

## 審査の結果の要旨

### 論文題目

## Essays on Model-Independent Super-Replication of Derivatives

(モデルによらないデリバティブの優複製に関する研究)

氏名：都築幸宏

2007年以降の相次ぐ金融危機以降、金融機関が取引しているデリバティブについて、それらのリスクを十分に認識し適切な評価をしていなかった等の批判が挙げられ、金融機関のリスク管理が抜本的に見直されつつある。特に、デリバティブの評価には、通常、特定のモデルに基づき時価評価され、リスク管理が行われているが、特定のモデルを採用することは、モデル選択のリスクやモデル・パラメータの誤推定リスクに晒されていることになる。確かに、金融機関が取引しているデリバティブは複雑でありモデルを全く用いずそれらの評価やリスク管理を行うことは困難だが、デリバティブのモデルに依存しない特性に関する理解を深めることはリスク管理の高度化に不可欠である。

以上の問題意識から、都築幸宏君はデリバティブのモデルに依存しない優複製方法、劣複製方法、価格の上限値、下限値、密度関数の補正法等を研究し、新手法を考案すると共に、詳細な数値実験を実施することにより、彼の開発した方法が国際的な金融市場取引やリスク管理の実務において有用であることを示した。

尚、本論文は研究テーマ毎に大別した、以下の4部構成となっている。第1部と第2部では、特定のデリバティブ(第1部では複数資産を原資産とするデリバティブ、第2部では経路依存型デリバティブ)の優劣複製に関する新手法を提示している。第3部では、複製戦略の改善手法を提案している。第4部は、他の3部とは独立した内容であり、原資産の分布の新しい補正方法を考案している。

### 第1部(1、2章)：複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製

1章 On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies

2章 Pricing Bounds on Quanto Options

### 第2部(3、4、5章)：経路依存型デリバティブの優劣複製

3章 Pricing Bounds on Barrier Options

4章 No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options

5章 No-Arbitrage Conditions for Barrier Options

### 第3部(6章)：優劣複製取引戦略の改善

6章 Rebalancing Static Super-Replications

### 第4部(7章)：密度関数の補正

7章 Approximation of Probability Density Functions

以下では、本博士論文の内容をより具体的に紹介する。

第1部1章では、ペイオフが正の関数の積分であらわされるようなデリバティブに対して優劣複製手法を導出する。このようなデリバティブの例は、バスケット・オプション、通貨オプション、クオント・オプションなどである。先行研究では個々のデリバティブの優劣複製手法は研究されているが、これらのデリバティブを共通の枠組みで統一的に論じたのは本研究が初めてである。

優劣複製手法の導出は次のとおりである。まず、ペイオフに対して実数上の単調増加関数を定め Young の不等式を適応することにより、優劣複製手法が得られる。これらの中で最良の優劣複製手法(複製ポートフォリオのコストが最小または最大のもの)を与える単調増加関数の特徴を導出する。最良であることは、複製ポートフォリオのコストをデリバティブの価格とするような同値マルチンゲール測度が存在することで示すことができる。この方法により得られる価格の上下限値は、原資産が同時にある方向に変動するような確率空間上での価格と一致する。

2章では、1章の応用例として、外貨資産と為替レートを参照するクオント・オプションの優劣複製手

法を研究する。クオント・オプションのプライシングに関する先行研究は、(Bennett and Kennedy, 2004)、(Jackel, 2009)、(Jackel, 2010)、(Giese, 2012) などあるが、優劣複製手法や価格の上下限値を研究したものは、この研究が初めてである。クオント・オプションのペイオフは外貨建てで表すと、2つの確率変数の積という形になるため、クオント・オプションのポートフォリオにも1章の手法を適用することができる。これはバスケット・オプションなどでは成り立たないクオント・オプションの特徴である。この特徴を利用して、最も流動性のあるクオント・フォワード取引を複製に使うことにより複製効率の向上の程度を調べる。クオント・フォワード取引をカリブレーションに使う手法は(Giese, 2012) で検討されているが、取引戦略に利用する研究は、本研究が初めてである。

第2部では、1つの資産を原資産とする経路依存型デリバティブの優劣複製を研究する。複製取引戦略は、静的または準静的である。ここで、準静的とは初期時点で構築したポートフォリオを高々一度だけ更新することを許す取引手法である。各章の優劣複製の研究では、許容される取引戦略についての前提条件を課し、その条件の下で最良な取引戦略を導出する。この最良な取引戦略に必要な費用が、対象とするデリバティブの価格の上下限値になる。

3章では、タッチ・オプションを使ってバリア・オプションの静的な優劣複製手法を考える。バリア・オプションのモデルによらない優劣複製の先行研究では、原資産がマルチンゲールであることを仮定し準静的な取引戦略を用いるが、本研究はタッチ・オプションを取引戦略に用いる点と静的な取引戦略に限定している点で、先行研究と異なる新しい研究である。タッチ・オプションとは、原資産価格がバリアに抵触するか否かによって1円が支払われるというペイオフをもつバリア・オプションの一種である。この研究は、タッチ・オプションが流動的であるという強い条件を仮定するが、マルチンゲールの条件を必要とせず、より確実な優劣複製を実現できる。また、満期とバリア条件が同じであれば、バリア・オプションのポートフォリオに対しても同じ手法が適用できる。特に、為替オプション市場において、原資産がバリアに抵触したときに原資産を1単位支払うというバリア・オプションはタッチ・オプションと同程度の流動性が期待できる。これを優劣複製に使えば、バリア・オプションの価格の上下限値を改善することができる。数学的な手法は、バリア・オプションのペイオフはバリア判定と満期時点のペイオフの積とみなすことができるため、1章とほぼ同じである。ただし、バリア判定と満期時点のペイオフの間には依存関係がある点が、1章と異なる。

4章では、2つのタッチ・オプションが同時に取り得る価格の組を求める。タッチ・オプションのモデル非依存な優劣複製は、(Brown et al., 2001)、(Neuberger and Hodges, 2000)、(Cox and Obloj, 2011a)、(Cox and Obloj, 2011b) により、原資産価格がマルチンゲールという条件の下で研究がされてきた。本研究も同様の枠組みを採用するが、2つのタッチ・オプションを同時に考慮している点が先行研究と異なる。これは、流動性のあるタッチ・オプションを使って、別のタッチ・オプションを優劣複製する問題と同じである。ただし、タッチ・オプションのバリアはひとつ(シングル・バリア・オプション)とし、2つのタッチ・オプションのバリアは原資産価格の初期値に対して大小関係が同じであるとする。先行研究では、取引戦略に使う取引の価格を再現するような連続マルチンゲール過程を構築することにより、優劣複製手法の最良性を示している。本研究も、先行研究と同じ手法を用いているが、取引戦略に使う取引が多いため先行研究より計算が複雑になっている。

5章では、バリア・オプションが満たす無裁定価格の条件についての研究である。(ヨーロッパ) バニラ・オプションについて同様の研究は、(Davis and Hobson, 2007)、(Carr and Madan, 2005)、(Cousot, 2007) などで既になされているが、バリア・オプションについての研究は本研究が初めてである。バニラ・オプションの無裁定価格の条件は、コール・オプションの価格が行使価格に関して単調減少凸関数であることと、金利と配当を調整した価格関数が満期に関して単調増加であることである。数学的には、満期時点の原資産価格の密度関数が正であることと Jensen の不等式が成り立つことに対応する。バニラ・オプションの場合も同様であるが、バリアに抵触した場合とそうでない場合を分けて考える必要があり、バニラ・オプションよりも難しい問題である。これらの結果はバリア・オプションについてはあるが、それらの多くは、バリアの参照資産とペイオフの参照資産が異なる場合でも同様に成立する結果である。例えば重要な例としては、Credit Value Adjustment (CVA) がある。CVA は取引相手が倒産した場合に予定されていたキャッシュフローが得られない事象を価格に織り込む調整項である。これは、バリア・オプションのひとつと見なすことができるため、本章の結果を適用できる。

第3部6章では、取引期間中の損益の変動を小さくする方法を提案し、その取引戦略の特徴を分析する。この手法は(Neuberger and Hodges, 2000) でバリア・オプションの数値例の一部として考察されている。ただし(Neuberger and Hodges, 2000) では数値実験的な考察にとどまっているのに対し、本章では、この戦略の損益を、複製対象のデリバティブを限定せず一般的な枠組みの下で数学的に定式化し、特徴を分析している点で新しい研究である。6章で考察する取引戦略は、第1部と第2部で検討したような静的優劣複製手法として初期時点で構築したポートフォリオを期中に更新するという手法である。初期時点で構築したポートフォリオはその時点では最良であるが、その後は、優劣複製はするが最良であるとは限らない。そこで、初期時点以降の任意の時間で、その時の最良な優劣複製ポートフォリオに更新することで、正のキャッシュフローが得られる。この取引を行うことで、取引の満期を待たずに初期時点払った費用の一部を回収できるため、損益の変動を小さくすることが期待できる。この応用例として通貨オプションとタッチ・オプションを取り上げ、より具体的に分析する。さらに数値例として通貨オプションのヘッジ・シミュレーションを行い、ダイナミック・ヘッジ、静的な優複製と比較することで、6章で提案する取引の有効性を確認する。

第4部7章では、補間・補外されたオプション価格に裁定機会が含まれないように修正する方法を提案する。SABR モデルに関しては(Doust, 2012) が近似式を導出しているが、7章の手法は特定のモデルや計算手法に依存しない一般的な手法である点で先行研究とは異なり新しい。7章では、密度関数を適当なヒルベルト空間の元とみなし、密度関数が満たさなければならない条件と満たすことが好ましい条件をヒルベルト空間の内積で記述する。例えば、各点での関数の値が正である、関数の積分値が1と等しい、等である。これらの条件は、ヒルベルト空間の集合として表現したときに凸集合になりさえすればよい。与えられた初期値(例えば漸近展開で近似した密度関数)に対して、この凸性を利用して最適解を見つけるアルゴリズム((Deutsch, 2001)) を適応する。設定できる条件の自由度が高いことと、モデルや計算手法に依存しない点が、この手法の利点である。

尚、博士論文を構成する内容の一部は既に査読付き国際英文誌に4本として掲載(掲載決定を含む)されている。

以上により、都築幸宏君の論文は、博士学位を授与するに十分な水準に達していると審査委員全員一致で判断した。

審査委員：高橋明彦(主査)、大日方隆、佐藤整尚、藤井優成、白谷健一郎