

論文の内容の要旨

論文題目 Option Pricing under Various Market Restrictions
(種々の市場制約下でのオプション価格付けについて)

氏名 斎藤 大河

実務におけるオプション取引では、価格付けの際、従来の理想化された設定におけるオプション価格評価で捉えることの出来ない要因を考慮に入れる。本論文ではこれらの要因のうち特に (1) オプションのヘッジ取引に係る流動性コスト、及びヘッジ取引によるヘッジ対象資産の市場価格に与える影響、(2) 為替市場におけるある水準を超える通貨高を防ぐための通貨当局による為替介入を考慮に入れたオプション価格評価モデルを構築し、その下で得られるオプション価格について考察する。(1),(2) についてより具体的に以下の状況が起こりうる。

(1) 顧客とのオプション取引の相手方である金融機関がオプションのポジションに対してヘッジ取引を行う際、一般的にヘッジ取引がミッド価格で行われることは無く、ミッド価格とオファー価格、ビッド価格との差が取引コストとして支払われる。そのオプション満期までに掛かる合計金額は、市場変動によるヘッジの頻度が多く、ヘッジ対象資産の流動性が低い程大きくなり、その不確実なコストを考慮に入れ、取引の際に価格を提示する。また金融機関が大きなサイズのオプション取引によるポジションを持っている場合、それに係るヘッジ取引がヘッジ対象となる原資産の市場価格を大きく動かすことがあり、さらにオプションポジションの価値評価にも影響を及ぼす。そのため金融機関のトレーダーはヘッジ取引を行うタイミングとサイズに注意を払う。例えば金融危機時に、金融機関はオプション取引において、オプション原資産の流動性の低下及び激しい市場変動によるヘッジ取引コストの増大により、当初積んでおいたヘッジ取引コストの資金が枯渇する状況や、顧客とのオプション取引から同様のポジションを抱える複数の金融機関のヘッジ取引により原資産価格の変動をさらに加速される状況を経験した。このような状況下ではヘッジ取引に係るコスト、ヘッジ取引がヘッジ対象資産価格に与える影響を考慮したオプション価格評価が重要であり、本論文の第 2,3 章においてこれらを考察する。(2) 外国為替市場において、通貨の取引価格は市場参加者による需給のみならず、各国の通貨当局の為替介入による影響を受けることがある。例えばドル円市場においては日本政府が日銀を通じてしばしば過度の円高を阻止するために為替介入を行う。またユーロ圏における債務危機以後、ユーロ下落に伴うスイスフラン高を防ぐためスイス中央銀行がユーロスイスフラン市場において介入を行っている。このような状況下において、デリバティブ市場においてはそのペイオフが為替介入に影響を受ける水準にある商品が取引されてきた。具体的にドル円においては、介入が予想される円高水準の行使価格を持つ長期のオプションが仕組債や為替予約に組み込まれ多く取引されている。これらの商品の価格評価はモデルに為替介入を取り込む

ことで影響を受けることが期待される。これを踏まえ本論文では、第4章において為替介入の影響を考慮に入れた為替オプション価値評価について考察する。以下各章の内容について具体的に述べる。

第2章は、非完備市場でのオプション取引について、ヘッジ対象資産における流動性による取引コストとヘッジ取引によるヘッジ対象資産の市場価格への影響(以下マーケットインパクトと呼ぶ)を考慮した離散時間のモデルにおいて、局所リスク最小化法による最適なヘッジ戦略を明示的に与えた。より具体的には以下の結果を得た。(a)マーケットインパクトの大きさに係るパラメーター(以下マーケットインパクトパラメーターと呼ぶ)が確定的な時間についての関数の場合に、(i) オプションが満期において差金決済される場合は、最適なヘッジ戦略が満期から後ろ向きに明示的に解けること、(ii) オプションが満期において現物決済される場合は、マーケットインパクトパラメーターが0、即ちマーケットインパクトがない場合の最適戦略の周りで、摂動法により最適戦略のマーケットインパクトパラメーターによる1次までの展開が後ろ向きに明示的に与えられることを示した。(b)マーケットインパクトパラメーターが時間依存しない定数の場合に、最適戦略が一意に存在すること、及び満期から後ろ向きに明示的に与えられることを示した。

マーケットインパクトを考慮するモデルについて、予め定められた量の商品を一定期間内に売り切る、所謂最適執行の問題は先行研究が多く存在するものの、オプション価格評価の研究は数少ない。特に非完備市場でのオプション価格評価について、最適戦略を明示的に与えているものはこれまでに無く、本論文は局所リスク最小化法による最適戦略を離散時間のモデルについて与えている。これにより現物取引が困難な原資産に係るオプションを、原資産と相関のあるマーケットインパクトがあるヘッジ対象資産を用いてヘッジを行う際の最適取引戦略及び初期時点において受け取るべきオプションプレミアムが導かれる。平均分散最小化など異なる定義による最適戦略及びヘッジ対象資産の流動性が時間依存する確率過程である場合は今後の研究課題である。

第2章は以下の様に展開される。初めに、離散時間において、ヘッジ対象資産について Cetin et al.(2004) による線形な供給関数、及びマーケットインパクトを定義した。ここで線形な供給関数とマーケットインパクトは、ヘッジ対象資産のオーダーブックにおいて、すべての価格に渡り定数の注文密度を持ち、特にビッドオファースプレッドが無い場合に相当する。さらにマーケットインパクトを定義する際に、マーケットインパクトパラメーターを時間依存する確定的な関数とした。これはヘッジ対象資産価格における、累積マーケットインパクトがヘッジ対象資産の最終的なポジションにのみ依存する定数パラメーターの場合を含む一般的な形になっている。次に Lamberton et al.(1998) の離散時間における固定率の取引コストのみが存在する場合の局所リスク最小化を基に、マーケットインパクトが存在する場合の局所リスク最小化を定式化した。この下で上述(b)を示した。これは Lamberton et al. (1998) の結果が、マーケットインパクトがある場合にも同様に成立することを示したものである。次に上述(a)を示した。(a)-(ii)は、累積マーケットインパクトが途中のヘッジ対象資産のポジションに依存する場合、現物決済の場合の局所リスク最小化戦略は、確率変数に関する非線形連立方程式の解で与えられ、明示的に解くことが出来ないが、マーケットインパクトが無い場合の最適戦略の周りにおいて摂動を行うことで1次近似が明示的に与えられることを示している。さらに(a)-(i)(ii)について数値例を与えた。具体的には、ヘッジ対象資産が原資産と正の相関を持つ場合に、2期間の2項モデルに

において、差金決済における最適戦略と現物決済における摂動法による最適戦略の1次近似の例を示した。特に現物決済の場合について、2期間の場合においては、最適戦略を得るための非線形連立方程式が3次方程式に帰着され、その戦略が一意解を持つ条件を示した後、最適戦略と摂動法による近似戦略との数値比較を行った。

第3章は、Roch (2011)におけるオーダーブックの注文密度が一様かつマーケットインパクトパラメーターが定数の場合の自己資金調達戦略の連続時間の富過程の表現の拡張を与えた。具体的には、オーダーブックの注文密度が一様で無い場合に、自己資金調達戦略の富過程の連続時間での表現を拡張した。これにより実務において見られるオプション原資産が一般的なオーダーブックの形状を持つ場合に、オプションヘッジに関する最適なポートフォリオを構成する問題を考えることができる。

第3章は以下のように展開される。初めにオーダーブックの密度の分布と供給関数、最大購入価格の間に成立する関係式を示した後、離散時間において非線形な供給関数に対応する最大購入価格を通じてマーケットインパクト、自己資金調達戦略及びその富過程を定義し、時間幅を0に近づける際の確率収束極限を導出した。さらに具体例としてCetin et al.(2004)におけるマーケットインパクトが存在せず非線形な供給関数の場合の自己資金調達戦略の富過程と、Roch (2011)におけるマーケットインパクトが存在し、線形な供給関数の場合の自己資金調達戦略の富過程、またマーケットインパクトが存在し非線形な供給関数でかつビッドオファースプレッドが存在する場合の富過程の表現を導出し、Cetin et al. (2004)とRoch (2011)の富過程の表現の拡張となっていることを示した。

第4章は、外国為替市場において為替介入が存在する場合の為替オプションの価格評価を考察した。具体的にはフォワード為替レートの価格過程を、時間依存し確定的な吸収壁付き拡散過程によって表現し、ボラティリティ過程が時間依存する確定的な場合に、ヨーロッパンオプション、デジタルオプション価格及びグリークスの解析解を与えた。さらに介入の水準が有限個の値をとる確率変数で、フォワード為替レートを駆動するブラウン運動と独立な場合にモデルを拡張し、その場合のヨーロッパンオプション価格が解析的に計算されることを示した。

これまでに存在する先行研究は、ユーロ発足時のあるバンドの中で為替レートが管理されていた欧州通貨のオプション価格評価を動機とするもので、バンド内で為替レートが上下の境界に近づく場合に拡散項が0に近づくものや、無裁定条件を満たさない反射壁を用いたモデルであった。これに対し本論文では、金融危機以後の為替レートの一方向に介入が起こりうる場合を想定し、さらに介入水準が時間依存する場合および有限個の値をとる確率変数の場合に吸収壁を用いて、時間依存する確定的なボラティリティ過程の下、無裁定の枠組みでヨーロッパンオプションの価格を導出した。フォワード為替レートのボラティリティ過程が確率過程で表現される場合、及び介入水準がフォワード為替レートと相関を持つ確率過程である場合のオプション価格の評価は今後の研究課題である。

第4章は以下のように展開される。初めに、オプション満期に対応する自国フォワード測度の下で、時間依存する確定的な吸収壁付き拡散過程を定義した後、その拡散過程の強い解の存在と一意性を示した。さらにそのモデルの下でヨーロッパンオプション、デジタルオプション価格及び、介入時刻の分布関数、オプションのデルタ、ガンマ、セータ、ベガの解析的な表示を与えた。さらに介入水準が有限個の値をとる確率変数で表される場合にモデルを拡張し、介入水準がフォワード為替レートを駆動するブラウン運動と独立な

場合に, ヨーロピアンputオプションの価格が各介入水準に対応するヨーロピアンオプション価格の重みづけの和で表されることを示した. 最後に数値例として, 2009年以降為替介入が継続されているユーロスイスフランについての為替オプション価格について, モデル価格と市場価格の比較を行った.

最後に第5章において, 第4章までの内容のまとめと今後の研究課題について言及し, 結びとしている.