論文の内容の要旨

論文題目　A remark on default risks in financial models:
a filtering model and a remark on copula
(デフォルトリスクに対するファイナンスモデルに関する考察：
フィルタリングモデルとコピュラモデルについて)

氏名　中島　武信

本論文では、デフォルトに関する 2 つの話題、具体的には「デフォルトを含むフィルタリングモデル」および「コピュラ」を取り扱う。前者は学術的観点から、後者は実務的観点から興味を持たれている。これらを確率論の枠組みで定式化し、主にマルチンゲール理論を用いて考察していく。

デフォルトを含むフィルタリングモデルの概要

デフォルトとは債務不履行を表すファイナンス用語である。社債や CDS(Credit Default Swap) といった、個別企業の信用リスクが絡む金融商品を、理論的であれ、実務的であれ、取り扱う場合には必ずと言っていいほど良く用いられる概念である。

例えば社債の場合、社債の満期まで発行体 (社債を発行した企業) がデフォルトしなければ、期中の利払い日には定められたクーポンが、満期日には元本が、社債の購入者に支払われる。その一方で、満期前に発行体がデフォルトしてしまうと、クーポンの支払いは止まり、元本部分は一部しか、あるいは、全く支払われなくなるケースが多い。

ここで、簡単なモデルを考えてみよう。$(\Omega, \mathcal{B}, P, \{B\}_{t\in[0,\infty)})$ をフィルトレーション付きの確率空間とする。ある社債の発行体のデフォルト時刻を $\{B\}_{t\in[0,\infty)}$-停止時刻とする。簡単のためにこの社債は割引債であるとしよう。満期まで発行体がデフォルトしなければ元本が回収できるが、満期前のデフォルトすると、元本は一切回収できず、社債の価値はゼロになるとする。この社債の満期を T としよう。r を無リスク金利、Q は P と同値なリスク中立確率とする。このとき、時刻 t における社債の価格 $p(t)$ は次で与えられる。

$$p(t) = 1_{\{\tau>t\}} E^Q[e^{-\int_t^T r(s)ds} 1_{\{\tau>t\}} | \mathcal{B}_t]$$

この例から分かる通り、デフォルトリスクをモデル化する場合、デフォルト時刻 τ の特徴づけや、リスク中立確率の下での条件付き期待値 $E^Q[\cdot|\mathcal{B}_t]$ に関する考察が必要となってくる。デフォルト時刻 τ は、Structual アプローチ、あるいは、Reduced form アプローチにより特徴づけられることが多い。Structual アプローチでは、企業価値がある一定水準を下回った時刻をデフォルト時刻と定義している。一方で Reduced form アプローチでは、デフォルト時刻を外生的に与えている。Structual アプローチは Merton[9] において初めて用いられるようになったといわれている。また、Reduced form アプローチは Duffie-Singleton[7] や Duffie and Land[6] に代表されるアプローチである。これらの詳細は当該論文に加え、楠岡・青沼・中川 [1] を参照されたい。

Structual アプローチ、Reduced form アプローチのどちらにおいても、デフォルトリスクをモデル化するにあたって、デフォルト時刻とフィルトレーションの特徴付けが重要であるが、ここで、フィルタリングをファイナンスに用いた最初の論文である、Duffie and Land[6] について言及しておきたい。楠岡・青沼・中川 [1] でも纏められているとおり、Duffie and Land[6] は、ある企業が株と社債を発行しているケースを考え、株主は企業価値について完全な情報を保有している一方、社債保有者は不完全な情報しか保有していないとした。そして株主は、当初株価が最大化するように、企業の清算時点を決めることができるとした。これは、株主が経営権を持つケースであるから、オーナー企業を想定していると考えられる。

当初株価の最大化に当たって株主は、株の配当、社債の発行利回り、税効果、清算によるコストを考慮するとしたが、これらに関しては株主は変更を行うことはできず、唯一、清算時点のみをコントロールできるとした。このとき、清算時点は、企業価値がある一定水準を下回った時点として与えられることを、Duffie and Land[6] は証明している。

さらに、ある技術的な条件のもとで、Structual アプローチにおける変数と、Reduced アプローチにおける変数がある等式で結ばれることを示している。

また同論文では、社債保有者は決算期ごとに、つまり離散時間において不完全情報が与えられるとしているが、Kusuoka[8] では、デフォルトリスクに関する様々な数理モデルについて考察を行う中で、Duffie and Land[6] の連続版に相当するモデルについても言及している。

さらに Nakagawa[10] は、デフォルトリスクに関するフィルタリングモデルを構築し、不完全情報の下での表現定理を示したほか、Kusuoka[8] の結果と併せて、P と同値な確率測度 Q の下でのハザードレート λ_t と、P の下でのハザードレート h_t の関係性を示した。ただし、Nakagawa[10] ではピン止めされたブラウン運動の確率測度という扱いにくい測度を用いているため、本論文では、Nakagawa[10] の方法を踏襲しながら、より扱いやすい測度の下での表現定理を示した。

クレジットモデルとコピュラの考察の概要

上記の”デフォルトを含むフィルタリングモデルの概要”ではデフォルト・リスクの数理モデル化に関して議論を行ったが、そこでの議論は、基本的に、単一企業のデフォルトを想定している。社債など、発行体のデフォルトのみが影響する商品を取り扱う場合であれば、前章の設定で十分であるが、CDO(Collateralized Debt Obligation) に代表されるような、複数の企業群を参照する金融商品を取り扱う場合は、各々の債務の分布ではなく、それらの同時分布を考える必要がある。つまり、CDO を考える場合、参照ポートフォリオの中に入っているクレジット商品 (各社の社債やローン等) 同士の相関を考える必要がある。ここでの相関とは、連鎖倒産に代表されるような、デフォルトの意味での相関である。この相関を考える上で良く用いられるのが、次に述べるコピュラである。

コピュラとは、複数の確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\cdot,n}$ があったときに、各々の周辺分布 $F_i(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ と、それらの同時分布関数 $F(x_1,\cdots,x_n)$ を繋ぐ関数を指し、具体的には、

$$F(x_1,\cdot,x_n) = C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n))$$

なる関数 C がコピュラである。また、Sklar の定理 [11] により、同時分布関数 F と周辺分布関数 $\{F_i\}_{i=1,\cdots,n}$ をつなぐコピュラ C が一意に存在することが証明されている。ただし、周辺分布関数 $\{F_i\}_{i=1,\cdots,n}$ を決めればコピュラ C が一意に決まる訳ではないので、参照する債務のポートフォリオの特徴に応じて、適切と思われるコピュラを選択する必要が出てくる。戸坂・吉羽 [2] ではコピュラを、変数間の相関関係を行列で表現するコピュラと、1 種類のパラメータで表現するコピュラに分類しており、前者の例として、正規コピュラ、t コピュラを、後者の例として、1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラ (ガンベル (Gumbel)・コピュラ、クレイトン (Clayton)・コピュラ、フランク (Frank)・コピュラ等) を挙げている。

さて本稿では、このコピュラに焦点を当てている。コピュラは、静的な条件下で、クレジット商品のポートフォリオに関するパラメーターの推計、リスク量の算出に用いられている。そして、クレジット商品のポートフォリオを原資産とする CDO の価格付けにもコピュラが用いられているが、価格付けにコピュラを用いる場合、コピュラが動的なデフォルト時刻モデルと整合的であるか、という点が重要となってくる。コピュラの性質や、実務的にどのように用いられているかについては、Li[5]、小宮 [3]、戸坂・吉羽 [2] 等に記載されているが、この整合性について分析を行った論文は筆者の調べた限りでは、存在しない。しかしコピュラが整合性を満たさないということになれば、そもそも実務で行われているような、CDO の価格付けにコピュラを用いること自体、必ずしも妥当ではない (少なくともオプションプライシングに Black Scholes が用いられる時程の妥当性はない) ということになろう。

Björk-Christernsen [4] は無裁定な金利モデルとフォワードレート・カーブが consistent となる、つまり、ある金利モデルによって、別のあるフォワードカーブの族が生成される必要十分条件を導出した。また上記論文では、例として、Nelson-Sigel 型のフォワードレート・カーブは Ho-Lee モデルをはじめとする、拡散過程モデル全般と整合的でないことを指摘している。

本稿では、有限次元のパラメータを持つコピュラの族と、動的なデフォルト時刻の関係を分析し、動的なデフォルト時刻と整合的となるコピュラは、(Baire の第一類の意味で) 稀であるということを示した。つまり、ほとんどすべてのコピュラは本稿でいうところの整合性を満たしておらず、CDO のプライシングという動的な設定においてを用いる場合は、整合性を確認する必要があるというのが本稿の結論である。なお本稿では、$n=3$ の Gumbel コピュラと逆 Gumbel を取り上げ、数値計算によりこれらが整合性を満たさないことを示した。

コピュラの代わりに CDO のプライシングに何を用いればよいのか、つまり、動的なデフォルト時刻モデルと整合的な関数としてどのようなものが存在するのか、については今後の研究課題としたい。

またコピュラの例として、Gumbel コピュラと逆 Gumbel を取り上げ、数値計算によりこれらが許容可能でないということを示した。正規コピュラ (Gaussian コピュラ) も許容可能ではないと思われるが、計算精度が足りず、示すことができなかった。計算ツールとしては C 言語と統計ソフト R をそれぞれ試したが、同様の結果であり、上記の部分を改善することはできなかった。

共著して頂いた A remark on credit risk models and copula はもとより、A filtering model や本博士論文を纏めるにあたり、楠岡　成雄教授には数多くのご助言を頂戴致しました。心より感謝いたします。

参考文献

[1] 楠岡成雄, 青沼君明, 中川秀敏, クレジット・リスク・モデル, きんざい, 2001.

[2] 戸坂凡展, 吉羽要直, CDO のプライシング・モデルとそれを用いた CDO の特性等の考察：CDO の商品性、国内市場の概説とともに, 日本銀行, 金融研究, 2003.11.

[3] 小宮清孝, コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 日本銀行, 金融研究第 24 巻別冊第 2 号, 2005.

[4] Björk, T. and B. Christernsen, Interestrate Dynamics and Consistent Forwardrate Curves, Mathematical Finance, 9(1999), 323-348.

[5] David X. Li., On Default Correlation: A copula Function Approach, Journal of Fixed Income 9: 43-54, 2000.

[6] Duffie, D., and Lando, D., Term structures of credit spreads with incomplete accounting information, Econometrica 69.3: 633-664, 2001.

[7] Duffie, D., Singleton, K., Modeling Term Structures of Defaulttable Bonds, Working paper, Stanford University, 1994.

[8] Kusuoka, S., A remark on default risk models, in Advances in Mathematical Economics vol. 1, ed. S.Kusuoka, M.Maruyama , pp.69-82, Springer 1999.

[9] Merton, R., On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rate, Journal of Finance 29: 449-470, 1974.

[10] Nakagawa, H., A Filtering Model on Default Risk, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 8: 107-142, 2001.

[11] Sklar, M., Fonctions de rèpartition à n dimensions et leurs marges, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8: 229-231, 1959.