

論文審査の結果の要旨

氏 名 李 曉龍

論文提出者李曉龍は、本論文において3次元閉リーマン多様体上の非双曲型 C^1 級微分同相写像の典型的な現象と考えられるホモクリニック接触と異次元ヘテロクリニック・サイクルに関して、ホモクリニック接触が安定化されるための十分条件を、そのホモクリニック接触に関わる周期的双曲型サドルの固有値の条件によって記述した。ホモクリニック接触を安定化することは、力学系の空間においてよく理解されている双曲型力学系での近似が不可能な開集合を提示することである。これは理解が困難な非双曲型力学系の領域に新しい例をもたらす結果である。

これまで、 C^1 位相については、異次元ヘテロクリニック・サイクルに関する安定化問題は扱われていたが、ホモクリニック接触についての結果はなかった。類似の問題として、ホモクリニック類上に優越分解が存在しない場合に、 C^1 位相におけるいくらでも小さな摂動により強健なホモクリニック接触を作るという Bonatti, Crovisier, Diaz, Goumelon による結果があり、それは同様にホモクリニック類の関わる周期的双曲型サドルの固有値の条件によって記述されている。それらの証明の主な部分はホモクリニック類の内部でのいくらでも小さい摂動により十分小さな正の実数 δ に対して δ 弱固有値を持つ周期的双曲型サドルをつくる部分である。ここで、 δ 弱固有値とは固有値の絶対値が1から δ 以内の距離にあるという意味である。3次元の場合では、安定指数が2のサドルの場合に（安定指数1を持つ場合は逆写像を考えることによりこの場合に帰着される）、サドルの最大リャプノフ指数と2番目に大きいリャプノフ指数の和が $-\delta$ より大きいという固有値条件で可能となる。今回の結果は、周期的双曲型サドルが実でない固有値を持つという仮定の下に、その和が $\log(1-\delta)$ より大きければ十分であることを証明したものである。

その証明では、これまで用いられてきた抽象的な方法ではなく、具体的な馬

蹄形モデルを通して、弱固有値をつくる新しい摂動技術が利用可能となるような周期的サドルを見つけることによる。より具体的には、サドル型の周期軌道について安定方向と不安定方向を混合させるために安定部分空間と不安定部分空間の間の小さい角度が必要である一方で、それ以外の部分では比較的大きな角度が十分大きな周期に対する正の割合で存在するような周期軌道を見つけ、そこでの摂動を利用して弱固有値をつくる。その摂動は、実数でない固有値の存在による回転の効果をうまく利用した新しい方法による。これにより、与えられた摂動範囲に対応した弱い固有値条件の下で、これまで適用できなかったホモクリニック類に関するホモクリニック接触の安定化が可能となる。一方で、最大のリャプノフ指数と2番目に大きいリャプノフ指数の和が0より小さい場合にいくらかでも小さな摂動で同様の結果を得ることは現在この分野で最も難しい問題の1つとされる Smale 予想と同様の困難を伴うことが想像される。したがって、今回の結果は3次元の実数でない固有値を持つサドルについて、現時点で実現可能と考えられる範囲で最良の結果を示したことになる。

このように摂動範囲に対応した固有値条件は、とりわけ強健な性質を持つ力学系のクラスについて威力を発揮する。論文提出者は修士論文において残留的に強健なエントロピー拡大微分同相写像を導入して、強健なエントロピー拡大微分同相写像に対する結果を拡張したが、強健なエントロピー拡大微分同相写像に対するホモクリニック類については知られている優越分解の存在が、残留的に強健なエントロピー拡大微分同相写像では、その近傍内のある開かつ稠密な部分集合でのみ証明されていた。今回の結果の系として、中心の微分同相写像についても同様の弱い固有値条件の下で優越分解の存在が証明された。

非双曲型力学系の大域的理解を目指し、その基本単位であるホモクリニック類に関するホモクリニック接触の C^1 安定化という重要な問題において新たな知見を与えた本論文の意義は大きく、論文提出者李曉龍は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があるものと認める。