_0$  の場合は図 (A.2) のように積分路を Landau contour と呼ばれるものに変形して解析接続される。

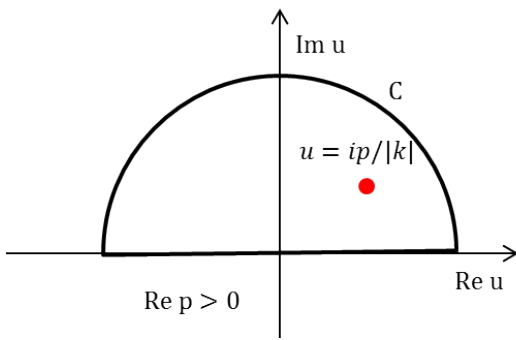


図 A.1 Landau contour,  $\text{Re } p > 0$

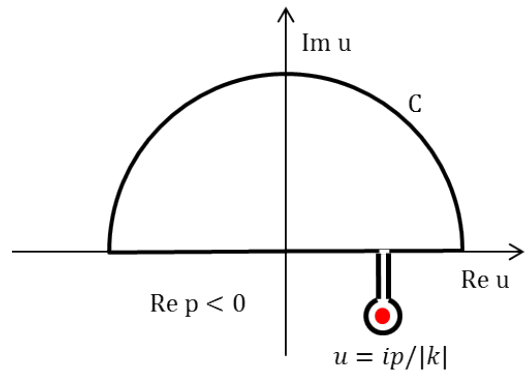


図 A.2  $\text{Re } p < 0$

極の周りでの積分は Cauchy の積分公式より求められ、 $h(p)$  は次のように評価される。

$$h(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(v)}{u-ip/|k|} dv & (\text{Re}(p) > p_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(v)}{u-ip/|k|} dv + 2\pi i F_0\left(\frac{ip}{|k|}\right) & (\text{Re}(p) < p_0) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$\text{Re}(p) \rightarrow 0$  の場合には次のような極限が取られる

$$h(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(v)}{u-ip/|k|} dv + \pi i F_0\left(\frac{ip}{|k|}\right) \quad (\text{A.11})$$

ここで  $f$  は Cauchy の主値積分  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{ip/|k|-\epsilon} + \int_{ip/|k|+\epsilon}^{\infty}$  である。 $\frac{\partial F_0}{\partial v_x} dv$  の場合も同様な議論が成り立ち、逆 Laplace 変換で考慮すべき式 (A.8) の極は被積分関数の分母の零点のみとなる。

### A.0.2 $\phi_k(t)$ の $t \rightarrow \infty$ での漸近的挙動

$\phi_k(p)$  の逆 Laplace 変換は図 (A.3) の  $C$  で示されるような Bromwich path と呼ばれる経路をとって積分される。図 (A.4) の  $B_1 \sim B_4$  のような積分路を考えると経路内で被積分関数は正則なので  $\int B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0$  であり、 $\int_{B_1} = \int_C, \int_{B_3} = -\int_D$  なので  $B_2, B_4$  の積分路を  $\pm i\infty$  にとって積分への寄与を 0 とすると  $\int_C = \int_D$  であることがわかる。結局

$$1 - \frac{4\pi i q_e}{k_x^2 m_e} \int \frac{\partial F_0}{\partial v_x} \frac{d^3 v}{p_j + ik_x v_x} = 0 \quad (\text{A.12})$$

となるような極  $p_i$  からの寄与によって式 (A.8) の積分は決まり、極  $p_i$  における留数  $R_i = \lim_{p \rightarrow p_i} (p-p_i)\phi_k(p)$  を用いて

$$\phi_k(t) = \int_{-i\infty+p_0}^{i\infty+p_0} \phi_k(p) \exp(pt) dp = \sum_i R_i \exp(p_i(k)t) \quad (\text{A.13})$$

あるいは周波数  $\omega = ip$  で表すと

$$\phi_k(t) = \phi_k(t=0) \exp(-i\omega_j t) \quad (\text{A.14})$$

となる。

$t \rightarrow \infty$  の漸近的な挙動を考えると、 $\text{Im}(p_j(k))$  がもっとも大きいものからの寄与が支配的になると考えられるので、分散関数  $D(k, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_0 / \partial v}{u-\omega/|k|} = 0$  の根となるようなものうちそのような一つについて調べることとなる。ただし  $\omega_{pe} = \frac{4\pi n_0 q_e^2}{m_e}$  は電子のプラズマ周波数である。ここで  $k_x \lambda_{De} \ll 1$  を満たすような長波長のモードを考える。このとき波と粒子の共鳴の起こる速度  $p + ik_x v_x = 0$ ,  $v_x = ip/k_x$  は大きな値となり、 $v_{th}$  を大きく超えると粒子数が少なくなるため Landau 減衰の効果が弱くなると考えられ

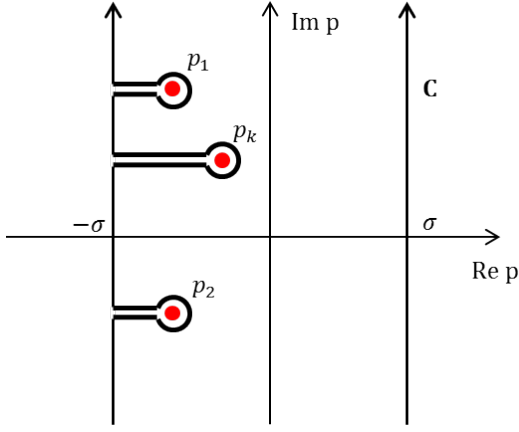


図 A.3 Inverse Laplace transformation,  $\int_C = \int_D$

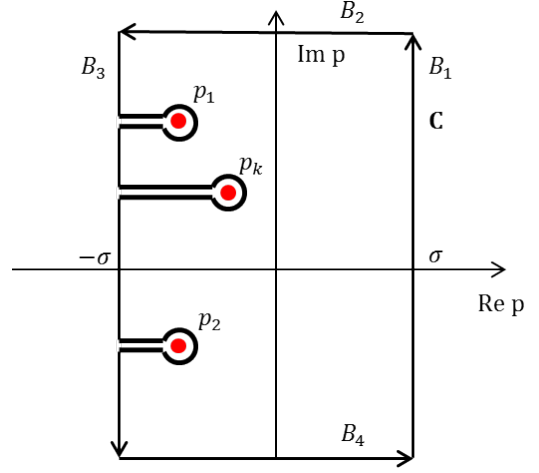


図 A.4 Bromwich Contour,  $\int_{B_1+B_2+B_3+B_4} = 0$

る。そのため  $\omega_r \gg \omega_i$  のゆっくりとした減衰であることが仮定でき、 $\omega_i = 0$  の周りで Taylor 展開できて  $D(k, \omega) = D(k, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} D(k, \omega_r)$  とすることで、 $\omega_r$  と  $\omega_i$  を決める 2 式

$$\begin{aligned} \text{Re}(D(k, \omega_r)) &= 0 \\ \omega_i &= \frac{\text{Im}(D(k, \omega_r))}{\partial \text{Re}(D(k, \omega_r)) / \partial \omega_r} \end{aligned} \tag{A.15}$$

を得る。 $D(k, \omega)$  において平衡分布  $F_0$  について Maxwell 分布であると仮定する。

$$F_0(x, v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) \tag{A.16}$$

このとき、分散関数における積分はよく知られたプラズマ分散関数  $Z(\xi)$

$$Z(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(-v^2)}{v - \xi} dv \tag{A.17}$$

を持ちいて表される。式 (A.16) は

$$\text{Re}(D(k, \omega_r)) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi} k_x^2 \lambda_{De}^2} \int \frac{v \exp(-v^2)}{v - \xi} dv = 1 - \frac{1}{2k_x^2 \lambda_{De}^2} Z'(\xi) = 0 \tag{A.18}$$

となる。ただし  $\xi \equiv v / \sqrt{2} k_x v_{te}$ ,  $v_{te}$  は電子の熱速度、 $\lambda_{De}^2 = \frac{T_e}{4\pi n_e q_e^2}$  は電子の Debye 長である。長波長近似

$\omega/k \gg v_{th}$  or  $\xi \gg 0$  の極限で

$$-\int \frac{\partial F_0 / \partial v}{u - \omega/|k|} dv = \int \frac{\partial F_0}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega/k} + \frac{v}{(\omega/k)^2} + \dots \right] dv \sim \xi^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{2\xi^2} + \frac{3}{4\xi^4} + \dots \right] \quad (\text{A.19})$$

となるので、

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2) \quad (\text{A.20})$$

$$(\text{A.21})$$

であり、式 (A.16) に代入して

$$\gamma = \omega_i = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p e^2}{|k|^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{2k^2 v_{th}^2}\right) \left( = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p e^2}{|k|^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}\right) \right) \quad (\text{A.22})$$

を得る。波の減衰率  $\gamma = \left. \frac{\partial F_0}{\partial v} \right|_{u=\omega_r/|k|}$  は波の磁力線方向の位相速度における平衡分布関数の速度方向微分によって決まることがわかる。物理的な描像としては、波の位相速度より粒子の速度がわずかに遅いときは粒子は波の電場から加速する力を受け、わずかに速い場合は減速する力を受ける、ということにより熱平衡な系  $\frac{\partial F_0}{\partial v} < 0$  においては定常的に波のエネルギーが粒子に受け渡される、という効果を表す。

## 参考文献

- [1] 岸本泰明. 講座 誰にでもわかるトラスプラズマの輸送現象 3. 異常輸送. プラズマ・核融合学会誌, Vol. 76, p. 1280, 2000.
- [2] 洲鎌英雄, 矢木雅敏. イオン温度勾配不安定性 (ITG モード). プラズマ・核融合学会誌, Vol. 76, p. 1007, 2000.
- [3] A. J. Brizard and T. S. Hahm. Foundations of nonlinear gyrokinetic theory. *Rev. Modern Physics*, Vol. 79, p. 421, 2007.
- [4] E. A. Frieman and L. Chen. Nonlinear gyrokinetic equations for low-frequency electromagnetic waves in general plasma equilibria. *Phys. Fluids*, Vol. 25, p. 502, 1982.
- [5] Z. Lin et al. Turbulent transport reduction by zonal flows: massively parallel simulations. *Science*, Vol. 281, p. 1835, 1998.
- [6] A. Fujisawa and et al. Identification of zonal flows in a toroidal plasma. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, pp. 165002–1, 2004.
- [7] A. Hasegawa. Self-organization processes in continuous media. *Adv. Physics*, Vol. 34, p. 1, 1985.
- [8] A. Hasegawa, C. G. MacLennan, and Y. Kodama. Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and rossby waves. *Phys. Fluids*, Vol. 22, p. 2122, 1979.
- [9] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 1417, 1967.
- [10] A. Banon Navarro and et al. Free energy cascade in gyrokinetic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 106, p. 055001, 2011.
- [11] T. Tatsuno and et al. Nonlinear phase mixing and phase-space cascade of entropy in gyrokinetic plasma turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 103, p. 015003, 2009.
- [12] Y. Idomura. Gyrokinetic theory of slab ion temperature gradient mode in negative shear tokamaks. *Phys. Plasmas*, Vol. 6, p. 4658, 1999.
- [13] C. Z. Cheng and G. Knorr. Zonal flows in gyrofluid simulations of slab electron temperature gradient

- turbulence. *J. Compt. Phys.*, Vol. 22, p. 330, 1976.
- [14] Y. Idomura. Self-organization in electron temperature gradient driven turbulence. *Phys. Plasmas*, Vol. 13, p. 080701, 2006.
- [15] P. B. Rhines. Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, Vol. 69, p. 417, 1975.
- [16] G. K. Vallis and M. E. Maltrud. Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr*, Vol. 23, p. 1346, 1993.
- [17] T. Nozawa and S. Yoden. Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, Vol. 9, p. 3834, 1997.
- [18] T. Nozawa and S. Yoden. Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, Vol. 9, p. 2081, 1997.
- [19] Y. Idomura, M. Ida, S. Tokuda, and L. Villard. New conservative gyrokinetic full-f vlasov code and its comparison to gyrokinetic  $\delta f$  particle-in-cell code. *J. Compt. Physics*, Vol. 226, p. 244, 2007.
- [20] J. Li and Y. Kishimoto. Zonal flows in gyrofluid simulations of slab electron temperature gradient turbulence. *Phys. Plasmas*, Vol. 9, p. 1241, 2002.

# 既発表リスト

## 口頭発表

1. 河合智賀, 前山伸也, 井戸村泰宏, 小川雄一 「電子乱流スペクトルのジャイロ運動論的シミュレーション」, 第 53 回プラズマ若手夏の学校, 平成 26 年 9 月
2. C.Kawai, S.Maeyama, Y.Idomura, and Y.Ogawa, “Gyrokinetic simulation of electron turbulence spectrum” , PLASMA2014, Niigata, Japan, Nov, 2014

## 受賞

1. 「電子乱流スペクトルのジャイロ運動論的シミュレーション」, 第 53 回プラズマ若手夏の学校学生ポスター賞、河合智賀、平成 26 年 9 月