審査の結果の要旨

論文題目

A Malliavin calculus approach

with asymptotic expansion in computational finance

(計算ファイナンスにおける漸近展開を用いたマリアバン解析アプローチ)

氏名：山田俊皓

現在のファイナンスにおいては，金融商品の多様性やモデリングの複雑化に伴い，実務に適用可能な数値計算の重要性が高まっている．とりわけ，数値計算の中でも，一般に次元が大きくなりうる非線形なファイナンスモデルを線形等より簡単なモデルの周りで漸近展開する方法は，計算負荷や実装の簡易性の観点から注目されており，学界・実務双方で研究が進んでいる．本論文では，Malliavin 解析と漸近展開法を用いた数値計算の開発と高度化に関する新しい結果を与え，計算ファイナンスの数理的発展に寄与している．

本博士論文は以下の４部により構成されている．

1. Asymptotic expansions and sharp error estimates for multidimensional financial market models using Malliavin calculus
2. Asymptotic expansions for BSDEs and application to finance
3. Weak approximation of SDEs using asymptotic expansion and application to finance
4. Appendix -Related topics-

第１部では，多次元のファイナンスモデルに対して Malliavin の部分積分を用いた漸近展開公式による数値近似法の構成と，その近似誤差に関する精緻な評価に関する結果を与える．第１部で構成される方法によって，多次元ファイナンスモデルの期待値の任意のオーダーの統一的な漸近展開の表現とその誤差を与えることができる．第１部の結果は第２部，第３部においても本質的に用いるものである．Takahashi and Yamada (2012a) では Fournie et al. (1999), Siopacha and Teichmann (2011) を拡張すべく，Malliavin の部分積分を用いた漸近展開公式を数値的に計算する方法を構成した．Skorohod 積分に対する条件付期待値を用いた漸近展開によって Siopacha and Teichmann (2011) に対して完全な解析的近似公式を与えることができ，また後述の Takahashi and Yamada (2014a) の漸近展開の精緻な誤差解析に繋がる．Takahashi and Yamada (2012a) では多次元確率ボラティリティモデルに対して random limit の周りで展開してオプション価格の近似公式を与え，インプライドボラティリティの漸近展開公式を導出した．また，Heston モデルや double Heston モデル等に対してオプション価格とインプライドボラティリティの漸近展開公式の数値検証を行い，さらにキャリブレーションに適用した．Shiraya, Takahashi and Yamada (2012) では，Takahashi and Yamada (2012a) を拡張し，離散バリアオプションの評価に応用した．一般に離散バリアオプションは離散観測ごとの条件の評価を行うため計算負荷が増し，数値計算が容易ではなくなる．Shiraya, Takahashi and Yamada (2012) では，離散バリアオプションのモニタリング時点に依存する Wiener 汎関数の期待値の漸近展開公式を導出した．この方法によって統一的に離散バリアオプションに対する近似を与えることができる．確率ボラティリティモデルに対する数値実験により精度を確かめ，近似が有効に機能していることを確認した．Takahashi and Yamada (2014a) では Malliavin 解析を用いて楕円型の確率微分方程式の解の期待値を漸近展開したときの精緻な誤差評価を与えた．また，partially elliptic モデルや確率ボラティリティモデル等の理論・実務において重要となるモデルに対してオプション価格とグリークスの漸近展開公式と展開誤差を示し，理論と整合していることを数値実験により確かめた．さらに Takahashi and Yamada (2014a) では適当な条件を満たす一般の Wiener 汎関数の漸近展開に対しても精緻な誤差評価も与えた．

第２部では，近年本格的に実務へ導入されつつある BSDE の漸近展開の理論について述べる．BSDE の数値計算は一般に時間積分の期待値の入れ子計算になり得るため，漸近展開による数値計算の安定性を調べるためには第１部で構成される Malliavin 解析を用いた漸近展開の時間に関する誤差評価が本質的に重要

になる．第２部では，第１部の方法を基礎として様々なBSDE の漸近展開法を構成し，そのファイナンスへの応用を紹介している．

Takahashi and Yamada (2013a) では，BSDE に対する小分散過程(small diffusions) の漸近展開法を用いた数値近似を構成した．すなわち，BSDE のPicard 近似列を考え，その各々に対して小分散過程の密度関数の漸近展開を用いた近似法の整備を行い，その近似誤差評価を行った．BSDE のPicard 近似列は漸近展開によって解析的に近似ができるので，これを繰り返すことでBSDE を近似的に解くことができる．したがって，漸近展開による近似の精度が十分良い場合にPicard 近似を増やしていくとBSDE に対して良い近似を与えることができる．直感的には Picard 近似ごとに漸近展開の局所的な近似誤差が積み上がり，それが BSDE の解そのものに対する全体的な近似誤差に反映されることが予想されるが，Takahashi and Yamada (2013a) では理論誤差評価の解析によって，この予想と整合する結果を得ている．このBSDE の漸近展開の誤差評価の解析においては，漸近展開の時間積分の評価を繰り返し行うことになるので，Takahashi and Yamada (2014a) のマリアバン解析を用いた漸近展開の誤差評価を小分散過程の枠組みに適用したものを用いている．

Takahashi and Yamada (2013b) では，Fujii and Takahashi (2012) の近似を一般の枠組みで正当化し，高次展開の近似式の一般形を導出した．Takahashi and Yamada (2013b) は，BSDE のドライバーの滑らかさに応じて展開が可能であることを示し，その展開項の各々もTakahashi and Yamada (2014a)から派生する結果を用いてさらに近似ができる．Takahashi and Yamada (2013b) によって，BSDE とFSDE (Forward SDE) の両方に摂動を加えたマルチスケールなモデルの下での漸近展開法が正当化された．さらに，Takahashi and Yamada (2014b) では，Quadratic BSDE と呼ばれるクラスに対する展開法を構成した．Quadratic BSDE とは粗く言えばドライバーにBSDE のMartingale integrand の二乗が入ってくるような型のBSDE であり，ポートフォリオ最適化問題には典型的にこのクラスが現れる．Takahashi and Yamada (2014b) では，Quadratic BSDE のドライバーに対してある切断を用いたテクニックを適用し，Takahashi and Yamada (2013a) と同様の漸近展開法を用いてQuadratic BSDE の数値近似とその誤差評価を行った．これによってポートフォリオ最適化問題に対するBSDE の漸近展開法も正当化された．

第３部では，漸近展開による確率微分方程式の弱近似法とファイナンスへの応用について述べる．確率微分方程式の弱近似法とは，粗く言えば確率微分方程式の解の期待値の離散近似法のことであるが,漸近展開を用いて容易に実装が可能な精度の良い弱近似法の構成と精緻な弱近似誤差評価を与えることができる．Takahashi and Yamada (2013c) では，Malliavin 解析と多次元の漸近展開を用いた弱近似法とその誤差評価に関する結果を与えた．この方法の注目すべき点は，通常の漸近展開による近似に離散化の効果が加わり，漸近展開の精度によって離散近似の精度が向上することである．これによって効率的な期待値の数値計算が可能になり，精度の良い近似を得ようとするならば離散化の回数を増やせば良いし，また漸近展開のオーダーを上げれば漸近展開そのものの精度も良くなり，かつ離散化のオーダーも良くなる．さらに，漸近展開は第１部や第２部で見るように容易に実装されるものなので，漸近展開による弱近似も簡易なアルゴリズムによって実装できることも注目すべき点である．この方法の理論部分において重要なのは,摂動パラメータと時間パラメータの期待値の漸近展開の近似誤差解析を用いることである．Takahashi and Yamada (2013c) の理論パートにおいても，摂動パラメータを一般化した枠組みの下で Takahashi and Yamada (2014a) と類似の誤差解析を用いている．Takahashi and Yamada (2013c)では局所ボラティリティモデルと確率ボラティリティモデルに対して漸近展開を用いた弱近似法を適用し，離散化や漸近展開の次数を増やしたときに通常の漸近展開より数値近似精度が改善することを確認した．特に，長期満期かつDeep Out-of-The-Money のケースにおいて，低次の漸近展開を用いて極めて少ない離散化数による弱近似を行った場合でも近似精度が良いことを確認している．また，さらなる数値実験によって，数値結果が理論的結果と整合していることを確認した．これにより，漸近展開を用いた弱近似法の広範なファイナンスへの応用の可能性が示唆された．

第４部では，第１部～第３部に関連する話題として，偏微分方程式の解に対する漸近展開法と漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法の結果について述べる．Takahashi and Yamada (2012b), Kato, Takahashi and Yamada (2013, 2014) は偏微分方程式の立場から生成作用素の展開を用いて，コーシー・ディリクレ問題の解の近似に関する結果を与えた．特にKato, Takahashi and Yamada (2013, 2014) では，ディリクレ問題の解の近似の応用として連続バリアオプション(Down-and-Out Barrier option, Up-and-Out Barrier option) の価格の漸近近似公式を導出し，漸近展開の近似補正項が機能していることを数値実験により確認した．Tanaka and Yamada (2014)では，漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法とその

応用に関する結果を与えた．この研究は，Takahashi and Yoshida (2004) の漸近展開を用いたオイラー−丸山近似の結果が動機となっている．Takahashi and Yoshida (2004) のポイントは漸近展開の主要項を解析的に解いて漸近誤差部分のみをオイラー−丸山近似法によって計算することにあるが，Tanaka and Yamada(2014) ではこの漸近誤差の計算を確率微分方程式の強近似法の視点から見て，ある近似の結果を与えた． また，Tanaka and Yamada (2014) では，漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法をマルチレベルモンテカルロ法に適用し，ある改良を与えた.

尚，博士論文を構成する内容の一部は既に査読付き国際英文誌に６本，査読付き Proceedings に１本として掲載されている．また，他に４本の論文も投稿中である.

以上により，山田君の論文は、博士学位を授与するに十分な水準に達していると審査委員全員一致で判断した.

審査委員：高橋明彦（主査)、大日方隆、佐藤整尚、藤井優成、白谷健一郎