博士論文(要約)

A Malliavin calculus approach with asymptotic expansion in computational finance

(計算ファイナンスにおける漸近展開を用いたマリアバン解析アプローチ)

山田 俊皓

要約

現在のファイナンスにおいては, 金融商品の多様性やモデリングの複雑化に伴い, 実務に適用可能な数値計算の重要性が高まっている. とりわけ, 数値計算の中でも, 一般に次元が大きくなりうる複雑なファイナンスモデルを簡単なモデルの周りで漸近展開する方法は, 計算負荷や実装の簡易性の観点から注目されており, アカデミックと実務の双方で研究が進んでいる. 本論文では, Malliavin 解析と漸近展開法を用いた数値計算の理論面・応用面の高度化と新手法に関する結果を与え, 計算ファイナンスへの発展に寄与することを目的としている.

0.1 本論文の構成

本論文の以下の四部より構成される.

1. Asymptotic expansions and sharp error estimates for multidimensional financial market models using Malliavin calculus

2. Asymptotic expansions for BSDEs and application to finance

3. Weak approximation of SDEs using asymptotic expansion and application to finance

4. Appendix -Related topics-

第一部では, 多次元のファイナンスモデルに対して Malliavin の部分積分を用いた漸近展開公式の導出を行い, その近似誤差に関する精緻な評価に関する結果を与える. 第一部で構成される方法によって, 多次元ファイナンスモデルの期待値の任意のオーダーの統一的な漸近展開の表現とその誤差を与えることができる. 第一部の結果は第二部, 第三部においても本質的に用いるものである.

第二部では, 近年本格的に実務へ導入されつつある BSDE の漸近展開の理論について述べる. BSDE の数値計算は一般に時間積分の期待値の入れ子計算になりうるので, 漸近展開による数値計算の安定性を調べるためには第一部で構成される Malliavin 解析を用いた漸近展開の時間に関する誤差評価が本質的に重要になる. 第二部では, 第一部の方法をベースとして様々な BSDE の漸近展開法を構成し, そのファイナンスへの応用を紹介する.

第三部では, Malliavin 解析と漸近展開を用いた確率微分方程式の弱近似法を構成する. 確率微分方程式の弱近似法とは, 粗く言えば確率微分方程式の解の期待値の離散近似法のことであるが, Malliavin 解析を用いた漸近展開を用いれば容易に実装が可能な高次の弱近似法の構成と精緻な弱近似誤差評価を与えることができる. 漸近展開による確率微分方程式の弱近似法においても理論を構築に関わる本質的な箇所で第一部の結果の拡張を用いる. 漸近展開を作用素と見て離散的に繋ぐことで長期満期のオプションや Deep OTM(Out-of-The-Money) に対する近似の精度を担保しつつ, 効率的な数値計算を行うことができる.

第四部では, 第一部〜第三部に関連する話題として, 偏微分方程式の解に対する漸近展開法と漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法の結果について述べ, 連続バリアオプションの近似やマルチレベルモンテカルロ法への応用を紹介する.

0.2 Asymptotic expansions and sharp error estimates for multidimensional financial market models using Malliavin calculus

第一部では以下の論文の結果を要約する.

- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2012a), An Asymptotic Expansion with Push-Down of Malliavin Weights.

- Kenichiro Shiraya, Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2012), Pricing Discrete Barrier Options under Stochastic Volatility.

- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2014a), On Error Estimates for Asymptotic Expansions with Malliavin Weights –Application to Stochastic Volatility Model–.

0.2.1　背景

多次元のファイナンスモデルの数値計算法は計算ファイナンスにおける重要なテーマのひとつである．複雑なファイナンスの現象を捉えるためには, モデリングにおいてリスクファクターを増やすことにより対処することがあるが, 一方で考慮すべきファクターが多くなるとプライシングやリスク管理に要する計算量が大幅に増す.

このようなファイナンスの諸問題に対する確率解析の方法を用いた数値近似の研究のひとつとして Siopacha and Teichmann (2011) がある．Siopacha and Teichmann (2011) では, Fournie et al. (1999) のマリアバン解析を用いたグリークス（オプション価格のパラメータ感応度）計算を拡張して多次元モデルに対する近似計算を行った．一方で, Siopacha and Teichmann (2011) では近似項が解析的に評価できないため, 近似項をモンテカルロ法を用いてシミュレーションで計算を行っている．これは, Siopacha and Teichmann (2011) の方法が Fournie et al. (1999) のモンテカルロ法をベースにしているからであるが, 実務上, 近似計算を行ううえでこの計算を行うのは計算負荷の観点から困難であろう．また, 理論的な近似誤差評価という観点からも改善の余地は残っている. 一般にデリバティブ評価のためのファイナンスモデルにおいて確率微分方程式で記述される摂動モデルの展開を行うと, 摂動パラメータが微小の場合に近似の精度が担保されるが, 数値実験を行うと摂動パラメータが微小であっても満期が長くなるにつれて精度が序々に劣化してくることが経験的に知られている．これらの問題点を踏まえると, 一般の多次元モデルに対する近似を解析的に計算し, より精緻な誤差の評価を与えることは理論的にも実務的にも重要な研究課題と言える.

このような背景の下, Takahashi and Yamada (2012a), Shiraya, Takahashi and Yamada (2012) では多次元ファイナンスモデルに対する漸近展開による解析を行い, Takahashi and Yamada (2014a) では Malliavin 解析を用いた漸近展開の理論的な近似誤差評価に関する研究を行った.

0.2.2　成果と貢献

Takahashi and Yamada (2012a) では Fournie et al. (1999), Siopacha and Teichmann (2011) を拡張すべく, まず有限次元上の Schwartz 超関数から無限次元空間 (Wiener 空間) 上の Watanabe 超関数への”lifting-up”と, 無限次元空間上の Malliavin の意味での滑らかな関数から有限次元空間上の Schwartz 急減少関数への”push-down” なる写像を準備し, Malliavin-Watanabe の双対公式と Malliavin の部分積分を用いた漸近展開公式を数値的に計算する方法を構成した．Malliavin の部分積分の計算は Skorohod 積分と呼ばれる作用素の計算に帰着するが, さらに Skorohod 積分の条件付期待値をとることによって Siopacha and Teichmann (2011) を有限次元の積分として計算することが可能になる．Malliavin の部分積分の条件付期待値を用いた漸近展開は Siopacha and Teichmann (2011) に対して完全な解析的近似公式を与えることができ, また後述の Takahashi and Yamada (2014a) の漸近展開の精緻な誤差解析に繋がる．Takahashi and Yamada (2012a) では, ファイナンスへの応用として, 多次元確率ボラティリティモデルに対して random limit の周りで展開してオプション価格の近似公式を与え, インプライドボラティリティの漸近展開公式を導出した．また, Heston モデルや double Heston モデル等に対してオプション価格とインプライドボラティリティの漸近展開公式の数値検証を行い, さらにキャリブレーションの問題へ応用を行った.

Shiraya, Takahashi and Yamada (2012) では, Takahashi and Yamada (2012a) を拡張し, 離散バリアオプションの評価に応用した．離散バリアオプションは, 原資産の価格が設定されたバリア（閾値）にヒットするか否かを離散的な時間間隔で判定し, ヒットした場合にオプションを行使する権利が消滅あるいは発生する等の契約条項が付いているデリバティブである．離散バリアオプションは離散観測ごとの条件の評価を行うため計算負荷が増し, 数値計算が容易ではなくなる．特に確率ボラティリティのような複雑なモデルに対する計算はさらに複雑になる．Shiraya, Takahashi and Yamada (2012) では, まず, 各 t_i 時点, $0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ に依存する Wiener 汎関数の期待値の漸近展開公式を導いた．そして, 確率ボラティリティモデルの離散バリアオプションのペイオフを t_i 時点, $0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ に依存する Wiener 汎関数と見なし, その具体的な近似式を導出した．この方法によって統一的に離散バリアオプションを評価することが可能になり, また精度の良い近似を与えることができる．Heston モデルや λ-SABR モデルの確率ボラティリティモデルに対する数値実験により精度を確かめ, 近似が有効に機能していることを確認した.

Takahashi and Yamada (2014a) では確率微分方程式の解 X_t の期待値やグリークスを微小パラメータ ε に関して漸近展開したときの精緻な誤差評価を与えた．誤差評価を行うためのツールとして, まず Kusuoka (2003) によって導入された Kusuoka-Stroock 関数空間 $\mathcal{K}_r$ を導入し, Kusuoka-Stroock 関数に対する Malliavin の部分積分公式を準備した．汎関数が $\mathcal{K}_r$ に属しているとは, 粗く言うと Malliavin の意味で滑らかな関数 (のパラメータ微分) がソボレフノルムの意味で時間 t に関するオーダー $t^{r/2}$ を持つときを言う．X_t を楕円型の確率微分方程式の解としたとき, $\mathcal{K}_r$ の元に対して k 階の Malliavin の部分積分を行うと, 部分積分によって得られる Malliavin weight (Skorohod 積分) は Kusuoka-Stroock 関数として $\mathcal{K}_{r-k}$ に属する．この性質を用いて漸近展開の誤差評価を行うと ε^N 次まで漸近展開誤差は $\varepsilon^{N+1}t^{M/2}C$ の形で現れ, 特に M や C は漸近展開の対象となるオプションの

ペイオフやグリークスの種類に応じて変わる. Takahashi and Yamada (2014a) では, partially elliptic モデルや確率ボラティリティモデル等の理論・実務において重要となるモデルに対してオプション価格とグリークスの漸近展開公式と展開誤差を示し, 理論と整合していることを数値実験により確かめた. さらに Takahashi and Yamada (2014a) では適当な条件を満たす一般の Wiener 汎関数の漸近展開に対して Kusuoka-Stroock 関数による特徴付けを行い, Takahashi and Yamada (2012a) の展開の精緻な誤差評価も与えた. これらの結果により, 広範なファイナンスモデルに対する漸近展開近似の誤差を把握することができる.

0.3 Asymptotic expansions for BSDEs and application to finance

第二部では以下の結果を要約する.

- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2013a), An Asymptotic Expansion for Forward-Backward SDEs: a Malliavin Calculus Approach.
- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2013b), An Asymptotic Expansion of Forward-Backward SDEs with Perturbed Driver.
- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2014b), An Expansion for Quadratic BSDEs.

0.3.1 背景

BSDE(Backward SDE, 後ろ向き確率微分方程式) とは終端時刻の条件が与えられたときの後ろ向きの確率微分方程式のことであり, 多くのファイナンスモデルの非線形構造が BSDE によって説明可能となるため, 数理ファイナンスの分野では様々な対象に BSDE が応用されている. クレジットリスクモデリングにおいては, 例えば CVA (Credit Valuation Adjustments) のような入れ子構造のプライシングが BSDE によって記述される. 近年は実務における CVA の活用などの進展により, 実用可能な BSDE のモデリング及びその効率的な数値計算に対してニーズが高まりつつある. また, あるポートフォリオ最適化問題は Quadratic BSDE と呼ばれるクラスを用いて表現されるため, ポートフォリオ最適化問題を解くことは Quadratic BSDE を解くことに帰着されることがある. これらの BSDE を用いたファイナンスの問題設定・定式化を実際に解くには BSDE の数値計算が必要となり, かつ実務の問題に応用するには実装の容易性や計算負荷などを考慮することが重要となるだろう.

BSDE は様々なクラスがあるが, 一般にドライバーと呼ばれる関数の非線形性により BSDE は期待値の再帰的構造を持つため, その数値解法は容易ではない. BSDE の数値計算の技術は, 2000 年以降急速に進んできており, 特にモンテカルロシミュレーションをベースとした多くの研究や方法がある. モンテカルロシミュレーション法は理論上の汎用性は高いがその計算負荷などを考えると実務への適用という観点では依然解決すべき様々な問題があると言える.

Fujii and Takahashi (2012a) ではこれらと異なるアプローチを取っている. Fujii and Takahashi (2012a) では, BSDE のドライバーに関して繰返し微分することにより, 非線形 BSDE の解を線形 BSDE の解の周りで摂動展開する方法を考案した. 線形の BSDE を繰返し解くことで非線形 BSDE に対する近似を与えることは,「解きにくい問題」を「解き易い問題」に帰着させるものであり, 摂動解析の本質的な方法と言えよう.

Takahashi and Yamada (2013a,b, 2014b) では, BSDE の数値計算とファイナンスへの応用の観点から, Fujii and Takahashi (2012) やそれに関連するより一般の BSDE の漸近展開法とそのアルゴリズムの数学理論・正当化を与えることを目的としている.

0.3.2 成果と貢献

Takahashi and Yamada (2013a) では, BSDE に対する小分散過程 (small diffusions) の漸近展開法を用いた数値近似を構成した. すなわち, BSDE の終端条件関数とドライバーがともにリプシッツ連続の枠組みの下で, 非線形 BSDE の Picard 近似列を考え, その各々に対して小分散過程の密度関数の漸近展開を用いて近似を行い, その近似誤差評価を行った. 非線形 BSDE の各 Picard 近似は線形の BSDE であるので漸近展開によって解析的に近似ができ, これを繰り返すことで非線形 BSDE を近似的に解くことができる. したがって, 漸近展開による近似の精度が十分良い場合に Picard 近似を増やしていくと BSDE に対して良い近似を与えられることが見込まれる. 直感的には Picard 近似ごとに漸近展開の局所的な近似誤差が積み上がり, それが BSDE の解そのものに対する全体的な近似誤差に反映されることが予想されるが, Takahashi and Yamada (2013a) では理論誤差評価の解析によって, この予想と整合する結果を得ている. この BSDE の漸近展開の誤差評価の解析においては, 漸近展開の時間積分の評価を繰り返し行うことになるので, Takahashi and Yamada (2014a) のマリアバン解析を用いた漸近展開の誤差評価を小分散過程の枠組みに適用したものを用いている. ファイナンスへの応用として Takahashi and Yamada (2013a) では, BSDE を用いたカウンターパーティーリスクを考慮したデリバティブ評価モデルに

対して BSDE の漸近展開近似を適用し, 局所ボラティリティモデルの下で CVA が精度の良く近似できていることを確認した.

Takahashi and Yamada (2013b) では, Fujii and Takahashi (2012a) の近似を一般の枠組みで正当化し, 高次展開の近似式の一般形を導出した. Takahashi and Yamada (2013b) は, BSDE のドライバーの滑らかさに応じて展開が可能であることを示し, その展開項の各々も Takahashi and Yamada (2014 a) から派生する結果を用いてさらに近似ができる. Takahashi and Yamada (2013b) によって, BSDE と FSDE(Forward SDE) の両方に摂動を加えたマルチスケールなモデルの下での漸近展開法が正当化された.

Takahashi and Yamada (2014b) では, Quadratic BSDE と呼ばれるクラスに対する展開法を構成した. Quadratic BSDE とは粗く言えばドライバーに BSDE の Martingale integrand の二乗が入ってくるような型の BSDE であり, ポートフォリオ最適化問題には典型的にこのクラスが現れる. Takahashi and Yamada (2014b) では, Quadratic BSDE のドライバーに対してある切断を用いたテクニックを適用し, Takahashi and Yamada (2013a) と同様の漸近展開法を用いて Quadratic BSDE の数値近似とその誤差評価を行った. これによってポートフォリオ最適化問題に対する BSDE の漸近展開法も正当化された.

0.4 Weak approximation of SDEs using asymptotic expansion and application to finance

第三部では以下の結果を要約する.

- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2013c), A Weak Approximation with Asymptotic Expansion and Multidimensional Malliavin Weights.

0.4.1 背景

ファイナンスにおけるデリバティブ価格の数値計算の問題に代表されるように, 確率微分方程式の解の期待値の計算高度化は計算ファイナンスの重要なテーマのひとつである. 一般に, 確率微分方程式の離散化による期待値の近似は「弱近似法 (Weak approximations)」と呼ばれる. 最も代表的な離散化法はオイラー-丸山近似 (Euler-Maruyama scheme) であり, ファイナンスの実務においても頻繁に用いられる. オイラー-丸山近似は非常に汎用性が高く極めて有用な方法であるが, 真値への収束に時間がかかるという側面も孕んでいる. オイラー-丸山近似は弱近似のオーダーとして 1 次の精度をもつ方法である. すなわち, 例えばヨーロピアンコールオプションの価格の評価において満期 T までの時間を n 回離散化してオイラー-丸山近似を用いると, その離散化のオーダーは $O(n^{-1})$ となる.

Kusuoka (2001,2004) では, オイラー-丸山近似より高次の弱近似法を考案した. これにより, 離散化の回数を n としたとき $O(n^{-l})$, $l \geq 2$ のオーダーの弱近似が理論上実現可能となるため, 効率的な時間離散化が見込まれる. また, Lyons and Victior (2004) でも類似の高次の弱近似法が提唱されている. これらの方法は, KLV 法 (Kusuoka-Lyons-Victior) と呼ばれることもあり, 現在 KLV 法の改良や高度化に関する様々な研究が行われている. 一方で, KLV 法がどの程度実際のファイナンスモデルに適用できるか, については明らかになっていない部分もあり, 実装や応用に関しては依然研究が必要であると考えられる.

このような点も踏まえると, 効率的かつ容易に実装可能な確率微分方程式の新しい弱近似法 (期待値の離散化法) を構成することは実務的にも重要な課題のひとつであると言える.

0.4.2 成果と貢献

Takahashi and Yamada (2013c) では, Malliavin 解析と多次元の漸近展開を用いた確率微分方程式の弱近似法とその誤差評価に関する結果を与えた. この方法の注目すべき点は, 確率微分方程式の微小パラメータ ε に対して m 次の期待値の漸近展開 (ε^m のオーダー) を用いて弱近似を構成すると, テスト関数が滑らかでなくてもリプシッツ連続関数であるならばその近似誤差のオーダーが $O(\varepsilon^{m+1}n^{-m/2})$ となることである. (テスト関数が滑らかである場合は, リプシッツ連続関数の場合と同様にオーダーは $O(\varepsilon^{m+1}n^{-m/2})$ となり, 滑らかでない有界な可測関数の場合は近似誤差のオーダーが $O(\varepsilon^{m+1}n^{-(m-1)/2})$ になる.) すなわち, 通常の漸近展開の誤差が $O(\varepsilon^{m+1})$ であるのに対して, 漸近展開を繋いで離散化を行うと誤差が $O(\varepsilon^{m+1}n^{-m/2})$ となり, 漸近展開のオーダーに依存する $m/2$-次の弱近似法となる. したがって, 通常の漸近展開による近似に, 離散化の効果が漸近展開に依存する形で加わるので, 効率的な期待値の数値計算が可能になる. 精度の良い近似を得ようとするならば離散化の回数 n を増やせば良いし, また漸近展開のオーダー m を上げれば漸近展開そのものの精度も良くなり, かつ離散化のオーダー $n^{-m/2}$ も良くなる. さらに, 漸近展開は第一部や第二部で見るように容易に実装されるものなので, 漸近展開による弱近似も簡易なアルゴリズムによって実装できることも注目すべき点である. この方法の理論部分において重要なのは, 摂動パラメータ ε と時間 t に関する短時間の期待値の漸近展開の近似誤差解析を用いるこ

とである．非常に粗く言うと, 期待値の漸近展開を T/n-時間で n 回繋ぐと, 短時間での期待値の漸近展開の近似誤差が n 個積みあがり, テスト関数がリプシッツ連続関数のとき $O(\varepsilon^{m+1}n^{-m/2})$ のオーダーの弱近似が構成される．Takahashi and Yamada (2013 c) の理論パートにおいても, 摂動パラメータを一般化した枠組みの下で Takahashi and Yamada (2014 a) と類似の誤差解析を用いている．Takahashi and Yamada (2013 c) では局所ボラティリティモデルと確率ボラティリティモデルに対して漸近展開を用いた弱近似法を適用し, 離散化や漸近展開の次数を増やしたときに通常の漸近展開より数値近似精度が改善することを確認した．特に, 長期満期かつ Deep Out-of-The-Money のケースにおいて, 低次の漸近展開を用いて極めて少ない離散化数による弱近似を行った場合でも近似精度が良いことを確認している．また, さらなる数値実験によって, 数値結果が理論的結果と整合していることを確認した．これにより, 漸近展開を用いた弱近似法の広範なファイナンスへの応用の可能性が示唆された.

0.5 Appendix -Related topics-

第一部〜第三部では Malliavin 解析をベースとしてファイナンスの諸問題に対する数値近似法を構成し, 理論・応用面において強力な方法であることを確認するが, 第四部の補論では別の視点から漸近展開法を用いた数値近似法の結果について述べる．第四部では第一部〜第三部に関連する話題として以下の論文を要約する.

- Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2012b), A Remark on Approximation in Partial Differential Equations in Finance.
- Takashi Kato, Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2013), An Asymptotic Expansion Formula for Up-and-Out Barrier Option Price under Stochastic Volatility Model.
- Takashi Kato, Akihiko Takahashi and Toshihiro Yamada, (2014), A Semigroup Expansion for Pricing Barrier Options.
- Hideyuki Tanaka and Toshihiro Yamada, (2014), Strong Convergence of Euler-Maruyama and Milstein Schemes with Asymptotic Method.

0.5.1 成果と貢献

Takahashi and Yamada (2012b), Kato, Takahashi and Yamada (2013, 2014) は偏微分方程式の立場から生成作用素の展開を用いて, コーシー-ディリクレ問題の解の近似に関する結果を与えた．特に Kato, Takahashi and Yamada (2013, 2014) では, ディリクレ問題の解の近似の応用として連続バリアオプション (Down-and-Out Barrier option, Up-and-Out Barrier option) の価格の漸近近似公式を導出し, 漸近展開の近似補正項が機能していることを数値実験により確認した.

Tanaka and Yamada (2014) では, 漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法とその応用に関する結果を与えた．この研究は, Takahashi and Yoshida (2004) の漸近展開を用いたオイラー-丸山近似法の結果が動機となっている．Takahashi and Yoshida (2004) では効率的にシミュレーションを行うことができる強力な方法を与えており, 理論部分では期待値の近似としての誤差評価を導いた．Takahashi and Yoshida (2004) の方法は期待値の離散化法に対する誤差評価であるので確率微分方程式の弱近似の範疇に入り, そのポイントは漸近展開の主要項を解析的に解いて漸近誤差部分のみをオイラー-丸山近似法によって計算することにあるが, Tanaka and Yamada (2014) ではこの漸近誤差の計算を確率微分方程式の強近似法の視点から見て, ある近似の結果を与えた．また, Tanaka and Yamada (2014) では, 漸近展開を用いた確率微分方程式の強近似法をマルチレベルモンテカルロ法に適用してある改良を与えた.