

論文審査の結果の要旨

氏名 中島 武信

本論文は、ファイナンスにおけるデフォルト（債務不履行）リスクに関する2つのモデル、フィルタリングモデルとコピュラモデルについて研究したものである。デフォルトを考慮した、企業の社債や株の価格過程を表現する方法としては、これまで企業価値がある値を下回った時をデフォルト時刻とする structural form アプローチ、及びあるハザード過程に従って突然デフォルトが起きるという reduced form アプローチがある。経済学的には前者のアプローチが自然であるが、企業価値を連続確率過程で表現すると、市場が企業価値を観測できるとするならばデフォルト時刻が可予測となり、実際の現象をうまく説明できない。一方、後者の方法はハザード過程がどのように決まるのかの説明力が弱い。この2つを結ぶものとして、決算期に企業価値の真の値がわかるがそれ以外には情報が得られないというモデルが Duffie-Lando により 1998 年に提唱された。その後、決算期以外にも部分的な情報が連続的に得られるというモデルが現れ、これらは総称してフィルターリングモデルと呼ばれる。本論文では、以下のようなモデルが考察されている。

$(\Omega, \mathcal{B}, P, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, \infty)})$ を標準条件を満たすフィルター付き確率空間、 B_t, \hat{B}_t, W_t は独立な $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ -ブラウン運動とし、それぞれ、1次元、 N 次元、1次元とする。さらに、 X, Z, Y は次の確率微分方程式の解とする。

$$dX_t = dB_t + b_0(t, X_t, Z_t)dt, \quad X_0 = x_0 > 0,$$

$$dZ_t = \sigma_1(t, X_t, Z_t)d\hat{B}_t + b_1(t, X_t, Z_t)dt, \quad Z_0 = z_0 \in \mathbf{R}^N,$$

$$dY_t = \sigma_2(t, Y_t)dW_t + b_2(t, X_{t \wedge \tau}, Y_t)dt, \quad Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}.$$

ここで τ は $\tau = \inf\{t > 0; X_t = 0\}$ で定義される停止時刻で、デフォルト時刻と解釈する。さらに、 $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, は $Y_s, s \leq t$, 及び $\tau \wedge t$ により生成される σ -加法族とし、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ を考え、このフィルトレーションが市場の情報を表すとする。すなわち、市場が観測できるのは Y であり、デフォルトが起きた時はその事実もアナウンスされるというモデルである。本論文では確率過程

$$F_t = \int_0^t f_1(s)ds + \int_0^t f_2(s)dW_s + \int_0^t f_3(s)dB_s + \sum_{j=1}^d \int_0^t f_4^j(s)d\hat{B}_s^j$$

に対して $E[F_t | \mathcal{F}_t]$ が確率過程としてどのように確率積分で表現されるかについての公式を導いた。同じ目的の先行研究として中川による 2001 年

の研究があるが、中川による表現には、特異な測度である **pinned Brown** 運動の測度による積分が現れており、積分値が曖昧になるため使いにくい表現であった。本論文ではすべてが基本となる測度により式が表現されており、可積分性等も詳しく調べられている。また、中川は主に社債の価格に対するハザード過程を考察しているが、本論文では株価に対するモデルの考察も含まれている。これらの点が本論文の新しい点である。

次にコピュラモデルについての結果について述べる。複数の企業が存在する場合はそれぞれの企業のデフォルト時刻を表現するモデルが必要となる。特に、**CDO** 等のデリバティブの価格計算においては企業のデフォルトの間の関係を記述する必要がある。このため、複数のデフォルト時刻を表現するモデルが研究されてきたが、一般には様々なデリバティブについてモデルから決まる理論価格と市場価格とを調整することは容易ではなく、使い易いモデルが求められていた。2000年頃にコピュラを用いてデリバティブ価格を計算する方法が考案され、その簡便性から広く使われるようになった。しかし、それはファイナンスモデルが背景にないためファイナンスの基本理論と整合性を持つかは不明であった。

本論文では、コピュラの族に対して動的整合性の概念を定義し、どのようなコピュラ族が動的整合性を持つかを調べている。結果は、まずコピュラ族の空間を完備距離空間ととらえ整合的なものはその中で **Baire** の第一類集合となることを示した。よって、整合的なコピュラ族は特殊なものしかないことがわかる。さらに具体的なコピュラ族として、**グンベルコピュラ**、**逆グンベルコピュラ**を考え、どちらも3社以上のデフォルト時刻を記述するモデルとして動的整合性を持たないことを示した。この2つの具体例については数値計算により、ある行列が最大階数を持つことを確認することにより結果が示されている。最も広範囲に用いられている**ガウシアンコピュラ**についても動的整合性がないと思われるが数値計算の精度の問題で証明ができていない。しかしこれらの数学的な結果はコピュラを用いて**CDO**の価格計算を行うことの危険性を示している。

このように本論文ではファイナンスにおけるデフォルトリスクに関するフィルタリングモデルとコピュラモデルについて重要な結果を得ている。フィルタリングモデルについては条件付き期待値に関して具体的な評価が可能な公式を与えている。コピュラモデルについてはコピュラ族に対する動的整合性という概念を与え、コピュラ族は一般には動的整合性を持たないことを示し、実務に対しても重要な示唆を与えている。これらの結果は数理ファイナンスの観点から高く評価できるものである。

よって、論文提出者 **中島 武信** は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。