

東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻

博士論文

分離型連成解法による大規模非線形破壊
力学シミュレーションの効率化

遊佐泰紀

平成 27 年 3 月

目次

目次	i
図目次	v
表目次	ix
リスト目次	xi
第 1 章 序論	1
1.1 研究の背景	2
1.2 本研究の目的	3
1.3 本論文の構成	3
第 2 章 シミュレーション手法	5
2.1 緒言	6
2.2 大規模非線形破壊力学解析の既存手法	6
2.3 連成解析の枠組み	10
2.4 線形弾性解析向けの分離型連成解法	13
2.4.1 メッシュの分割	14
2.4.2 領域界面上で定義する連立方程式	15
2.4.3 反復解法	17
2.5 非線形解析向けの分離型連成解法	22
2.5.1 増分型の分離型連成解法	23
2.5.2 サブサイクリング型の分離型連成解法	23

2.6	連立一次方程式求解回数の数値モデル	25
2.7	解析プログラム	29
2.8	結言	30
第3章	線形弾性力学シミュレーション	31
3.1	緒言	32
3.2	円孔平板モデルを用いた収束性の調査	32
3.3	き裂付き帯板モデルを用いた収束性の調査	33
3.4	結言	34
第4章	線形破壊力学シミュレーション	37
4.1	緒言	38
4.2	応力拡大係数評価手法	38
4.3	き裂進展クライテリオンとメッシュ制御	39
4.4	応力拡大係数解析	41
4.4.1	半円表面き裂付き平板のモード I 応力拡大係数解析	41
4.4.2	傾斜円埋没き裂付き有限体の混合モード応力拡大係数解析	47
4.4.3	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の応力拡大係数解析	51
4.5	弾性き裂進展解析	59
4.5.1	貫通き裂付き三点曲げ試験片の弾性き裂進展解析	59
4.6	結言	65
第5章	非線形固体力学シミュレーション	69
5.1	緒言	70
5.2	非線形材料モデル	70
5.2.1	弾塑性モデル	70
5.2.2	有限ひずみ弾塑性モデル	71
5.3	弾塑性解析	72
5.3.1	引張荷重下の円孔平板の弾塑性解析	72
5.3.2	引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の移動硬化弾塑性解析	75
5.3.3	き裂付き圧力容器モデルの弾塑性解析	76

5.4	大変形弾塑性解析	89
5.4.1	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の大変形弾塑性解析	89
5.5	結言	99
第 6 章	結論	103
	謝辞	109
	参考文献	111
付録 A	メッシュの手切りを支援するツール群 Tegiri Utils	123

目次

2.1	連成解析の一体型解法	12
2.2	連成解析の分離型片方向解法	12
2.3	連成解析の分離型双方向時差解法	12
2.4	連成解析の分離型双方向反復解法	12
2.5	分離型解法のメッシュ分割と領域界面の物理量の受け渡し	15
2.6	増分型の分離型連成解法	24
2.7	サブサイクリング型の分離型連成解法	25
2.8	グローバルメッシュ・ローカルメッシュの自由度数の比に対する分離 型連成解法のスピードアップの予測値	29
3.1	円孔平板モデルの分割メッシュ	33
3.2	円孔平板モデルの引張解析における各反復解法の収束性	34
3.3	き裂付き帯板モデルの分割メッシュ	35
3.4	き裂付き帯板モデルの三点曲げ解析における各反復解法の収束性	36
3.5	き裂付き帯板モデルの三点曲げ解析における直線探索なしの記憶制限 Broyden 法の収束性	36
4.1	四面体二次要素向けの仮想き裂閉口積分法	39
4.2	半円表面き裂付き平板の寸法・境界条件・材料定数	42
4.3	半円表面き裂付き平板の分割メッシュ	43
4.4	半円表面き裂付き平板のき裂面メッシュ	43
4.5	半円表面き裂付き平板の四種類のローカルメッシュ	44
4.6	半円表面き裂付き平板の解析結果の応力拡大係数	45

4.7	半円表面き裂付き平板の解析結果の応力拡大係数の拡大図	45
4.8	半円表面き裂付き平板の解析の収束性	46
4.9	半円表面き裂付き平板の解析結果の相当応力分布	46
4.10	傾斜埋没き裂付き有限体の寸法・境界条件・材料定数	48
4.11	傾斜円埋没き裂付き有限体の分割メッシュ	49
4.12	傾斜円埋没き裂付き有限体のき裂面メッシュ	49
4.13	傾斜円埋没き裂付き有限体の四種類のローカルメッシュ	50
4.14	傾斜円埋没き裂付き有限体の解析結果の相当応力分布	52
4.15	傾斜円埋没き裂付き有限体の四種類のローカルメッシュの解析結果の 相当応力分布	53
4.16	傾斜円埋没き裂付き有限体の三番目のローカルメッシュの解析結果の 相当応力分布	54
4.17	傾斜円埋没き裂付き有限体の解析結果の応力拡大係数	55
4.18	傾斜円埋没き裂付き有限体の解析の収束性	55
4.19	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の寸法・境界条件・材料定数	56
4.20	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のメッシュ	57
4.21	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のき裂面メッシュ	57
4.22	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のメッシュの要素体積分布	58
4.23	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析結果の相当応力分布	59
4.24	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析結果の応力拡大係数	60
4.25	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析の収束性	60
4.26	貫通き裂付き三点曲げ試験片の寸法・境界条件	61
4.27	貫通き裂付き三点曲げ試験片のメッシュ	62
4.28	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果の相当応力分布	63
4.29	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁の応力拡大係数	64
4.30	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁中央部の応力拡大 係数	64
4.31	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁形状	65
4.32	貫通き裂付き三点曲げ試験片のき裂進展前後のメッシュ	66
4.33	貫通き裂付き三点曲げ試験片のき裂進展後のき裂前縁のメッシュ	66

4.34	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析の収束性	67
4.35	貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析のき裂進展ステップ毎の収束性 . .	67
5.1	引張荷重下の円孔平板の解析結果の降伏域分布	73
5.2	引張荷重下の円孔平板の解析結果の応力集中係数	73
5.3	引張荷重下の円孔平板の解析の解析回数・連立一次方程式求解回数 . .	74
5.4	引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の負荷サイクル	75
5.5	繰り返し繰り返し弾塑性解析時のサブサイクリング型の分離型連成解法	75
5.6	引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の解析結果の相当応力分布 (最 大引張荷重時・最大圧縮荷重時・二回目の最大引張荷重時)	77
5.7	引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の解析結果の応力集中係数 . . .	78
5.8	き裂付き圧力容器モデルの寸法・境界条件	79
5.9	き裂付き圧力容器モデルのメッシュ	80
5.10	き裂付き圧力容器モデルのメッシュの断面図	81
5.11	き裂付き圧力容器モデルの分割メッシュ	82
5.12	き裂付き圧力容器モデルの解析結果の相当応力分布	83
5.13	き裂付き圧力容器モデルの解析結果の相当応力分布の断面図	84
5.14	き裂付き圧力容器モデルの通常の有限要素法による解析結果の降伏域 分布	85
5.15	き裂付き圧力容器モデルの解析結果の降伏域分布・相当塑性ひずみ分布	85
5.16	き裂付き圧力容器モデルの解析結果のき裂先端近傍の相当応力の場合 . .	86
5.17	き裂付き圧力容器モデルの解析結果のき裂先端近傍の相当塑性ひずみ の場合	86
5.18	き裂付き圧力容器モデルの解析の収束性	87
5.19	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の寸法	90
5.20	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の分割メッシュと切欠近傍拡大図 .	90
5.21	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の通常の有限要素法による解析結 果の相当塑性ひずみ分布	92
5.22	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 30° までの トルク・ねじり角関係	93

5.23	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 180° までのトルク・ねじり角関係	93
5.24	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のトルク・ねじり角関係の拡大図	94
5.25	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の二つのトルク・ねじり角関係の拡大図	94
5.26	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のトルク・ねじり角関係の連成反復における収束履歴	95
5.27	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の平均ねじれ角増分・ねじり角関係の連成反復における収束履歴	96
5.28	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の平均ねじれ角増分・ねじり角関係の連成反復における収束値	96
5.29	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の異なる二つのメッシュ分割における解析結果の降伏域分布	97
5.30	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の異なる二つのメッシュ分割における解析結果のトルク・ねじり角関係	97
5.31	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 30° までのトルク・ねじり角関係と実験結果の比較	98
5.32	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析の連成反復回数	99
5.33	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の通常の有限要素法による解析の Newton-Raphson 反復回数	100
5.34	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片のグローバル解析の Newton-Raphson 反復回数	101
5.35	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片のローカル解析の Newton-Raphson 反復回数	101
A.1	CT 試験片の二次元の粗いメッシュ	127
A.2	CT 試験片の三次元の粗密付きメッシュ	127

表目次

2.1	大規模非線形破壊力学解析の既存手法	10
2.2	強連成・弱連成と一体型・分離型の関係	11
2.3	大規模非線形破壊力学解析の既存手法の連成解析手法としての分類	13
2.4	分離型連成解法の連立一次方程式求解回数の数理モデル	27
4.1	半円表面き裂付き平板のメッシュの情報	47
4.2	傾斜円埋没き裂付き有限体のメッシュの情報	51
4.3	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析に使用した計算機	54
4.4	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析の計算時間とメモリ使用量	58
5.1	引張荷重下の円孔平板の解析の連成反復回数	74
5.2	き裂付き圧力容器モデルの解析の連成反復回数・増分ステップ数	87
5.3	き裂付き圧力容器モデルの解析の Newton-Raphson 反復回数	88
5.4	き裂付き圧力容器モデルの解析の連立一次方程式求解回数	88
5.5	き裂付き圧力容器モデルの解析の計算時間・メモリ使用量	89
5.6	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析の連立一次方程式求解回数	99
A.1	Tegiri Utils に含まれる Python スクリプト	126

リスト目次

A.1 CT 試験片メッシュを作成するシェルスクリプト	125
A.2 CT 試験片の二次元メッシュのメッシュファイル	128

第 I 章

序論

目次

1.1	研究の背景	2
1.2	本研究の目的	3
1.3	本論文の構成	3

1.1 研究の背景

構造物の破壊現象は一度起これば人々の生命や財産に対して多大なダメージを与える。構造物の破壊現象による有名な事故として、1939年から1945年の米国において多発したりバティ船の脆性破壊、1954年のコメット連続墜落事故、1963年の米国シルバー橋の崩壊、1986年の米国サリー原子力発電所2号機の2次系配管の延性破壊が挙げられる [1-3]。順に、低温脆性および溶接欠陥、塑性誘起き裂閉口、腐食、エロージョン・コロージョンが主な原因である。このように、船舶、航空、土木、原子力など様々な分野で破壊事故が起こっている。原子力分野では破壊事故を防ぐために、日本機械学会の発電用原子力設備規格維持規格 [4] により疲労き裂および応力腐食割れを有する機器の余寿命評価が行われている。維持規格では、原子力発電所の定期検査時に非破壊試験で検出した欠陥をき裂としてモデル化し、評価式で応力拡大係数を計算し、不安定破壊開始までの期間を評価する。このような評価の手順を簡略化する試みとして酒井の構造健全性評価システム [5] や川手ら [6] の破壊力学パラメータ簡易評価システム CRAPAS (Crack Parameter Analysis System) が挙げられる。評価式による応力拡大係数評価は簡便ではあるが、非破壊試験で検出した欠陥を貫通き裂や楕円き裂の形状で近似しなければならなかったり、三次元的な欠陥を座標軸に垂直な平面に投影して評価する必要があったり、実機においてき裂部の多軸の応力状態を精緻に評価することが難しかったりするなど制約が多い。また、維持規格では弾塑性破壊力学・延性破壊に関する評価方法が十分に整備されているとは言えない。近年は、地震・津波を始めとする自然災害に由来する過大な荷重・強制変位が構造物に付与され、線形破壊力学の適用範囲を超える状況が注目されている。

構造物の破壊現象の予測にはシミュレーション技術の利用が有効である。シミュレーションでは、複雑形状の実機に発現する多軸の応力状態の精緻な解析を行うことができる。比較的小規模な構造機器モデルの解析は企業において日常的に行われており、比較的大規模な構造物モデルの解析はスーパーコンピュータと並列有限要素法を用いた大規模解析の研究分野で行われている。大規模解析の分野では、線形弾性体の解析が多い。非線形解析では増分法や Newton-Raphson 法の枠組みの中で大規模な連立一次方程式を何度も解く必要がある。また、き裂問題では非線形事象がき裂先端近傍で顕著に表れ、き裂から十分に離れた領域は弾性的な挙動を示すが、通常の非線

形有限要素法ではこれらを分けて扱うことができない。一方、き裂のシミュレーションの分野では、き裂先端近傍で発現する混合モード、非弾性、大ひずみなどの事象を精緻に解析することが可能である。この分野は計算破壊力学と呼ばれ、盛んに研究が行われている。き裂先端近傍の特異場を再現するために非常に細かいメッシュが必要であったり、き裂先端で破壊力学パラメータ評価やき裂進展などの特殊な処理をしたり、特別な方法でき裂の不連続性や特異場を扱ったりする。これらの手法をそのまま大規模解析に適用しようとする、剛性行列の条件数が大きくなるため大規模解析で好まれる共役勾配法の収束性が悪化したり、大規模なき裂付きメッシュの取り扱いが大変であったりと困難性がある。以上から、き裂を有する大規模構造物の非線形解析には二つの分野の知見が必要であるが、これらを単純に組み合わせるだけでは効率的な大規模非線形破壊力学解析は実現できないと言える。

1.2 本研究の目的

本研究の目的は、き裂を有する大規模構造物の非線形破壊力学シミュレーションの効率化である。大規模な連立一次方程式の求解が問題となる大規模解析と事象の非線形性・複雑さが問題となるき裂解析を両立させる。具体的には、き裂近傍とそれ以外の領域を別々に扱い、それらの間の相互作用を満足させる解析手法を提案する。既存手法と比較することで提案手法の立ち位置を明確にし、提案手法を数理的に説明することで提案手法の理論的背景を示す。増分法および Newton-Raphson 法を伴う非線形解析向けに提案手法を拡張する。簡易的な数理モデルを作成して提案手法の計算時間における利点の普遍性を説明する。提案手法を用いて線形弾性解析、応力拡大係数解析、弾性き裂進展解析、弾塑性解析、大変形弾塑性解析の数値実験を行う。それぞれの数値実験において提案手法の精度や計算時間などについての利点・欠点を示す。

1.3 本論文の構成

本論文は以下に示す 6 章構成である。

第 1 章では本研究の背景および目的について述べた。

第 2 章では手法について述べる。まず、大規模非線形破壊力学解析向けの既存手法のサーベイを行い、それらを整理する。そして、線形弾性解析向けの分離型連成解法

を提案し、それを非線形解析向けに拡張する。最後に、連立一次方程式求解回数の数
理モデルを作成する。

第3章では線形弾性力学問題の数値実験を行う。分離型連成解法で用いる反復解法
の収束性を調査する。

第4章では線形破壊力学問題の数値実験を行う。応力拡大係数解析および弾性き裂
進展解析を行う。応力拡大係数解析では、主に精度の検証を行う。弾性き裂進展解析
では、き裂近傍の領域のみでメッシュを変化させてき裂進展を実現する。

第5章では非線形固体力学問題の数値実験を行う。弾塑性解析および大変形弾塑性
解析を行う。弾塑性解析では、主に計算時間の検証を行う。大変形弾塑性解析では、
本手法の適用限界を調査する。

第6章では本論文を総括する結論を述べる。

第 2 章

シミュレーション手法

目次

2.1	緒言	6
2.2	大規模非線形破壊力学解析の既存手法	6
2.3	連成解析の枠組み	10
2.4	線形弾性解析向けの分離型連成解法	13
2.4.1	メッシュの分割	14
2.4.2	領域界面上で定義する連立方程式	15
2.4.3	反復解法	17
2.5	非線形解析向けの分離型連成解法	22
2.5.1	増分型の分離型連成解法	23
2.5.2	サブサイクリング型の分離型連成解法	23
2.6	連立一次方程式求解回数の数理モデル	25
2.7	解析プログラム	29
2.8	結言	30

2.1 緒言

本章では本研究で用いた手法について述べる。まず、大規模非線形破壊力学解析向けの既存手法のサーベイを行い、大規模非線形破壊力学解析に適した手法の要件を整理する。また、既存手法は連成解析の枠組みで分類する。つづいて、提案手法としての分離型連成解法を説明する。最初に線形弾性解析向けの説明を示し、次にそれを非線形解析向けに拡張する。分離型連成解法における連立一次方程式求解回数の数理モデルを作成し、連立一次方程式求解回数の削減やスピードアップについて考察する。最後に、本研究で使用した解析プログラムについて述べる。

2.2 大規模非線形破壊力学解析の既存手法

現実世界の巨大構造物中のき裂の非線形破壊力学解析を行うとき、構造物の大規模解析とき裂の解析を両立させる必要がある。このような問題では、次に述べる特徴がある。まず、き裂の寸法は構造物の寸法よりも遥かに小さい。そして、き裂先端近傍では非線形事象が顕著に表れるが、それ以外の大部分は線形もしくは弱い非線形の弾性的な挙動を示す。このような特徴を有する問題を通常为非線形有限要素法で解析する場合、増分法および Newton-Raphson 法の枠組みの中で大規模な連立一次方程式を何度も求解する必要がある。連立一次方程式の求解回数は線形弾性解析と比較して一般に数十倍から数百倍程度に増える。したがって、き裂先端近傍で顕著に表れる非線形事象を解析領域全体で考慮する通常的非線形有限要素法のアプローチは効率的でないと言える。

本節ではこのような問題に対する既存研究を紹介する。まず、き裂先端近傍とそれ以外を別々に扱わない手法で実機を解析した事例を紹介する。Richard ら [7] は通常有限要素法を用いて実機の混合モード弾性 (疲労) き裂進展解析を行った。Kaneko ら [8] らは、実機ではないが弾性き裂進展解析システムを開発して複数き裂の解析を行った。Barlow ら [9] は境界要素法を用いて航空エンジンファンブレード部品中のき裂の進展解析を行った。Ural ら [10] は並列有限要素法を用いてスパイラルベベルピニオンギア中のき裂の進展解析を行った。

つづいて、き裂先端近傍とそれ以外を別々に扱う既存手法を紹介する。固体力学分野では古くから行われているズーミング法を用いた解析がいくつか行われてい

る。ズームング法はグローバル・ローカル法やグローバル・ローカル有限要素法とも呼ばれる。ズームング法では、まず全体モデルを解析し、その解析結果の変位・反力・応力などを境界条件として詳細モデルに付与し、詳細モデルの解析を行う。Schöllmann ら [11] はズームング法を用いて三次元構造機器での弾性き裂進展解析を行った。Diamantoudis ら [12] は圧力容器中の半楕円き裂の応力拡大係数解析を行った。ズームング法では、詳細モデルの解析結果が全体モデルの解析に反映されないため、ズームング法の解の精度は解析者の経験に依存する。この課題を克服するため Whitcomb [13] は反復的なズームング解析を行い、解の精度の検証や反復の収束性を検証した。溶接シミュレーション向けに開発された反復サブストラクチャ法 [14,15] も基本的には反復的なズームング法と同様の考え方であり、溶接トーチ近傍を詳細モデルとして、非線形問題であるいくつかの溶接問題が解析されている。これらの解析に見られるようにズームング法では、全体モデルと詳細モデルで別々の材料モデルを用いることが可能であり、全体モデルを線形弾性体とすれば少ない連立一次方程式求解回数で非線形解析を行うことが可能である。

ズームング法をさらに発展させた重合メッシュ法 [16,17] を紹介する。重合メッシュ法では、グローバルメッシュ・ローカルメッシュの二つのメッシュを用意し、二つのメッシュを変位の重ね合わせの仮定の下で結合して単一の剛性行列を生成する。粗いグローバルメッシュと細かいローカルメッシュを一致させずに重ね合わせるのが一般的である。重合メッシュ法では二つのメッシュの相互作用が剛性行列に含まれているため、解の精度の信頼性がズームング法よりも高い。重合メッシュ法を用いた解析例を紹介する。鈴木ら [18] は重合メッシュ法を用いて船体構造機器のき裂解析を行った。また、彼らは重合メッシュ法の剛性行列を 2×2 のブロック行列と見なし、これに Gauss-Seidel 法的なアルゴリズムを適用して反復的に解いた。さらに、前処理付き共役勾配法を適用して収束性を調査した [19]。Okada ら [20,21] は重合メッシュ法を用いて二次元の破壊力学解析を行った。菊池ら [22-24] は重合メッシュ法を用いて二次元・三次元の弾性き裂進展解析の研究を体系的に行った。他にも、彼らは重合メッシュ法を用いて残留応力場でのき裂進展解析 [25]、複数き裂 [26]、ICM ハウジング溶接部におけるき裂進展解析 [27] を行った。中住ら [28] はグローバルモデルとローカルモデルの材料定数を異なる値にする場合の場の支配方程式を導き、グローバルモデルを弾性体、ローカルモデルを弾塑性体として弾塑性解析を行った。Nakasumi ら [29] は

重合メッシュ法を用いて、グローバルモデル用のシェル要素とローカルモデル用のソリッド要素を組み合わせる手法を提案した。以上の解析例は [21,28] を除きすべて線形弾性解析である。不一致のメッシュを用いる場合、重合メッシュ法は節点反力の精緻な評価が難しい課題があり、Newton-Raphson 法を安定的に動作させるのが困難である。[21,28] はいずれも Newton-Raphson 法と伴わない増分解析である。また、重合メッシュ法は剛性行列を作成するための手法であるので、基本的に線形弾性体が対象である。したがって、非線形有限要素解析においてグローバルメッシュとローカルメッシュを別々に解析することができない。つまり、グローバルメッシュを弾性体、ローカルメッシュを弾塑性体としてモデル化するとき、弾性体であるからといってグローバルメッシュの解析回数が減るわけではない。

き裂の不連続面とき裂先端近傍の特異場をメッシュに依存せずに表現する拡張有限要素法 [30,31] を用いた解析例を紹介する。拡張有限要素法では、き裂の不連続面とき裂先端近傍の特異場を表現する関数を有限要素の内挿関数に足し込む。き裂の関数と有限要素モデルの相互作用が担保されているため、拡張有限要素法はズームング法よりも解の精度の信頼性が高い。拡張有限要素法を用いた解析は様々な分野で行われている [32]。長嶋らは拡張有限要素法を用いたき裂解析の基本的な精度検証を行い [33]、異材界面の応力拡大係数解析を行った [34]。拡張有限要素法を用いた三次元き裂の解析については、Sukumar ら [35] が高速マーチング法を用いて行い、Nagashima ら [36] が対称条件を考慮して行った。長嶋ら [37] は残留応力場中のき裂解析も行った。Shibanuma ら [38] は Partition of Unity に基づいて足し込む解を正確に再現するように拡張有限要素法を拡張し、き裂進展解析を行った。以上の拡張有限要素法を用いた解析例は線形弾性解析であるが、弾塑性解析の研究もある。拡張有限要素法を用いた弾塑性解析は Confined Plasticity と呼ばれ [32]、通常の有限要素法と比較すると応用が限定的である。Elguedj ら [39] は HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) 場 [40,41] を用いて弾塑性き裂の解析を行った。HRR 場による弾塑性き裂先端近傍の特異場の表現は仮定が多く、十分に細かいメッシュを用いた通常の非線形有限要素法による弾塑性解析と比較すると限定的である。Prabel ら [42] はき裂先端近傍の特異場の精緻な表現を行わず、き裂の不連続性のみを与えて動的弾塑性き裂進展解析を行った。Samaniego ら [43] は拡張有限要素法を用いて塑性せん断帯の解析を行った。

重合メッシュ法と拡張有限要素法を組み合わせた研究が行われている。Lee ら [44]

は拡張有限要素法のき裂先端近傍に重合メッシュ法のローカルメッシュを配置して解析を行った。Nakasumi ら [45] は重合メッシュ法の細かいローカルメッシュの中に拡張有限要素法のき裂を配置して解析を行った。拡張有限要素法はメッシュに依存せずに不連続性や特異場を表現する手法であるが、精緻な解を得るためには依然として細かいメッシュが必要である。

有限要素交代繰り返し法 [46] を始めとする Atluri らの一連の研究を紹介する。有限要素交代繰り返し法は、有限要素メッシュの中に破壊力学の理論解を有するき裂を埋め込み、有限要素解析および理論式への代入を繰り返し行うことで収束解を得る手法である。弾塑性解析への応用として、初期応力法 [47] に基づいて弾塑性有限要素交代繰り返し法 [48] が提案された。Pyo ら [49] および Wang ら [50] は弾塑性有限要素交代繰り返し法を用いて航空機パネルの健全性評価を行った。有限要素交代繰り返し法は理論解のあるき裂しか扱えないので、き裂解析を対称 Galerkin 境界要素法 (Symmetric Galerkin BEM; SGBEM) に置き換えた SGBEM-FEM 交代繰り返し法 [51,52] が提案された。Dong ら [53,54] によって二次元・三次元の SGBEM-FEM 交代繰り返し法と拡張有限要素法の比較が行われた。

き裂を扱う手法ではないが解析領域を多数の部分領域に分割して、それぞれの領域の界面で連続条件・平衡条件を満たす手法として領域分割法 [55,56] を紹介する。領域分割法はサブストラクチャリング法やそれを訳して部分構造法とも呼ばれる。領域分割法では、解析領域を多数の部分領域に分割し、全体系の連立一次方程式から静的縮約により領域内部自由度を消去し、領域界面自由度の連立一次方程式を前処理付き共役勾配法 (Preconditioned Conjugate Gradient Method; PCG Method) [57] などの連立一次方程式解法で求解する。縮約された連立一次方程式に対して前処理付き共役勾配法などの反復法を用いるとき、領域分割法を特に反復型領域分割法、反復型サブストラクチャリング法などと呼ばれる。前処理には FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) [58]、BDD (Balancing Domain Decomposition) [59]、FETI-DP (Dual-Primal FETI) [60]、BDDC (BDD by Constraints) [61] などが適用される。FETI、BDD などは基本的に領域界面自由度の連立一次方程式に対する前処理である。各 PCG 反復ステップで行われる行列・ベクトル積に相当する各部分領域の解析に関しては Yusa ら [62] が ICT (Incomplete Cholesky Factorization with Threshold) 前処理 [57] 付き共役勾配法を適用した。Yagawa ら [63-65] は領域分割法を用いて並列

表 2.1 大規模非線形破壊力学解析の既存手法

	解の精度	非線形解析の可否
ズームング法	信頼性が低い	可
重合メッシュ法	良い	グローバル解析の回数を削減できない
拡張有限要素法	良い	限定的
有限要素交代繰り返し法	良い	限定的
SGBEM-FEM 交代繰り返し法	良い	限定的
領域分割法	良い	連立一次方程式を解くための手法

有限要素解析を行った。Yoshimura ら [66] の ADVENTURE Project [67] は彼らの研究の流れを組むプロジェクトである。固体力学ソルバー ADVENTURE_Solid には BDD 前処理および Ogino ら [68] が BDD 前処理を改良した不完全 BDD 前処理が実装されている。ADVENTURE_Solid は原子炉压力容器の大規模有限要素解析 [69,70] の実績がある。以上の研究は弾性解析であるが、非線形解析の研究として Miyamura ら [71] は領域分割法を用いて弾塑性解析をおこなった。しかし、領域分割法は連立一次方程式を求解するための手法であるため、き裂先端近傍などで局所的に塑性事象を考慮するようなモデル化はできず、解析領域全体で塑性事象を考慮する必要がある。

以上の既存手法を、二つメッシュやモデルの間の相互作用が担保されているかという意味での解の精度、そして、グローバル領域を弾性体、ローカル領域を弾塑性体とするなどの異なる材料モデルが使用できるかという意味での非線形解析の可否という二つの観点から表 2.1 に分類した。重合メッシュ法および領域分割法の非線形解析の可否は、表中の表現が異なるが本質的には同様の特徴である。本研究では解の精度が良く、非線形解析が可能な手法を提案する。

2.3 連成解析の枠組み

前節で述べた既存手法を連成解析の枠組みで分類する。連成解析とは、流体・構造連成解析、磁場・構造連成解析、地盤・構造連成解析など異なる支配方程式で記述される系の相互作用を解析することである。連成解析手法は一般に、一体型解法と分離型解法に分かれ、分離型解法は分離型片方向解法と分離型双方向解法に分かれ、分離型双方向解法は分離型双方向時差解法と分離型双方向反復解法に分かれる [72]。一体

表 2.2 強連成・弱連成と一体型・分離型の関係

広義の強連成		弱連成	
狭義の強連成	漸近的強連成		
一体型	分離型双方向反復	分離型双方向時差	分離型片方向

型解法、分離型片方向解法、分離型双方向時差解法、分離型双方向反復解法の模式図を順に図 2.1、図 2.2、図 2.3、図 2.4 に示す。横方向が時間ステップを表し、縦方向の二つの円が流体と構造など二つのモデルを表す。固体力学 (Solid Mechanics) 解析は静解析を基本とするが流体力学 (Fluid Dynamics) 解析が動解析を基本とするため、流体・構造連成解析では時間ステップの存在が前提となっている。本研究の解析は固体・固体連成解析と言えるが、非線形解析においては時間ステップの代わりに増分ステップを用いる。慣性力を考慮する場合はこれの限りではない。線形弾性解析においては時間ステップ・増分ステップは存在せず、この場合は分離型片方向解法と分離型双方向時差解法の区別がなくなる。一体型解法 [73,74] は各時間ステップにおいて単一の剛性行列を生成する連成解析手法である。生成された剛性行列は BDD 前処理付き領域分割法などを用いて反復的に解かれることもある [75,76]。分離型片方向解法は各時間ステップにおいて片方のモデルを解いた後、その結果をもう片方のモデルに境界条件として受け渡す連成解析手法である。分離型双方向時差解法 [77-79] は各時間ステップにおいて分離型片方向解法と同じ操作をした後、二つ目のモデルの解析結果を次の時間ステップで一つ目のモデルに境界条件として受け渡す連成解析手法である。図 2.3 は逐次時差解法と呼ばれ、他にも二つのモデルの解析結果をともに次の時間ステップに持ち越す並列時差解法など、いくつかのバリエーションが存在する。分離型双方向反復解法 [80-84] は各時間ステップにおいて収束解を得るまで二つのモデルの解析を繰り返す連成解析手法である。分離型解法では、一体型解法と比較して、二つのモデルに既存の解析ソフトウェアを適用するのが容易であるため、汎用的な流体・構造連成解析システムを開発する研究 [85] が行われている。

連成解析の分野では強連成・弱連成という用語が用いられるが、一体型・分離型解法との関係は表 2.2 のとおりである。漸近的強連成は反復強連成や準強連成と呼ばれることもある。

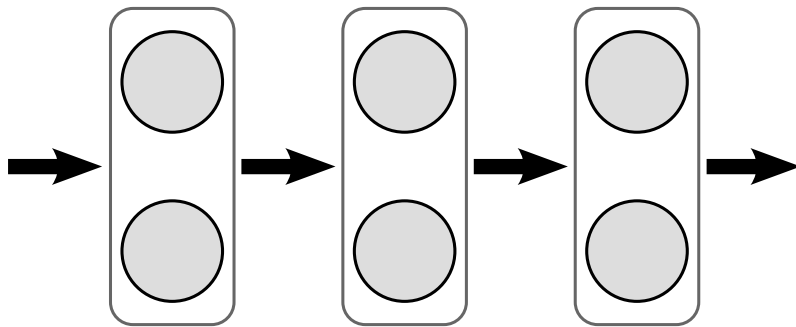


図 2.1 連成解析の一体型解法

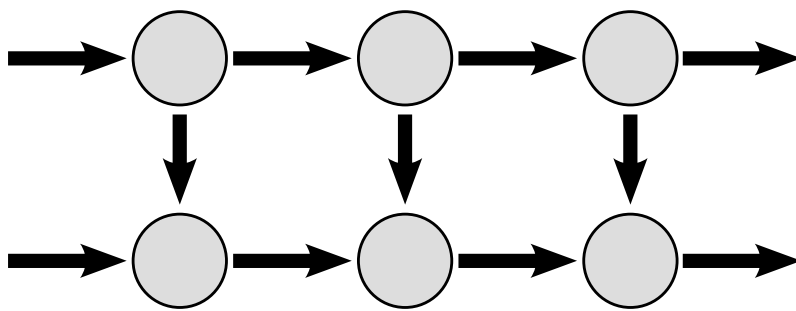


図 2.2 連成解析の分離型片方向解法

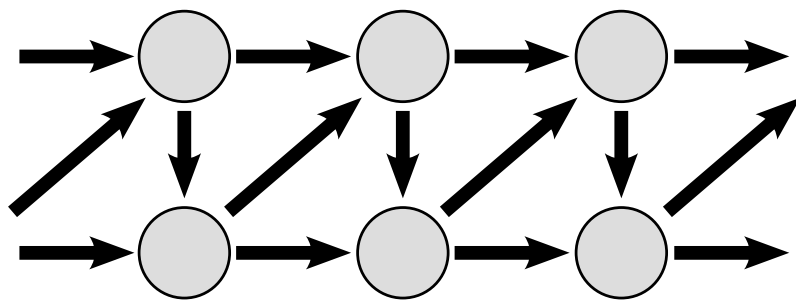


図 2.3 連成解析の分離型双方向時差解法

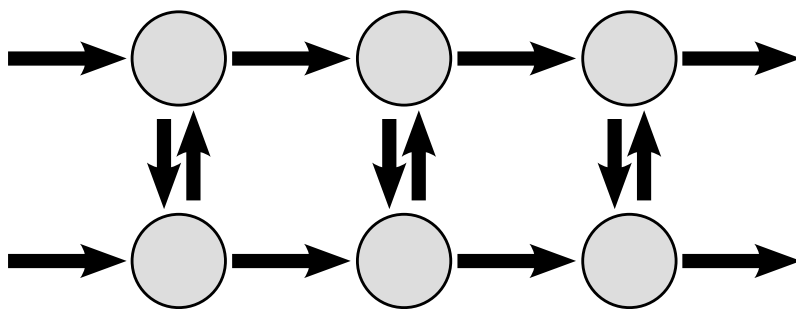


図 2.4 連成解析の分離型双方向反復解法

表 2.3 大規模非線形破壊力学解析の既存手法の連成解析手法としての分類

一体型	重合メッシュ法 拡張有限要素法 領域分割法 (連立一次方程式求解に直接法を用いる場合)
分離型片方向	ズームング法
分離型双方向時差	N/A
分離型双方向反復	Whitcomb [13] の反復的なズームング法 反復サブストラクチャ法 [14,15] 鈴木ら [18,19] の反復的な重合メッシュ法 有限要素交代繰り返し法 SGBEM-FEM 交代繰り返し法 領域分割法 (連立一次方程式求解に反復法を用いる場合)

前節で述べた既存手法を連成解析の枠組みで分類すると表 2.3 のようになる。重合メッシュ法や領域分割法は本質的には一体型解法であるが、連立一次方程式求解に反復法を用いる場合は分離型双方向反復解法と分類した。

2.4 線形弾性解析向けの分離型連成解法

本研究で提案する分離型連成解法について述べる。本節では特に線形弾性解析向けの分離型連成解法 [86,87] について延べ、次節でそれを非線形解析向けに拡張 [88] する。提案する分離型連成解法の名称は前節の連成解析手法に由来するものであり、提案手法は固体・固体連成解析の分離型双方向反復解法であると言える。また、表 2.1 の観点において、提案手法では、二つのメッシュの間の相互作用が担保されているという意味で解の精度が良く、そして、グローバル領域とローカル領域それぞれに異なる材料モデルが使用できるという意味で非線形解析が可能である。

2.4.1 メッシュの分割

分離型連成解法ではまず解析領域を図 2.5 のように重なり合わないよう分割する。小さく小規模なローカル領域 Ω^L にき裂が内包され、残りの大きく大規模な部分はグローバル領域 Ω^G である。領域を分割することでき裂先端近傍の密なメッシュとそれ以外の疎なメッシュを分離することができ、各領域の剛性行列の条件数が小さくなることが期待できる。また近年は、部品毎にメッシュを作成してそれらを統合するメッシュ作成方法が採用されることがあるが、本手法では部品メッシュをそのままローカル領域として設定することもできる。二つの領域は交互に解析され、その解析結果から領域界面 Γ 上の変位 u_Γ および力 f_Γ が修正され、最終的に収束解を得る。メッシュ分割の方針が三点挙げられる。第一に、き裂がローカル領域に含まれるようにすべきである。第二に、ローカル領域でのみ塑性事象を考慮する場合、降伏域がローカル領域に収まるようにすべきである。つまり、ローカル領域でのみ発現するとモデル化した事象がローカル領域内に収まるようにすべきである。線形弾性解析の場合はこの限りではない。第三に、ローカル領域の大きさおよび自由度数が小さい方が良い。この条件は計算時間に直接的な影響を与える。

なお、領域を重なり合うよう分割するアプローチも考えられる。このアプローチの検討について簡単に述べる。領域を重なり合うよう分割する場合、この手法は Whitcomb [13] の反復的なズーミング法や反復サブストラクチャ法 [14,15] の延長ということになる。ただし、後述するように、使用する反復解法はより洗練されたものになる。領域を重なり合うよう分割する場合、重要な点が二つ考えられる。一つ目として、グローバルメッシュのうち重なり合っている部分の解析結果が物理的に意味を持たないことが挙げられる。ひずみに関してはグローバル領域のき裂の存在や剛性の変化をなめらかにした巨視的なひずみと考えることができるが、応力などの他の物理量に関しては特に意味のない解が得られる。グローバルメッシュとローカルメッシュを同時に可視化するときは、グローバルメッシュの重なり合っている部分を除去する必要がある。二つ目として、重なり合わない分割と重なり合う分割の違いは後述する反復解法の観点では単に初期解が異なるだけである。初期解は反復解法の収束性に影響を与えるが、どちらの分割の初期値が収束解に近いかは問題依存である。

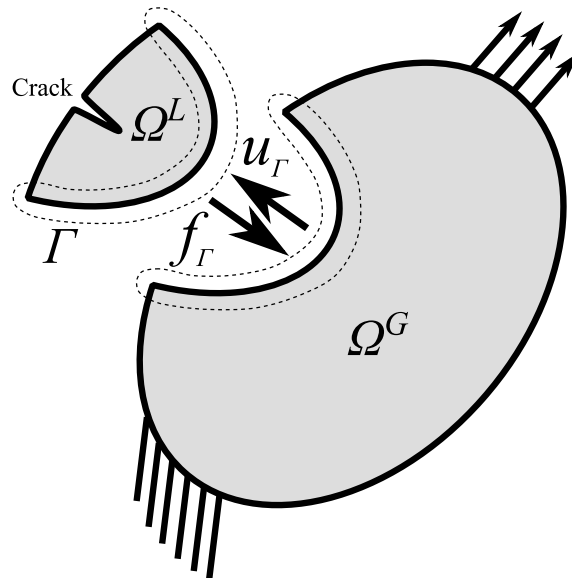


図 2.5 分離型解法のメッシュ分割と領域界面の物理量の受け渡し

2.4.2 領域界面上で定義する連立方程式

[83,84] を参考にして領域界面 Γ で成り立つ連立方程式を定義する。連立方程式は

$$\mathbf{u}_\Gamma - G(L(\mathbf{u}_\Gamma)) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

と定義した。 \mathbf{u}_Γ は領域界面 Γ 上の変位であり未知変数である。関数 G および L はそれぞれグローバル解析、ローカル解析を表す関数である。関数 G の入力荷重 \mathbf{f}_Γ であり、出力は変位 \mathbf{u}_Γ である。関数 L の入力強制変位 \mathbf{u}_Γ であり、出力は反力の符号を反転したものの \mathbf{f}_Γ である。式 (2.1) は領域界面上で成り立つ式であり、グローバル解析 G およびローカル解析 L はブラックボックス化できることに注意する。

式 (2.1) は領域界面上で変位の連続条件が満たされるように定義した式であるが、移項

$$\mathbf{u}_\Gamma = G(L(\mathbf{u}_\Gamma)) \quad (2.2)$$

して両辺に関数 L を作用

$$L(\mathbf{u}_\Gamma) = L(G(L(\mathbf{u}_\Gamma))) \quad (2.3)$$

させ、

$$\mathbf{f}_\Gamma = L(\mathbf{u}_\Gamma) \quad (2.4)$$

を代入すると

$$\mathbf{f}_\Gamma = L(G(\mathbf{f}_\Gamma)) \quad (2.5)$$

そして

$$\mathbf{f}_\Gamma - L(G(\mathbf{f}_\Gamma)) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

が得られる。つまり、式 (2.1) が満たされるならば平衡条件も同時に満たされる。

式 (2.1) の性質として、もし関数 G および L がともに線形であれば式 (2.1) の左辺も線形であるというものがある。関数 G および L が線形ならば、つまり加法性

$$L(\mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{v}_\Gamma) = L(\mathbf{u}_\Gamma) + L(\mathbf{v}_\Gamma), \quad (2.7)$$

$$G(\mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{v}_\Gamma) = G(\mathbf{u}_\Gamma) + G(\mathbf{v}_\Gamma) \quad (2.8)$$

および斉次性

$$L(\alpha \mathbf{u}_\Gamma) = \alpha L(\mathbf{u}_\Gamma), \quad (2.9)$$

$$G(\alpha \mathbf{u}_\Gamma) = \alpha G(\mathbf{u}_\Gamma) \quad (2.10)$$

が成り立つならば式 (2.1) の左辺も加法性

$$(\mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{v}_\Gamma) - G(L(\mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{v}_\Gamma)) = (\mathbf{u}_\Gamma - G(L(\mathbf{u}_\Gamma))) + (\mathbf{v}_\Gamma - G(L(\mathbf{v}_\Gamma))) \quad (2.11)$$

および斉次性

$$\alpha \mathbf{u}_\Gamma - G(L(\alpha \mathbf{u}_\Gamma)) = \alpha (\mathbf{u}_\Gamma - G(L(\mathbf{u}_\Gamma))) \quad (2.12)$$

を満たす。 α は任意のスカラー値である。関数 G 、 L のいずれかが非線形であれば式 (2.1) の左辺も非線形になる。

なお、式 (2.1) のように二つの領域を交互に解くのではなく、同時に解くアプローチでも定式化は可能である。このアプローチの検討について簡単に述べる。二つの領域を同時に解く場合、領域界面に付与する境界条件はともに強制変位となる。これは剛体モードを拘束するためである。仮の強制変位境界条件を与えて解析を行い、二つの領域それぞれの解析結果から領域界面上のつりあいを計算する。式 (2.1) に対応する連立方程式は

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_\Gamma) + \mathbf{l}(\mathbf{u}_\Gamma) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

と定義するのが適切と考えられる。ここで、関数 \mathbf{g} 、関数 \mathbf{l} はそれぞれグローバル解析、ローカル解析を表し、ともに領域境界上の変位 \mathbf{u}_Γ を入力として領域境界上の反力 \mathbf{f}_Γ

を返す関数である。乗算的な式 (2.1) に対して式 (2.13) は加算的な形となる。式 (2.13) を反復解法で解くとき、式 (2.13) 左辺のつりあいを変位の修正量に変換し、それを次の反復ステップの仮の境界条件とする。このとき、つりあいと変位の修正量は N と m などと単位が異なるため、後述する初期ステップ幅や初期近似 Jacobi 行列の設定の問題依存性が大きい。具体的には、問題の寸法や荷重の単位を変えるだけで適切なパラメータが大きく変わってしまう。もし対象とする問題が線形弾性問題であれば、領域界面に縮約した剛性行列の対角項を用いて対角スケーリングを行う方法が考えられる。この方法は対角スケーリング前処理付き共役勾配法に基づく領域分割法 [55,56] そのものである。しかし、本研究では非線形問題を対象とするためこの方法は限界がある。また、領域分割法を用いるとすると、二つの領域を同時に解くアプローチは連立一次方程式解法の Jacobi 法的であり、交互に解くアプローチは Gauss-Seidel 法的であると解釈できる。連立一次方程式の分野では一般に Jacobi 法よりも Gauss-Seidel 法の方が反復回数が少ないことが知られている。本手法では領域が二つであるので、Gauss-Seidel 法的なアプローチの方が適していると考えられる。ただし、Jacobi 法的なアプローチでは領域界面上の境界条件がすべて強制変位となるため、Gauss-Seidel 法的なアプローチよりも安定的に解析を行える可能性がある。

2.4.3 反復解法

本研究では反復解法を用いて式 (2.1) を求解する。各領域が Newton-Raphson 法 (Newton 法) で解かれるような非線形問題の場合、領域界面上で定義した式 (2.1) も似た特性であると予想される。なお、各領域がともに線形弾性体のときはこの限りではない。しかし、式 (2.1) の Jacobi 行列が不明であるため、式 (2.1) に対して Newton 法を適用することはできない。準 Newton 法、固定点反復法、共役勾配法などの非線形方程式解法が適用可能である。それ以外にも流体・構造連成解析で実績 [83,84] がある Newton-Krylov 法 [89,90] や Line Extrapolation 法 [82] なども適用可能である。本研究では固定点反復法と準 Newton 法を用いた。次章、次々章の線形弾性解析に対しては主に固定点反復法、次々々章の非線形解析に対しては主に準 Newton 法を用いた。

固定点反復法は、厳密に同じ意味ではないが流体・構造連成解析の分野ではブロッ

ク Gauss–Seidel 法と呼ばれるため [83,84]、本研究においてもこれに倣う。最適化の分野では最急降下法と呼ばれる。分離型連成解法にブロック Gauss–Seidel 法を適用したときのアルゴリズムを以下に示す。

```

k ← 0
while  $\|r^{(k)}\| / \|\tilde{u}_\Gamma^{(k)}\| > \tau$  do
   $\tilde{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow G(L(u_\Gamma^{(k)}))$ 
   $r^{(k+1)} \leftarrow u_\Gamma^{(k)} - \tilde{u}_\Gamma^{(k+1)}$ 
   $d^{(k+1)} \leftarrow -r^{(k+1)}$ 
   $\Delta u_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \omega^{(k+1)} d^{(k+1)}$ 
   $u_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow u_\Gamma^{(k)} + \Delta u_\Gamma^{(k+1)}$ 
  k ← k + 1
end while

```

ここで、 k は反復ステップ、 τ は収束判定のしきい値、 r は残差ベクトル、 d は探索方向ベクトル、 ω はステップ幅、 Δu_Γ は未知変数ベクトル u_Γ の更新量ベクトルである。収束判定は本研究では

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|\tilde{u}_\Gamma^{(k)}\|} = \frac{\|u_\Gamma^{(k-1)} - G(L(u_\Gamma^{(k-1)}))\|}{\|G(L(u_\Gamma^{(k-1)}))\|} \leq \tau \quad (2.14)$$

とした。ノルムは 2 ノルムである。アルゴリズム中においてステップ幅 ω を決定する仕組みを直線探索と呼ぶが、本研究ではブロック Gauss–Seidel 法に Aitken 補外による直線探索を適用した。Aitken 補外は

$$\omega^{(k+1)} = \arg \min_{\omega^{(k+1)}} \left\| (u_\Gamma^{(k)} - u_\Gamma^{(k-1)}) - \omega^{(k+1)} (r^{(k+1)} - r^{(k)}) \right\| \quad (2.15)$$

と表され [83,84]、これに対して $u_\Gamma^{(k)} = u_\Gamma^{(k-1)} - \omega^{(k)} r^{(k)}$ を代入し、右辺の $\arg \min \| \|$ 内の項と $r^{(k+1)} - r^{(k)}$ との内積をとり、それがゼロになるようにすると最終的に

$$\omega^{(k+1)} = -\omega^{(k)} \frac{r^{(k)\top} (r^{(k+1)} - r^{(k)})}{\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\|^2} \quad (2.16)$$

が導かれる。この式から分かる通り、Aitken 補外はセカント法、つまり一次元的な準 Newton 法である。Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法におけるパラメータは、領域界面上の変位の初期値 $u_\Gamma^{(0)}$ 、ステップ幅の初期値 $\omega^{(0)}$ 、収束判定のしきい値

τ である。これらのうち、 $\mathbf{u}_\Gamma^{(0)}$ はゼロベクトルもしくは前のステップ (き裂進展ステップなど) の解とした。 $\omega^{(0)}$ については次章でパラメトリックスタディを行う。

準 Newton 法は、セカント条件を満たす準 Newton 法の一つである Broyden 法、特に、密行列である近似 Jacobi 行列を陽に保存しない記憶制限 Broyden 法 [89] を用いた。記憶制限 Broyden 法は流体・構造連成解析の分野での実績 [83,84] がある。まず分離型連成解法に準 Newton 法一般を適用したときのアルゴリズムを以下に示す。

```

k ← 0
while  $\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k)}\| > \tau$  do
   $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow G(L(\mathbf{u}_\Gamma^{(k)}))$ 
   $\mathbf{r}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)}$ 
   $\mathbf{d}^{(k+1)} \leftarrow -\mathbf{B}^{(k+1)^{-1}} \mathbf{r}^{(k+1)}$ 
   $\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \omega^{(k+1)} \mathbf{d}^{(k+1)}$ 
   $\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)}$ 
  k ← k + 1
end while

```

なお、本研究ではステップ幅 ω を常に 1、つまり直線探索なしとした。このとき、探索方向ベクトル \mathbf{d} と更新量ベクトル $\Delta \mathbf{u}_\Gamma$ が常に等しくなる。準 Newton 法のアルゴリズムでは、ブロック Gauss–Seidel 法と異なり、近似 Jacobi 行列 \mathbf{B} が導入されている。ブロック Gauss–Seidel 法では近似 Jacobi 行列 \mathbf{B} を常に単位行列にしていたとも解釈できる。また、もし \mathbf{B} が各反復ステップにおいて常に厳密な Jacobi 行列であれば、このアルゴリズムは Newton 法となる。しかし式 (2.1) の厳密な Jacobi 行列は不明であるので Newton 法は使用できない。準 Newton 法の近似 Jacobi 行列 \mathbf{B} は反復ステップ毎に刻々と更新される。本研究では直線探索なしの Broyden の更新式

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \frac{\mathbf{r}^{(k+1)} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)\top}}{\|\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)}\|^2} \quad (2.17)$$

を用いた。この式はセカント条件

$$\mathbf{B}^{(k+1)} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)} \quad (2.18)$$

を満たす。式 (2.17) を直接的に用いることも可能であるが、本研究ではメモリ使用量

と演算量を削減した記憶制限法 [89] を用いた。記憶制限 Broyden 法では Sherman–Morrison 式

$$\left(\mathbf{M} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}}\mathbf{v}^T\right)\mathbf{M}^{-1}, \quad (2.19)$$

を式 (2.17) に適用する。ただし、 \mathbf{M} は任意の正則行列、 \mathbf{u} および \mathbf{v} は任意のベクトル、 \mathbf{I} は単位行列である。Sherman–Morrison 式を式 (2.17) に適用し、注意深く式変形すると

$$\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \equiv -\mathbf{B}^{(k+1)-1}\mathbf{r}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{p}^{(k+1,k)}}{1 - \frac{\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k)T}\mathbf{p}^{(k+1,k)}}{\|\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k)}\|^2}} \quad (2.20)$$

および

$$\mathbf{p}^{(k+1,i+1)} \equiv -\mathbf{B}^{(i+1)-1}\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k+1,i)} + \frac{\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i)T}\mathbf{p}^{(k+1,i)}}{\|\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}\|^2}\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i+1)} \quad (2.21)$$

が導かれる。行列演算がベクトル演算に置き換えられた形になる。メモリには、近似 Jacobi 行列 \mathbf{B} の代わりに、全反復ステップの更新量ベクトル $\Delta\mathbf{u}_\Gamma$ を保存することになる。更新量ベクトルのデータ構造は領域界面自由度数と反復ステップ数の二次元配列になる。以上より、分離型連成解法に直線探索なしの記憶制限 Broyden 法を適用したときのアルゴリズムを以下に示す。

```

 $\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(0)} \leftarrow -\mathbf{B}^{(0)-1} \left( \mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} - G \left( L \left( \mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} \right) \right) \right)$ 
 $\mathbf{u}_\Gamma^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} + \Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(0)}$ 
 $k \leftarrow 0$ 
while  $\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k)}\| > \tau$  do
   $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow G \left( L \left( \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} \right) \right)$ 
   $\mathbf{r}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)}$ 
   $\mathbf{p}^{(k+1,0)} \leftarrow -\mathbf{B}^{(0)-1} \mathbf{r}^{(k+1)}$ 
  for  $i \leftarrow 0$  to  $k - 1$  do
     $\mathbf{p}^{(k+1,i+1)} \leftarrow \mathbf{p}^{(k+1,i)} + \frac{\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i)T}\mathbf{p}^{(k+1,i)}}{\|\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}\|^2}\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(i+1)}$ 
  end for
   $\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{p}^{(k+1,k)} / \left( 1 - \frac{\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k)T}\mathbf{p}^{(k+1,k)}}{\|\Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k)}\|^2} \right)$ 
   $\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} + \Delta\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 

```

end while

直線探索なしの記憶制限 Broyden 法におけるパラメータは、領域界面上の変位の初期値 $\mathbf{u}_\Gamma^{(-1)}$ 、近似 Jacobi 行列の逆行列の初期値 $\mathbf{B}^{(0)-1}$ 、収束判定のしきい値 τ である。これらのうち、 $\mathbf{u}_\Gamma^{(-1)}$ はゼロベクトルもしくは前のステップ (増分ステップなど) の解とした。 $\mathbf{B}^{(0)-1}$ は逆行列であることから対角項一定の対角行列とした。あるスカラー値 α と単位行列 \mathbf{I} に対して

$$\mathbf{B}^{(0)-1} = \alpha \mathbf{I} \quad (2.22)$$

であるとする

$$\mathbf{B}^{(0)} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{I} \quad (2.23)$$

である。 $\mathbf{B}^{(0)-1}$ を対角行列にする方法は、プログラミング言語 Python の SciPy ライブラリのマニュアル [91] の `scipy.optimize.broyden1()` ルーチンの説明を参考にした。 $\mathbf{B}^{(0)-1}$ の対角項 α については次章でパラメトリックスタディを行う。

次章の数値実験でしか用いないが記憶制限 BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) 法 [92] のアルゴリズムについても説明する。BFGS 法は Broyden 法と同様に、セカント条件を満たす準 Newton 法の一つであり、最適化の分野では最も有効な準 Newton 法と言われている [92]。BFGS 法には Broyden 法と同様に記憶制限法が存在する。まず、BFGS の更新式は

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} - \frac{\mathbf{B}^{(k)} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} \left(\mathbf{B}^{(k)} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} \right)^\top}{\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)\top} \mathbf{B}^{(k)} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)}} + \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)\top}}{\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}} \quad (2.24)$$

である。ただし

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)} \quad (2.25)$$

である。これに対して Broyden 法と同様にして記憶制限法を導くと以下のアルゴリズムのようになる。

$$\mathbf{r}^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} - G \left(L \left(\mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} \right) \right)$$

$$\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(0)} \leftarrow -\mathbf{B}^{(0)-1} \mathbf{r}^{(0)}$$

$$\mathbf{u}_\Gamma^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(-1)} + \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(0)}$$

$$k \leftarrow 0$$

$$\mathbf{while} \left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| / \left\| \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k)} \right\| > \tau \mathbf{do}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow G \left(L \left(\mathbf{u}_\Gamma^{(k)} \right) \right)$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{(k+1)}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} \leftarrow \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1,k)} \leftarrow \mathbf{r}^{(k+1)}$$

for $i \leftarrow k - 1$ **to** 0 **do**

$$\gamma^{(i)} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(i)\top} \mathbf{p}^{(k+1,i+1)}}{\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(i)\top} \mathbf{y}^{(i+1)}}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1,i)} \leftarrow \mathbf{p}^{(k+1,i+1)} - \gamma^{(i)} \mathbf{y}^{(i+1)}$$

end for

$$\mathbf{q}^{(k+1,0)} \leftarrow \mathbf{B}^{(0)-1} \mathbf{p}^{(k+1,0)}$$

for $i \leftarrow 0$ **to** $k - 1$ **do**

$$\beta^{(i)} \leftarrow \frac{\mathbf{y}^{(i+1)\top} \mathbf{q}^{(k+1,i)}}{\mathbf{y}^{(i+1)\top} \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(i)}}$$

$$\mathbf{q}^{(k+1,i+1)} \leftarrow \mathbf{q}^{(k+1,i)} + (\gamma^{(i)} - \beta^{(i)}) \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(i)}$$

end for

$$\Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow -\mathbf{q}^{(k+1,k)}$$

$$\mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_\Gamma^{(k+1)}$$

$$k \leftarrow k + 1$$

end while

記憶制限 BFGS 法では、記憶制限 Broyden 法と違い、全反復ステップの $\Delta \mathbf{u}_\Gamma$ のみならず \mathbf{y} も二次元配列として保存する必要がある。つまり、反復解法のメモリ使用量が約二倍になる。

2.5 非線形解析向けの分離型連成解法

非線形解析向けの分離型連成解法は基本的には線形弾性解析向けの分離型連成解法と同様である。非線形解析では、グローバル領域を弾性体、ローカル領域を弾塑性体としてモデル化するなど、それぞれの領域に対して異なる材料モデルを用いることができる。弾塑性解析などの非線形有限要素解析では一般に以下のようにアルゴリズム中に増分ステップと Newton–Raphson 反復が含まれる。

for loop of incremental steps **do**

Analysis with Newton–Raphson method

end for

これに対して分離型連成解法を適用するときは二つのアルゴリズムが考えられる。

2.5.1 増分型分離型連成解法

一つ目の分離型連成解法を増分型分離型連成解法と呼ぶ。増分型分離型連成解法では図 2.6 のように、各増分ステップにおいて連成反復を実行し、連成反復の中でローカル領域・グローバル領域それぞれの非線形問題を解く。図 2.6 において、横方向が増分ステップを表し、上の灰色の矢印がローカル解析の増分ステップ、下の灰色の矢印がグローバル解析の増分ステップ、中央の黒色の矢印が連成反復を表す。アルゴリズムは、増分ステップの中に連成反復がネストされ、その中に Newton-Raphson 反復がネストされた構造になる。具体的なアルゴリズムは以下のようになる。

```

for loop of incremental steps do
  while loop of partitioned coupling iteration counts do
    Local analysis with Newton-Raphson method
    Global analysis with/without Newton-Raphson method
  end while
end for

```

グローバル解析はグローバル領域を線形弾性体としてモデル化するならば Newton-Raphson 法を伴わず、非線形モデルとしてモデル化して陰的に解くのであれば Newton-Raphson 法を伴う。増分型分離型連成解法では、もしグローバル領域が弾性体である場合、弾性体には不必要な増分ステップにグローバル領域を付き合わせることで計算時間が多くなることが予想される。グローバル領域はローカル領域よりも大規模であり、その解析回数は計算時間に強い影響を与える。

2.5.2 サブサイクリング型分離型連成解法

二つ目の分離型連成解法をサブサイクリング型分離型連成解法と呼ぶ。サブサイクリングという名称は、流体・構造連成解析において主に時差解法に対して用いられる技術 [77,78] にちなんでいる。流体・構造連成解析では、流体解析と構造解析に適した時間増分がそれぞれ異なるという理由から片方の時間増分を細かく設定すること

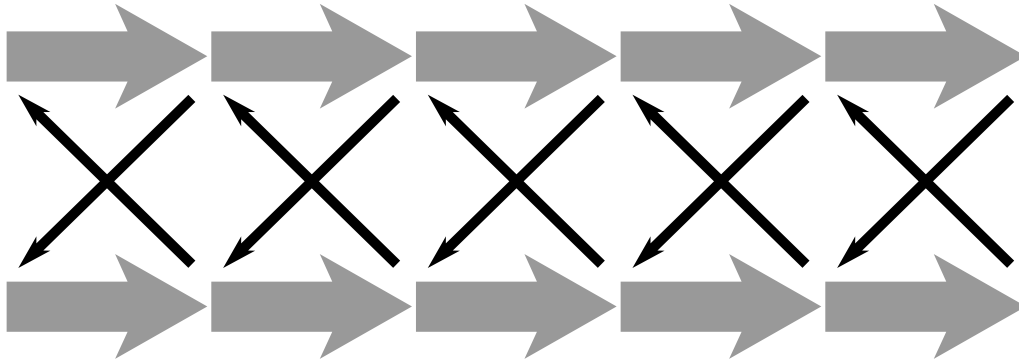


図 2.6 増分型の分離型連成解法

がある。本研究の問題においてもローカル解析では細かい増分ステップが要求されるが、グローバル解析は場合によっては粗い増分ステップもしくは1回のみの増分ステップで事足りる。本研究では1回のみの増分ステップの解析事例を示す。サブサイクリング型の分離型連成解法では図 2.7 のように、各連成反復において増分解析を実行し、各増分ステップの中で従来の非線形有限要素法と同様に非線形問題を解く。図 2.7 において、横方向が増分ステップを表し、上の灰色の矢印がローカル解析の増分ステップ、下の灰色の矢印がグローバル解析の増分ステップ、中央の黒色の矢印が連成反復を表す。アルゴリズムは、連成反復の中に増分ステップがネストされ、その中に Newton-Raphson 反復がネストされた構造になる。具体的なアルゴリズムは以下のようなになる。

```

for loop of partitioned coupling iteration counts do
  Decision of number of incremental steps
  while loop of incremental steps do
    Local analysis with Newton-Raphson method
  end while
  Global analysis
  Turning back incremental time (restoring internal variables such as equivalent plastic strain and yield stress)
end for

```

この方法では、グローバル領域を増分ステップに付き合わせる必要がなくなる。ただし、グローバル解析の結果を線形補間した後に境界条件としてローカル領域に与える

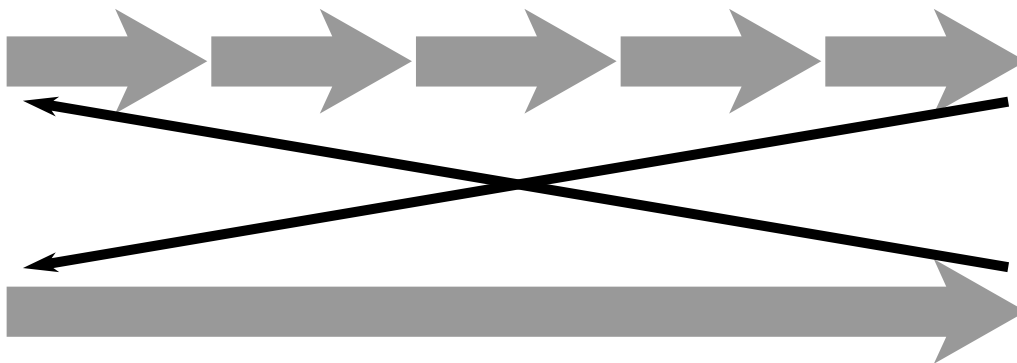


図 2.7 サブサイクリング型の分離型連成解法

ため、解が変形経路に強く依存する問題に対しては適用できないという難点もある。

サブサイクリング型の分離型連成解法では各連成反復ステップにおいてローカル解析の増分ステップ数を可変的に決める必要がある。不変の増分ステップ数を与えることも可能であるが、ローカル領域に付与される境界条件の値は連成反復ステップ毎に刻々と変化し、大きい境界条件の値のときは増分ステップ数を大きく、小さい境界条件の値のときは増分ステップ数を小さくするアプローチが非線形問題を確実に何度も解くために必要である。ローカル領域に付与される境界条件は原則的に領域境界上の仮の強制変位境界条件のみであるため、増分ステップ数は

$$\text{Number of incremental steps} = \left\lfloor \frac{\varepsilon_{\text{char}}}{\Delta\varepsilon_{\text{char}}} \right\rfloor + 1 \quad (2.26)$$

に従って決定することとした。 $\varepsilon_{\text{char}}$ はローカル領域の巨視的なひずみを表し

$$\varepsilon_{\text{char}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=x,y,z} (u_{\Gamma_{i_{\max}}} - u_{\Gamma_{i_{\min}}})^2}}{\sqrt{\sum_{i=x,y,z} (x_{i_{\max}} - x_{i_{\min}})^2}} \quad (2.27)$$

である。 u_{Γ_i} はローカル領域に付与される仮の強制変位境界条件の値であり、 x_i はローカル領域の節点の座標である。 $\Delta\varepsilon_{\text{char}}$ はこの巨視的なひずみの増分を表すユーザパラメータである。 $\Delta\varepsilon_{\text{char}}$ を大きい値に設定すると増分ステップ数が小さくなり、 $\Delta\varepsilon_{\text{char}}$ を小さい値に設定すると増分ステップ数が大きくなる。

2.6 連立一次方程式求解回数の数理モデル

前節、前々節で説明した分離型連成解法、そして通常の有限要素法について、連立一次方程式求解回数の簡易的な数理モデルを作成する。一般に大規模な連立一次方程

式の求解は計算時間の多くを占める。以降の式において、基本的に S は (平均) 増分ステップ数、 N は平均 Newton–Raphson 反復回数、 P は分離型連成解法の反復解法の (平均) 反復回数を表す。まず、線形弾性解析について述べる。線形弾性解析において通常の有限要素法の連立一次方程式求解回数は

$$\text{Number of linear system solutions} = 1 \quad (2.28)$$

である。一方、分離型連成解法の連立一次方程式求解回数はグローバル解析・ローカル解析ともに

$$\text{Number of linear system solutions} = P + 1 \quad (2.29)$$

となる。分離型連成解法の反復解法の反復回数 P はゼロから数えていることに注意する。つづいて非線形解析について述べる。非線形解析において通常の有限要素法の連立一次方程式求解回数は

$$\text{Number of linear system solutions} = S(N + 1) \quad (2.30)$$

である。 S が増分ステップ数であり、 N が平均 Newton–Raphson 反復回数である。増分型の分離型連成解法の連立一次方程式求解回数はグローバル解析が

$$\text{Number of linear system solutions} = S(P + 1)(N_G + 1) \quad (2.31)$$

であり、ローカル解析が

$$\text{Number of linear system solutions} = S(P + 1)(N_L + 1) \quad (2.32)$$

である。 S が増分ステップ数であり、 P が平均連成反復回数、 N_G および N_L が平均 Newton–Raphson 反復回数である。もしグローバル領域を線形弾性体とモデル化する場合は $N_G = 0$ となる。サブサイクリング型の分離型連成解法の連立一次方程式求解回数はグローバル解析が

$$\text{Number of linear system solutions} = (P + 1)(N_G + 1) \quad (2.33)$$

であり、ローカル解析が

$$\text{Number of linear system solutions} = S(P + 1)(N_L + 1) \quad (2.34)$$

である。 S が連成反復毎に式 (2.26) によって求められる平均増分ステップ数、 P が連成反復回数、 N_G および N_L が平均 Newton–Raphson 反復回数である。もしグロー

表 2.4 分離型連成解法の連立一次方程式求解回数の数理モデル

	FEM	Partitioned Coupling Method	
		Incremental	Subcycling
<i>Linear Elastic Analysis</i>			
Global	1		$P + 1$
Local	N/A		$P + 1$
<i>Nonlinear Analysis</i>			
Global	$S(N + 1)$	$S(P + 1)(N_G + 1)$	$(P + 1)(N_G + 1)$
Local	N/A	$S(P + 1)(N_L + 1)$	$S(P + 1)(N_L + 1)$

バル領域を線形弾性体とモデル化する場合は $N_G = 0$ となる。以上をまとめて表 2.4 に示す。分離型連成解法の連立一次方程式求解回数はグローバル解析・ローカル解析を上下に合わせて示した。

前段落で導入した数理モデルを用いて、通常の有限要素法よりも分離型連成解法の方が連立一次方程式求解回数が少なくなる条件を述べる。前提としてグローバルメッシュの規模はローカルメッシュの規模よりも遥かに大きいことを仮定する。つまり、グローバル解析の連立一次方程式求解回数だけに注目する。まず、線形解析の場合、分離型連成解法が通常の有限要素法より速くなる条件は

$$P < 0 \quad (2.35)$$

であり、連成反復回数 P は非負の値であるためこの条件は成り立たない。ただし、次章以降の数値実験で示すように、剛性行列が解析全体を通じて不変であることを上手く利用するとそれほど遅くならない結果も得られうる。つづいて非線形解析であるが、グローバル領域が線形弾性体 ($N_G = 0$) のときと非線形体 ($N_G \geq 1$) のときの二つの場合に分けて考える。 $N_G = 0$ のとき、増分型の分離型連成解法が通常の有限要素法よりも速くなる条件は

$$N > P \quad (2.36)$$

である。平均 Newton–Raphson 反復回数 N は次章以降の数値実験では数回から十回程度であり、連成反復回数 P は数回から二十回程度である。この条件はあまり成立し

ないことが予想される。サブサイクリング型の分離型連成解法が通常の有限要素法よりも速くなる条件は

$$S(N+1) > P+1 \quad (2.37)$$

である。次章以降の数値実験で示すが、この条件は成立しうる。この条件では、増分ステップ数 S が大きく、平均 Newton–Raphson 反復回数 N が大きい問題ほど差が顕著になる。ただし、このような非線形性が強い問題では P もいくらか大きくなることが予想される。 $N_G \geq 1$ のとき、増分型の分離型連成解法が通常の有限要素法よりも速くなる条件は

$$N+1 > (P+1)(N_G+1) \quad (2.38)$$

である。グローバル領域の非線形性が全体の非線形性よりも遥かに小さければこの条件は成り立ちうる。次章以降の数値実験では、この条件は成り立たないが、それほど遅くない結果が得られる問題を示す。サブサイクリング型の分離型連成解法が通常の有限要素法よりも速くなる条件は

$$S(N+1) > (P+1)(N_G+1) \quad (2.39)$$

であり、成立しうる。ただし、本研究ではこの条件を検証する数値実験は行っていない。

前段落ではグローバルメッシュの規模がローカルメッシュの規模よりも遥かに大きいことを仮定したが、今度はより現実的な観点としてグローバルメッシュとローカルメッシュの規模の比が有限の値であるときについても考察する。通常の有限要素法におけるメッシュの自由度数を n 、グローバルメッシュの自由度数を n_G 、ローカルメッシュの自由度数を n_L とする。連立一次方程式求解に要する時間を $f(n)$ と関数の形で仮定する。三次元有限要素法において、 $f(n)$ は連立一次方程式求解に直接法を用いる場合は $O(n^{\frac{7}{3}})$ 、共役勾配法などの反復法を用いる場合は $O(n^{\frac{4}{3}})$ であることが知られている。代表例として、 $N_G = 0$ のとき、サブサイクリング型の分離型連成解法の通常の有限要素法からのスピードアップは

$$\text{Estimated speedup} = \frac{S(N+1)f(n)}{(P+1)f(n_G) + S(P+1)(N_L+1)f(n_L)} \quad (2.40)$$

となる。さらに

$$n \approx n_G + n_L \quad (2.41)$$

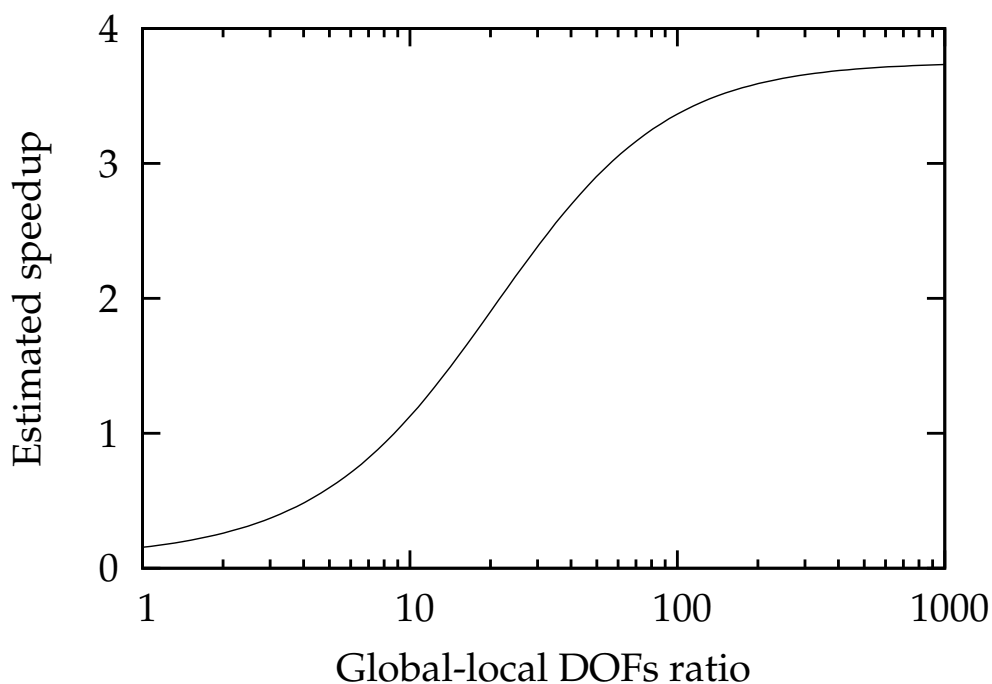


図 2.8 グローバルメッシュ・ローカルメッシュの自由度数の比に対する分離型連成解法のスピードアップの予測値

を仮定する。領域界面の自由度数を右辺から引くと左辺に厳密に等しくなる。たとえば $S = 10$ 、 $N = N_L = 5$ 、 $P = 15$ 、 $f(n) \propto n^{\frac{4}{3}}$ 、 $n_L = 100,000$ として、 $\frac{n_G}{n_L}$ を変化させたときの式 (2.40) をプロットすると図 2.8 のようになる。横軸がグローバルメッシュ・ローカルメッシュの自由度数の比 $\frac{n_G}{n_L}$ 、縦軸が予測したスピードアップである。このパラメータの場合は、自由度数の比が 10 を超えた辺りから高速化が得られ、100 を超えた辺りから安定的に十分な高速化が得られることがわかる。なお、この例ではスピードアップの予測値がせいぜい 4 程度であるが、これは S 、 N 、 P などのパラメータに依存して変化する。

2.7 解析プログラム

本研究で用いた線形・非線形有限要素解析プログラムはすべて C 言語で書かれたものである。ISO/IEC 9899:1999 (C99) の規格に沿うようにコーディングした。ただし、連立一次方程式を求解する部分は Intel Math Kernel Library (MKL) の PARDISO ライブラリを用いた。PARDISO は疎行列直接法 [93] に基づく連立一次方程式ソルバー

である。コンパイラは Intel C Compiler (ICC) を用いた。

メッシュ図や変形図、コンター図は、OpenGL および GTK+ に基づく可視化ライブラリ AutoGL [94] を用いてコーディングした C 言語プログラムで可視化した。一部のメッシュ図は Python Imaging Library (PIL) [95] を用いてコーディングした Python スクリプトで可視化した。この Python スクリプトは付録に示す Tegiri Utils の一部である。

2.8 結言

本章では本研究で用いた手法について述べた。まず、大規模非線形破壊力学解析向けの既存手法のサーベイを行い、これらを整理した。大規模非線形破壊力学解析に適した手法に対して、二つのメッシュやモデルの間の相互作用が担保されているかという意味での解の精度、そしてグローバル領域を弾性体、ローカル領域を弾塑性体とするなどの異なる材料モデルが使用できるかという意味での非線形解析の可否という二つの観点を導入した。解の精度が良く、非線形解析が可能な手法として分離型連成解法を提案した。分離型連成解法では、メッシュをき裂近傍とそれ以外の領域に重なり合わないよう分割し、領域界面上に仮の強制変位・荷重境界条件を付与し、それらを反復解法の下で更新しながら各領域の解析を繰り返し行い、最終的に収束解を得る。メッシュの分割方針を述べ、つづいて分離型連成解法を数理的に説明した。増分解析を伴う非線形解析向けの拡張として、増分型とサブサイクリング型の二つの分離型連成解法を提案した。増分型ではグローバル解析の回数を削減することができないが、き裂に関わる非線形性・複雑さをローカル領域に限定した上で増分ステップ毎に確実に収束解を得ることができる。サブサイクリング型ではグローバル解析の回数を削減することができるが、変形経路に依存する問題に適用できないという適用限界がある。分離型連成解法を用いたときの連立一次方程式求解回数を示す数理モデルを作成し、通常の有限要素法と比較して連立一次方程式求解回数の削減やスピードアップについて考察した。最後に、本研究で使用した解析プログラムについて述べた。

第 3 章

線形弾性力学シミュレーション

目次

3.1	緒言	32
3.2	円孔平板モデルを用いた収束性の調査	32
3.3	き裂付き帯板モデルを用いた収束性の調査	33
3.4	結言	34

3.1 緒言

本章では二つのベンチマーク問題を通じて分離型連成解法で用いる反復解法の収束性を調査する。一つ目は円孔平板モデルの引張解析であり、二つ目はき裂付き帯板モデルの三点曲げ解析である。

3.2 円孔平板モデルを用いた収束性の調査

円孔平板モデルを用いて分離型連成解法における反復解法の収束性の調査を行った。使用した反復解法は Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法、記憶制限 Broyden 法、記憶制限 BFGS 法の三つである。これらの反復解法のパラメータは Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法に対してステップ幅の初期値 $\omega^{(0)}$ 、記憶制限 Broyden 法および記憶制限 BFGS 法に対して近似 Jacobi 行列の逆行列の初期値の対角項 α であった。また、三つの反復解法に対して収束判定のしきい値 τ であった。Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法に対しては

$$\Delta \mathbf{u}_r^{(0)} = \omega^{(0)} \mathbf{d}^{(0)} = -\omega^{(0)} \mathbf{r}^{(0)} \quad (3.1)$$

であり、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法および記憶制限 BFGS 法に対してはステップ幅 ω が常に 1 であることから

$$\Delta \mathbf{u}_r^{(0)} = \omega^{(0)} \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{B}^{(0)} \mathbf{r}^{(0)} = -\alpha \mathbf{I} \mathbf{r}^{(0)} = -\alpha \mathbf{r}^{(0)} \quad (3.2)$$

となり、前者の $\omega^{(0)}$ と後者の α は同じ意味を持つ。以降、これらを統一的に初期ステップ幅と呼ぶ。収束判定のしきい値 τ は常に 10^{-3} とした。

図 3.1 に円孔平板モデルの分割されたメッシュを示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。メッシュは対称性から 1/8 モデルとした。要素は四面体二次要素である。グローバルメッシュが要素数 576、節点数 1,105 であり、ローカルメッシュが要素数 11,296、節点数 17,087 である。メッシュ界面が節点数 85 である。寸法は板幅が 200 mm、板厚が 10 mm、円孔半径が 10 mm である。境界条件は引張荷重が 200 MPa である。材料定数は Young 率が 210 GPa、Poisson 比が 0.3 である。

図 3.2 に残差履歴を示す。横軸が反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。凡例のたとえば GS-Aitken (0.1) は初期ステップ幅 0.1 の Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法である。一番速く収束したのが GS-Aitken (1) でありこれ以降は

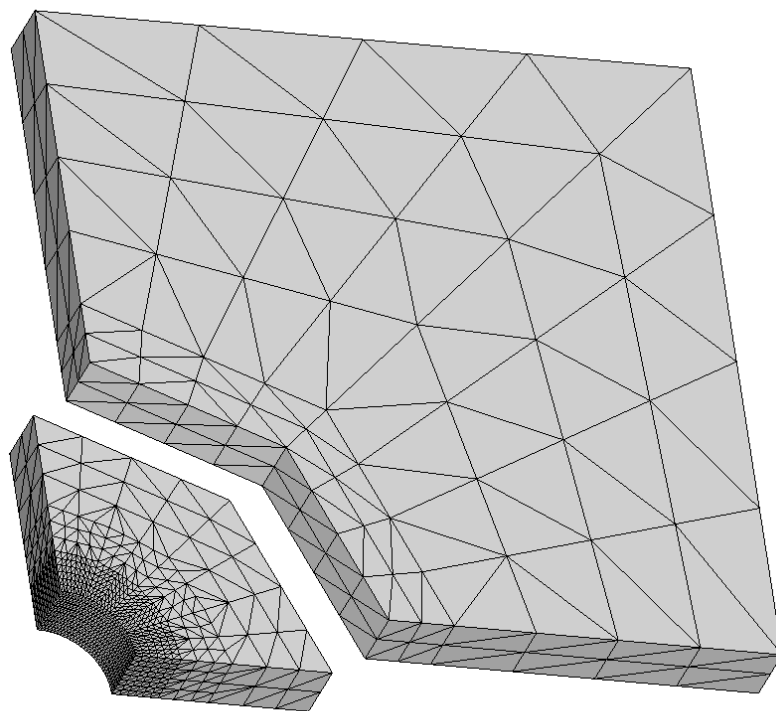


図 3.1 円孔平板モデルの分割メッシュ

GS-Aitken (0.1) および Broyden (0.1)、BFGS (0.1)、Broyden (1)、BFGS (1) の順であった。とはいえ、GS-Aitken (1)、GS-Aitken (0.1)、Broyden (0.1)、BFGS (0.1) の差はあまり大きくなかった。GS-Aitken は初期ステップ幅にあまり関わらずに収束し、Broyden および BFGS は初期ステップ幅の影響が大きかった。Broyden (1) と BFGS (1) はほぼ同等の収束性であったが、Broyden (0.1) よりも BFGS (0.1) の方がやや収束が速かった。

3.3 き裂付き帯板モデルを用いた収束性の調査

前節と同様の条件でき裂付き帯板モデルの三点曲げ解析を行った。分割されたメッシュを図 3.3 に示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。要素は四面体二次要素である。グローバルメッシュが要素数 520、節点数 1,157 であり、ローカルメッシュが要素数 3,864、節点数 5,883 である。メッシュ界面が節点数 205 である。寸法は板長が 250 mm、板幅が 80 mm、板厚が 20 mm、き裂長が 20 mm である。境界条件は三点曲げとし、中央上部に 600 N/mm の線荷重を载荷した。材料定数は

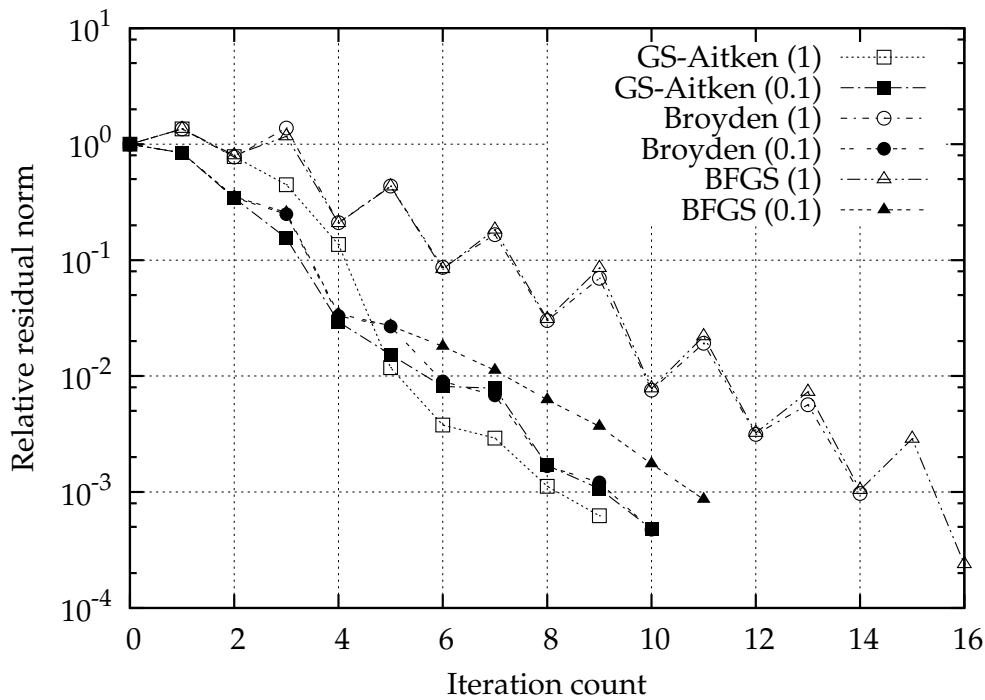


図 3.2 円孔平板モデルの引張解析における各反復解法の収束性

Young 率が 210 GPa、Poisson 比が 0.3 である。分離型連成解法の反復解法の最大反復回数は 100 とした。

図 3.4 に収束性を示す。横軸が反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。GS-Aitken は初期ステップ幅に関わらず収束しなかった。Broyden および BFGS はともに収束したが、初期ステップ幅の影響が大きかった。Broyden、BFGS いずれにおいても初期ステップ幅 0.1 の方が初期ステップ幅 1 よりも収束が速かった。Broyden (0.1) の方が BFGS (0.1) よりも収束が速かった。つづいて、Broyden の初期ステップ幅を変化させたときの結果を図 3.5 に示す。最適な初期ステップ幅は問題依存であると予想されるが、この問題の場合は 0.1 付近に最適値があることがグラフから読み取れる。

3.4 結言

本章では二つのベンチマーク問題を通じて分離型連成解法で用いる反復解法の収束性の調査を行った。比較的収束しやすいベンチマーク問題であった円孔平板モデルの引張解析では、Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法 (GS-Aitken)、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法 (Broyden)、直線探索なしの記憶制限 BFGS 法 (BFGS)

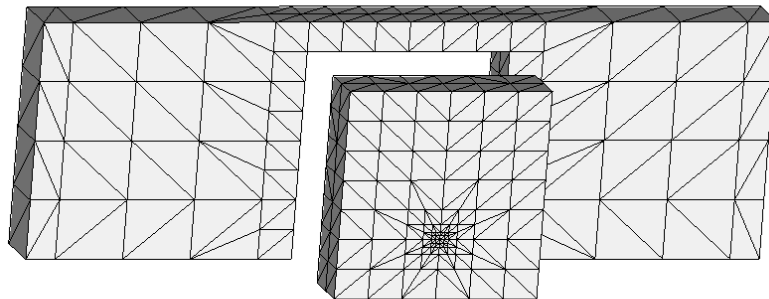


図 3.3 き裂付き帯板モデルの分割メッシュ

があまり変わらない収束性を示した。ただし、Broyden および BFGS は初期ステップ幅の影響が大きく、初期ステップ幅 1 よりも初期ステップ幅 0.1 の方が収束が速かった。比較的収束しにくいベンチマーク問題であったき裂付き帯板の三点曲げ解析では、GS-Aitken は収束せず、Broyden および BFGS のみが収束した。このベンチマーク問題においても初期ステップ幅の影響があり、Broyden、BFGS とともに初期ステップ幅 1 よりも初期ステップ幅 0.1 の方が収束が速かった。また、BFGS よりも Broyden の方が収束が速かった。Broyden の初期ステップ幅を変化させて収束性を調査したところ、このベンチマーク問題の場合は 0.1 付近に最適値があることがわかった。以上から、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法を初期ステップ幅 0.1 で用いるのが総じて良い収束性を示すことがわかった。反復回数是一个目の問題が 10 回程度、二つ目の問題が 20 回程度と開きがあった。これは、二つ目の問題のメッシュ分割においてグローバルメッシュがオリジナルメッシュと比べて構造的に柔くなったためと考えられる。

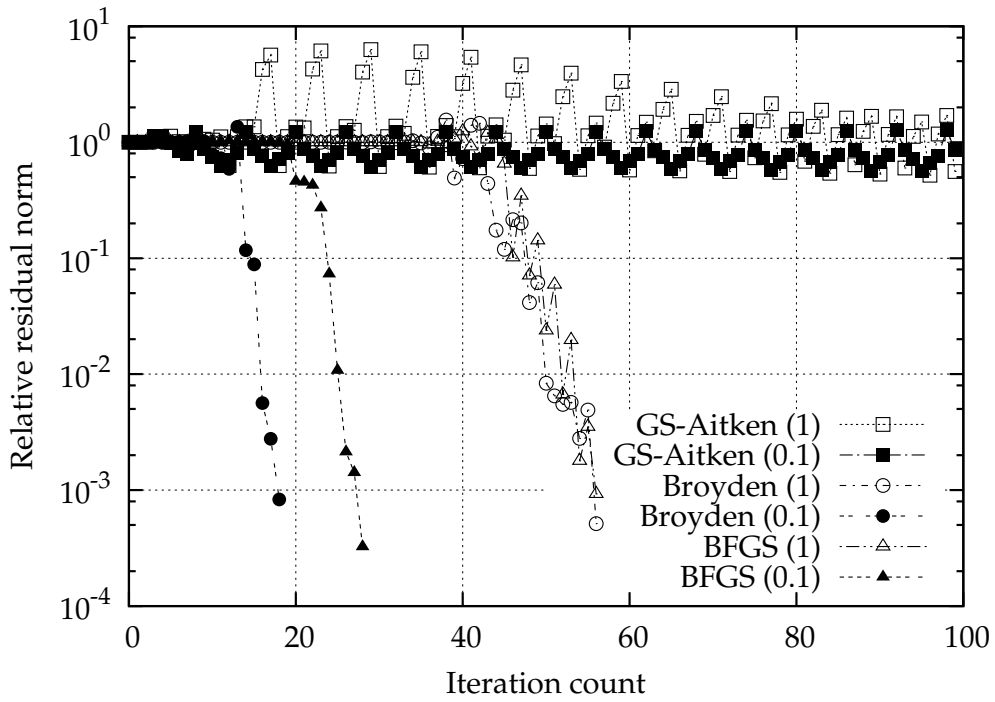


図 3.4 き裂付き帯板モデルの三点曲げ解析における各反復解法の収束性

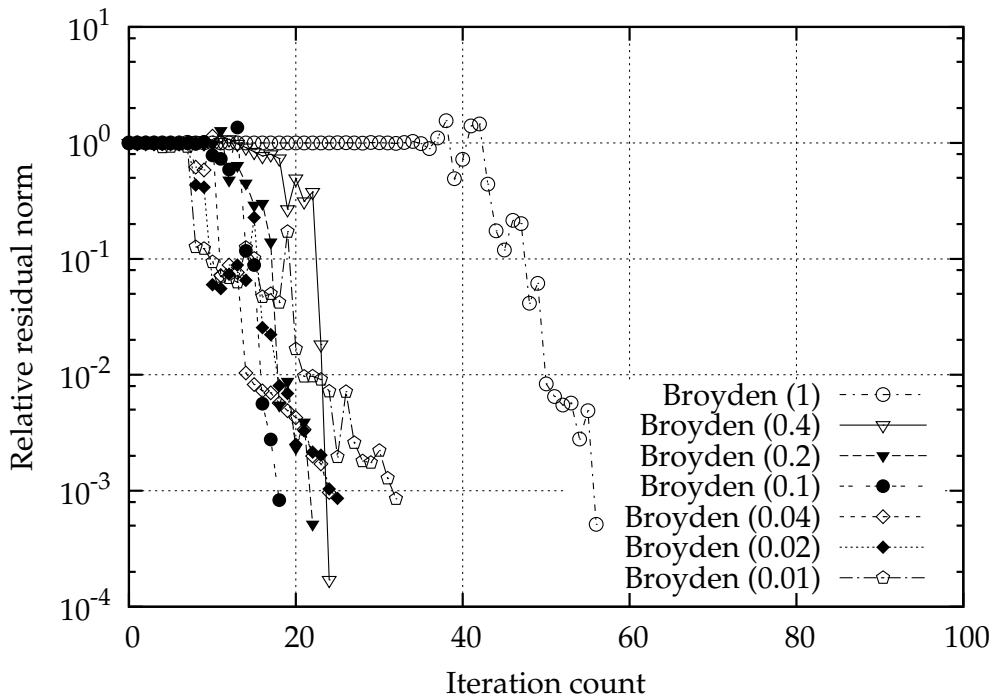


図 3.5 き裂付き帯板モデルの三点曲げ解析における直線探索なしの記憶制限 Broyden 法の収束性

第4章

線形破壊力学シミュレーション

目次

4.1	緒言	38
4.2	応力拡大係数評価手法	38
4.3	き裂進展クライテリオンとメッシュ制御	39
4.4	応力拡大係数解析	41
4.4.1	半円表面き裂付き平板のモード I 応力拡大係数解析	41
4.4.2	傾斜円埋没き裂付き有限体の混合モード応力拡大係数解析	47
4.4.3	四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の応力拡大係数解析	51
4.5	弾性き裂進展解析	59
4.5.1	貫通き裂付き三点曲げ試験片の弾性き裂進展解析	59
4.6	結言	65

4.1 緒言

本章では線形破壊力学解析として応力拡大係数解析および弾性き裂進展解析のベンチマークを示す。最初に、使用した応力拡大係数評価手法、き裂進展クライテリオン、メッシュ制御の手法について説明する。次に、三つの応力拡大係数解析ベンチマークを示す。一つ目がモード I 問題、二つ目が混合モード問題、三つ目が大規模問題である。つづいて、一つの弾性き裂進展解析ベンチマークを示す。

4.2 応力拡大係数評価手法

本研究では有限要素に四面体二次要素を用いるが、計算破壊力学の分野では四面体要素を用いる研究は少ない。たとえば Rajaram ら [96] や Okada ら [97,98] は四面体要素に対して領域積分法による J 積分評価を行った。たとえば Yoshimura ら [99] は四面体要素に対して直接経路積分による J 積分評価を行った。本研究では応力拡大係数の評価に Okada ら [100–102] の四面体要素向けの仮想き裂閉口積分法 (Virtual Crack Closure-integral Method; VCCM) を実装して用いた。四面体二次要素向け VCCM を簡単に説明する。まず、図 4.1 のようにき裂前縁においてき裂面側とリガメント側で要素面のペアを抽出する。図中において x は座標軸、 i は要素面節点 ID、 v^i はき裂面側要素面の相対変位、 P^i はリガメント側要素面の反力である。抽出した要素面の相対変位および反力を用いて、このき裂面側要素面を閉口するのに必要なエネルギーを

$$\delta E_I = \frac{1}{2} \sum_i v_2^i |P_2^i|, \quad (4.1)$$

$$\delta E_{II} = \frac{1}{2} \sum_i v_1^i |P_1^i|, \quad (4.2)$$

$$\delta E_{III} = \frac{1}{2} \sum_i v_3^i |P_3^i| \quad (4.3)$$

のようにモード別に求める。このエネルギーから節点上のエネルギー解放率 G_I 、 G_{II} 、 G_{III} を求め、最終的に応力拡大係数 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} を求める。

VCCM で必要なき裂前縁近傍情報の抽出について述べる。VCCM ではき裂前縁の節点、き裂前縁リガメント側一層分の要素面、き裂前縁き裂面側一層分の要素面を抽出する必要がある。手順としては、まずローカルメッシュの表面を抽出する。ソート

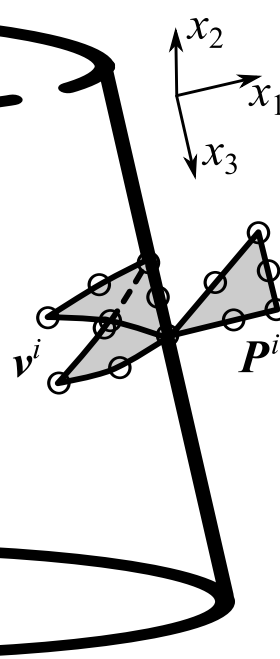


図 4.1 四面体二次要素向けの仮想き裂閉口積分法

アルゴリズムを用いて、節点 ID を見て隣り合う要素面を削除して表面を抽出した。つづいてき裂面を抽出する。今度は節点座標を見て隣り合う要素面を抽出した。つづいてき裂前縁節点を抽出する。これは同じ節点 ID を共有するき裂面要素面を手がかりに探し、節点座標でソートしてき裂前縁節点を順番に並べた。最後にき裂面要素面とき裂前縁節点からき裂面側・リガメント側一層分の要素面を抽出する。以上の処理の計算量のオーダーはソートアルゴリズムに依存する。本研究では C 言語の `stdlib.h` の `qsort` 関数を用いた。

4.3 き裂進展クライテリオンとメッシュ制御

本研究では停止き裂の応力拡大係数解析だけでなく弾性 (疲労) き裂進展解析の数値実験も実施した。分離型連成解法を用いたき裂進展解析の流れは次のようになる。

1. 連成反復で収束解を得る。
2. き裂前縁節点の応力拡大係数範囲を求める。
3. き裂進展量を求める。
4. き裂進展に合わせてローカルメッシュを更新する。

5. 1. に戻る。

順に説明する。連成反復で収束解を得るときは第1き裂進展ステップを除き、連成反復の初期解を前のき裂進展ステップの解とする。後の数値実験で示すが、これによって第2き裂進展ステップ以降の連成反復回数が少なくなる。き裂前縁節点の応力拡大係数範囲を求める方法は停止き裂の応力拡大係数解析と同様である。応力拡大係数範囲 ΔK はモード I の完全片振りとして応力拡大係数 K_I から

$$\Delta K = K_I - 0 = K_I \quad (4.4)$$

と求めた。き裂進展量 Δa を求めるときは Paris 則

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (4.5)$$

を用い、

$$\Delta a \simeq \frac{da}{dN} \Delta N = C\Delta K^m \Delta N \quad (4.6)$$

とした。C および m は材料定数である。 ΔN は解析パラメータであり、1き裂進展ステップあたりの疲労サイクル数である。き裂進展に合わせてローカルメッシュを更新するときは Jacobian-based Stiffening 法 [103] を用いた。Jacobian-based Stiffening 法は流体・構造連成解析分野で提案されたものであるが、数値流体力学の移動境界問題に対しても使われている [104]。Jacobian-based Stiffening 法では、メッシュの要素コネクティビティを変えずに節点を動かすことでメッシュを変化させる。節点の移動量には擬似的な弾性解析の解析結果の変位を用いる。このとき、小さい要素があまり歪まないようにするために要素の Young 率をアイソパラメトリック要素の Jacobian の逆数の累乗とする。本研究では単に Jacobian の逆数とした。Poisson 比は 0.3 とした。擬似的な弾性解析を行うとき、領域界面には変位拘束境界条件、き裂前縁およびき裂面には強制変位境界条件、自由表面には法線方向のみの変位拘束境界条件を付与した。分離型連成解法ではローカルメッシュのみを変化させることでき裂進展解析を実現できる。そうすることで、グローバルメッシュの剛性行列がき裂進展解析全体を通じて不変となる。

4.4 応力拡大係数解析

4.4.1 半円表面き裂付き平板のモード I 応力拡大係数解析

Raju–Newman の解 [105] や Newman–Raju の式 [106] で知られる、一様引張荷を受ける半円表面き裂付き有限平板のベンチマーク問題を解析した。寸法などのモデルのパラメータを図 4.2 に示す。分離型連成解法を用いた解析とメッシュを分割しない通常の有限要素解析の二つを実施し、それぞれと Newman–Raju の式 [106] の応力拡大係数を比較した。分離型連成解法を用いた解析では、四種類のメッシュの分割パターンを用意し、それぞれの精度と反復回数を比較した。図 4.3 に 1/2 モデルの、分割されたメッシュを示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。有限要素は四面体二次要素である。図 4.4 にき裂面のメッシュを示す。図 4.5 に四種類の分割パターンのローカルメッシュを示す。#1 が標準的と考えられる分割のローカルメッシュ、#2 がき裂面から要素一層分だけのローカルメッシュ、#3 がき裂前縁近傍のみのローカルメッシュ、#4 が領域界面がギザギザになるように分割したローカルメッシュである。VCCM ではき裂前縁の要素での情報から応力拡大係数を求めるので、停止き裂の応力拡大係数解析では #3 のような分割が可能である。#2 や #3 のような小さいローカルメッシュの方が、き裂前縁近傍の情報を抽出するのに必要な計算量が小さく済む。#4 は自動メッシュを想定したものであり、Laplacian スムージングで節点を動かした後に節点座標を見て分割した。分割しないモデルと四種類の分割パターンのグローバルメッシュ、ローカルメッシュ、領域界面について要素数および節点数を表 4.1 に示す。FEM #2 は Partitioned #4 と同様に Laplacian スムージングを行ったメッシュである。分離型連成解法の反復解法には Aitken 直線探索付きブロック Gauss–Seidel 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値は 10^{-3} 、初期ステップ幅 $\omega^{(0)}$ は 0.1 とした。

つづいて、求めた応力拡大係数を示す。Okada ら [100–102] の VCCM では、き裂前縁の要素面で求めたエネルギーを補間して節点上のエネルギー解放率・応力拡大係数を求めるが、このとき、一つの節点あたり 4 個の要素面を用いた。解析結果の応力拡大係数を図 4.6 に示す。横軸がき裂前縁の節点座標の正規化された角度 $2\varphi/\pi$ 、縦軸

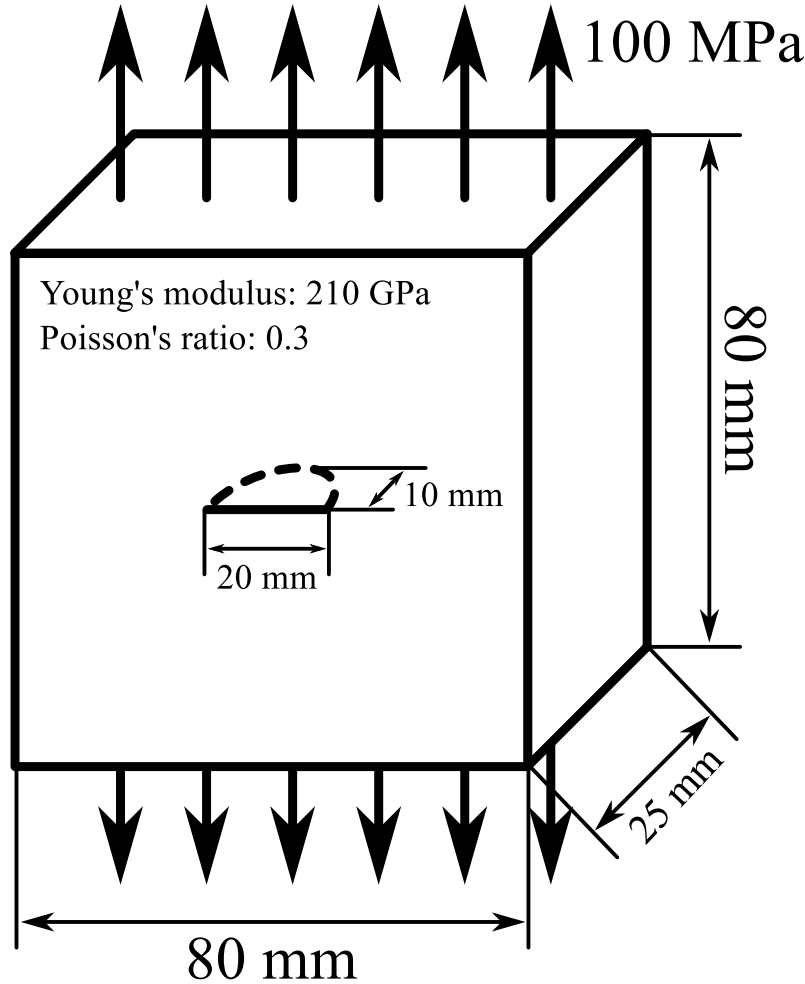


図 4.2 半円表面き裂付き平板の寸法・境界条件・材料定数

がモード I 無次元化応力拡大係数

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a/Q}} \quad (4.7)$$

である。ただし、 K_I はモード I 応力拡大係数、 $\sigma_0 = 100 \text{ N}$ は荷重、 π は円周率、 $a = 10 \text{ mm}$ はき裂半径、 Q は境界補正係数であり、半円き裂の場合は 2.464 である。二種類のメッシュの通常の有限要素解析、四種類の分割パターンの分離型連成解法による解析、Newman-Raju の式 [106] をプロットした。六種類の数値解はほぼ一致し、様々な分割パターンにおいても分離型連成解法が通常の有限要素法と同等の精度であることがわかった。また、数値解と Newman-Raju の式を比較すると、自由表面 ($2\varphi/\pi = 0$) 付近でやや大きめの数値解が得られたものの概ね良好に一致した。より詳細に精度を見るために図 4.6 の縦軸を拡大したものを図 4.7 に示す。FEM #1、Partitioned #1、Partitioned #2、Partitioned #3 がほぼ一致し、FEM #2、Partitioned #4 がほぼ一致

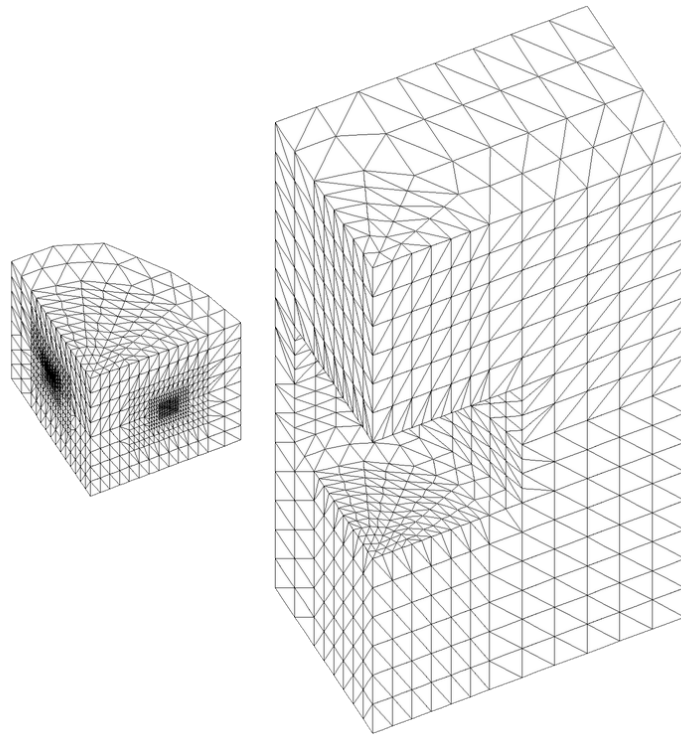


図 4.3 半円表面き裂付き平板の分割メッシュ

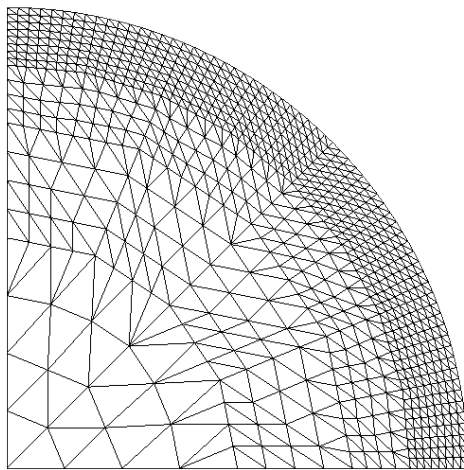


図 4.4 半円表面き裂付き平板のき裂面メッシュ

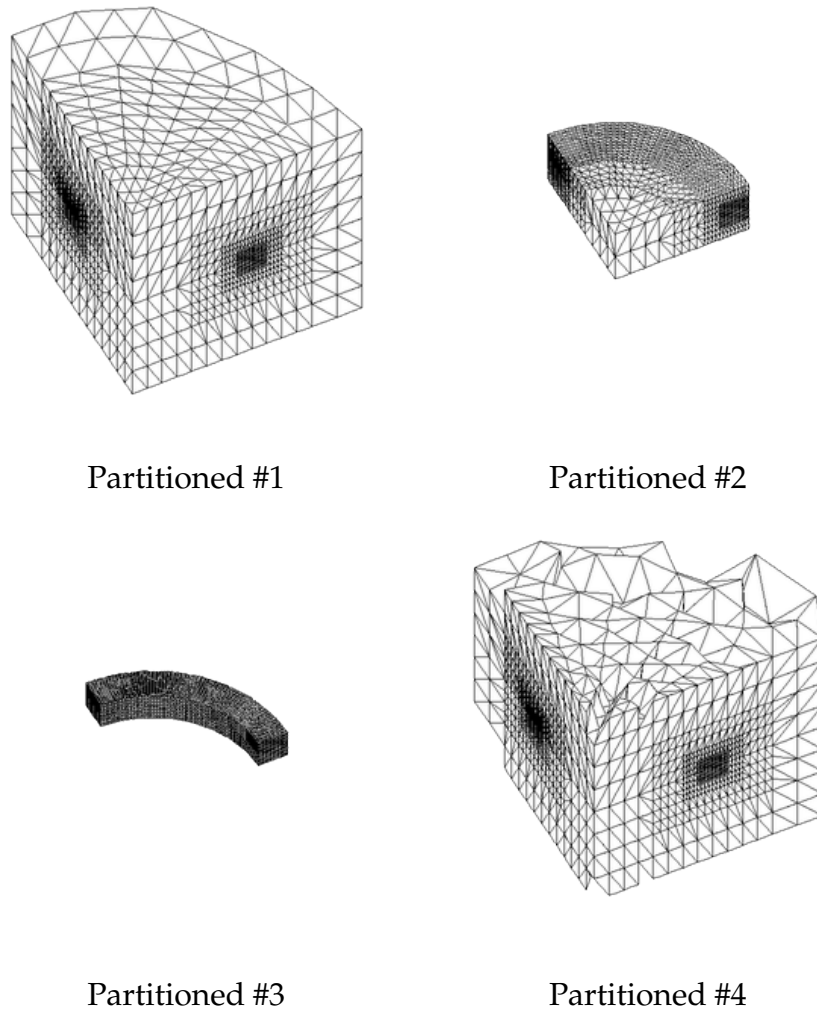


図 4.5 半円表面き裂付き平板の四種類のローカルメッシュ

した。前者と後者の解の若干の違いは Laplacian スムージングの影響である。

図 4.8 に分離型連成解法の残差履歴を示す。横軸が反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。使用した反復解法は Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法である。Partitioned #1、#2、#3 は十数回の反復で収束したが、#4 は 76 回の反復を要した。Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法では、分割したメッシュの界面がギザギザであると収束しにくくなることがわかった。図 4.9 に Partitioned #4 の応力解析結果を示す。コンターは von Mises の相当応力であり、単位は Pa である。変位は 100 倍拡大して可視化されている。Partitioned #4 の解析は多くの反復回数を要したが、得られた応力拡大係数の精度は十分に良く、応力コンター図を見ると連続的な応力分布が得られたことがわかる。

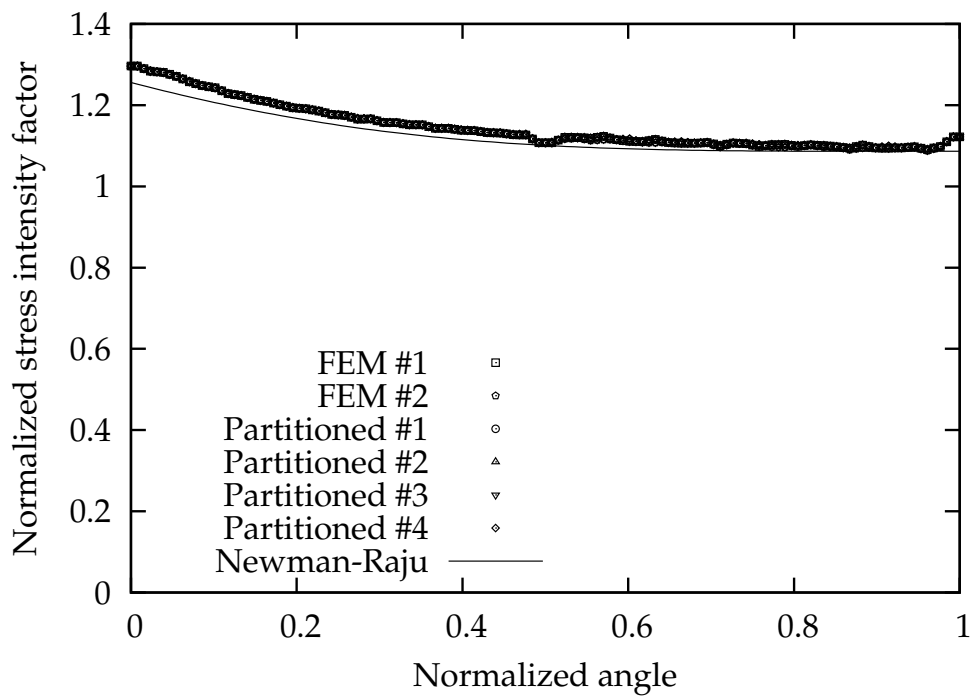


図 4.6 半円表面き裂付き平板の解析結果の応力拡大係数

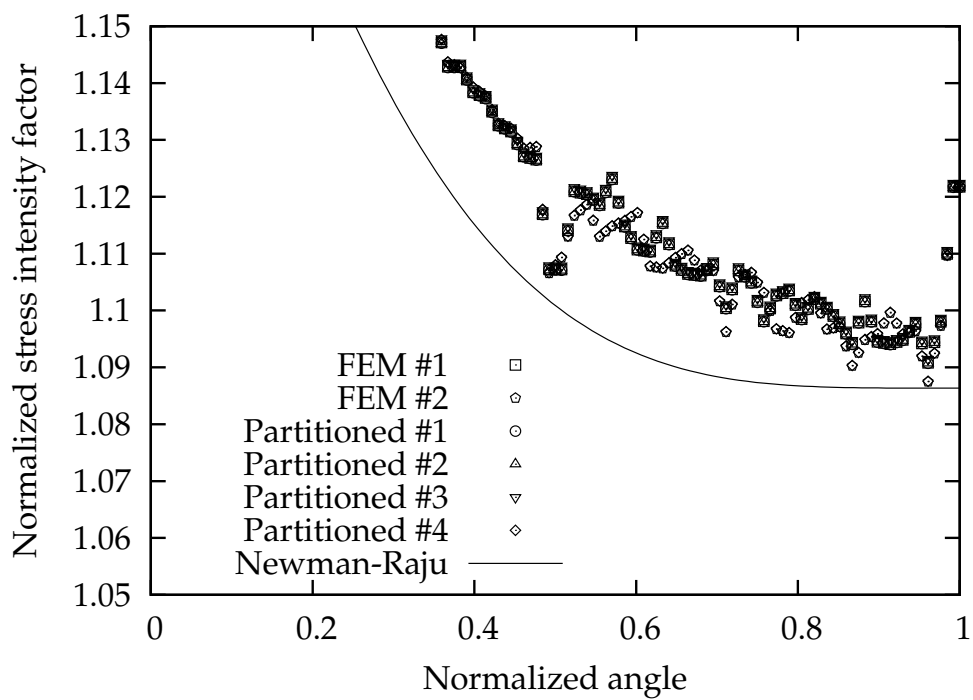


図 4.7 半円表面き裂付き平板の解析結果の応力拡大係数の拡大図

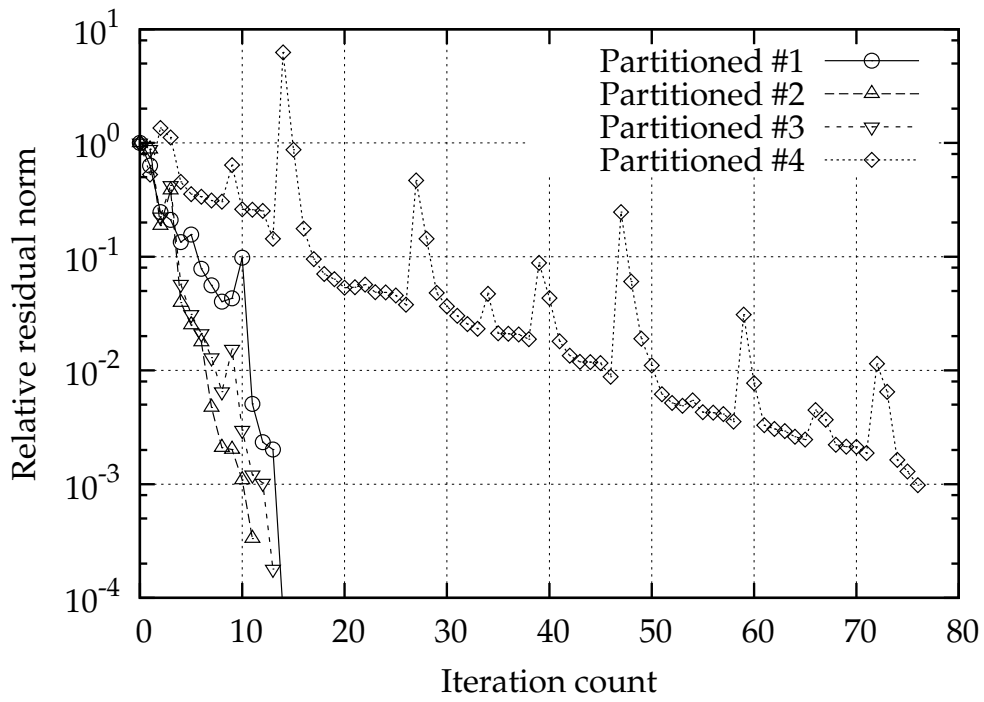


図 4.8 半円表面き裂付き平板の解析の収束性

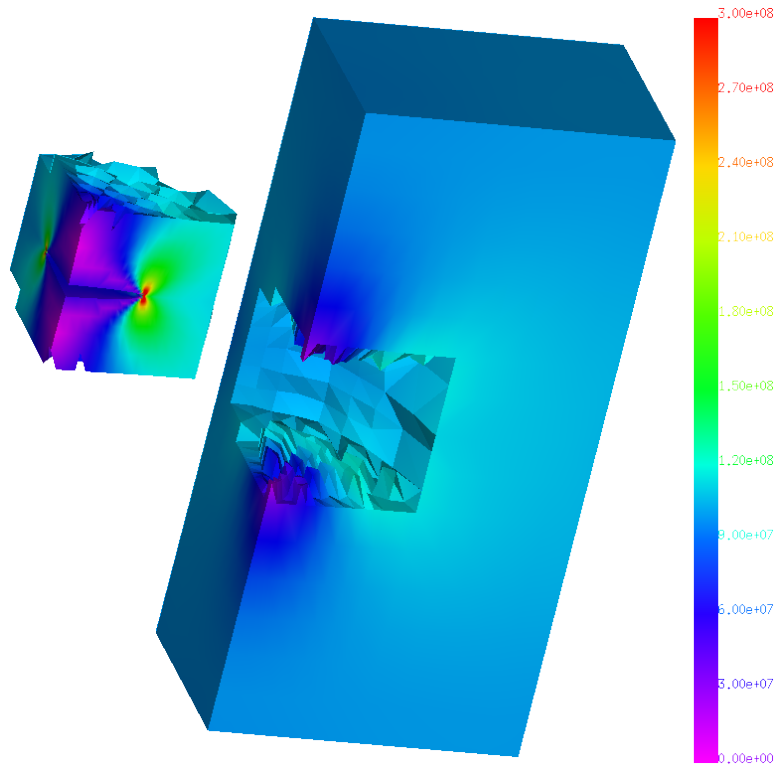


図 4.9 半円表面き裂付き平板の解析結果の相当応力分布

表 4.1 半円表面き裂付き平板のメッシュの情報

	Global	Local	Interface
<i>Number of Elements</i>			
FEM #1	95,628	N/A	N/A
FEM #2	95,628	N/A	N/A
Partitioned #1	4,596	91,032	N/A
Partitioned #2	26,632	68,996	N/A
Partitioned #3	46,476	49,152	N/A
Partitioned #4	5,040	90,588	N/A
<i>Number of Nodes</i>			
FEM #1	133,901	N/A	N/A
FEM #2	133,901	N/A	N/A
Partitioned #1	7,927	127,151	1,177
Partitioned #2	41,039	99,463	6,601
Partitioned #3	71,981	74,433	12,513
Partitioned #4	8,727	126,675	1,501

4.4.2 傾斜円埋没き裂付き有限体の混合モード応力拡大係数解析

有限体中の傾斜円埋没き裂の応力拡大係数解析を行った。この問題は前小節と異なり混合モード問題である。寸法などのモデルのパラメータを図 4.10 に示す。分離型連成解法を用いた解析とメッシュを分割しない通常の有限要素解析の二つを実施し、それぞれと理論解の応力拡大係数を比較した。分離型連成解法を用いた解析では、前小節と同様に、四種類のメッシュの分割パターンを用意し、それぞれの精度と反復回数を比較した。図 4.11 に 1/2 モデルの、分割されたメッシュを示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。有限要素は四面体二次要素である。図 4.12 にき裂面のメッシュを示す。図 4.13 に四種類の分割パターンのローカルメッシュを示す。前小節と同様に、#1 が標準的と考えられる分割のローカルメッシュ、#2 がき裂面から要素

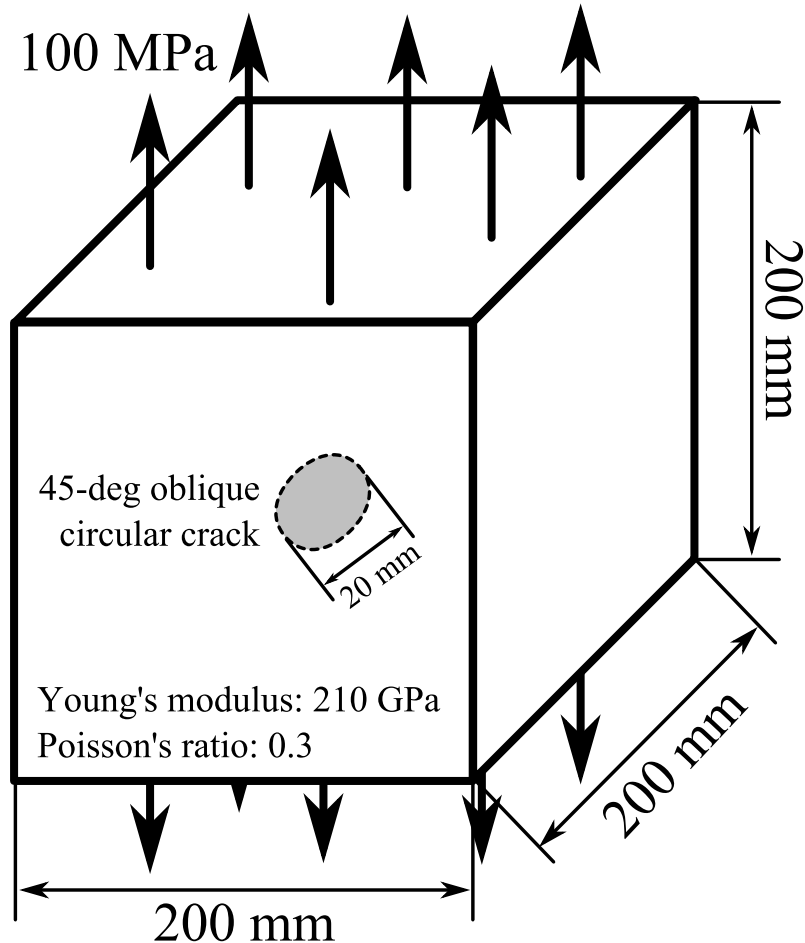


図 4.10 傾斜埋没き裂付き有限体の寸法・境界条件・材料定数

一層分だけのローカルメッシュ、#3 がき裂前縁近傍のみのローカルメッシュ、#4 が Laplacian スムージングを用いて領域界面がギザギザになるように分割したローカルメッシュである。分割しないモデルと四種類の分割パターンのグローバルメッシュ、ローカルメッシュ、領域界面について要素数および節点数を表 4.2 に示す。分離型連成解法の反復解法には直線探索なしの記憶制限 Broyden 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値は 10^{-3} 、近似 Jacobi 行列の逆行列の初期値の対角項 α は 0.1 とした。

解析結果の von Mises の相当応力分布を図 4.14 に示す。単位は Pa である。変位は 100 倍拡大して可視化されている。図 4.15 に四種類のローカルメッシュの解析結果の相当応力分布を示す。図 4.16 に Partitioned #3 のローカルメッシュの解析結果の相当応力分布を示す。混合モードの変形と急勾配の応力変化が見て取れる。

図 4.17 に求めた応力拡大係数を示す。横軸がき裂前縁の節点座標の正規化された角

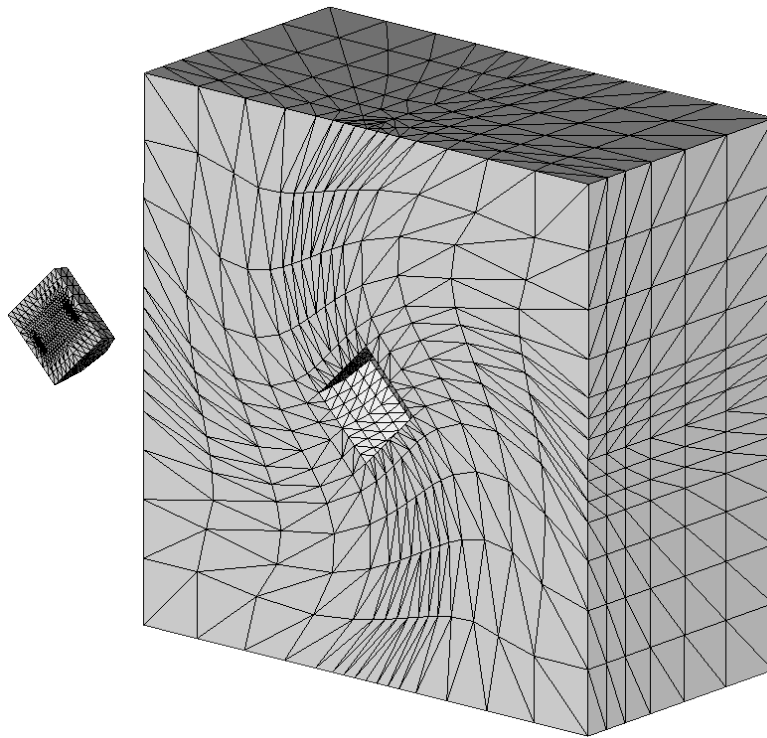


図 4.11 傾斜円埋没き裂付き有限体の分割メッシュ

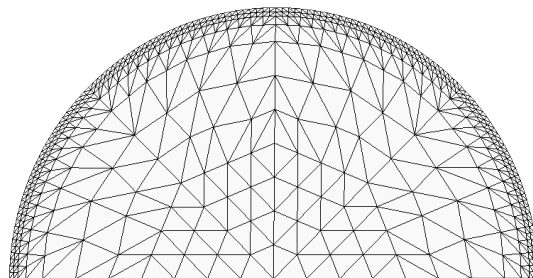


図 4.12 傾斜円埋没き裂付き有限体のき裂面メッシュ

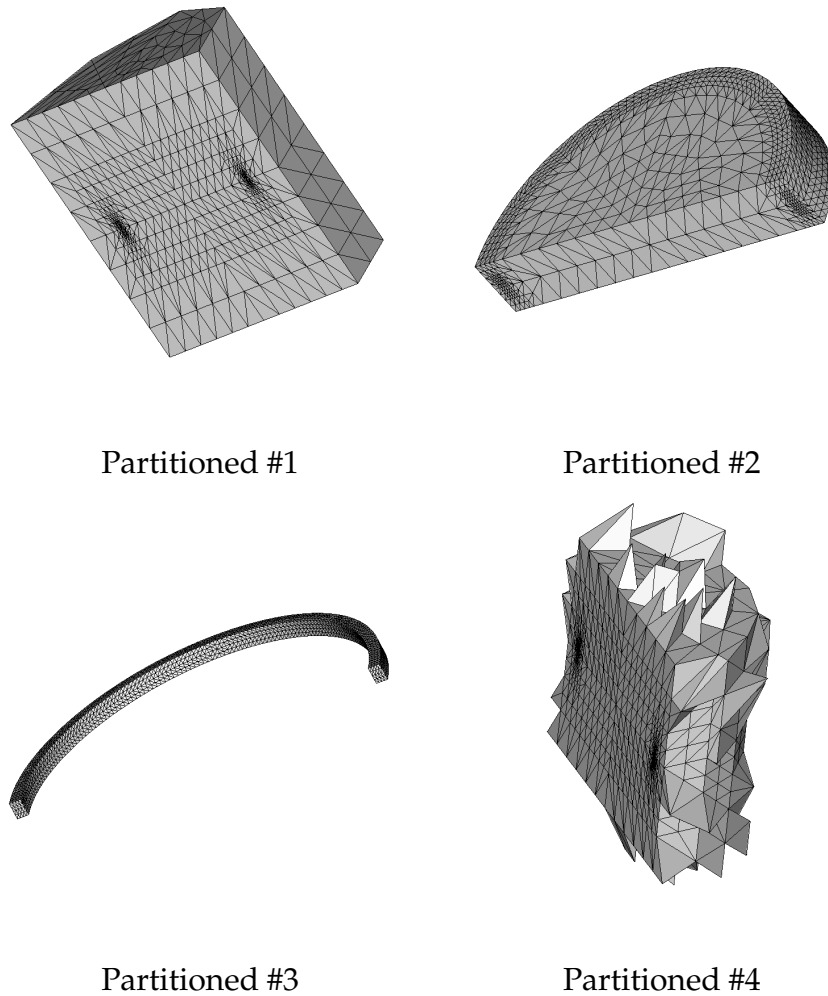


図 4.13 傾斜円埋没き裂付き有限体の四種類のローカルメッシュ

度 $2\varphi/\pi$ 、縦軸が無次元化応力拡大係数

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = \frac{2}{\pi'} \quad (4.8)$$

$$F_{II} = \frac{K_{II}}{\tau_0 \sqrt{\pi a}} = \frac{4 \sin \varphi}{(2 - \nu) \pi'} \quad (4.9)$$

$$F_{III} = \frac{K_{III}}{\tau_0 \sqrt{\pi a}} = \frac{4(1 - \nu) \cos \varphi}{(2 - \nu) \pi} \quad (4.10)$$

である。ここで、 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} は順にモード I、モード II、モード III の応力拡大係数である。 $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$ は引張荷重、 $\tau_0 = 50 \text{ MPa}$ はせん断荷重である。 π は円周率、 $a = 10 \text{ mm}$ はき裂半径、 φ はき裂前縁の節点座標の角度、 $\nu = 0.3$ は Poisson 比である。これらの式は無限体中のき裂に対する引張とせん断の解 [107] を重ね合わせたも

表 4.2 傾斜円埋没き裂付き有限体のメッシュの情報

	Global	Local	Interface
<i>Number of Elements</i>			
FEM	63,852	N/A	N/A
Partitioned #1	6,796	57,056	N/A
Partitioned #2	20,572	43,280	N/A
Partitioned #3	51,564	12,288	N/A
Partitioned #4	7,569	56,283	N/A
<i>Number of Nodes</i>			
FEM	89,807	N/A	N/A
Partitioned #1	10,845	79,579	617
Partitioned #2	32,155	62,901	5,249
Partitioned #3	76,443	21,845	8,481
Partitioned #4	12,141	78,657	991

のである。前者は 1962 年に Irwin が導いたものであり、後者は 1966 年に Kassir と Sih が導いたものである。図 4.17 ではすべての数値解と理論解が良好な一致を示している。

図 4.18 に分離型連成解法の残差履歴を示す。横軸が反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。使用した反復解法は直線探索なしの記憶制限 Broyden 法である。Partitioned #1、#2、#3 は 8 回の反復で収束したが、#4 は 20 回の反復を要した。直線探索なしの記憶制限 Broyden 法においても前小節の Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法と同様に、分割したメッシュの界面がギザギザであると収束しにくくなることがわかった。

4.4.3 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の応力拡大係数解析

四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の構造機器モデルの応力拡大係数解析を行った。この問題は混合モード問題である。メッシュは 300 万自由度規模であり、連立一

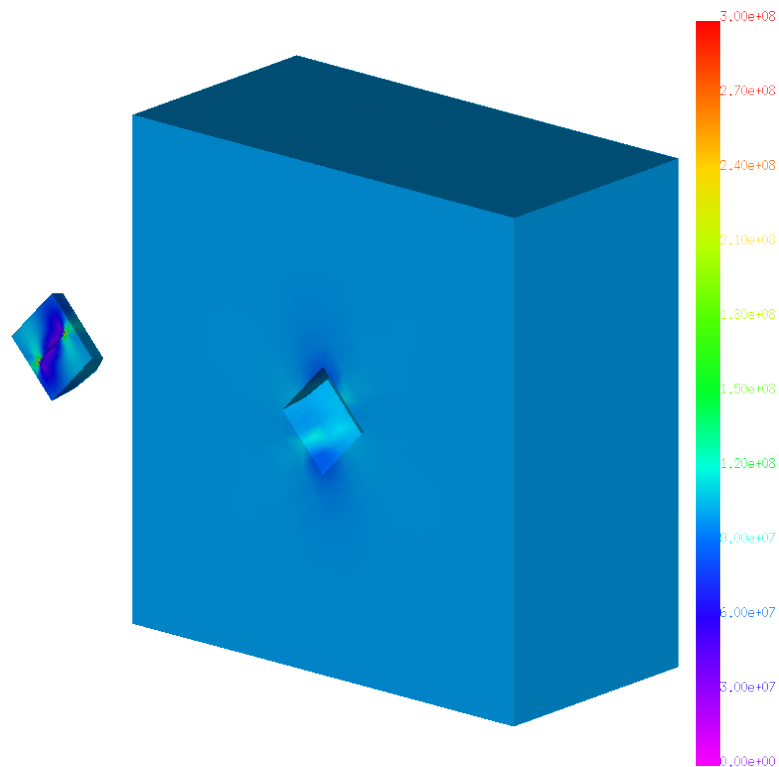


図 4.14 傾斜円埋没き裂付き有限体の解析結果の相当応力分布

次方程式求解に直接法を用いるにしては大規模である。この問題では前小節と違い、計算時間の比較も行う。寸法などのモデルのパラメータを図 4.19 に示す。分離型連成解法を用いた解析とメッシュを分割しない通常の有限要素解析の二つを実施し、それぞれの数値解の応力拡大係数を比較した。図 4.20 にメッシュを示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。上左図、上右図は全体図であり、下左図は下方向から管台部を見たときの拡大図である。下右図はローカルメッシュである。図 4.21 にローカルメッシュに導入されたき裂面のメッシュを示す。有限要素は四面体二次要素である。グローバルメッシュは 758,656 要素、1,079,880 節点、3,239,640 自由度であり、ローカルメッシュは 23,960 要素、34,865 節点、104,595 自由度である。グローバルメッシュの自由度数とローカルメッシュの自由度数の比は 31:1 である。図 4.22 にメッシュの要素体積のヒストグラムを示す。横軸が要素体積、縦軸が正規化された頻度である。グローバルメッシュの要素体積は大きく、ローカルメッシュのき裂があるため要素体積は小さいことが読み取れる。グローバルメッシュの最大要素体積は $1.23 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ 、最小要素体積は $4.63 \times 10^{-9} \text{ m}^3$ である。ローカルメッシュの最大要素体積は $6.66 \times 10^{-8} \text{ m}^3$ 、

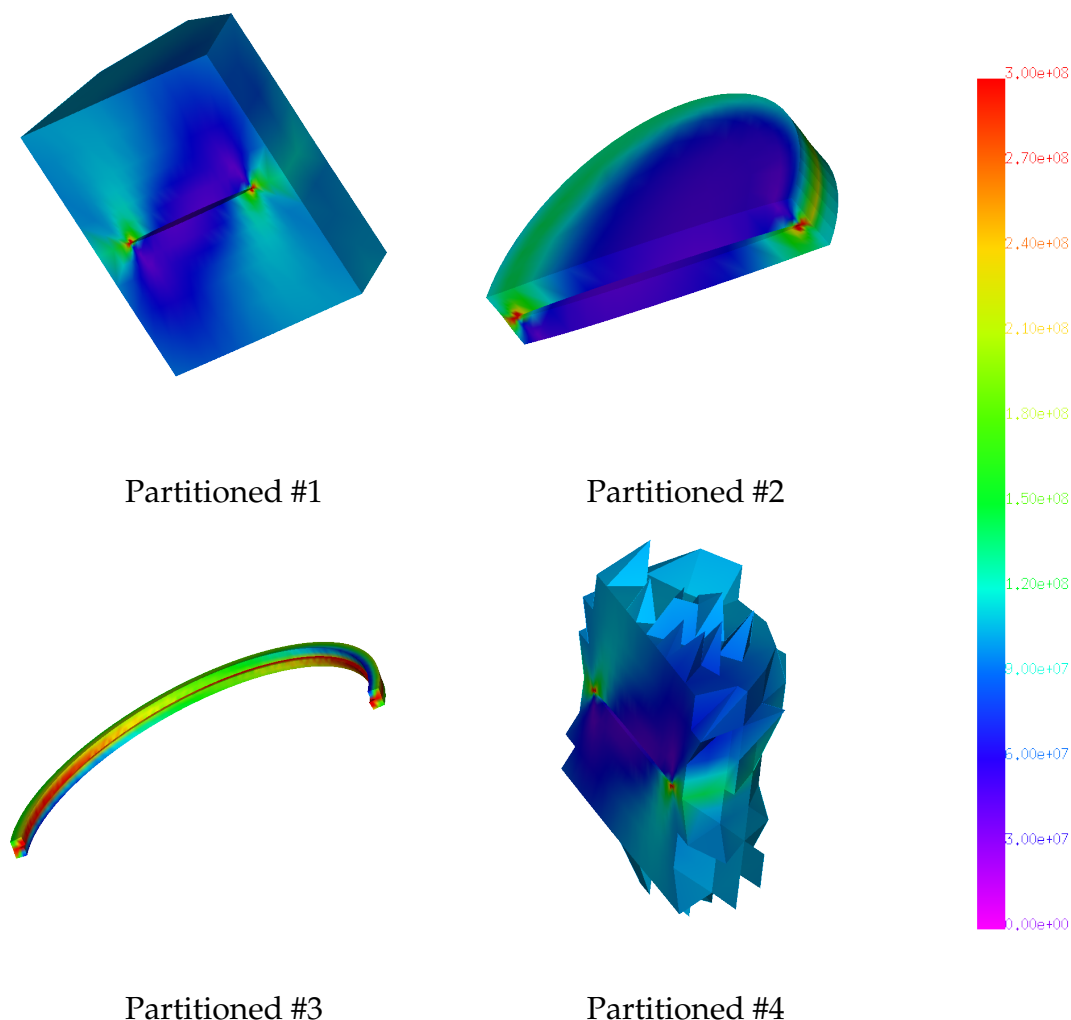


図 4.15 傾斜円埋没き裂付き有限体の四種類のローカルメッシュの解析結果の相当応力分布

最小要素体積は $1.94 \times 10^{-11} \text{ m}^3$ である。通常の有限要素法の場合、最大要素体積と最小要素体積の比は $(1.23 \times 10^{-5} \text{ m}^3) / (1.94 \times 10^{-11} \text{ m}^3) = 6.34 \times 10^5$ となる。一方、分離型連成解法の場合、この比は $(1.23 \times 10^{-5} \text{ m}^3) / (4.63 \times 10^{-9} \text{ m}^3) = 2.66 \times 10^3$ および $(6.66 \times 10^{-8} \text{ m}^3) / (1.94 \times 10^{-11} \text{ m}^3) = 3.43 \times 10^3$ となる。このメッシュでは、分離型連成解法を用いることで要素体積比の桁が 3/5 に削減されたことになる。本研究では直接法を用いるが、この特徴は連立一次方程式求解に反復法を用いるときに重要となる。直接法による解析は、最近の計算機と直接法ソルバーの性能ではこの問題程度の数百万自由度数が限界であり、それより大規模な問題に対しては反復法ソルバーが用いられる。分離型連成解法の反復解法には Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値は 10^{-3} 、初期ステップ幅は 0.1 とした。表 4.3 の計算機 1 ノードを使用した。

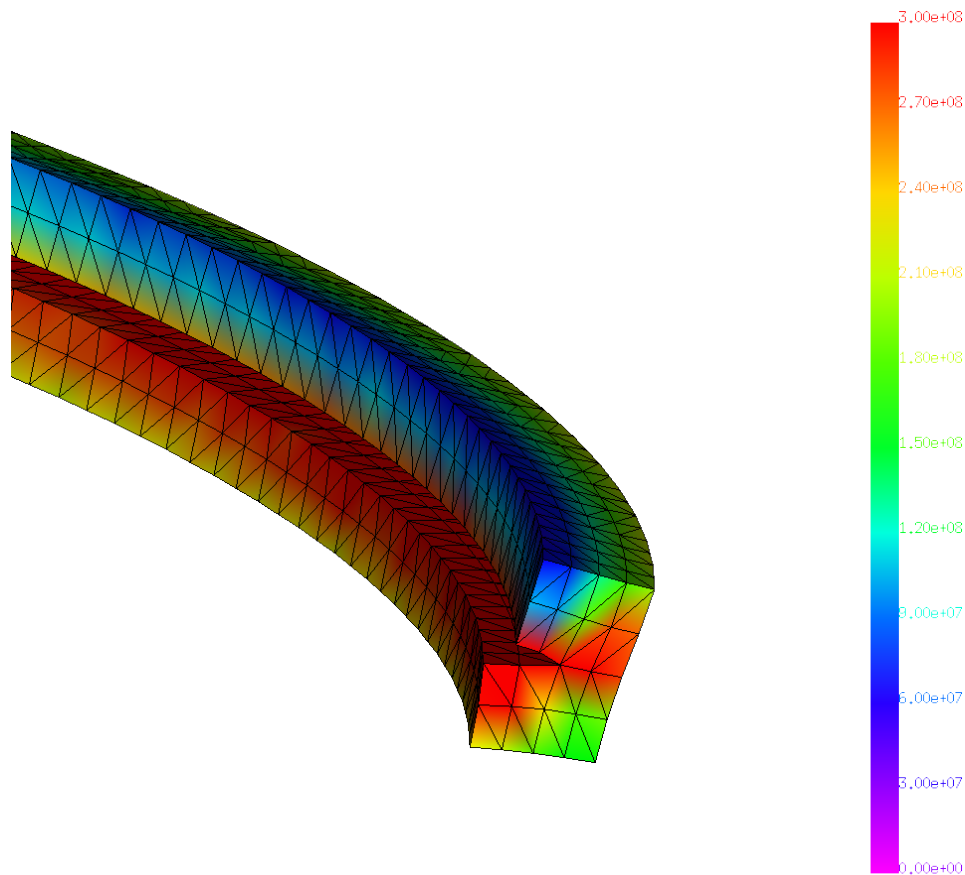


図 4.16 傾斜円埋没き裂付き有限体の三番目のローカルメッシュの解析結果の相当応力分布

表 4.3 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析に使用した計算機

CPU	Intel Core i7-3930K
RAM	DDR3 SDRAM PC3-12800, 64 GB
OS	Debian GNU/Linux

解析結果の von Mises の相当応力分布を図 4.23 に示す。単位は Pa である。変位は 10 倍拡大して可視化されている。これらの図は図 4.20 のメッシュ図に対応する。

図 4.24 に求めた応力拡大係数を示す。横軸がき裂前縁の節点座標の正規化された角度、縦軸が応力拡大係数である。分離型連成解法による解析と通常の有限要素解析の結果はよく一致した。

図 4.25 に分離型連成解法の残差履歴を示す。横軸が反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。8 回の反復回数、つまり連立一次方程式を 9 回求解して収束解を得た。

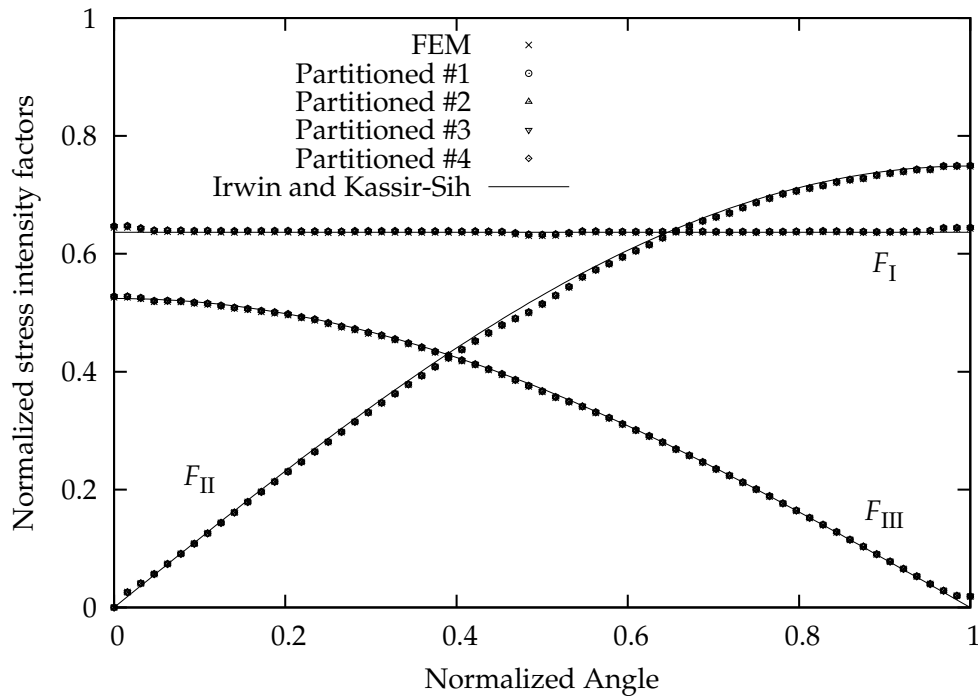


図 4.17 傾斜円埋没き裂付き有限体の解析結果の応力拡大係数

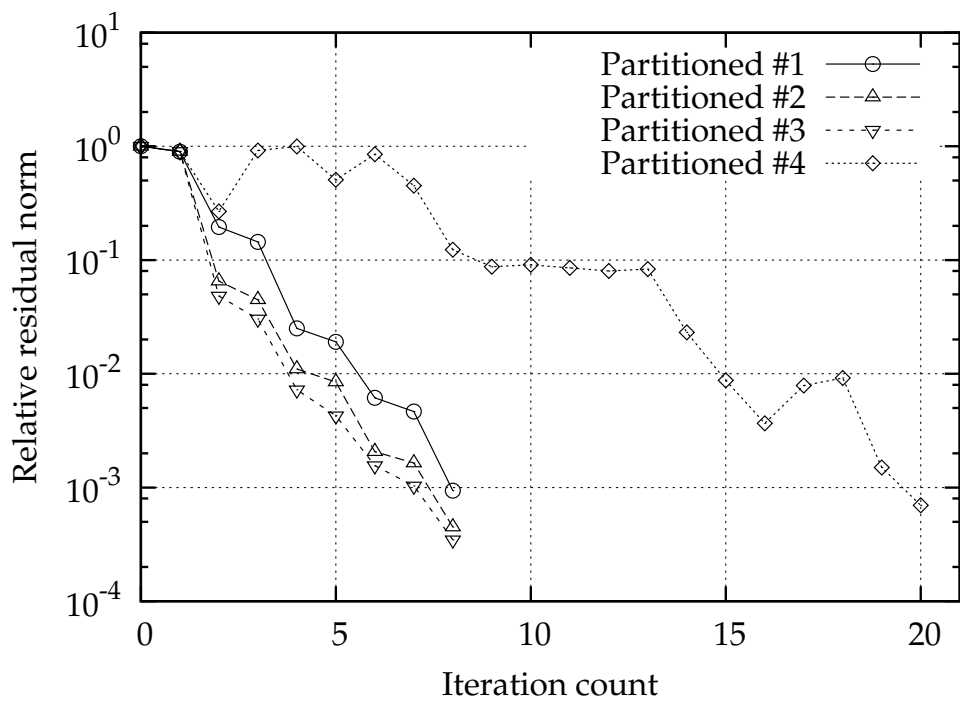


図 4.18 傾斜円埋没き裂付き有限体の解析の収束性

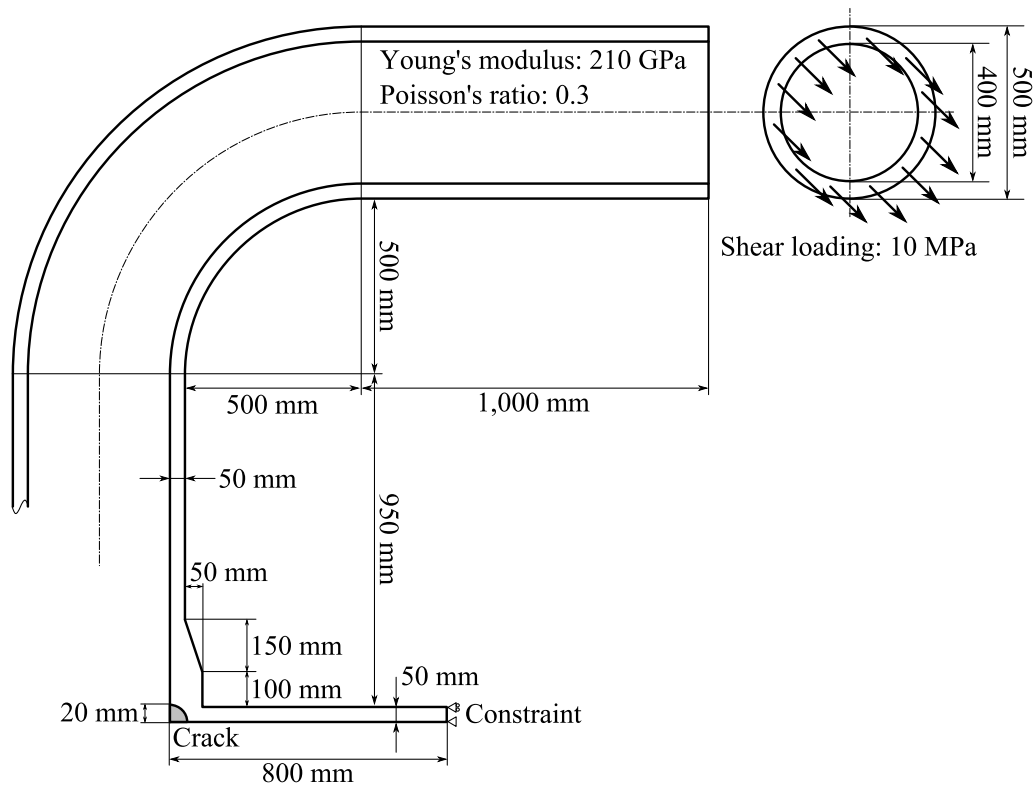


図 4.19 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の寸法・境界条件・材料定数

表 4.4 に計算時間とメモリ使用量を示す。連成反復があるので通常の有限要素解析の方が速いが、分離型連成解法による解析の計算時間もほとんど同程度であることがわかった。計算時間を、剛性行列の生成、行列の LDL 分解、三角求解 (前進・後退代入)、その他の 4 個に分けて整理した。分離型連成解法による解析では行列生成および行列分解が若干速く、三角求解が遅いことが読み取れる。前者は剛性行列が若干小さくなることに由来するものであり、後者は連成反復に由来するものである。分離型連成解法では解析を通じて剛性行列が不変であるため、行列生成および行列分解は 1 回だけで済む。全体の計算時間としては行列分解が支配的であるため、三角求解の遅さはあまり目立たない結果となった。メモリ使用量は分離型連成解法による解析の方が通常の有限要素解析よりも若干少なかった。これは剛性行列が若干小さくなることに由来する。

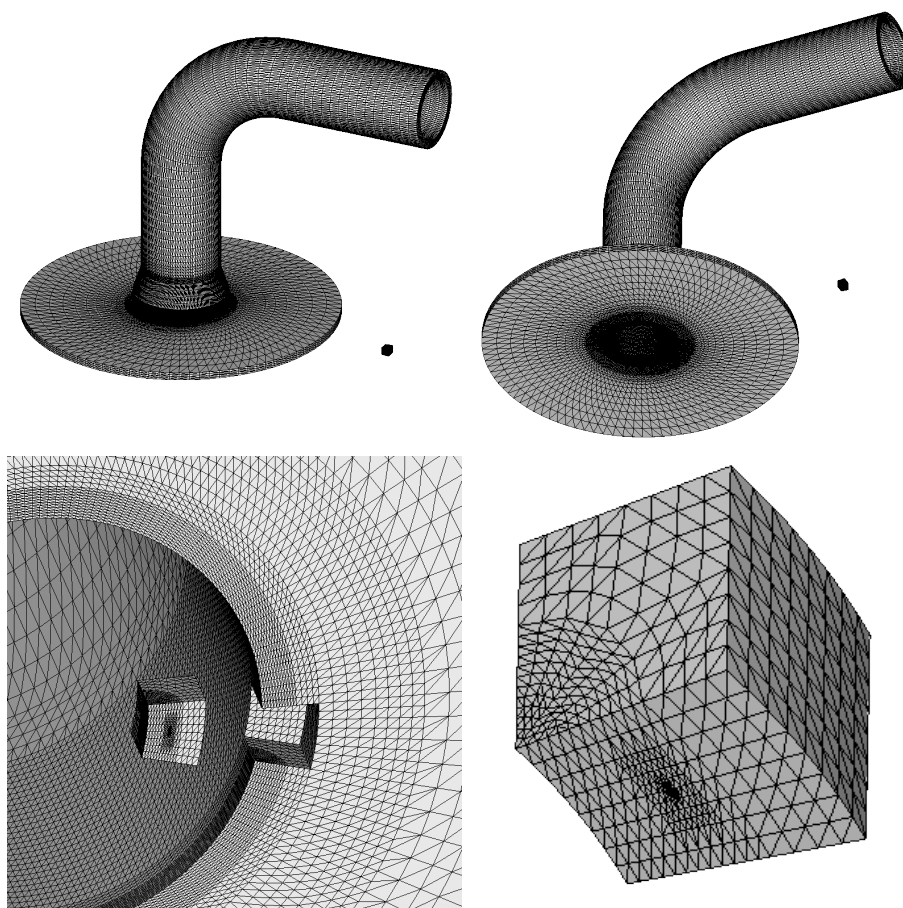


図 4.20 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のメッシュ

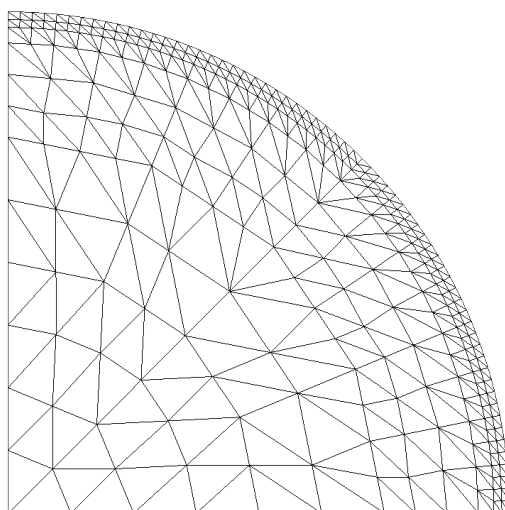


図 4.21 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のき裂面メッシュ

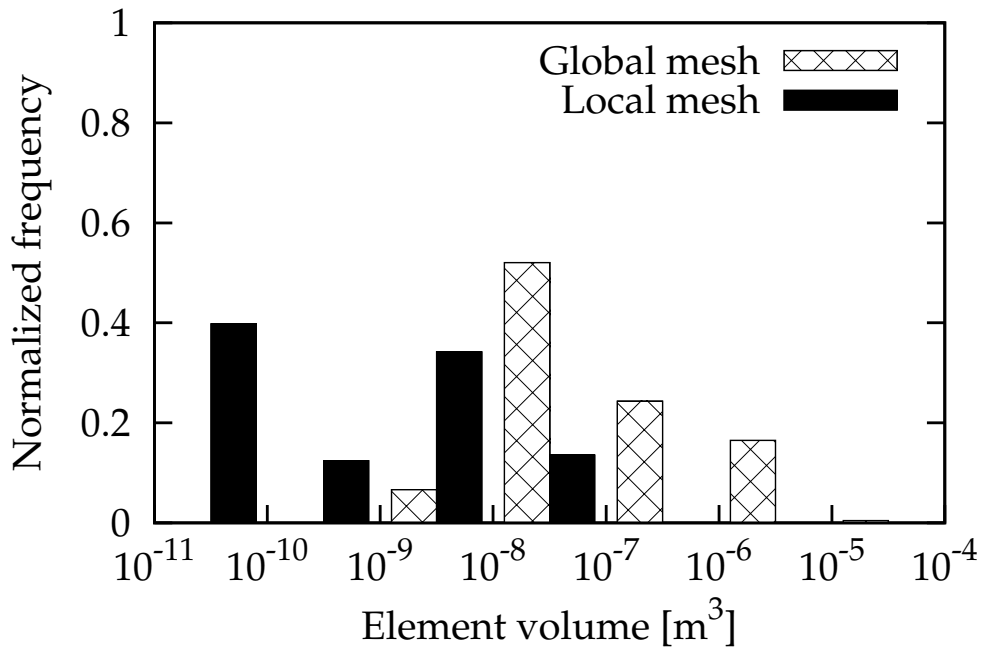


図 4.22 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台のメッシュの要素体積分布

表 4.4 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析の計算時間とメモリ使用量

	Partitioned	FEM
<i>Measured Computation Time</i>		
Total Elapsed Time	1,440 s	1,414 s
Matrix Generation	89 s + 3 s	96 s
Matrix Factorization	1,182 s + 4 s	1,268 s
Triangular Solution	126 s	16 s
Other Processes	36 s	34 s
<i>Measured Memory Usage</i>		
Total Memory Usage	55.2 GB	56.5 GB

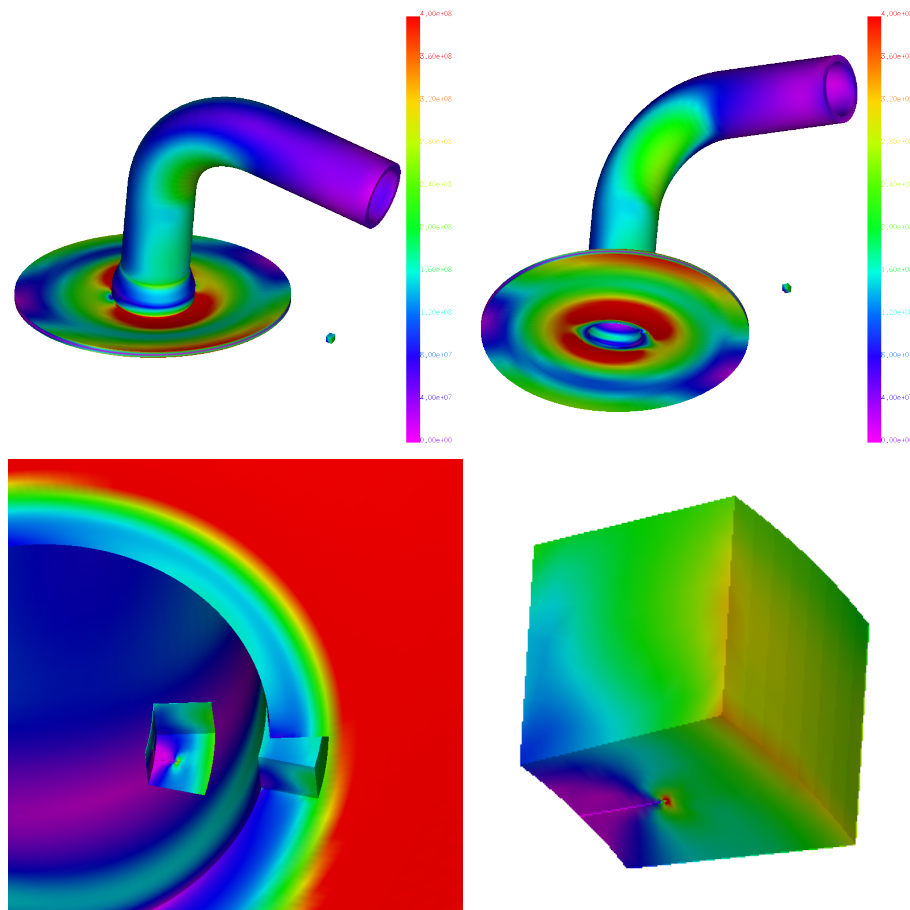


図 4.23 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析結果の相当応力分布

4.5 弾性き裂進展解析

4.5.1 貫通き裂付き三点曲げ試験片の弾性き裂進展解析

破壊力学の理論解があるき裂付き板の三点曲げ問題を解析した。寸法などのモデルのパラメータを図 4.26 に示す。この問題は分離型連成解法のみを用いて解析した。ただし、初期き裂の停止き裂の応力拡大係数を通常の有限要素法で解析し、解の比較の一部に用いた。図 4.27 にメッシュを示す。拡大された中央のメッシュパターンが異なる部分がローカルメッシュであり、そこに初期き裂として貫通切欠が導入されている。グローバルメッシュは 327,168 要素、465,625 節点、1,396,875 自由度である。ローカルメッシュは 47,232 要素、67,475 節点、202,425 自由度である。領域界面は 1,225 節点、3,675 自由度である。有限要素は四面体二次要素である。材料定数は Young 率を

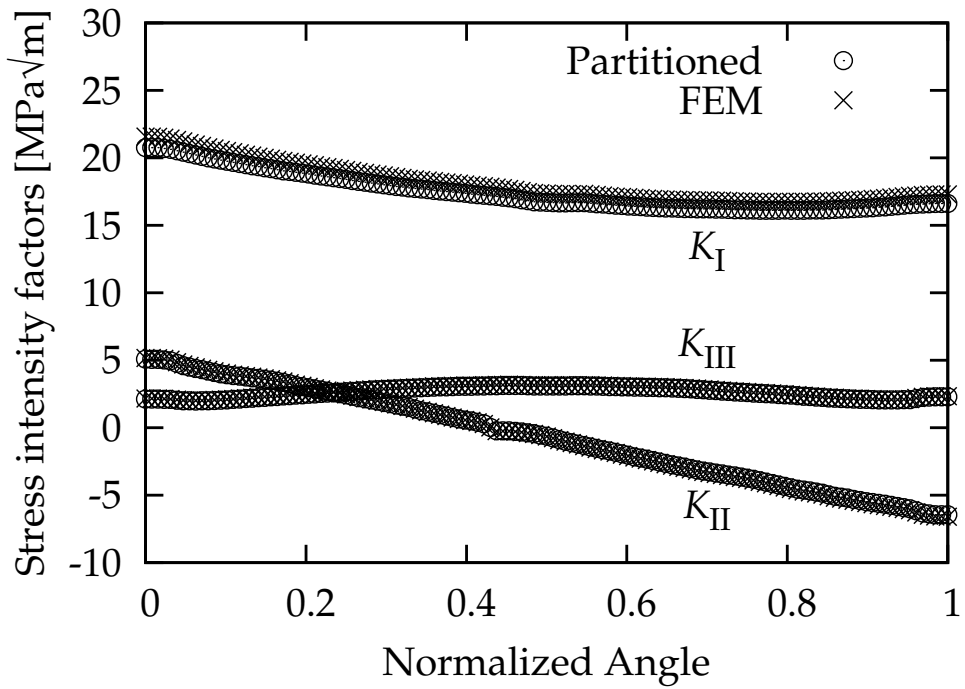


図 4.24 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析結果の応力拡大係数

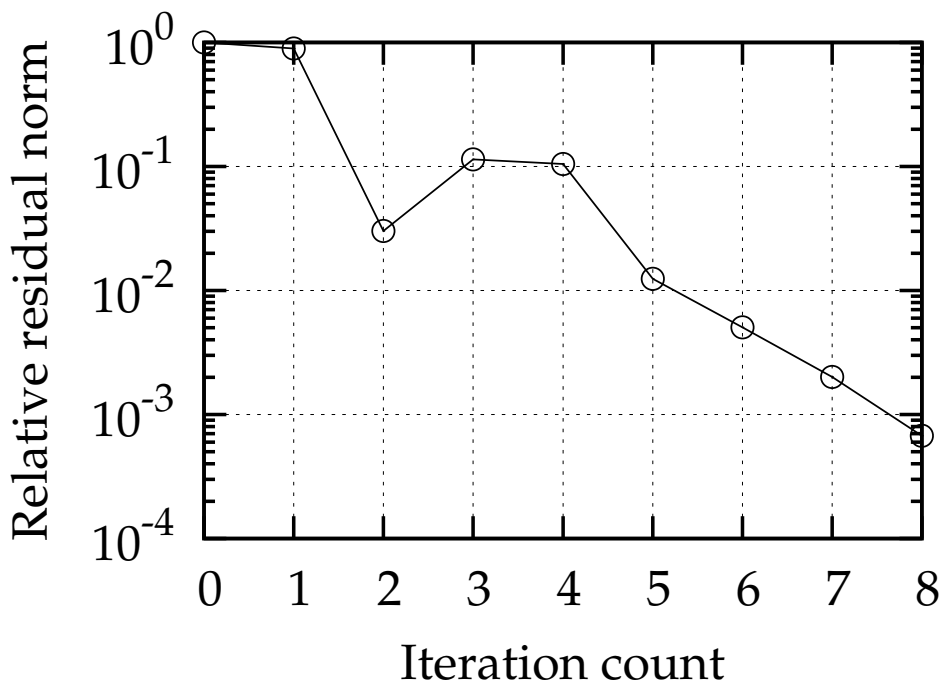


図 4.25 四半円コーナーき裂付き曲配管・管台の解析の収束性

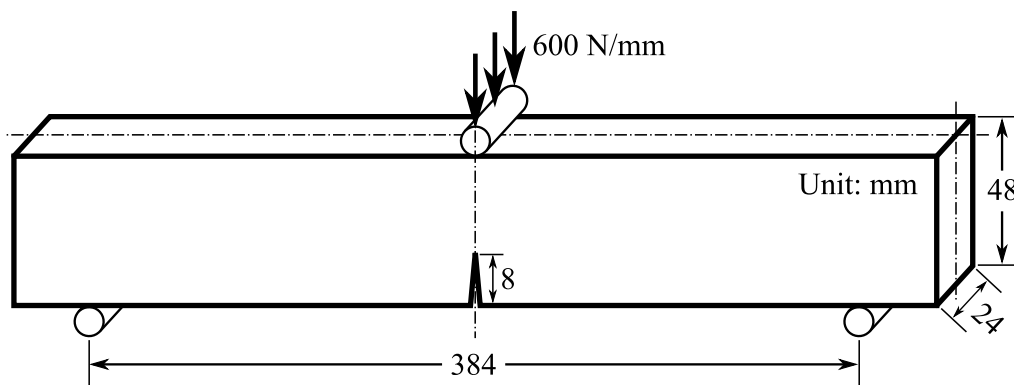


図 4.26 貫通き裂付き三点曲げ試験片の寸法・境界条件

210 GPa、Poisson 比を 0.3、Paris 則の C を 2.05×10^{-12} 、 m を 3.3 とした。1 き裂進展ステップあたりの疲労サイクル数 ΔN を 1,000 とした。き裂進展ステップを 50 ステップ、つまり 50,000 疲労サイクル分の解析を行った。分離型連成解法の反復解法には Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値は 10^{-3} 、初期ステップ幅 $\omega^{(0)}$ は 0.1 とした。初期解は第 1 き裂進展ステップではゼロ、第 2 き裂進展ステップ以降は前のき裂進展ステップの収束解とした。

図 4.28 に第 1 き裂進展ステップの解析結果の von Mises の相当応力分布を示す。変位は 100 倍拡大して可視化されている。領域界面も含めて滑らかな応力分布が得られた。図 4.29 に第 1 き裂進展ステップの解析結果のき裂前縁の応力拡大係数を示す。横軸がき裂前縁節点の板厚方向の座標、縦軸が求めた応力拡大係数 K_I である。応力拡大係数は変位外挿法で求めた。変位外挿法はき裂先端近傍のき裂面上の数個の節点において、

$$u_y = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \kappa) \quad (4.11)$$

を用いて変位 u_y から応力拡大係数 K_I を求め、それをき裂先端からの距離 r がゼロになるまで外挿する方法である。ここで、 G はせん断弾性係数、 π は円周率、 κ は平面ひずみの場合は

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (4.12)$$

である。 ν は Poisson 比である。この図に関してのみ通常の有限要素解析の結果も合わせて示す。この問題は二次元の理論解を有するためそれも合わせて示す。応力拡大

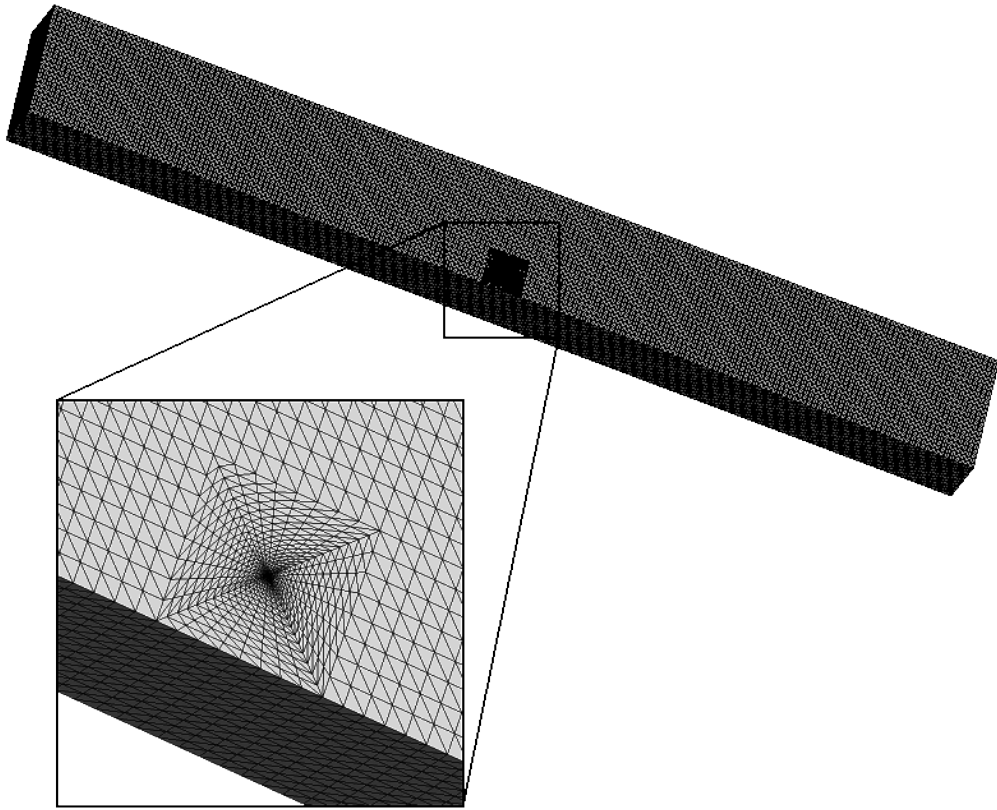


図 4.27 貫通き裂付き三点曲げ試験片のメッシュ

係数 K_I の理論解は

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \quad (4.13)$$

ただし

$$\sigma_0 = \frac{3 SP}{2 W^2} \quad (4.14)$$

であり、 $S/W = 8$ のとき

$$F(\xi) = 1.107 - 2.120\xi + 7.71\xi^2 - 13.55\xi^3 + 14.25\xi^4 \quad (4.15)$$

である。ここで、板幅 $W = 48 \text{ mm}$ 、支点間距離 $S = 384 \text{ mm}$ 、荷重 $P = 600 \text{ N/mm}$ である。 a はき裂長、 π は円周率である。二つの数値解は良く一致し、数値解は理論解に対して三次元的な値を示している。図 4.30 に各き裂進展ステップの解析結果のき裂

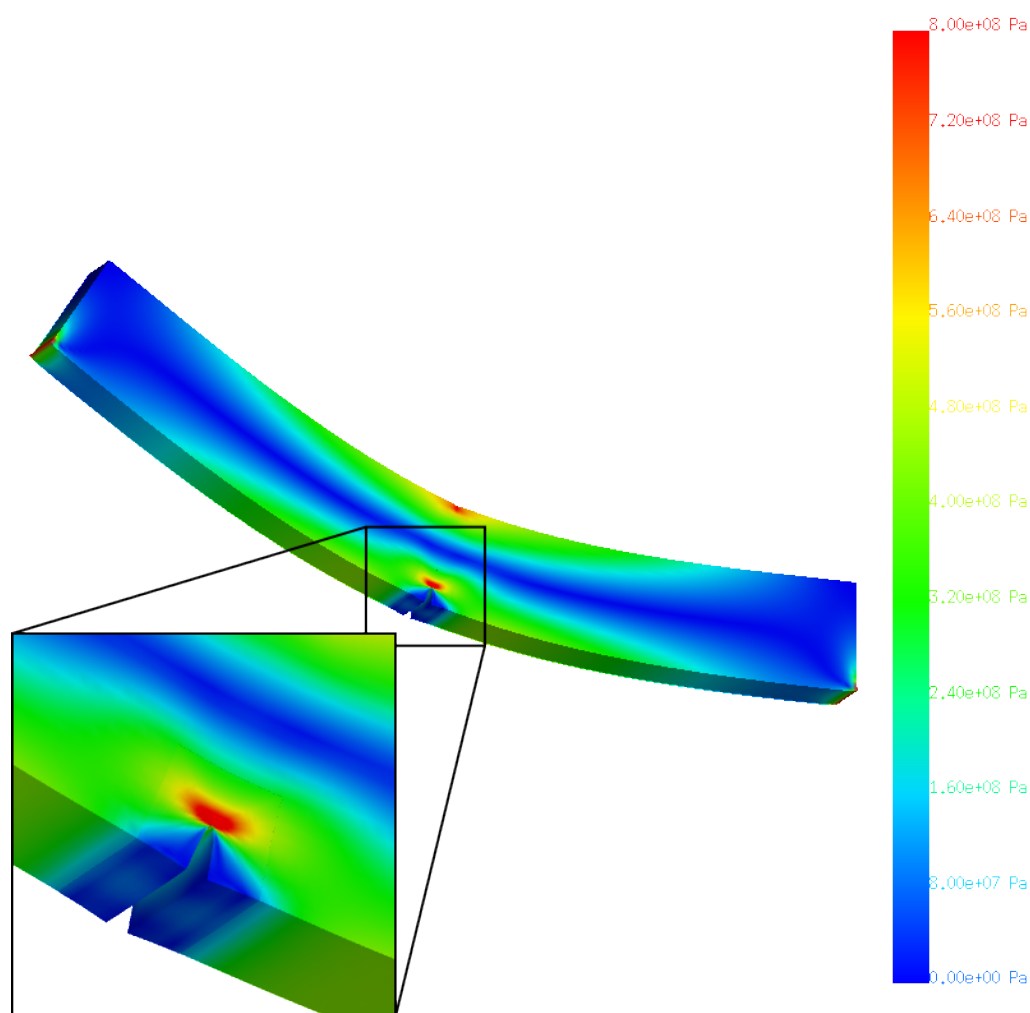


図 4.28 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果の相当応力分布

前縁中央部の応力拡大係数を示す。横軸がき裂長 a 、縦軸が求めた応力拡大係数 K_I である。分離型連成解法による解析結果は理論解と良く一致している。図 4.31 に初期き裂、第 10 き裂進展ステップ、第 20 き裂進展ステップ、第 30 き裂進展ステップ、第 40 き裂進展ステップ、第 50 き裂進展ステップのき裂前縁の形状を示す。横軸がき裂前縁節点の板厚方向の座標、縦軸がき裂長 a である。き裂が安定的に進展していることがわかる。図 4.32 に初期き裂と第 50 き裂進展ステップのメッシュを示す。き裂進展に合わせてローカルメッシュのみが変化していることがわかる。図 4.33 に第 50 き裂進展ステップのき裂前縁近傍のメッシュを示す。斜めの太線の左側は固体の内側から表面メッシュを見たものであり、斜めの太線の右側は自由表面である。

図 4.34 および図 4.35 に分離型連成解法の反復解法の残差履歴を示す。図 4.34 の横

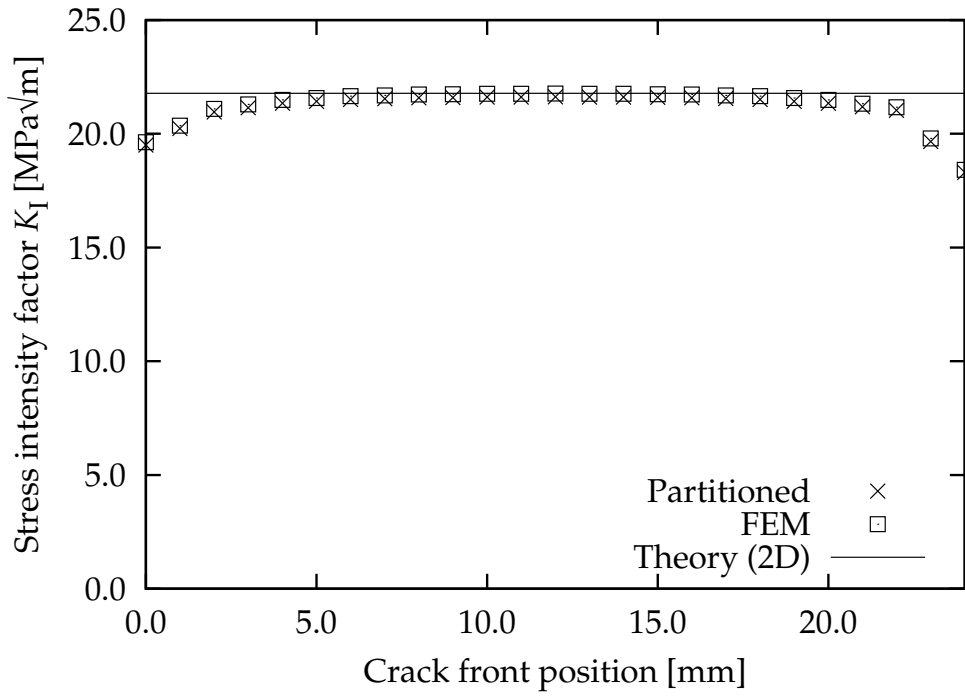


図 4.29 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁の応力拡大係数

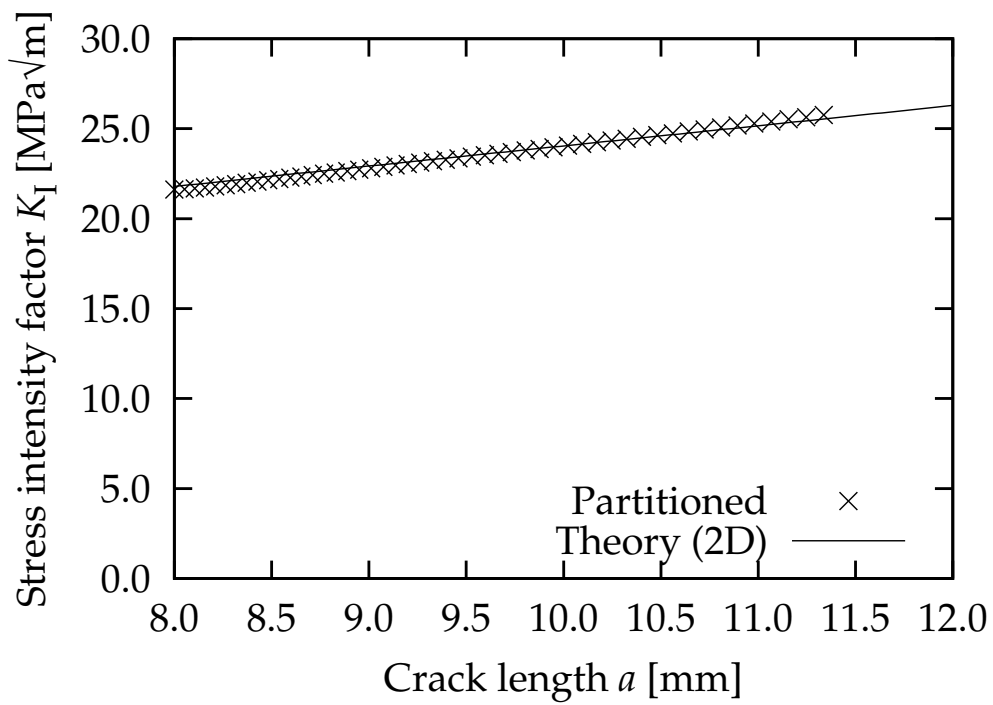


図 4.30 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁中央部の応力拡大係数

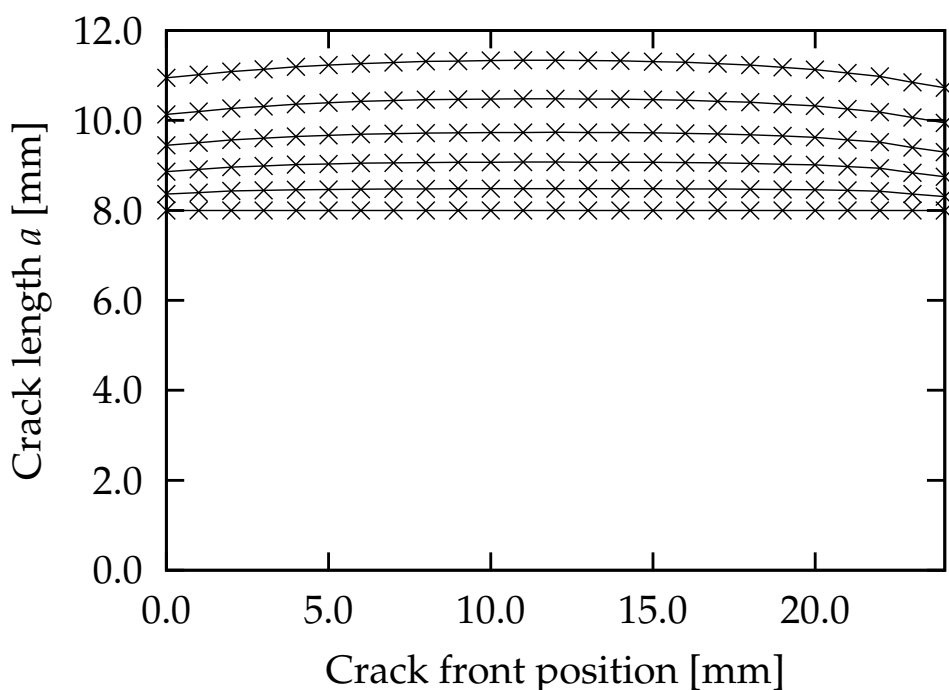


図 4.31 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析結果のき裂前縁形状

軸はき裂進展解析全体を通じた反復回数、図 4.35 の横軸は各き裂進展ステップにおける反復回数、縦軸はともに相対残差ノルムである。使用した反復解法は Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法である。収束判定のしきい値は 10^{-3} である。第 1 き裂進展ステップでは 30 回の反復回数を要したが、第 2 き裂進展ステップ以降は 3 回の反復回数で収束した。これは反復解法の初期解に前のき裂進展ステップの収束解を用いたことに起因する。

4.6 結言

本章では応力拡大係数解析ベンチマークおよび弾性き裂進展解析ベンチマークを示した。三つの応力拡大係数解析ベンチマークのうち一つ目では、Raju-Newman の解 [105] や Newman-Raju の式 [106] で知られる、一様引張载荷を受ける半円表面き裂付き有限平板のベンチマーク問題を解析した。4 種類のメッシュ分割パターンを試し、いずれにおいても十分な精度のモード I 応力拡大係数を求めることができた。ローカルメッシュの形を変えても分離型連成解法の反復解法の反復回数にはそれほど影響がなかったが、領域界面がギザギザになるメッシュ分割を行うと反復回数が多く

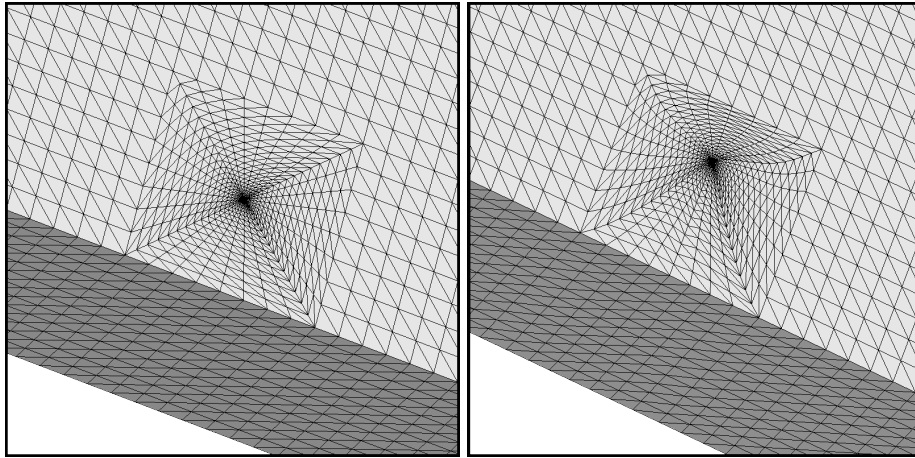


図 4.32 貫通き裂付き三点曲げ試験片のき裂進展前後のメッシュ

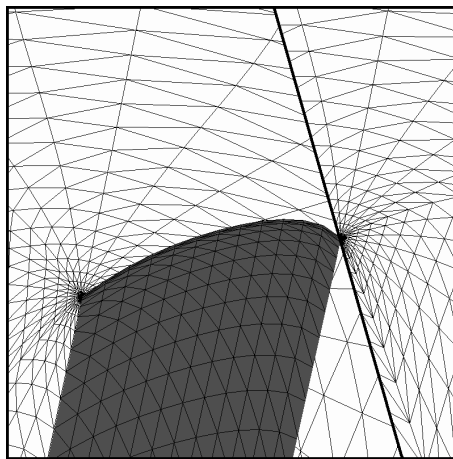


図 4.33 貫通き裂付き三点曲げ試験片のき裂進展後のき裂前縁のメッシュ

なってしまうことがわかった。二つ目のベンチマーク問題は混合モード問題であった。十分な精度のモード I、モード II、モード III 応力拡大係数を得、反復回数も一つ目のベンチマーク問題の結果と同様であった。三つ目のベンチマーク問題は大規模問題であった。300 万自由度規模のき裂付き構造機器モデルを解析し、主に計算時間を調査した。分離型連成解法による解析では連成反復の分だけ連立一次方程式を何度も解く必要があるため、通常の有限要素法よりも計算時間が大きくなった。しかし、連立一次方程式求解に直接法を用いる場合は剛性行列の不変性を利用して、それほど遅くない結果を得た。連立一次方程式求解に反復法を用いる場合の検討としてグローバルメッシュ・ローカルメッシュの要素の体積の分布を調べ、メッシュを分割することで要素体積の分布が狭くなることを確かめた。つまり、分離型連成解法を用いてメッシュを分割することで、剛性行列の性質が良くなることを示した。弾性き裂進展解析ベンチ

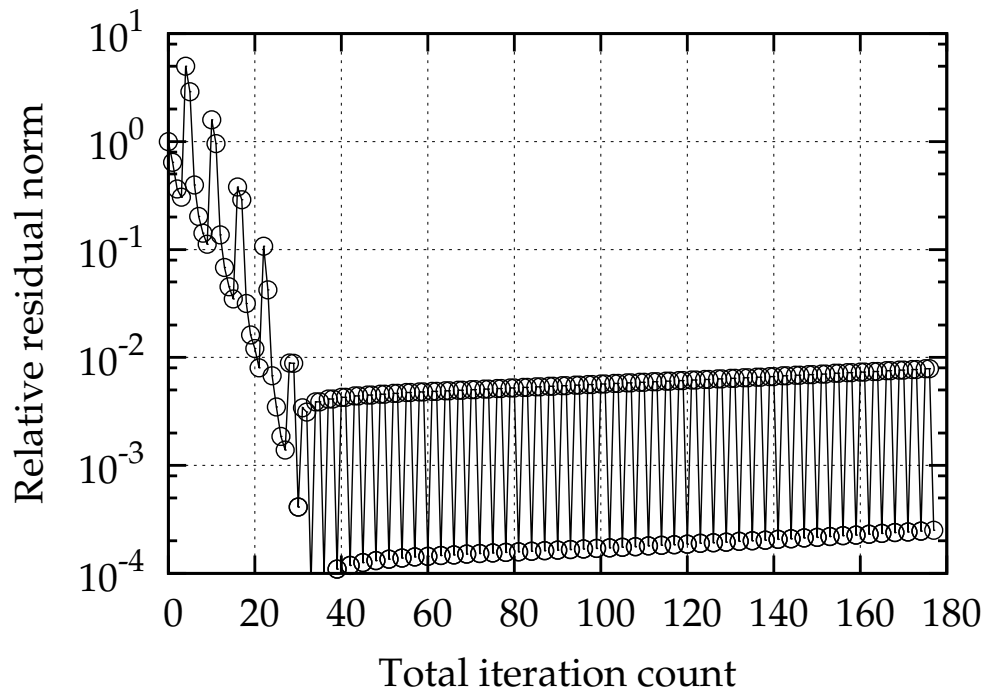


図 4.34 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析の収束性

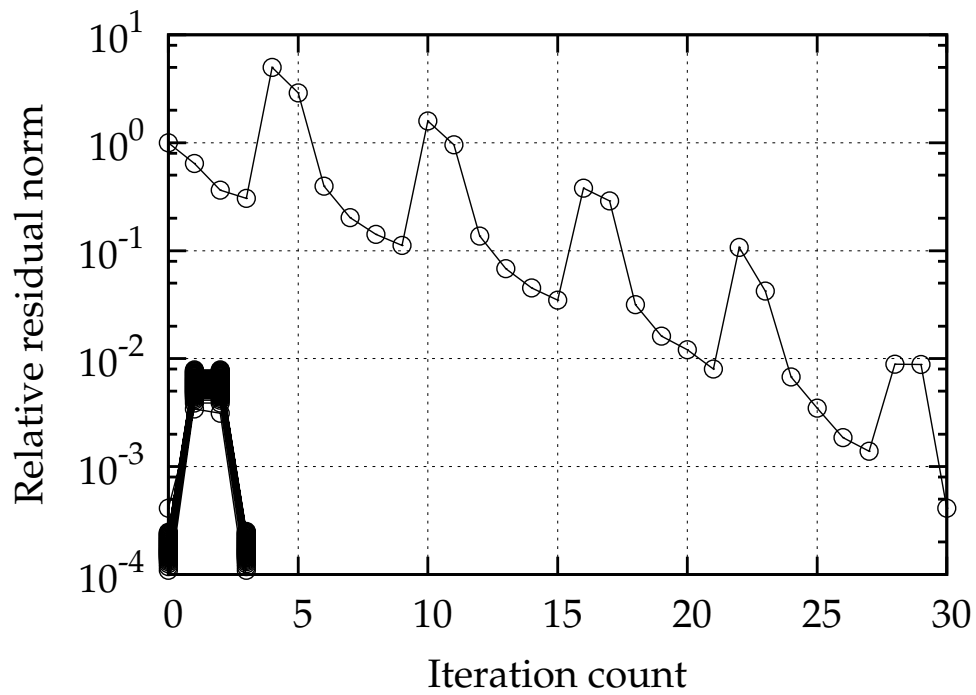


図 4.35 貫通き裂付き三点曲げ試験片の解析のき裂進展ステップ毎の収束性

マークでは、三点曲げ試験片の解析を行った。分離型連成解法を用いることで、き裂進展に伴いローカルメッシュのみを変化させるメッシュ制御のアプローチを示した。このアプローチによって、グローバルメッシュをき裂が存在しないただの弾性体とすることができる。また、分離型連成解法の反復解法の初期解に前のき裂進展ステップの収束解を用いることで、第2き裂進展ステップ以降は非常に少ない連成反復回数で収束解を得ることができた。

第 5 章

非線形固体力学シミュレーション

目次

5.1	緒言	70
5.2	非線形材料モデル	70
5.2.1	弾塑性モデル	70
5.2.2	有限ひずみ弾塑性モデル	71
5.3	弾塑性解析	72
5.3.1	引張荷重下の円孔平板の弾塑性解析	72
5.3.2	引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の移動硬化弾塑性解析	75
5.3.3	き裂付き圧力容器モデルの弾塑性解析	76
5.4	大変形弾塑性解析	89
5.4.1	ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の大変形弾塑性解析	89
5.5	結言	99

5.1 緒言

本章では非線形固体力学解析として弾塑性解析および大変形弾塑性解析のベンチマークを示す。最初に、使用した非線形材料モデルについて説明する。次に、三つの弾塑性解析ベンチマークと一つの大変形弾塑性解析ベンチマークを示す。三つの弾塑性解析ベンチマークのうち一つ目および二つ目は基本的問題、三つ目は大規模問題である。

5.2 非線形材料モデル

5.2.1 弾塑性モデル

使用した微小変形の弾塑性モデル [108–110] について簡単に説明する。弾塑性モデルは、von Mises の降伏条件で降伏して関連流れ則で流れる等方硬化等方材料モデルを実装して用いた。応力・ひずみ曲線には Ludwik 型の式

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + F(\bar{\epsilon}^p)^n \quad (5.1)$$

や Swift 型の式

$$\sigma_y = F(\epsilon_0^p + \bar{\epsilon}^p)^n \quad (5.2)$$

を用いた。ただし、 σ_y は降伏応力、 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみ、 σ_{y0} は初期降伏応力、 F および n は材料定数である。 $\bar{\epsilon}^p = 0$ のとき $\sigma_y = \sigma_{y0}$ であるので

$$\epsilon_0^p = \left(\frac{\sigma_{y0}}{F}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (5.3)$$

である。非線形有限要素法は基本的に増分法と Newton–Raphson 法を組み合わせたものである。応力積分のときに弾性的に試行応力を計算し、降伏曲面から外れた試行応力を降伏曲面上に引き戻すラジアルリターン法 [108,110] を用い、ラジアルリターン法と整合する整合接線剛性行列を用いた。

一部の数値実験では等方硬化則ではなく移動硬化則を用いた。用いた移動硬化則は Prager の線形移動硬化則を自然に拡張した非線形移動硬化則 [110] である。Prager 則では背応力 α の発展則を

$$\dot{\alpha} = H' \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (5.4)$$

と仮定する。 $\dot{\alpha}$ は背応力速度、 $\dot{\varepsilon}^p$ は塑性ひずみ速度、 H' は応力・ひずみ曲線の勾配

$$H' = \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon^p} = \begin{cases} Fn(\bar{\varepsilon}^p)^{n-1} & \text{(Ludwik type)} \\ Fn(\varepsilon_0^p + \bar{\varepsilon}^p)^{n-1} & \text{(Swift type)} \end{cases} \quad (5.5)$$

である。移動硬化弾塑性モデルに対しても同様にラジアルリターン法および整合接線剛性行列を用いた。

5.2.2 有限ひずみ弾塑性モデル

本研究では微小変形弾塑性問題だけでなく幾何学的非線形性を有する大変形弾塑性問題も解析した。使用した有限ひずみ弾塑性モデル [110] について説明する。超弾性構成則と乗算分解に基づくモデルを用いた。このモデルでは変形勾配テンソル F を弾性成分 F^e と塑性成分 F^p の積

$$F = F^e F^p \quad (5.6)$$

と仮定する。構成則には Hencky モデル

$$\tau = \mathbb{C}^e : \varepsilon^e \quad (5.7)$$

を用いた。ただし、 τ は Kirchhoff 応力、 ε^e は弾性 Hencky ひずみ、 \mathbb{C}^e は弾性テンソルである。Hencky ひずみ ε の定義は

$$\varepsilon = \ln V \quad (5.8)$$

である。ただし、 V は左ストレッチテンソルである。左極分解

$$F = VR \quad (5.9)$$

を式 (5.6) に代入して両辺の自然対数を取り、式 (5.8) を代入することで

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (5.10)$$

が得られる。この式はひずみの加算分解そのものであり、微小変形のラジアルリターン法がそのまま利用できることがわかる。

本研究では、この有限ひずみ弾塑性モデルに対して非常に大きい初期降伏応力を設定することで有限ひずみ弾性モデルとした。有限ひずみ弾性モデルは材料非線形性を有さず、幾何学的非線形性を有する。

5.3 弾塑性解析

5.3.1 引張荷重下の円孔平板の弾塑性解析

図 3.1 の 1/8 モデルの分割メッシュを用いて、一様引張荷重を受ける円孔平板の弾塑性解析を行った。解析は分離型連成解法を用いた弾性解析、増分型・サブサイクリング型の分離型連成解法を用いた弾塑性解析、通常の有限要素法を用いた弾性解析・弾塑性解析の計 5 ケースを行った。寸法は板幅が 200 mm、板厚が 20 mm、円孔内径が 20 mm である。引張荷重は 200 MPa である。材料定数は Young 率が 210 GPa、Poisson 比が 0.3、初期降伏応力 σ_{y_0} が 250 MPa、応力・ひずみ曲線が式 (5.1) の Ludwik 型で $F = 1300$ MPa、 $n = 0.45$ である。解析パラメータは増分ステップ数を 9 回、もしくはこれと等価であるように式 (2.26) の巨視的なひずみの増分 $\Delta\varepsilon_{\text{char}}$ を 0.01% とした。Newton-Raphson 法の収束判定のしきい値を 10^{-6} とした。分離型連成解法の反復解法には直線探索なしの記憶制限 Broyden 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値を 10^{-3} 、近似 Jacobi 行列の逆行列の初期値の対角項 α を 0.1 とした。

解析結果の降伏域および変形を図 5.1 に示す。変形は 200 倍に拡大されている。円孔近傍の相当応力を図 5.2 に示す。相当応力は積分点から節点に内外挿された値である。横軸は円孔の縁からの距離であり、円孔中心を通り引張に垂直な面かつ板厚方向中央面が交差する線上の座標である。円孔の縁の座標をゼロとしている。縦軸は引張応力で正規化された相当応力、つまり応力集中係数である。弾性解析では分離型連成解法による解析結果と通常の有限要素解析結果がよく一致した。弾性体の場合は円孔の縁、つまりグラフ横軸がゼロのとき応力集中係数が 3 になることが知られているが、これを基準としたときの分離型連成解法、通常の有限要素法の解析結果の誤差はそれぞれ 3.00×10^{-4} 、 1.89×10^{-4} と十分に小さかった。弾塑性解析では二つの分離型連成解法と通常の有限要素法の三者の解析結果がよく一致した。通常の有限要素法の解析結果を基準としたときの分離型連成解法の解析結果の誤差はそれぞれ 1.07×10^{-5} 、 1.64×10^{-5} と十分に小さかった。

表 5.1 に分離型連成解法の反復解法の反復回数を示す。弾性解析では 11 回であるのに対して、弾塑性解析では増分型の分離型連成解法が増分ステップ毎に 8–11 回、サ

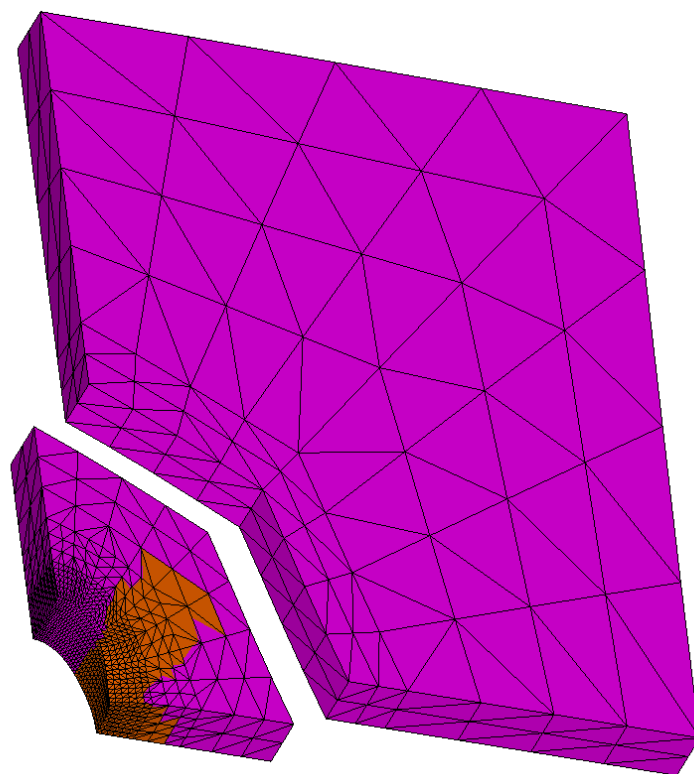


図 5.1 引張荷重下の円孔平板の解析結果の降伏域分布

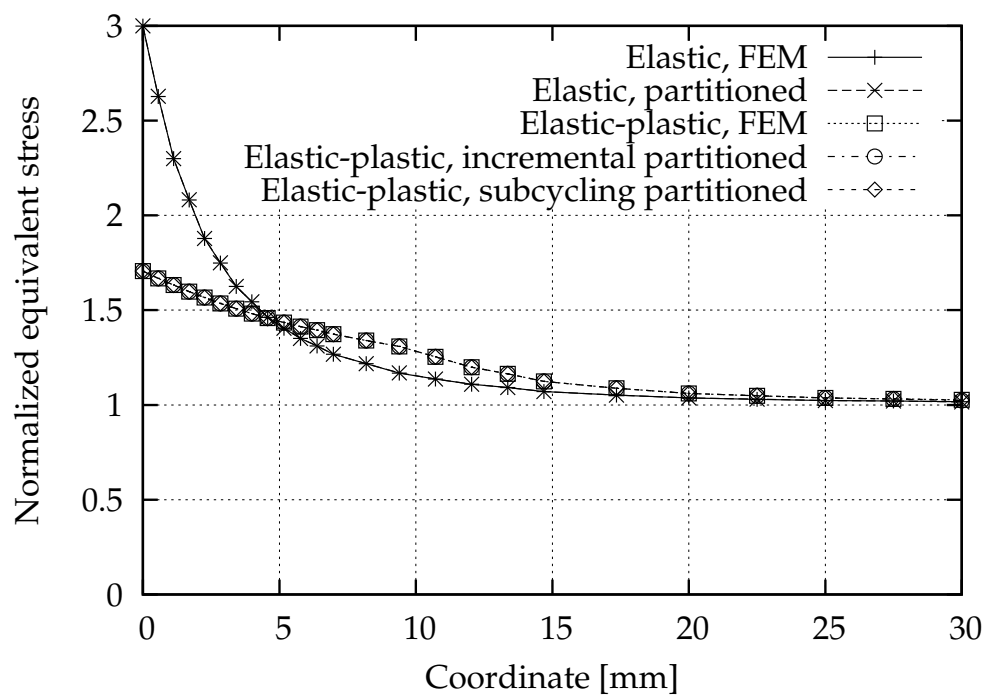


図 5.2 引張荷重下の円孔平板の解析結果の応力集中係数

表 5.1 引張荷重下の円孔平板の解析の連成反復回数

Elastic	N/A	11
Elastic-Plastic	Incremental	11, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 8, 10 (87 in Total)
Elastic-Plastic	Subcycling	14

図 5.3 引張荷重下の円孔平板の解析の解析回数・連立一次方程式求解回数

		Global	Local
Elastic	FEM	1/1	
Elastic	Partitioned	11/11	11/11
Elastic-Plastic	FEM	9/32	
Elastic-Plastic	Incremental Partitioned	87/87	87/255
Elastic-Plastic	Subcycling Partitioned	14/14	111/355

ブサイクリング型の分離型連成解法が 14 回であった。表 5.3 に解析回数および連立一次方程式求解回数を示す。スラッシュの左側の値が Newton-Raphson 法で解かれる解析の回数であり、スラッシュの右側の値が連立一次方程式の求解回数である。線形弾性解析の場合は両者の値は一致するが、弾塑性解析の場合は Newton-Raphson 反復回数の分だけ連立一次方程式が求解される。増分型の分離型連成解法では連成反復の分だけ、総じて通常の有限要素法よりも解析回数・連立一次方程式求解回数が多かった。一方、サブサイクリング型の分離型連成解法では、グローバル解析の連立一次方程式求解回数が 32 回から 14 回に削減されている。その代わりにローカル解析では 32 回から 355 回に増加している。通常の有限要素法では増分ステップ数および Newton-Raphson 反復回数から連立一次方程式求解回数が決まるが、サブサイクリング型の分離型連成解法のグローバル解析では連成反復回数でこれが決まり、ローカル解析では連成反復回数、増分ステップ数、Newton-Raphson 反復回数からこれが決まる。この問題は小規模であるが、大規模解析ではグローバル解析の連立一次方程式求解が計算時間のホットスポットになるため、大規模な連立一次方程式の求解回数を削減できるサブサイクリング型の分離型連成解法が有効である。

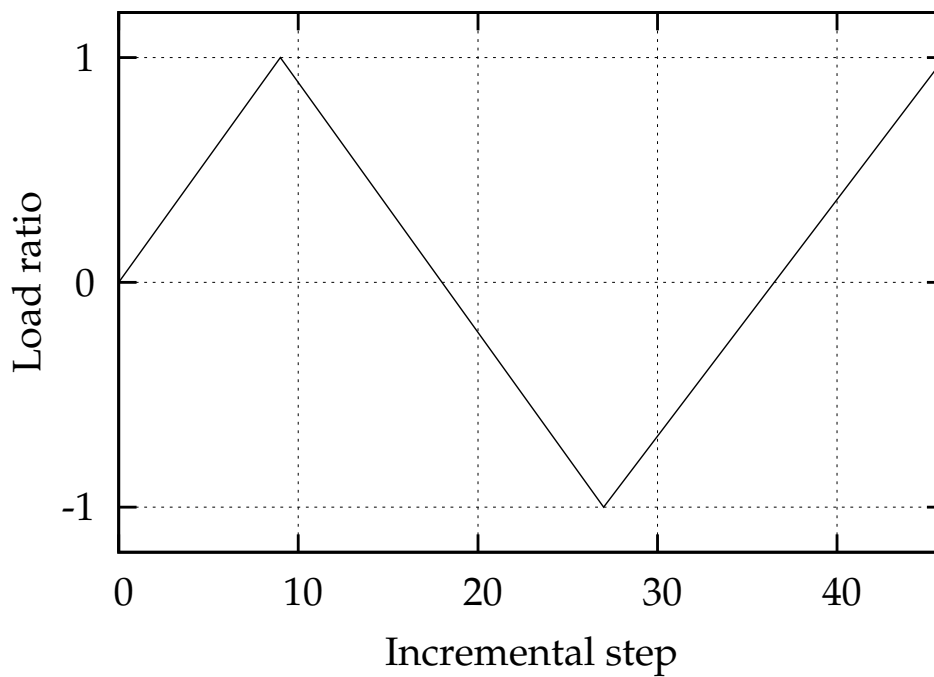


図 5.4 引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の負荷サイクル

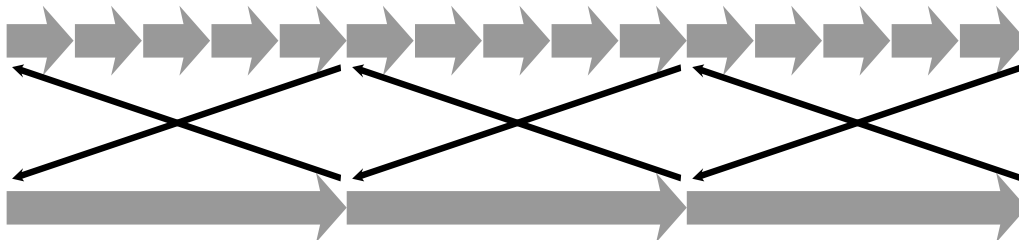


図 5.5 繰り返し繰り返し弾塑性解析時のサブサイクリング型の分離型連成解法

5.3.2 引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の移動硬化弾塑性解析

前小節と同じ解析条件で、移動硬化則を用いて円孔平板の弾塑性解析を行った。解析はサブサイクリング型の分離型連成解法、通常の有限要素法を用いて等方硬化則・移動硬化則の計 4 ケース行った。付与する荷重として、最大荷重を 200 MPa とし、図 5.4 に示すような両振りの負荷サイクルで引張、圧縮、再引張の順に付与した。図の横軸は増分ステップ、縦軸は荷重比である。このとき、サブサイクリング型の分離型連成解法では、図 2.7 ではなく図 5.5 のように負荷サイクルの引張・圧縮が切り替わる度に連成反復を収束させるようにした。

連成反復回数は等方硬化則のときが順に 13 回、14 回、14 回、移動硬化則のときが順に 13 回、15 回、15 回と大差がなかった。図 5.6 に解析結果の相当応力分布を示す。変形は 200 倍拡大されている。上図から順に、最初の最大引張荷重時、最大圧縮荷重時、二回目の最大引張荷重時の解析結果である。図 5.7 に二回目の最大引張荷重時の応力集中係数を示す。横軸が円孔の縁からの距離であり、縦軸が応力集中係数である。移動硬化則を用いたときの解析結果は等方硬化則を用いたときと比べて低い応力を示した。サブサイクリング型の分離型連成解法と通常有限要素法の解析結果は、等方硬化則・移動硬化則それぞれにおいてよく一致した。

5.3.3 き裂付き圧力容器モデルの弾塑性解析

日本原子力研究開発機構の高温工学試験研究炉 [111] の形状を参考にして作成した圧力容器モデルにき裂を導入して解析した。解析は通常有限要素法、増分型の分離型連成解法、サブサイクリング型の分離型連成解法を用いて計 3 ケース行った。モデルの寸法と境界条件を図 5.8 に示す。管台部に周方向の 18° の貫通き裂を導入した。図 5.9 にメッシュを示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。上左図および上右図が全体図、中央左図が上部ヘッドの図、中央右図が下部ヘッド・スカート・管台・配管の図、下左図および下右図が管台の図である。図 5.10 にメッシュの断面図を示す。上左図が全体図、上右図が上部ヘッドの図、下左図が下部ヘッド・スカート・管台・配管の図、下右図が管台の図である。図 5.11 に分割されたメッシュを示す。上左図が管台の図であり、き裂近傍が繰り抜かれている。上右図、下左図および下右図がローカルメッシュである。メッシュが密になっている部分がき裂先端である。グローバルメッシュは 1,308,720 要素、2,117,000 節点、6,351,000 自由度である。ローカルメッシュは 54,710 要素、80,066 節点、240,198 自由度である。グローバルメッシュとローカルメッシュの自由度数の比は 26:1 である。領域界面は 960 節点、2,880 自由度である。材料定数は Young 率を 210 GPa、Poisson 比を 0.3、初期降伏応力を 250 MPa とした。応力・ひずみ曲線は式 (5.1) の Ludwik 型とし、 $F = 1300$ MPa、 $n = 0.45$ とした。解析パラメータは増分ステップ数を 11 回、もしくはこれと等価であるように式 (2.26) の巨視的なひずみの増分 $\Delta\varepsilon_{\text{char}}$ を 0.01% とした。Newton-Raphson 法の収束判定のしきい値を 10^{-6} とした。分離型連成解法の反復解法には直線探索なしの

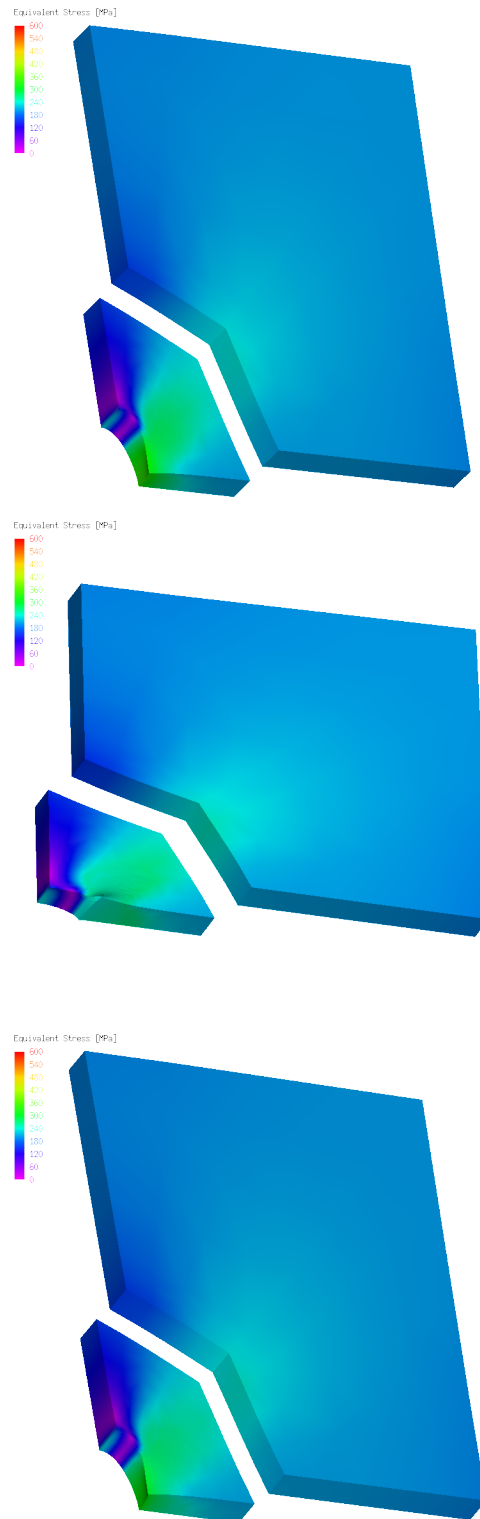


図 5.6 引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の解析結果の相当応力分布 (最大引張荷重時・最大圧縮荷重時・二回目の最大引張荷重時)

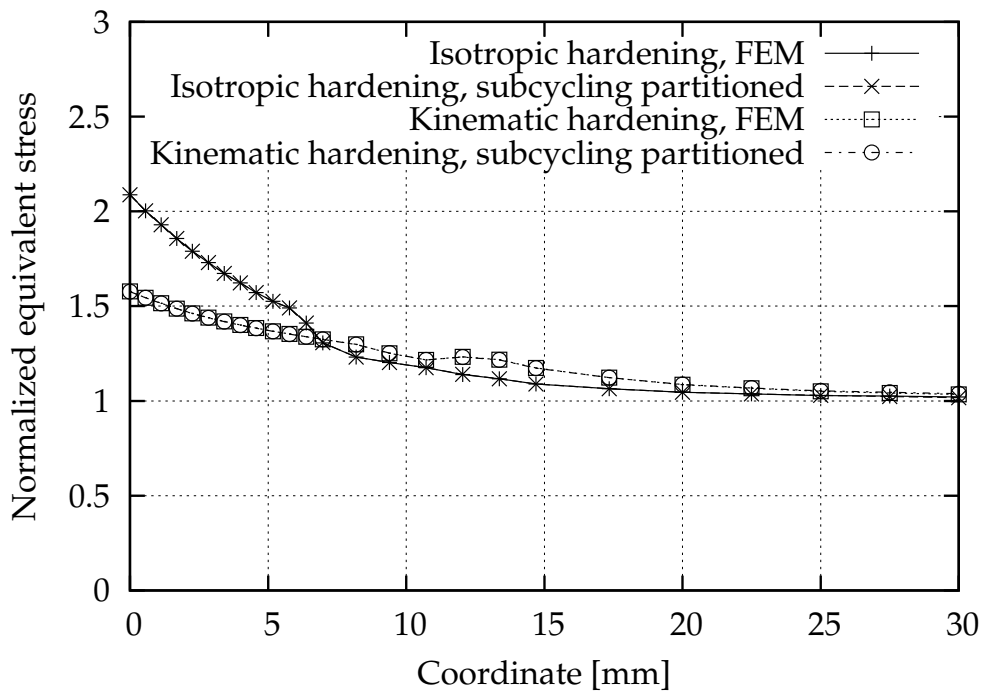


図 5.7 引張・圧縮繰り返し荷重下の円孔平板の解析結果の応力集中係数

記憶制限 Broyden 法を用いた。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値を 10^{-3} とした。近似 Jacobi 行列の逆行列の初期値の対角項 α を 0.1 とした。

サブサイクリング型の分離型連成解法の解析結果の von Mises の相当応力分布を図 5.12 に示す。変形は 100 倍拡大されている。上左図は全体図、上右図は下部ヘッド・スカート・管台・配管の図、中央左図は管台の図、中央右図は管台のグローバルモデル・ローカルモデルが分割された図、下左図および下右図はローカルモデルの図である。図 5.13 に断面図を示す。上左図が全体図、上右図が下部ヘッド・スカート・管台・配管の図、下左図が管台の図、下右図が管台のグローバルモデル・ローカルモデルが分割された図である。図 5.14 に通常の有限要素法による解析結果の降伏域分布を示す。左図が管台の図、右図がき裂近傍の図である。図 5.15 にサブサイクリング型の分離型連成解法による解析結果の降伏域分布および相当塑性ひずみ分布を示す。上左図および下左図が降伏域分布、上右図および下右図が相当塑性ひずみ分布である。図 5.14 の右図と図 5.15 の上左図を比較すると降伏域分布がよく一致していることがわかる。図 5.16 にき裂先端近傍の相当応力場を示す。横軸は座標の角度であり、き裂面と同じ面上で板厚方向中央部の一次節点をプロットしている。き裂先端の座標は

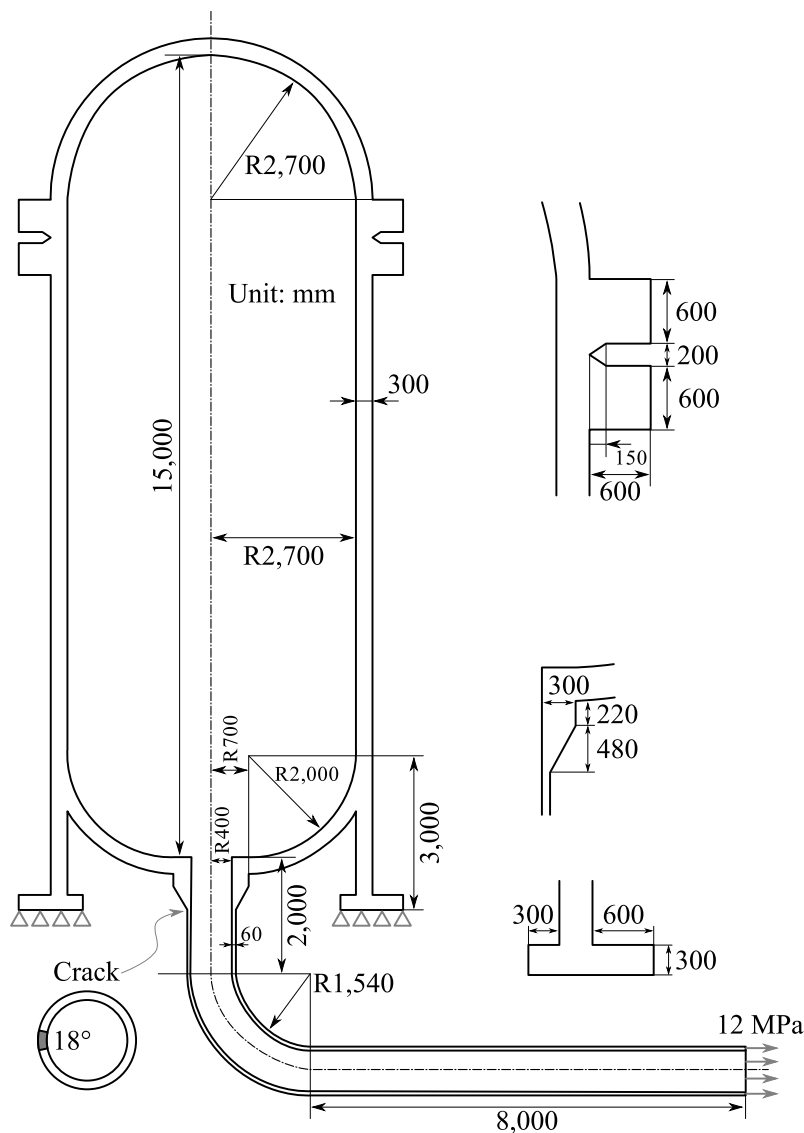


図 5.8 き裂付き圧力容器モデルの寸法・境界条件

9°であり、60°はローカルモデルの端である。縦軸は相当応力である。一次節点上の相当応力は積分点上の相当応力を内外装したものである。通常の有限要素法、増分型の分離型連成解法、サブサイクリング型の分離型連成解法による解析結果がよく一致していることがわかる。図 5.17 に同様の相当塑性ひずみ分布の場を示す。横軸は座標の角度であり、縦軸は相当塑性ひずみである。通常の有限要素法、増分型の分離型連成解法、サブサイクリング型の分離型連成解法による解析結果がよく一致していることがわかる。

Newton-Raphson 法および分離型連成解法の反復解法の性能と連立一次方程式の求解回数を示す。まず図 5.18 に分離型連成解法の反復解法の残差履歴を示す。横軸が

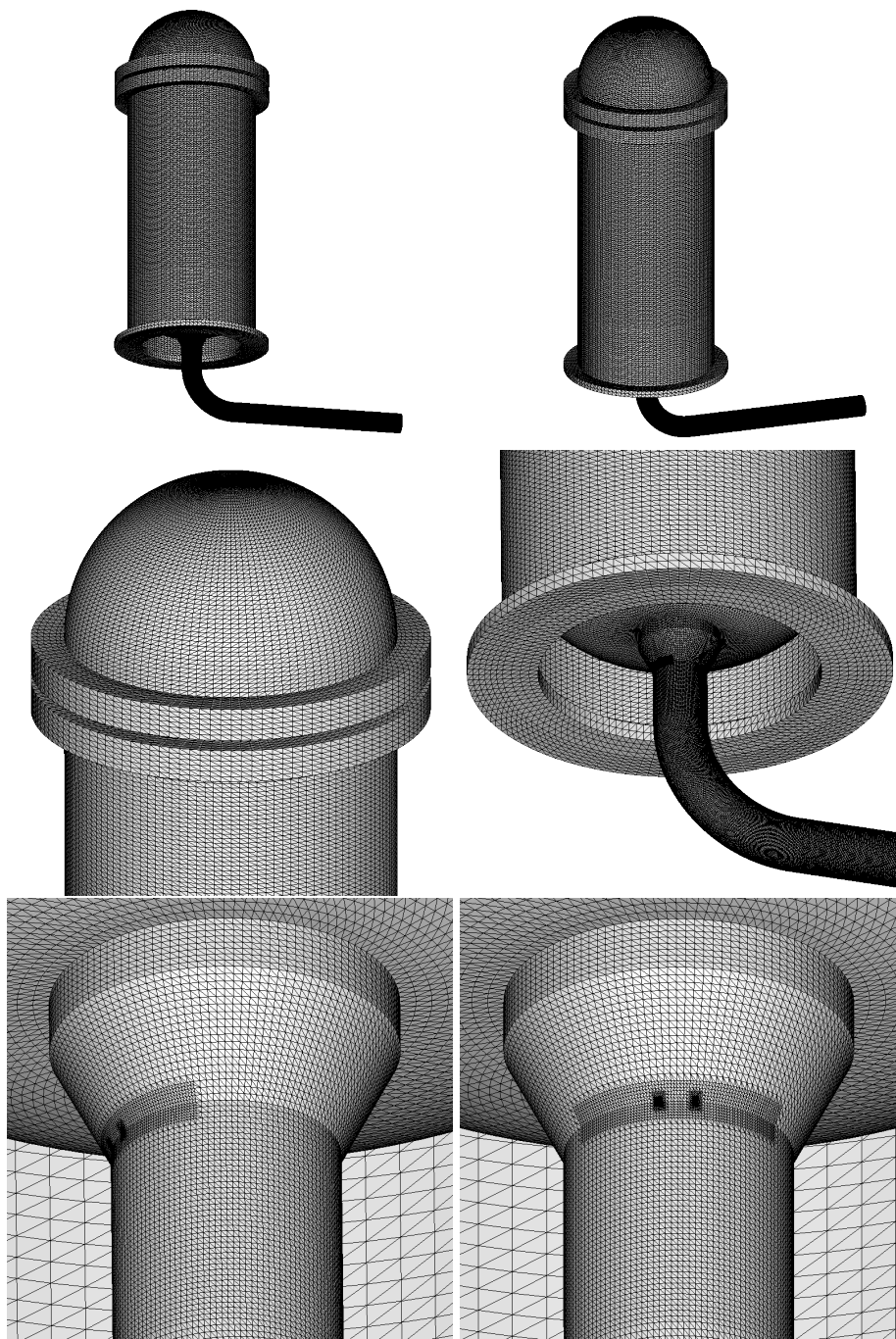


図 5.9 き裂付き圧力容器モデルのメッシュ

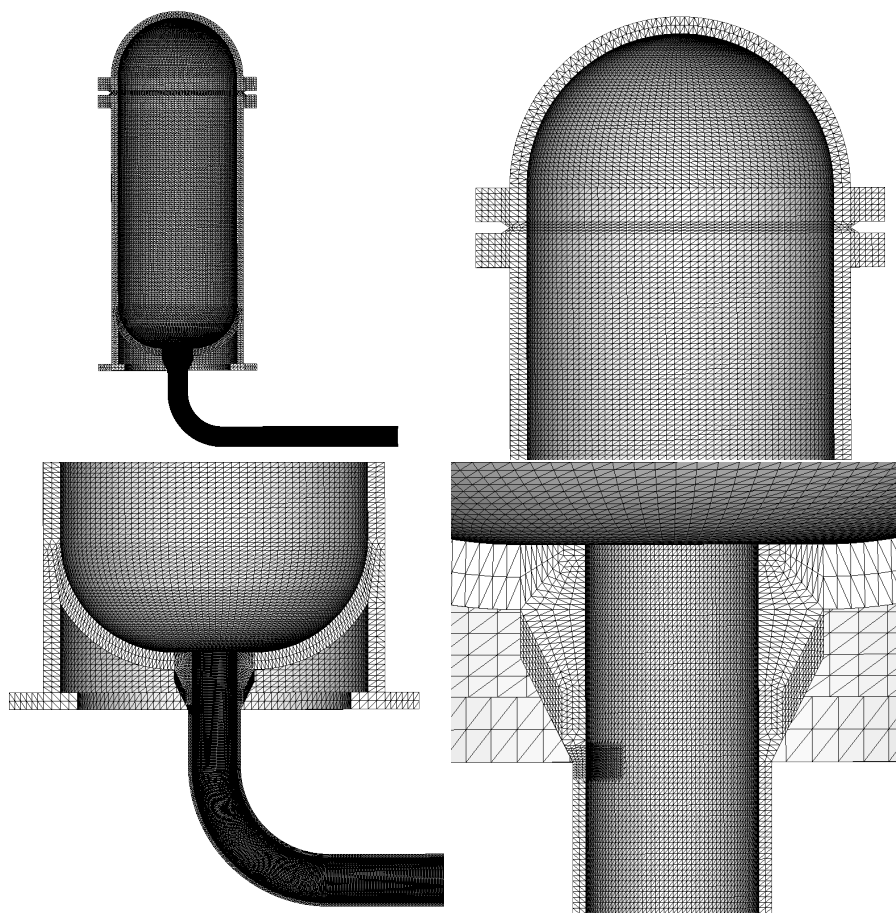


図 5.10 き裂付き圧力容器モデルのメッシュの断面図

反復回数、縦軸が相対残差ノルムである。増分型の分離型連成解法では、増分ステップ数の 11 回だけ反復計算を行っている。一方、サブサイクリング型の分離型連成解法では 1 回だけ反復計算を行っている。増分型よりもサブサイクリング型の方がやや反復回数が多いが、両者ともに問題なく収束している。増分型の分離型連成解法において第 0 連成反復ステップの相対残差ノルムが 10^0 にならない理由は、相対残差ノルムの分母を $\|\tilde{\mathbf{u}}_T^{(k)}\|$ にしたからである。増分ステップが進むほど一般に $\|\tilde{\mathbf{u}}_T^{(k)}\|$ は大きい値になる。表 5.2 に連成反復回数および増分ステップ数を示す。通常の有限要素法には連成反復はなく、増分ステップ数 11 は解析者が設定した値である。増分型の分離型連成解法では、解析者が設定した増分ステップ 11 回だけ連成反復が実行され、各連成反復が表中の反復回数で収束している。サブサイクリング型の分離型連成解法では、連成反復回数が 17 回であり、各連成反復ステップにおいて増分ステップ数が式 (2.26) によって決定されている。増分ステップ数は連成反復ステップの最初の方は小

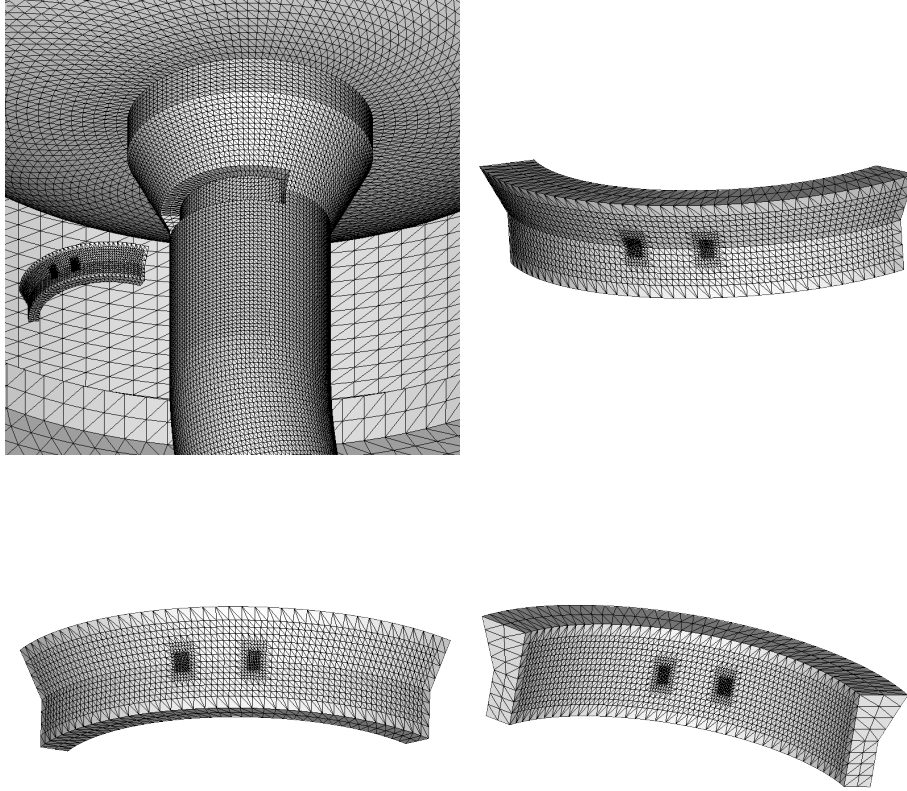


図 5.11 き裂付き圧力容器モデルの分割メッシュ

さい値をとり、連成反復ステップが進むにつれて 11 に収束している。11 より大きい値をとっていないことから、分離型連成解法を適用することによって過大な境界条件が領域界面に付与される事態にはなっていないことがわかる。一般に境界条件の値が大きくなると非線形問題の非線形性が強くなるため、領域界面の仮の境界条件を小さい値に保つことは重要である。表 5.3 に Newton-Raphson 法の反復回数を示す。通常の有限要素法では、応力が降伏域に達していない第 1 増分ステップを除き、3、4 回の Newton-Raphson 反復で収束解を得ている。増分型の分離型連成解法では、各増分ステップにおいて連成反復が実行され、各連成反復中の Newton-Raphson 反復回数がコンマ区切りで記されている。一部を除き概ね 0-4 回の Newton-Raphson 反復で収束している。サブサイクリング型の分離型連成解法では、各連成反復ステップにおいて増分解析が実行され、各増分ステップ中の Newton-Raphson 反復回数が縦方向に記されている。連成反復ステップの最初の方は増分ステップ数が小さく、徐々に

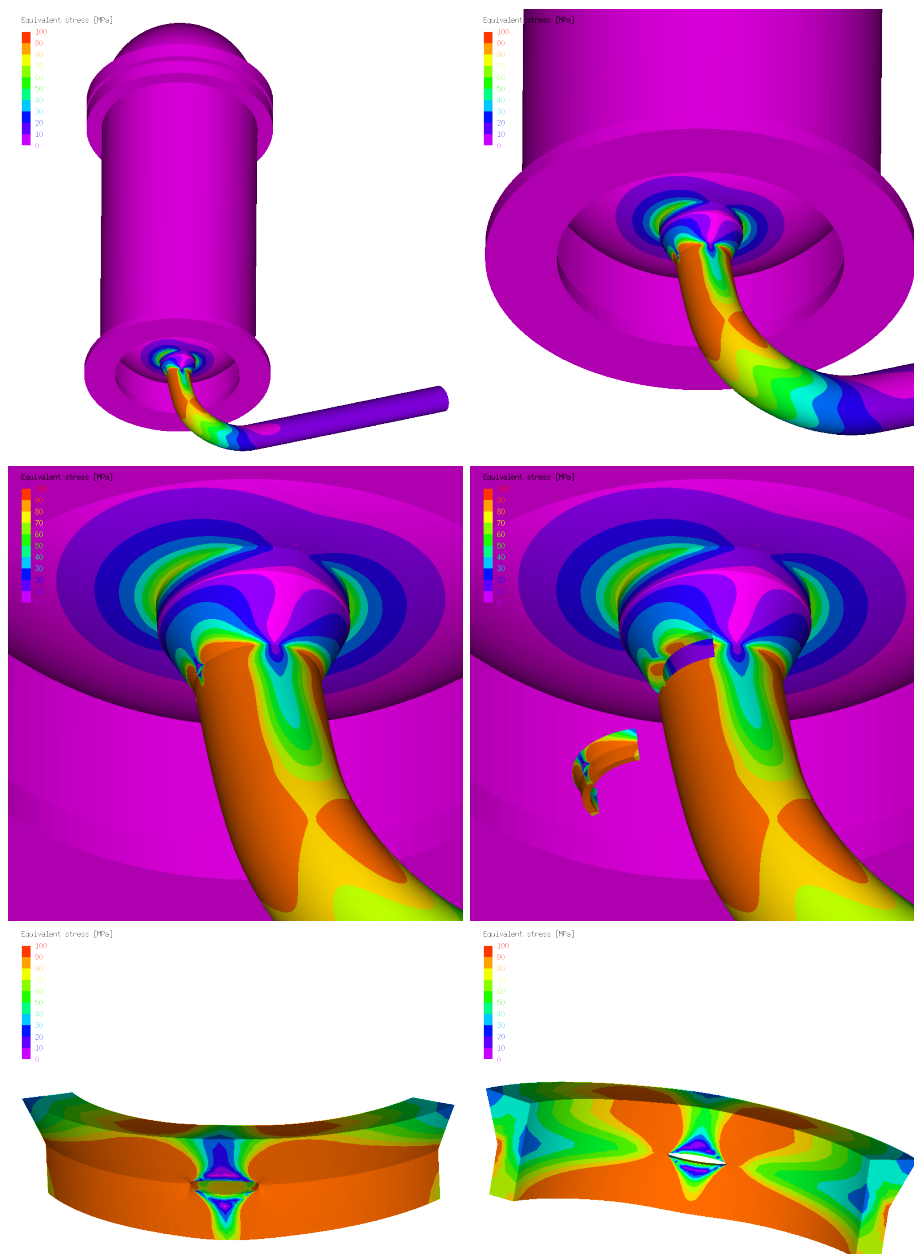


図 5.12 き裂付き圧力容器モデルの解析結果の相当応力分布

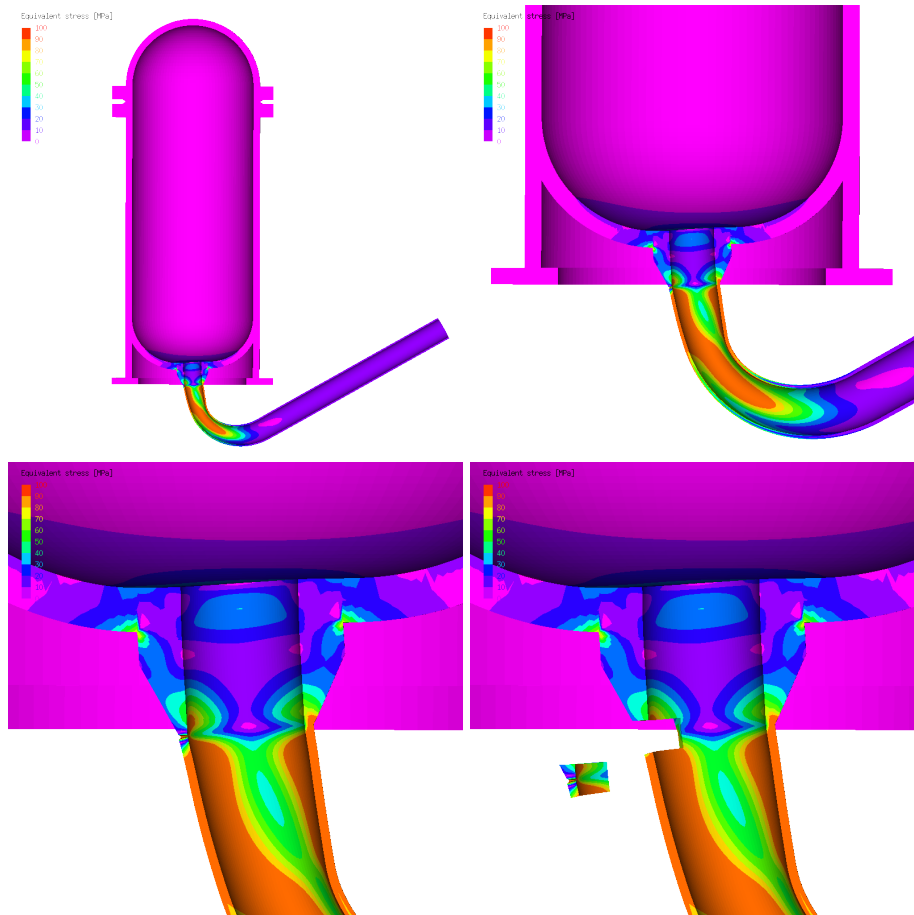


図 5.13 き裂付き圧力容器モデルの解析結果の相当応力分布の断面図

11 に収束している。最終連成反復ステップの Newton-Raphson 反復回数、つまり表の一番右の列は通常の有限要素法の列とほぼ一致している。Newton-Raphson 反復回数は概ね 0-4 であった。表 5.4 に連立一次方程式求解回数を示す。増分型の分離型連成解法を通常の有限要素法と比較すると、グローバル解析・ローカル解析ともに連立一次方程式求解回数が多くなっている。サブサイクリング型の分離型連成解法を通常の有限要素法と比較すると、ローカル解析の連立一次方程式求解回数が増える代わりにグローバル解析の連立一次方程式が削減されている。計算時間の大部分を占める処理は大規模であるグローバル解析の連立一次方程式の求解部分であるので、サブサイクリング型の分離型連成解法を用いることで通常の有限要素法よりも高速に解析を実行できることがわかる。

測定した計算時間およびメモリ使用量を表 5.5 に示す。表 4.3 の計算機 1 ノードを使用した。連立一次方程式求解回数が削減されることでサブサイクリング型の分離型

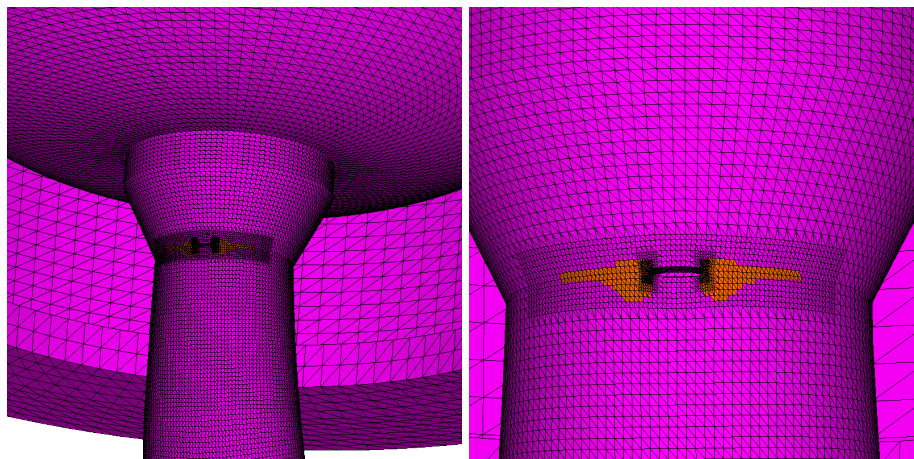


図 5.14 き裂付き圧力容器モデルの通常の有限要素法による解析結果の降伏域分布

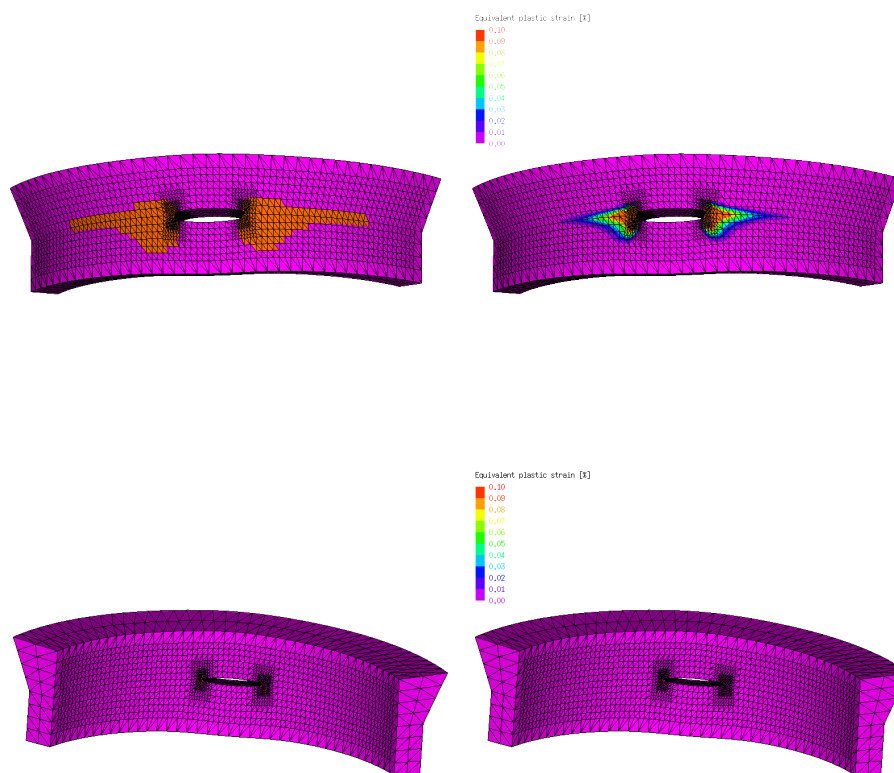


図 5.15 き裂付き圧力容器モデルの解析結果の降伏域分布・相当塑性ひずみ分布

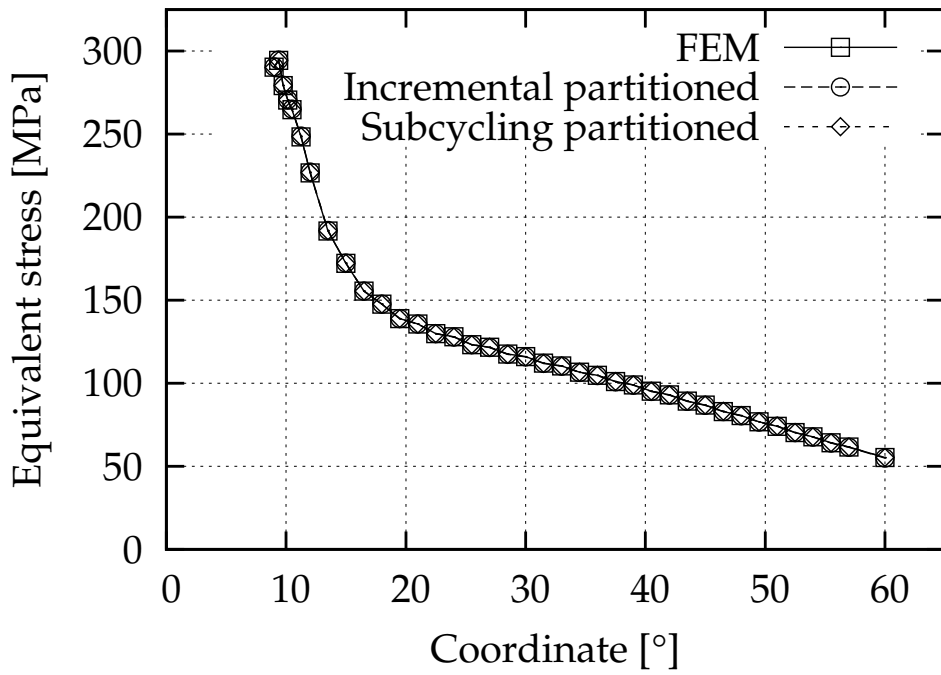


図 5.16 き裂付き圧力容器モデルの解析結果のき裂先端近傍の相当応力の場合

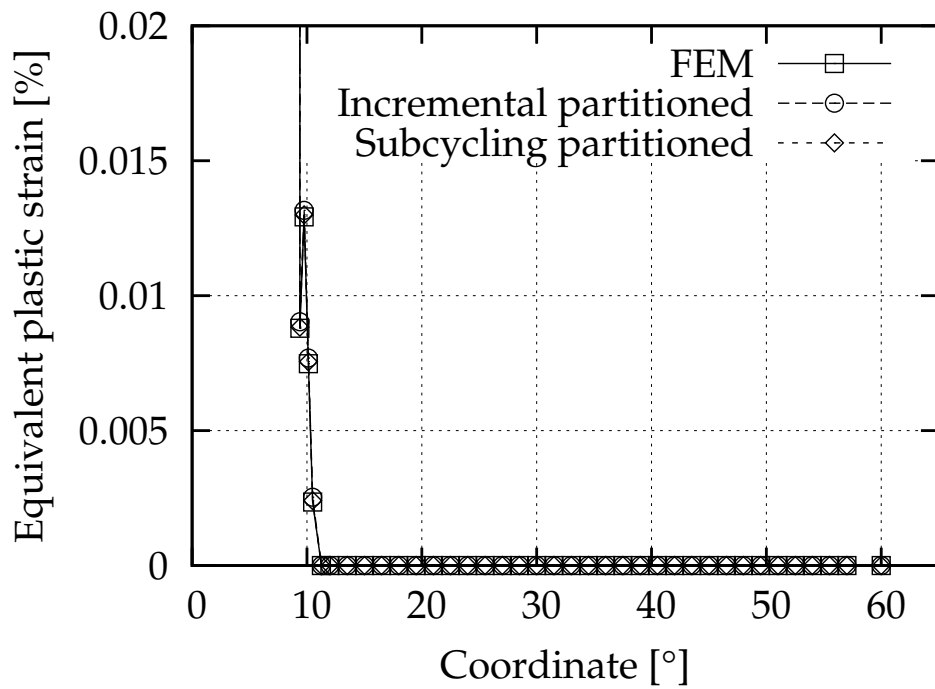


図 5.17 き裂付き圧力容器モデルの解析結果のき裂先端近傍の相当塑性ひずみの場合

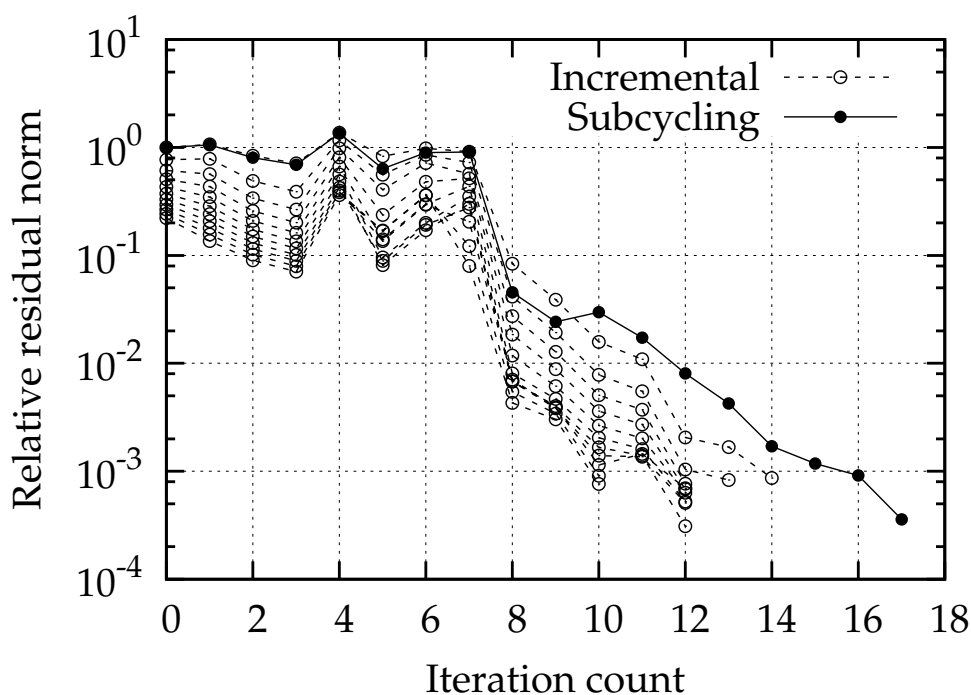


図 5.18 き裂付き圧力容器モデルの解析の収束性

表 5.2 き裂付き圧力容器モデルの解析の連成反復回数・増分ステップ数

FEM	Partitioned Coupling Method	
	Incremental	Subcycling
<i>Numbers of Coupling Iteration Counts</i>		
N/A	14, 13, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 10, 10	17
<i>Numbers of Incremental Steps</i>		
11	11	1, 4, 4, 5, 8, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11

連成解法が通常の有限要素法よりも高速になることが予想されたが、サブサイクリング型だけでなく増分型の分離型連成解法も通常の有限要素法より計算時間が小さかった。通常の有限要素法を基準としたときの高速度率は増分型が 3.40、サブサイクリング型が 3.34 であった。増分型の分離型連成解法が高速になった理由は剛性行列の不変性を利用したからである。計算時間を剛性行列の生成、剛性行列の LDL 分解、三角求解 (前進・後退代入)、応力積分、その他の 5 つに分類し、それぞれの単体の計算時間と回数を示す。計算時間に占める割合も示す。加算記号の左がグローバル解析、右がローカル解析での値である。通常の有限要素法では、その他以外の 4 つの処理すべてが 47 回である。増分型の分離型連成解法では、グローバルモデルが線形弾性体である

表 5.5 き裂付き圧力容器モデルの解析の計算時間・メモリ使用量

	FEM	Partitioned Coupling Method	
		Incremental	Subcycling
<i>Measured Computation Time</i>			
Total Elapsed Time	47,800 s	14,060 s	14,307 s
Speedup	1.00	3.40	3.34
Matrix Generation	114.2 s × 47	113 s + 4.7 s × 531	113 s + 4.6 s × 699
Matrix Factorization	871.7 s × 47	731 s + 13.1 s × 531	732 s + 13.2 s × 699
Triangular Solution	18.0 s × 47	16.4 s × 142 + 0.5 s × 531	16.4 s × 18 + 0.6 s × 699
Stress Integration	5.2 s × 47	2.6 s × 142 + 0.7 s × 531	2.8 s × 18 + 0.2 s × 699
Other	375 s	403 s	97 s
Matrix Generation	11.2%	0.8% + 17.6%	0.8% + 22.7%
Matrix Factorization	85.7%	5.2% + 49.6%	5.1% + 64.3%
Triangular Solution	1.8%	16.6% + 1.9%	2.1% + 2.9%
Stress Integration	0.5%	2.7% + 2.7%	0.3% + 1.1%
Other	0.8%	2.9%	0.7%
<i>Measured Memory Usage</i>			
Total Memory Usage	60.3 GB	58.2 GB	58.2 GB

ル解析の剛性行列がやや小さくなったからである。

5.4 大変形弾塑性解析

5.4.1 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の大変形弾塑性解析

貫通切欠付き円筒試験片のねじり問題の大変形弾塑性解析を行った。解析には通常の有限要素法、増分型の分離型連成解法を用いた。ねじり問題は解が変形経路に大きく依存するため、サブサイクリング型の分離型連成解法は用いなかった。ローカル領域を有限ひずみ弾塑性モデル、グローバル領域を有限ひずみ弾性モデルとしてモデル化した。この数値実験では、本手法の適用可能性の調査、計算結果の精度の比較、反復解法の性能の比較を行った。解析モデルの寸法パラメータを図 5.19 に示す。中央に周方向 60° の貫通切欠が導入されている。片方の面を完全拘束し、もう片方の面に 0.05° ずつ 180° まで強制変位でねじりを与える。メッシュを図 5.20 に示す。メッシュは付録に示す Tegiri Utils で作成した。左図が分割メッシュの全体図、右図が切欠近傍の

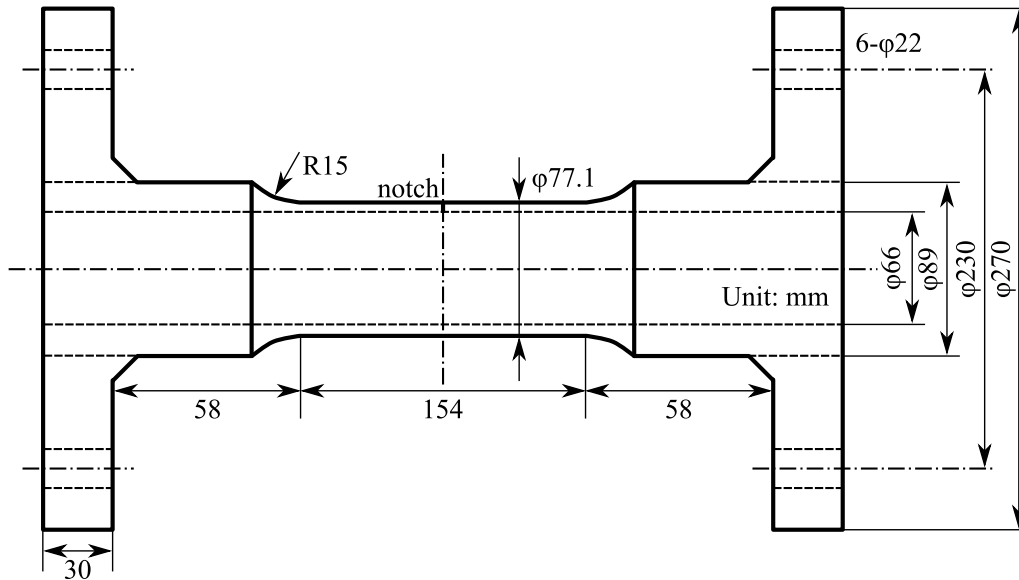


図 5.19 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の寸法

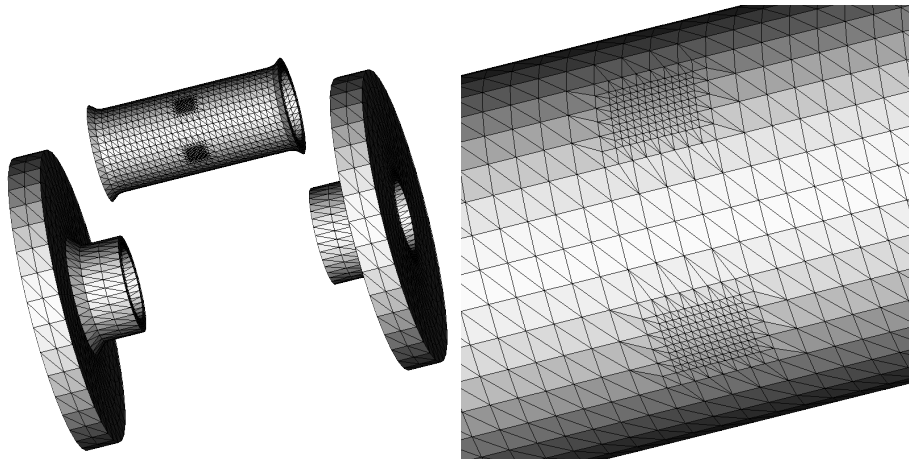


図 5.20 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の分割メッシュと切欠近傍拡大図

拡大図である。左図において、中央の切欠を含む領域がローカルメッシュ、残りの二つの領域がグローバルメッシュである。使用した有限要素は四面体二次要素である。グローバルメッシュが 6,480 要素、11,952 節点であり、ローカルメッシュが 12,852 要素、23,115 節点である。材料定数は Young 率を 203 GPa、Poisson 比を 0.3、初期降伏応力を 280 MPa、応力・ひずみ曲線を式 (5.2) の Swift 型とし、 $F = 860$ MPa、 $n = 0.29$ とした。Newton-Raphson 法の収束判定のしきい値を 10^{-6} とした。分離型連成解法の反復解法の収束判定のしきい値を 10^{-3} とした。

解析結果として、分離型連成解法では、第 768 増分ステップ、つまりねじり角 38.4°

の第2連成反復ステップでグローバル解析の剛性行列が特異になって解析が終了してしまっただけで、これは、連成反復の過程で大きい荷重境界条件が領域境界に付与されて、グローバル領域が幾何学的に崩壊したものと思われる。一方、通常の有限要素法では、第3,600増分ステップ、つまりねじり角 180° まで解析できた。図5.21に通常の有限要素法による解析結果のねじり角 180° 時の相当塑性ひずみ分布を示す。左図が全体図、右図が切欠近傍の拡大図である。相当塑性ひずみがゼロより大きい領域、つまり降伏域が標点間に収まっていることがわかる。切欠先端近傍ではかなりひずみが大きいことが見て取れる。相当塑性ひずみの最大値は約800%であった。図5.22にねじり角 30° までのトルク・ねじり角関係を示す。横軸が強制変位境界条件で与えたねじり角、縦軸が解析結果のトルクである。10増分ステップあたり1点プロットしている。分離型連成解法による解析結果は通常の有限要素法とよく一致している。つづいて、図5.23にねじり角 180° までのトルク・ねじり角関係を示す。50増分ステップあたり1点プロットしている。分離型連成解法による解析が破綻したのはトルクが極大値を取る付近であったことがわかる。トルクの極大値付近より前では、分離型連成解法による解析結果は特に振動などを起こすことなく、通常の有限要素法とよく一致した。しかし、分離型連成解法による解析が破綻する直前のトルクを拡大すると相対誤差0.1%程度の小さい振動が見られた。破綻寸前のトルク・ねじり角関係を図5.24に示す。振動の山の部分が通常の有限要素法による解析結果とよく一致し、谷の部分はそれよりも小さい値となった。これらのトルクはグローバルメッシュの強制変位境界条件を付与した面で計算しているが、ローカルメッシュの領域界面上で計算したトルクとの比較を図5.25に示す。なお、ローカルメッシュの領域界面上のトルクは分離型連成解法のアルゴリズム的に、グローバルメッシュの領域界面上のトルクに一致する。ローカルメッシュの領域界面上で計算されたトルクはグローバルメッシュの境界条件付与面上で計算したトルクよりも振幅が小さく、位相が逆になっていることがわかる。図5.26に各連成反復ステップにおけるローカルメッシュの領域界面上で計算したトルクを示す。グリッド上の点が収束解である。実線が収束解を結んだ線であり、点線が各連成反復ステップにおける解を結んだ線である。この図を見ると、解析が破綻する寸前では二つの収束パターンが繰り返されていたことがわかる。一つ目のパターンでは小さい値から連成反復が始まり、徐々に値が大きくなり、第2連成反復ステップで収束している。二つ目のパターンでは大きい値から連成反復が始まり、第1連成反復

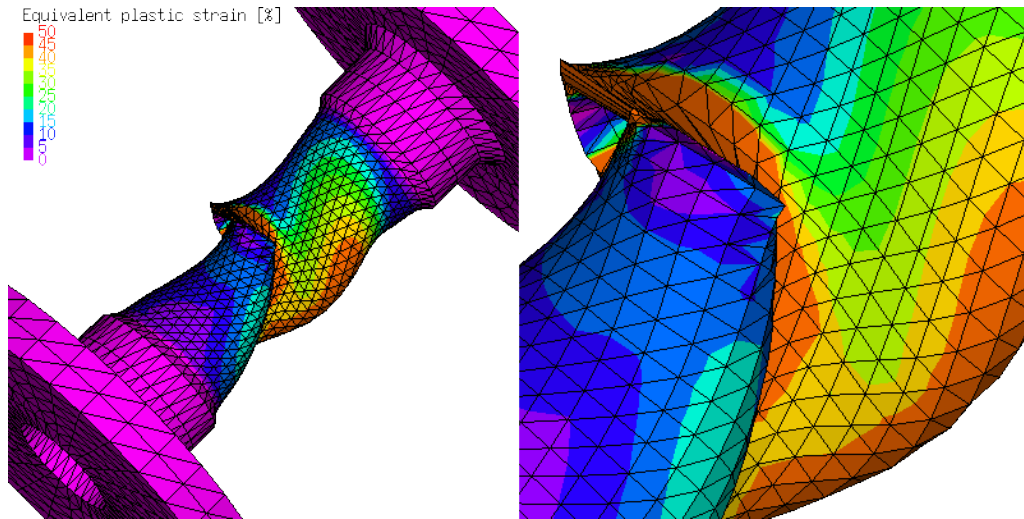


図 5.21 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の通常の有限要素法による解析結果の相当塑性ひずみ分布

ステップでやや値が大きくなり、第 2 連成反復ステップで値が小さくなって収束している。解析が破綻したのは、ねじり角 38.4° 時における後者のパターンの第 2 連成反復ステップであった。図 5.27 に各連成反復ステップにおけるグローバルメッシュおよびローカルメッシュの領域界面上で計算した平均ねじれ角増分を示す。横軸がねじり角、縦軸が平均ねじれ角増分である。平均ねじれ角増分は、変位増分の長さを半径で除した値を計算し、対象とする面上の各節点での値の平均を計算したものである。実線は強制変位境界条件として与えたねじり角増分である。グローバルメッシュの領域界面上では実線から始まり大きめの値で収束しているのに対して、ローカルメッシュの領域界面上ではゼロから始まり実線よりやや大きい値で収束している。両者が一致しないのは、両者の間に近似 Jacobi 行列を介した関係があるからである。解析が破綻したねじり角 38.4° 直前においても同様の傾向で収束解が得られている。同様にして、横軸のねじり角を 0° からにして収束解のみをプロットしたグラフを図 5.28 に示す。グローバルメッシュの領域界面上の平均ねじれ角増分が徐々に大きくなっていることがわかる。また、ローカルメッシュの領域界面上の平均ねじれ角増分も徐々にやや大きくなっていることがわかる。しかし、領域界面のねじれ角やトルクを調査するアプローチでは解析破綻の決定的な原因を見出すことができなかった。

つづいて、メッシュ分割を変更するアプローチで調査を行った。図 5.29 に異なる二つのメッシュ分割とその解析結果の降伏域分布を示す。左図はこれまでと同じメッ

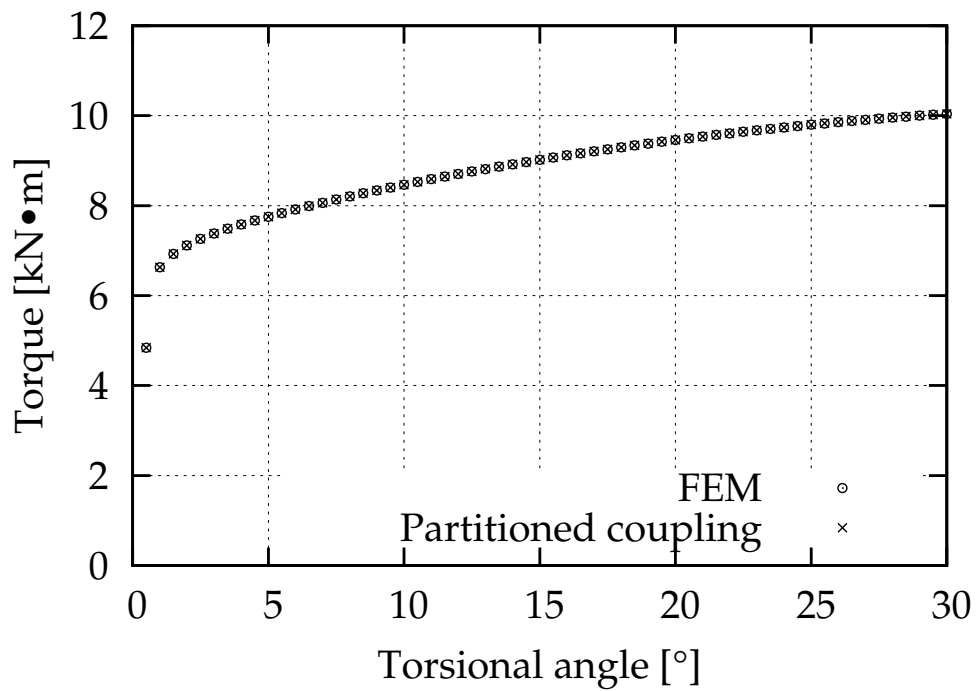


図 5.22 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 30° までのトルク・ねじり角関係

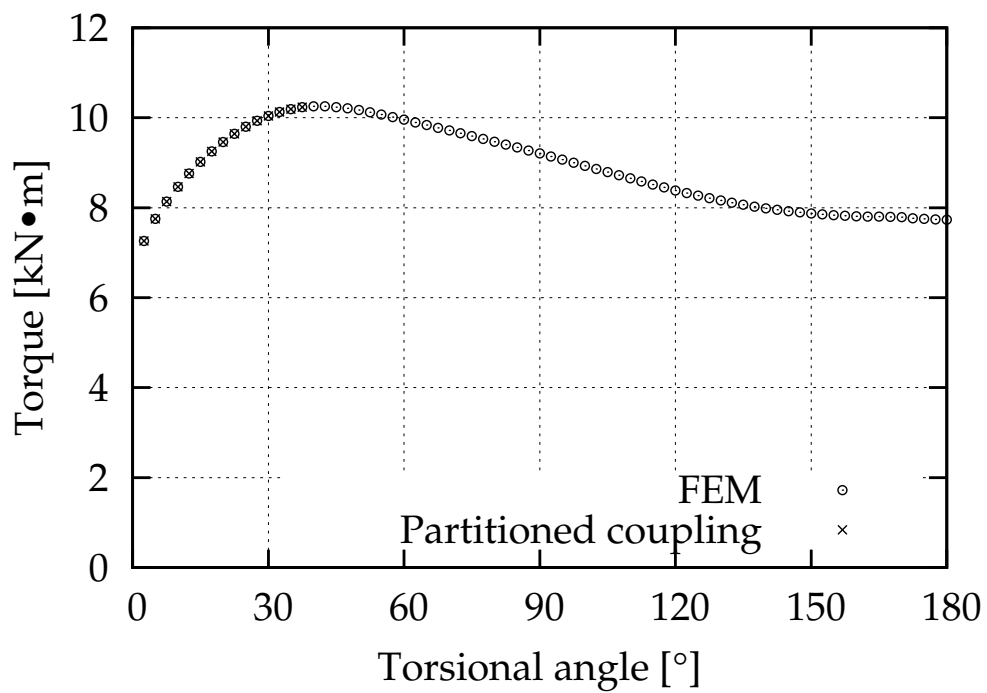


図 5.23 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 180° までのトルク・ねじり角関係

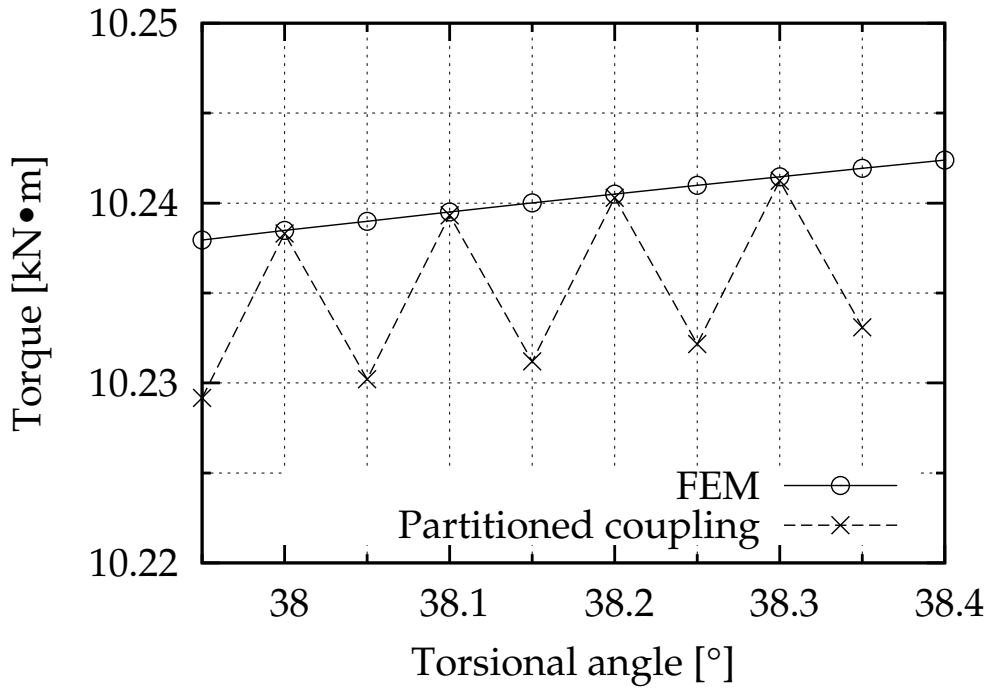


図 5.24 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のトルク・ねじり角関係の拡大図

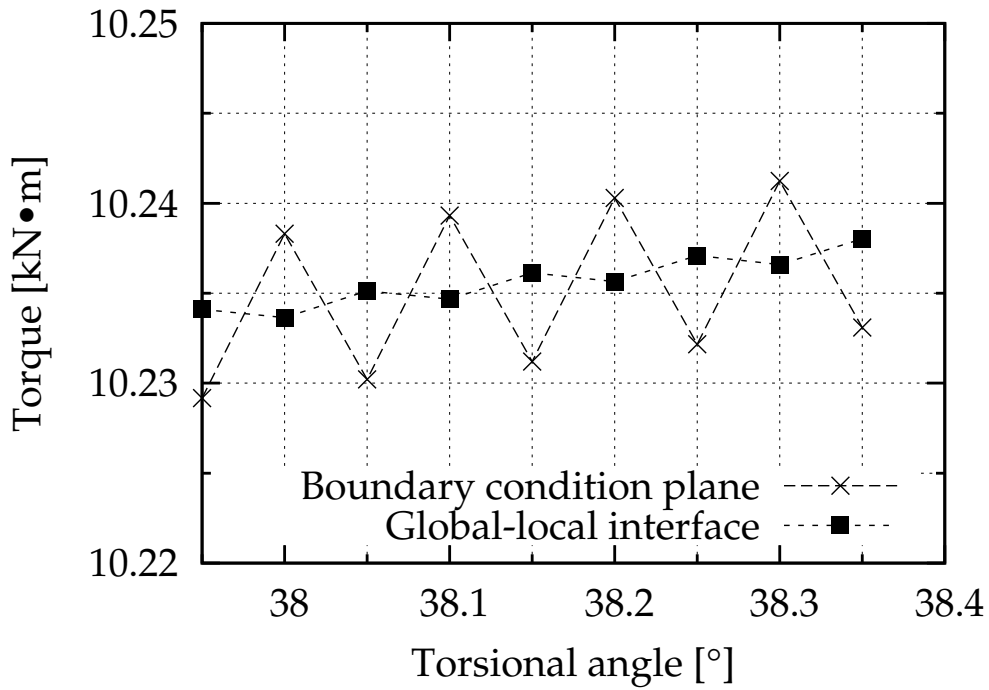


図 5.25 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の二つのトルク・ねじり角関係の拡大図

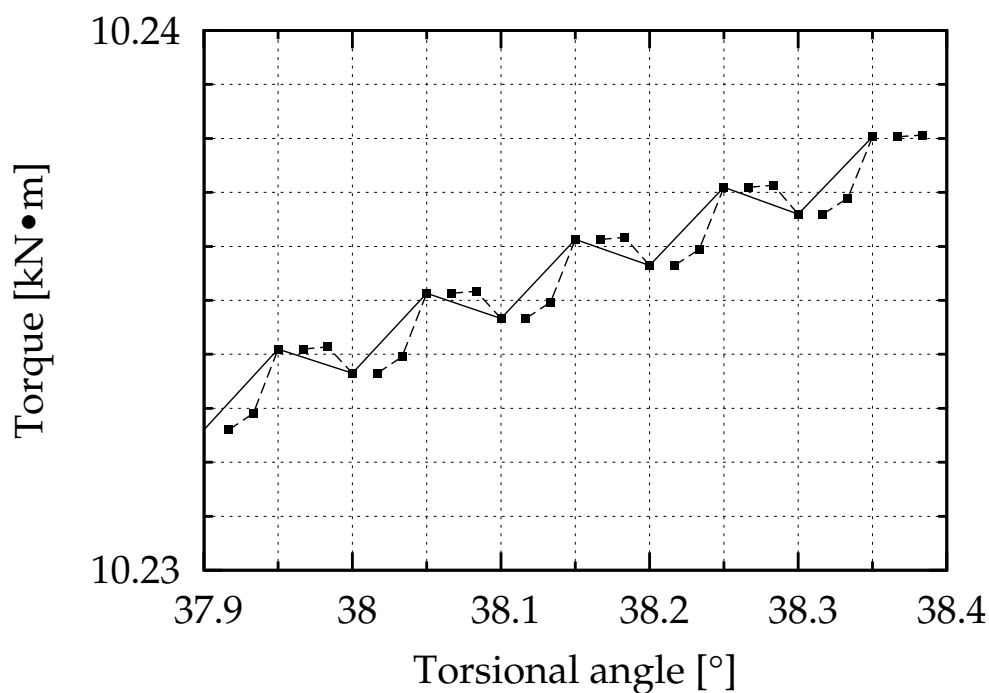


図 5.26 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のトルク・ねじり角関係の連成反復における収束履歴

シュ分割であり、解析が破綻する直前のねじり角 38.35° における解析結果である。右図はこれまでよりもローカル領域を大きめに設定したメッシュ分割であり、解析が破綻する直前のねじり角 66.15° における解析結果である。前者を #1、後者を #2 と呼ぶ。いずれにおいても降伏域が領域界面に到達していることが見て取れる。降伏域が領域界面に到達すると、弾塑性体のローカル領域と弾性体のグローバル領域は異なる材料としての性質を示す。その結果として、たとえば応力の値が領域界面で不連続になる。メッシュ分割 #1、#2 におけるねじり角・トルク関係を図 5.30 に示す。ローカル領域を大きめに設定することでトルク極大値を超えられることがわかった。

参考として、実験結果 [112] との比較を図 5.31 に示す。供試体の材料は STPT410 であり、実験ではねじり角 1° 毎に除荷されている。実験結果とは、現状、傾向のみ一致している。

図 5.32 に分離型連成解法の反復回数を示す。横軸が増分ステップ、縦軸が連成反復回数である。概して 2、3 回程度の少ない反復回数で収束解を得ることができた。これは、グローバルメッシュとローカルメッシュの接続関係が静的であるからと考えられる。図 5.33 に通常の有限要素法による解析の Newton-Raphson 法の反復回数を示

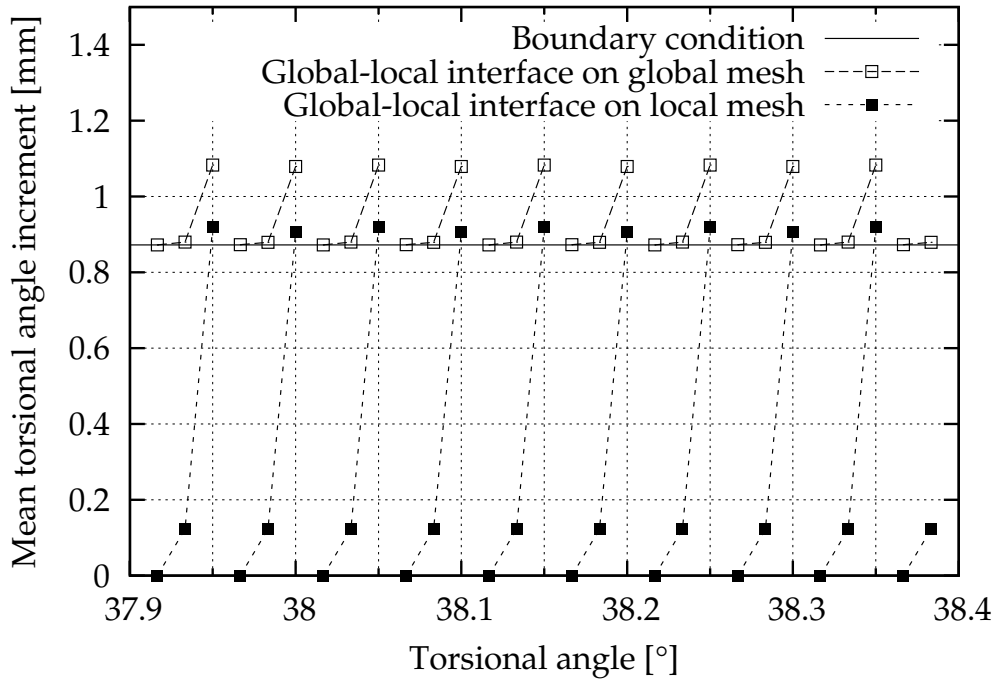


図 5.27 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の平均ねじれ角増分・ねじり角関係の連成反復における収束履歴

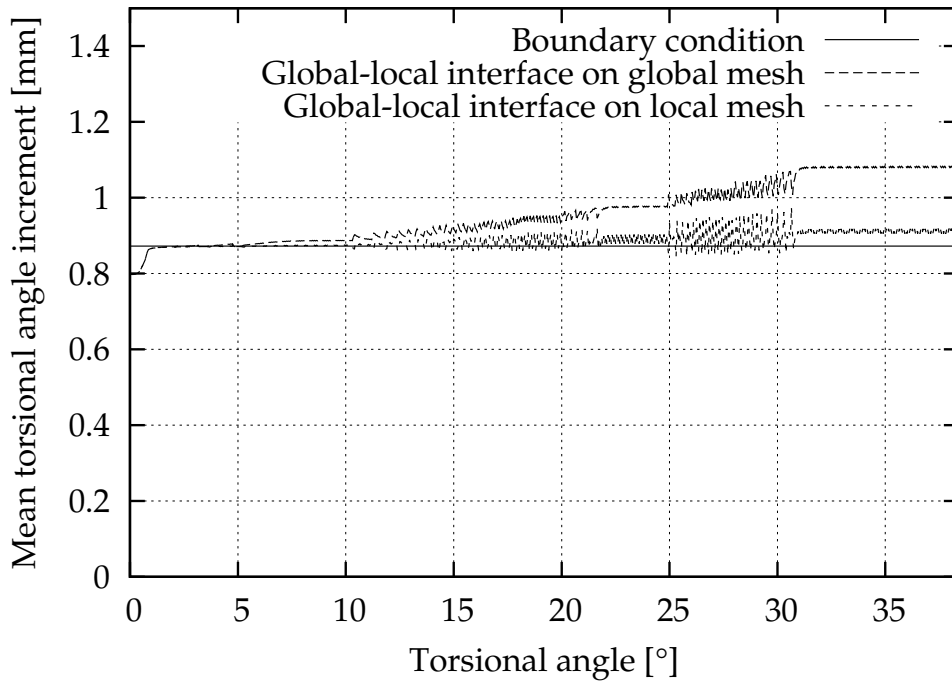


図 5.28 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果の平均ねじれ角増分・ねじり角関係の連成反復における収束値

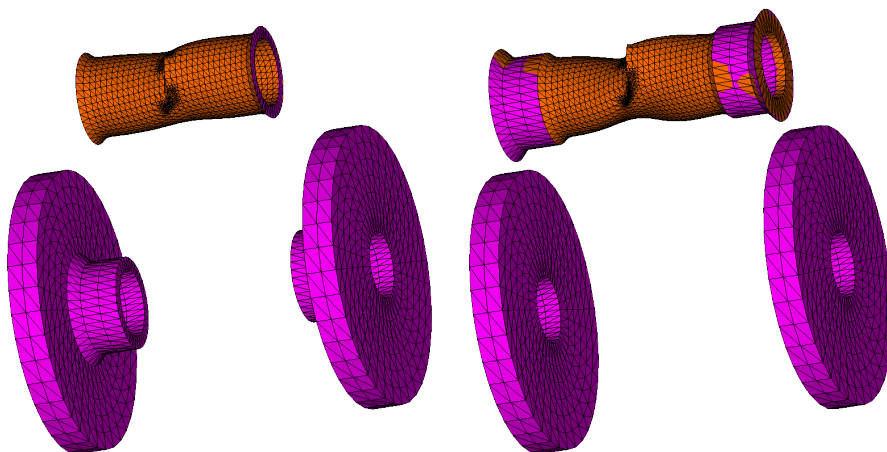


図 5.29 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の異なる二つのメッシュ分割における解析結果の降伏域分布

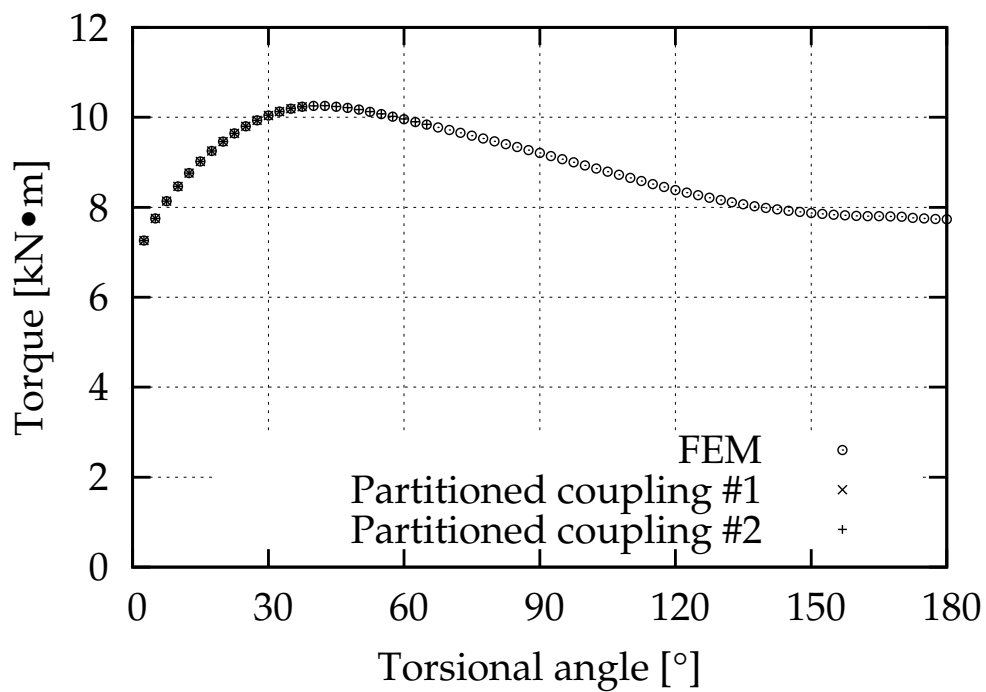


図 5.30 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の異なる二つのメッシュ分割における解析結果のトルク・ねじり角関係

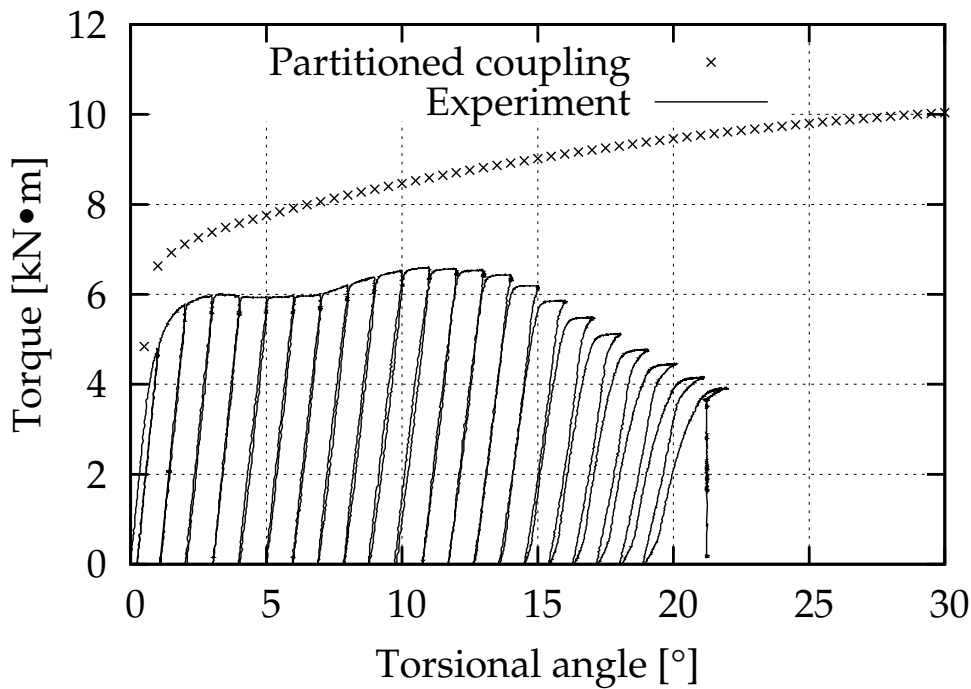


図 5.31 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析結果のねじり角 30° までのトルク・ねじり角関係と実験結果の比較

す。横軸が増分ステップ、縦軸が Newton-Raphson 反復回数である。図 5.34 および図 5.35 に分離型連成解法による解析の Newton-Raphson 反復回数を示す。図 5.34 が有限ひずみ弾性モデルを用いたグローバル解析、図 5.35 が有限ひずみ弾塑性モデルを用いたローカル解析の Newton-Raphson 反復回数である。横軸が解析ステップ、縦軸が Newton-Raphson 反復回数である。グローバル解析では、幾何学的非線形性のみを有して材料非線形性を有さない弾性モデルを用いたため反復回数が非常に少なかった。ここで、Newton-Raphson 反復 1 回は連立一次方程式求解 2 回に相当することに注意する。ローカル解析では、Newton-Raphson 反復回数が通常の有限要素法と同等か、若干多い程度であった。ねじり角 38.4° までの連立一次方程式求解回数を表 5.6 に示す。連成反復があるので分離型連成解法の方が通常の有限要素法よりも連立一次方程式求解回数が多くなった。しかし、グローバル解析のみに注目すると連立一次方程式求解回数の比は 1.37 倍であり、それほど大きい値ではない。この値は、強い非線形性を有する問題を一回解析することと、弱い非線形性を有する問題を連成反復で何度も解析することの違いに由来するものである。もしグローバルメッシュの規模がローカルメッシュよりも遥かに大きい問題であれば、この値は直ちに計算時間

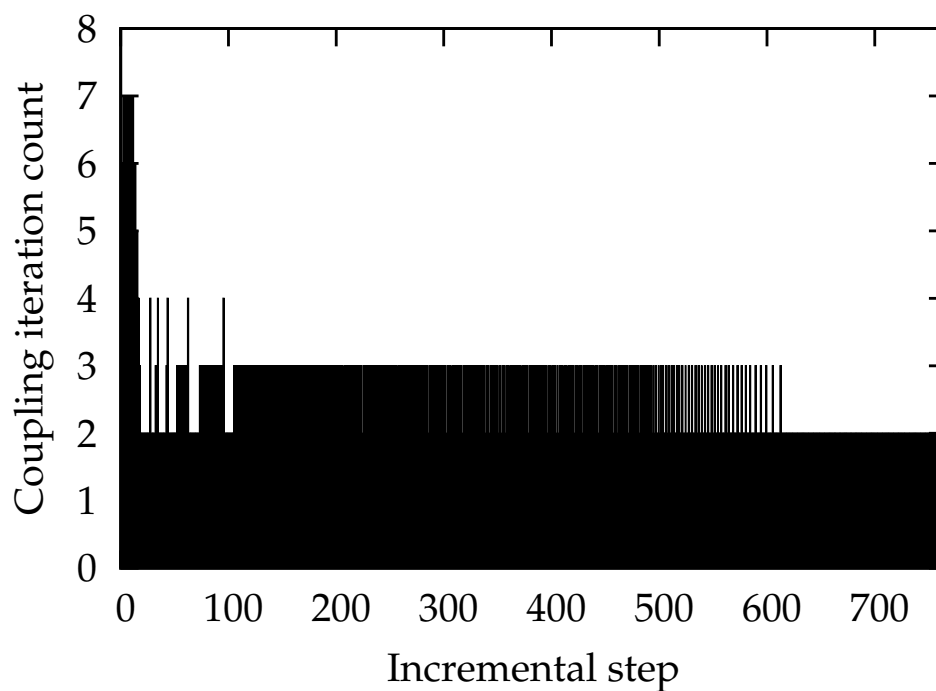


図 5.32 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析の連成反復回数

表 5.6 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の解析の連立一次方程式求解回数

	FEM	Partitioned Coupling Method
Global	4,074	5,529
Local	N/A	14,368

の比となる。

5.5 結言

本章では三つの弾塑性解析および一つの大変形弾塑性解析のベンチマークを示した。弾塑性解析ベンチマークでは、グローバル領域を線形弾性体、ローカル領域を弾塑性体としてモデル化した。一つ目および二つ目の弾塑性解析ベンチマーク問題は円孔平板であった。一つ目では等方硬化則、二つ目では移動硬化則を用いた。いずれのベンチマークにおいても、サブサイクリング型の分離型連成解法を用いることでグローバル解析の連立一次方程式求解回数を削減できることを示した。サブサイクリング型の分離型連成解法では変形経路を線形に内挿する近似を用いているが、応力集中係数を比

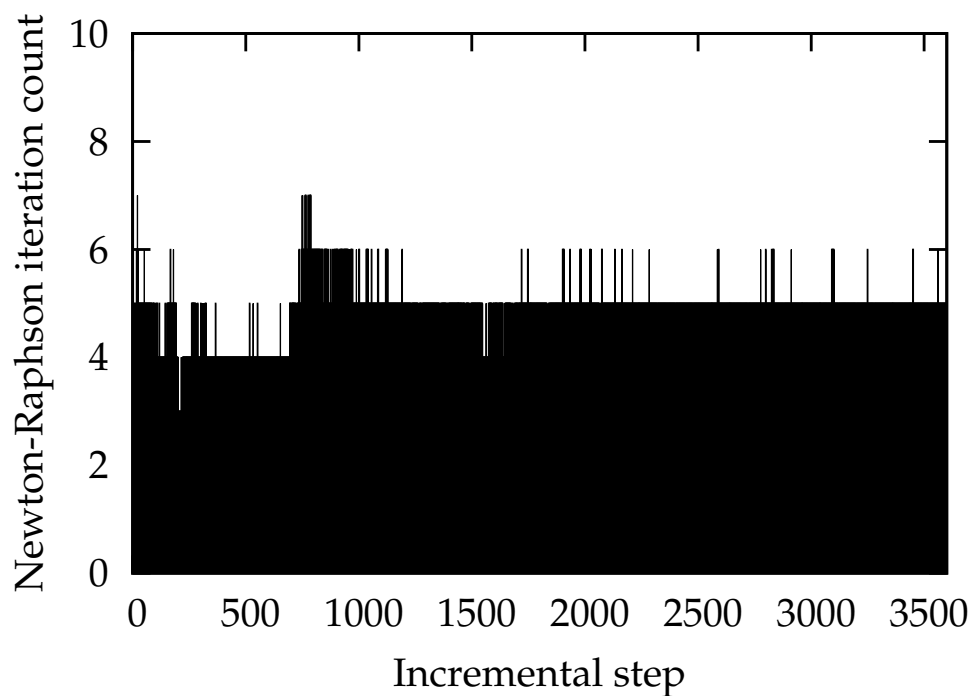


図 5.33 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片の通常の有限要素法による解析の Newton-Raphson 反復回数

較する限り十分な精度の解を得ることができた。三つ目の弾塑性解析ベンチマークでは大規模問題として 600 万自由度規模の圧力容器モデルの弾塑性解析を行った。連立一次方程式求解回数を削減したことで計算時間も削減された。また、グローバルメッシュを線形弾性体としてモデル化しているため、連立一次方程式求解に直接法を用いる場合は剛性行列の不変性を利用することでさらなる高速化が得られることを示した。大変形弾塑性解析ベンチマークでは、円筒試験片のねじり問題を増分型の分離型連成解法で解析した。グローバル領域を有限ひずみ弾性体、ローカル領域を有限ひずみ弾塑性体としてモデル化した。分離型連成解法を用いてもトルクの極大値までは問題なく解析できることを示した。トルクの極大値付近で解析が破綻する理由を調査し、解析破綻時には降伏域が領域界面に到達していることがわかった。グローバル解析の連立一次方程式求解回数は通常の有限要素法と比較して 1.37 倍程度であり、増分型の分離型連成解法を用いても連立一次方程式求解回数がそれほど多くなならない事例を示した。

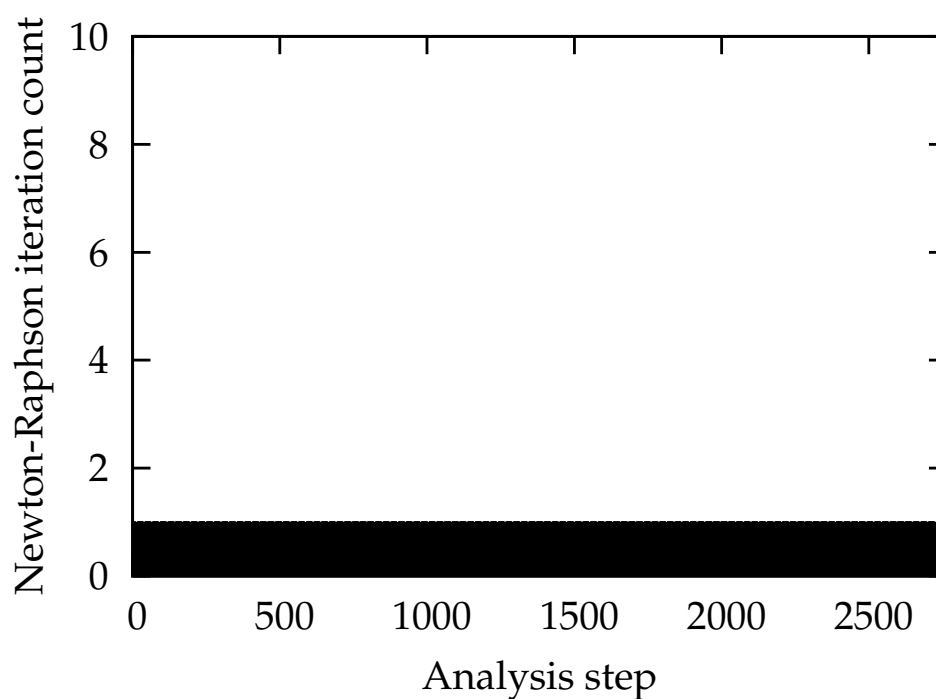


図 5.34 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片のグローバル解析の Newton-Raphson 反復回数

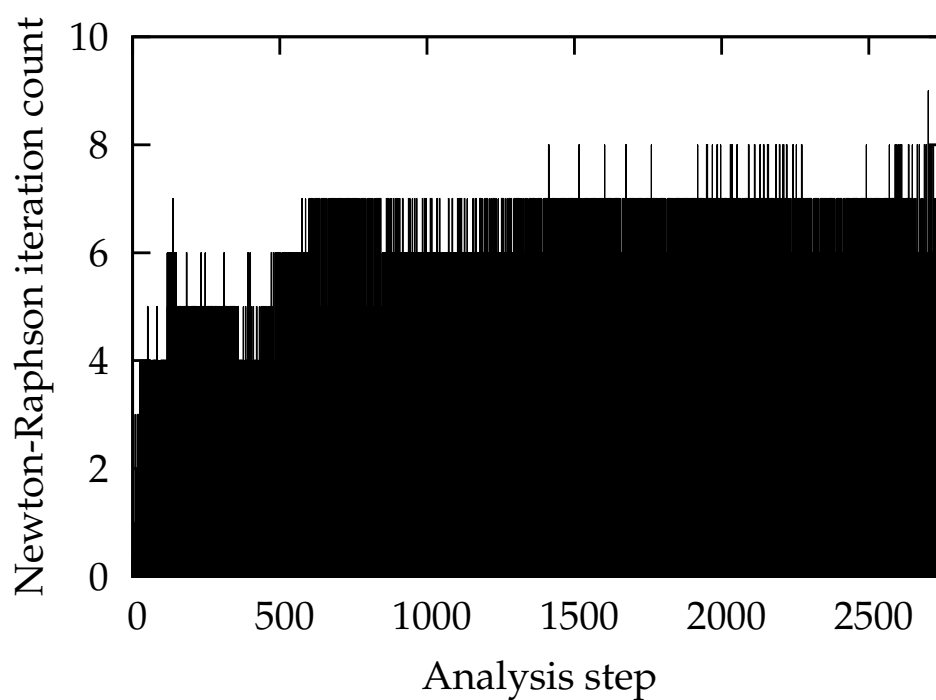


図 5.35 ねじり変形下の切欠付き円筒試験片のローカル解析の Newton-Raphson 反復回数

第 6 章

結論

第1章では本研究の背景および目的、本論文の構成について述べた。

第2章では手法について述べた。まず、大規模非線形破壊力学解析向けの既存手法のサーベイを行い、それらを整理した。大規模破壊力学解析に適した手法に対して、二つのメッシュやモデルの間の相互作用が担保されているかという意味での解の精度、そしてグローバル領域を弾性体、ローカル領域を弾塑性体とするなどの異なる材料モデルが使用できるかという意味での非線形解析の可否という二つの観点を導入した。解の精度が良く、非線形解析が可能な手法として分離型連成解法を提案した。分離型連成解法では、メッシュをき裂近傍とそれ以外の領域に重なり合わないよう分割し、領域界面上に仮の強制変位・荷重境界条件を付与し、それらを反復解法の下で更新しながら各領域の解析を繰り返し行い、最終的に収束解を得る。メッシュの分割方針を述べ、つづいて分離型連成解法を数理的に説明した。増分解析を伴う非線形解析向けの拡張として、増分型とサブサイクリング型の二つの分離型連成解法を提案した。増分型ではグローバル解析の回数を削減することができないが、き裂に関わる非線形性・複雑さをローカル領域に限定した上で増分ステップ毎に確実に収束解を得ることができる。サブサイクリング型ではグローバル解析の回数を削減することができるが、変形経路に依存する問題に適用できないという適用限界がある。分離型連成解法を用いたときの連立一次方程式求解回数を示す数理モデルを作成し、分離型連成解法を用いたときの連立一次方程式求解回数の削減やスピードアップについて考察した。最後に本研究で使用した解析プログラムについて述べた。

第3章では線形弾性力学問題の数値実験を行った。分離型連成解法で用いる反復解法の収束性の調査を行った。比較的収束しやすいベンチマーク問題であった円孔平板モデルの引張解析では、Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法、直線探索なしの記憶制限 BFGS 法があまり変わらない収束性を示した。ただし、Broyden および BFGS は初期ステップ幅の影響が大きく、初期ステップ幅 1 よりも初期ステップ幅 0.1 の方が収束が速かった。比較的収束しにくいベンチマーク問題であったき裂付き帯板の三点曲げ解析では、Aitken 直線探索付きブロック Gauss-Seidel 法は収束せず、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法および記憶制限 BFGS 法のみが収束した。このベンチマーク問題においても初期ステップ幅の影響があり、Broyden、BFGS ともに初期ステップ幅 1 よりも初期ステップ幅 0.1 の方が収束が速かった。BFGS よりも Broyden の方が収束が速かった。Broyden の初期

ステップ幅を変化させて収束性を調査したところ、このベンチマーク問題の場合は 0.1 付近に最適値があることがわかった。以上から、直線探索なしの記憶制限 Broyden 法を初期ステップ幅 0.1 で用いるのが総じて良い収束性を示すことがわかった。反復回数は一つ目の問題が 10 回程度、二つ目の問題が 20 回程度と開きがあった。これは、二つ目の問題のメッシュ分割においてグローバルメッシュがオリジナルメッシュと比べて構造的に柔くなったためと考えられる。

第 4 章では線形破壊力学問題の数値実験を行った。応力拡大係数解析および弾性き裂進展解析を行った。応力拡大係数解析では、主に精度の検証を行った。メッシュ分割パターンを変えて解析を行い、いずれにおいても十分な精度の応力拡大係数を求めることができた。ローカルメッシュの形を変えても分離型連成解法の反復解法の反復回数にはそれほど影響がなかったが、領域界面がギザギザになるメッシュ分割を行うと反復回数が多くなってしまふことがわかった。300 万自由度規模のき裂付き構造機器モデルを解析し、主に計算時間を調査した。分離型連成解法による解析では連成反復の分だけ連立一次方程式を何度も解く必要があるため、通常の有限要素法よりも計算時間が大きくなった。しかし、連立一次方程式求解に直接法を用いる場合は剛性行列の不変性を利用して、それほど遅くない結果を得た。弾性き裂進展解析では、き裂近傍の領域のみでメッシュを変化させてき裂進展を実現した。このアプローチによって、グローバルメッシュをき裂が存在しないただの弾性体とすることができる。また、分離型連成解法の反復解法の初期解に前のき裂進展ステップの収束解を用いることで、第 2 き裂進展ステップ以降は非常に少ない連成反復回数で収束解を得ることができた。

第 5 章では非線形固体力学問題の数値実験を行った。弾塑性解析および大変形弾塑性解析を行った。弾塑性解析では、主に計算時間の検証を行った。弾塑性解析ベンチマークでは、グローバル領域を線形弾性体、ローカル領域を弾塑性体としてモデル化した。簡易なモデルに対して、等方硬化則を用いた引張解析および移動硬化則を用いた引張・圧縮繰り返し解析を行い、いずれのベンチマークにおいても、サブサイクリング型の分離型連成解法を用いることでグローバル解析の連立一次方程式求解回数を削減できることを示した。サブサイクリング型の分離型連成解法では変形経路を線形に内挿する近似を用いているが、応力集中係数を比較する限り十分な精度の解を得ることができた。600 万自由度規模の圧力容器モデルの弾塑性解析を行った。連立一次方程式求解回数を削減したことで計算時間も削減された。また、グローバルメッシュ

を線形弾性体としてモデル化しているため、連立一次方程式求解に直接法を用いる場合は剛性行列の不変性を利用することでさらなる高速化が得られることを示した。大変形弾塑性解析では、本手法の適用限界を調査した。グローバル領域を有限ひずみ弾性体、ローカル領域を有限ひずみ弾塑性体としてモデル化した。分離型連成解法を用いてもトルクの極大値までは問題なく解析できることを示した。トルクの極大値付近で解析が破綻する理由を調査し、解析破綻時には降伏域が領域界面に到達していることがわかった。グローバル解析の連立一次方程式求解回数は通常の有限要素法と比較して1.37倍程度であり、増分型の分離型連成解法を用いても連立一次方程式求解回数がそれほど多くなならない事例を示した。

提案手法は、大規模構造物において非線形・複雑な事象がき裂先端近傍などで局所的に顕著に発現する問題全般に適用可能である。今後の課題として、さらなる大規模化とき裂に関するモデルの複雑化の二つが挙げられる。さらなる大規模化という方向では、グローバル領域の自由度数が大きくなる。巨大で複雑形状の実構造物を表現するためには大きい自由度数が必要になる。本研究では数百万自由度規模の問題を解析したが、これは計算機1ノードと疎行列直接法で解ける限界を狙った規模であった。数千万自由度規模以上の問題を解くには前処理付き共役勾配法に基づく反復法の連立一次方程式ソルバーが必要になる。スーパーコンピュータやPCクラスタの計算機も必要になる。この場合、グローバル解析の連立一次方程式求解回数によって得られる恩恵が引き続き得られるが、剛性行列の不変性を活かした恩恵はほとんど得られなくなる。前処理行列を作成するときに役に立つ程度である。しかし、前処理付き共役勾配法の反復の初期解を前の連成反復ステップの収束解にすることで、前処理付き共役勾配法の反復回数を削減できることが期待できる。また、このような状況では、前処理付き共役勾配法の収束判定に用いる相対ノルムの分母に、連立一次方程式の右辺ベクトルのノルムではなく初期解のノルムを用い、しきい値を大きめにとる方法がある。これによって、各連成反復ステップにおいて、連成反復の収束性に悪影響を与えない程度の精度の解を効率的に得ることができる。一方、き裂に関するモデルの複雑化の方向では、き裂モデルの複雑化と非線形材料モデルの複雑化が挙げられる。き裂モデルの複雑化の方向では、複合材料の結合モデルの使用が挙げられる。ローカル領域に拡張有限要素法やマルチスケールモデルを適用することも可能である。非線形材料モデルの複雑化の方向では、本研究では等方硬化則やPragerの移動硬化則を用いたが、

現実の材料を鑑みるとより高度な降伏関数、流れ則、硬化則などが提案されている。粘塑性などの非弾性構成則の使用も考えられる。以上、二つの方向に対して本論文で提案した解析手法は適用可能であり、高度な大規模非線形破壊力学シミュレーションのシステム化の研究がありうる。

謝辞

本論文は著者が東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻博士後期課程において行った研究をまとめたものです。

指導教員および審査委員の主査であるシステム創成学専攻教授の吉村忍先生には修士課程および博士後期課程の5年間、大変お世話になりました。吉村先生からは議論を通じて研究への刺激をいただいたり、学内外のイベントに参加する機会を何度もいただいたりと、様々なことをしていただきました。博士号取得まで辿り着くのができたのは吉村先生のおかげです。

審査委員の副査である人工物工学研究センター教授の鈴木克幸先生、新領域創成科学研究科人間環境学専攻教授の奥田洋司先生、機械工学専攻教授の泉聡志先生、システム創成学専攻講師の柴沼一樹先生には博士論文の審査を通じてとてもお世話になりました。予備審査でいただいたコメントの数々は博士論文の執筆において非常に参考になりました。

同じ研究室に所属する人工物工学研究センター准教授の山田知典先生、システム創成学専攻講師の藤井秀樹先生には研究活動においてお世話になりました。山田先生には計算力学分野の研究者として様々なことを教えていただきました。また、山田先生には学位申請に関する書類のチェックを手伝っていただきました。藤井先生には人工知能学や情報工学の観点から刺激をいただきました。また、藤井先生には本論文の校正を手伝っていただきました。

同じ研究室に所属する技術専門員の川手秀樹氏、秘書の井上知子氏には研究室での生活においてお世話になりました。川手氏には研究室での日常的なあれこれについてお世話になりました。井上氏には事務処理に関してお世話になりました。

共同研究者であった諏訪東京理科大学准教授の河合浩志先生、日揮株式会社の片岡

俊二氏、研究室 OG の南さつき博士にお世話になりました。河合先生からは計算力学や破壊力学の豊富な知識に基づくコメントをいただきました。片岡氏からは流体・構造連成解析に関する知識を教えてくださいました。南博士には非線形方程式解法に関する相談に乗っていただきました。

日本溶接協会原子力研究委員会 SPN-II 小委員会および MDF 小委員会の委員・事務局の皆様にお世話になりました。SPN-II 小委員会には 5 年間参加し、原子力構造機器の経年化とその関連技術に関して勉強することができました。MDF 小委員会には 2 年間参加し、軽水炉機器・構造物の繰り返し複合荷重下における破壊評価に関する研究プロジェクトの中で貴重な経験を得ることができました。

ADVENTURE プロジェクトのメンバーの皆様にお世話になりました。第 73 回から第 78 回までの ADVENTURE 会合に参加し、研究に対して有益なコメントをいただきました。

最後に、経済的・精神的な支援をくださった両親への謝意を表します。

参考文献

- [1] Anderson, T. L., 栗飯原周二監訳, 金田重裕訳, 吉成仁志訳. 破壊力学: 基礎と応用, 第3版. 森北出版, 2011.
- [2] 矢川元基編. 破壊力学: 理論・解析から工学的応用まで. 培風館, 1988.
- [3] 失敗知識データベース. <http://www.sozogaku.com/fkd/>.
- [4] 日本機械学会. 発電用原子力設備規格維持規格, JSME S NA1-2004, 2004.
- [5] 構造健全性評価ハンドブック編集委員会編. 構造健全性評価ハンドブック. 共立出版, 2005.
- [6] 川手秀樹, 吉村忍, 和田義孝, 矢川元基. ユーザーフレンドリーな破壊力学パラメータの簡易評価システム. 材料, vol. 47, no. 11, pp. 1158–1163, 1998.
- [7] Richard, H. A., Sander, M., Fulland, M., and Kullmer, G. Development of fatigue crack growth in real structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, no. 3–4, pp. 331–340, 2008.
- [8] Kaneko, S., Okada, H., and Kawai, H. Development of automated crack propagation analysis system (multiple cracks and their coalescence). *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 6, no. 3, pp. 97–112, 2012.
- [9] Barlow, K. W. and Chandra, R. Fatigue crack propagation simulation in an aircraft engine fan blade attachment. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, no. 10–12, pp. 1661–1668, 2005.
- [10] Ural, A., Heber, G., Wawrzynek, P. A., Ingraffea, A. R., Lewicki, D. G., and Neto, J. B. Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, no. 8, pp. 1148–1170, 2005.

- [11] Schöllmann, M., Fulland, M., and Richard, H. A. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, no. 2, pp. 249–268, 2003.
- [12] Diamantoudis, A. T. and Labeas, G. N. Stress intensity factors of semi-elliptical surface cracks in pressure vessels by global–local finite element methodology. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, no. 9, pp. 1299–1312, 2005.
- [13] Whitcomb, J. D. Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, vol. 40, no. 4, pp. 1027–1031, 1991.
- [14] Nishikawa, H., Serizawa, H., and Murakawa, H. Actual application of FEM to analysis of large scale mechanical problems in welding. *Science and Technology of Welding and Joining*, vol. 12, no. 2, pp. 147–152, 2007.
- [15] Kawaguchi, A., Itoh, S., Mochizuki, M., and Kameyama, M. Large-scale computation of welding residual stress. *Progress in Nuclear Science and Technology*, vol. 2, pp. 613–619, 2011.
- [16] Fish, J. The s-version of the finite element method. *Computers and Structures*, vol. 43, no. 3, pp. 539–547, 1992.
- [17] Fish, J. and Markolefas, S. Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 104, no. 3, pp. 363–396, 1993.
- [18] 鈴木克幸, 大坪英臣, 関勝載, 白石卓士郎. 重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析. 日本計算工学会論文集, vol. 19990020, pp. 1–6, 1999.
- [19] 鈴木克幸, 大坪英臣, 中住昭吾, 榛村太亮. 重合メッシュ法におけるグローバル・ローカル反復解析. 日本造船学会論文集, vol. 192, pp. 691–696, 2002.
- [20] Okada, H., Endoh, S., and Kikuchi, M. On fracture analysis using an element overlay technique. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, no. 5, pp. 773–789, 2005.
- [21] Okada, H., Endoh, S., and Kikuchi, M. Application of s-version finite element method to two-dimensional fracture mechanics problems. *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, vol. 1, no. 5, pp. 699–710, 2007.

- [22] 菊池正紀, 和田義孝, 高橋真史. 重合メッシュ法を用いた疲労き裂進展シミュレーション. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 74, no. 742, pp. 812–818, 2008.
- [23] 菊池正紀, 高橋真史, 和田義孝, Li, Y. 重合メッシュ法を用いた疲労き裂進展シミュレーション: 第 2 報, 二つの段違いき裂の相互作用の検討. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 74, no. 745, pp. 1243–1248, 2008.
- [24] 菊池正紀, 和田義孝, 宇都宮篤, 須山ひとみ. 重合メッシュ法を用いた疲労き裂進展シミュレーション: 第 3 報, 三次元表面き裂進展シミュレーション. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 75, no. 755, pp. 918–924, 2009.
- [25] 菊池正紀, 和田義孝, 清水勇登, 須山ひとみ. 重合メッシュ法を用いた溶接熱影響部におけるき裂進展解析. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 75, no. 758, pp. 1381–1386, 2009.
- [26] Kamaya, M., Miyokawa, E., and Kikuchi, M. Growth prediction of two interacting surface cracks of dissimilar sizes. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, no. 16, pp. 3120–3131, 2010.
- [27] 菊池正紀, 和田義孝, 須賀一博, 岩松史則, 新宅勇一. 重合メッシュ法を用いた ICM ハウジング溶接部におけるき裂進展解析. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 79, no. 798, pp. 119–129, 2013.
- [28] 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣. 重合メッシュ法を用いた弾性・弾塑性混合解析. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 68, no. 668, pp. 603–610, 2002.
- [29] Nakasumi, S., Suzuki, K., Fujii, D., and Ohtsubo, H. Mixed analysis of shell and solid elements using the overlaying mesh method. *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 7, no. 4, pp. 180–188, 2003.
- [30] Belytschko, T. and Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, no. 5, pp. 601–620, 1999.
- [31] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, no. 1, pp. 131–150, 1999.
- [32] Abdelaziz, Y. and Hamouine, A. A survey of the extended finite element. *Computers and Structures*, vol. 86, no. 11–12, pp. 1141–1151, 2008.

- [33] 長嶋利夫. X-FEM による弾性解析の精度についての検討. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 67, no. 662, pp. 1569–1575, 2001.
- [34] Nagashima, T., Omoto, Y., and Tani, S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, no. 8, pp. 1151–1173, 2003.
- [35] Sukumar, N., Chopp, D. L., and Moran, B. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, no. 1, pp. 29–48, 2003.
- [36] Nagashima, T. and Miura, N. Three-dimensional crack analysis using X-FEM considering symmetric conditions. *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 210–221, 2008.
- [37] 長嶋利夫, 三浦直樹. X-FEM による残留応力場中のき裂解析. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 74, no. 738, pp. 232–239, 2008.
- [38] Shibamura, K., Utsunomiya, T., and Aihara, S. An explicit application of partition of unity approach to XFEM approximation for precise reproduction of a priori knowledge of solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 97, no. 8, pp. 551–581, 2014.
- [39] Elguedj, T., Gravouil, A., and Combescure, A. Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, no. 7–8, pp. 501–515, 2006.
- [40] Hutchinson, J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, no. 1, pp. 13–31, 1968.
- [41] Rice, J. R. and Rosengren, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, no. 1, pp. 1–12, 1968.
- [42] Prabel, B., Combescure, A., Gravouil, A., and Marie, S. Level set X-FEM non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, no. 8, pp. 1553–1569, 2007.

-
- [43] Samaniego, E. and Belytschko, T. Continuum–discontinuum modelling of shear bands. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, no. 13, pp. 1857–1872, 2005.
- [44] Lee, S.-H., Song, J.-H., Yoon, Y.-C., Zi, G., and Belytschko, T. Combined extended and superimposed finite element method for cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, no. 8, pp. 1119–1136, 2004.
- [45] Nakasumi, S., Suzuki, K., and Ohtsubo, H. Crack growth analysis using mesh superposition technique and X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, no. 3, pp. 291–304, 2008.
- [46] Nishioka, T. and Atluri, S. N. Analytical solution for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 17, no. 3, pp. 247–268, 1983.
- [47] Nikishkov, G. P. and Atluri, S. N. An analytical–numerical alternating method for elastic–plastic analysis of cracks. *Computational Mechanics*, vol. 13, no. 6, pp. 427–442, 1994.
- [48] Pyo, C. R., Okada, H., and Atluri, S. N. An elastic–plastic finite element alternating method for analyzing wide-spread fatigue damage in aircraft structures. *Computational Mechanics*, vol. 16, no. 1, pp. 62–68, 1995.
- [49] Pyo, C. R., Okada, H., and Atluri, S. N. Residual strength prediction for aircraft panels with multiple site damage, using the “EPFEAM” for stable crack growth analysis. *Computational Mechanics*, vol. 16, no. 3, pp. 190–196, 1995.
- [50] Wang, L., Brust, F. W., and Atluri, S. N. The elastic–plastic finite element alternating method (EPFEAM) and the prediction of fracture under WFD conditions in aircraft structures. *Computational Mechanics*, vol. 20, no. 3, pp. 199–212, 1997.
- [51] Nikishkov, G. P., Park, J. H., and Atluri, S. N. SGBEM–FEM alternating method for analyzing 3D non-planar cracks and their growth in structural

- components. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 2, no. 3, pp. 401–422, 2001.
- [52] Han, Z. D. and Atluri, S. N. SGBEM (for cracked local subdomain)–FEM (for uncracked global structure) alternating method for analyzing 3D surface cracks and their fatigue-growth. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 3, no. 6, pp. 699–716, 2002.
- [53] Dong, L. and Atluri, S. N. Fracture & fatigue analyses: SGBEM–FEM or XFEM? part 1: 2D structures. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 90, no. 2, pp. 91–146, 2013.
- [54] Dong, L. and Atluri, S. N. Fracture & fatigue analyses: SGBEM–FEM or XFEM? part 2: 3D solids. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 90, no. 5, pp. 379–413, 2013.
- [55] Toselli, A. and Widlund, O. *Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory*. Springer, 2004.
- [56] Smith, B., Bjorstad, P., and Gropp, W. *Domain Decomposition: Parallel Multi-level Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2004.
- [57] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [58] Farhat, C. and Roux, F.-X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, no. 6, pp. 1205–1227, 1991.
- [59] Mandel, J. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 233–241, 1993.
- [60] Farhat, C., Lesoinne, M., LeTallec, P., Pierson, K., and Rixen, D. FETI-DP: a dual–primal unified FETI method—part I: A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, no. 7, pp. 1523–1544, 2001.
- [61] Dohrmann, C. A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 25, no. 1,

- pp. 246–258, 2003.
- [62] Yusa, Y., Minami, S., Kawai, H., and Yoshimura, S. CG-based subdomain local solver with ICT factorization preconditioner for domain decomposition method. *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 6, no. 3, pp. 157–168, 2012.
- [63] Yagawa, G., Soneda, N., and Yoshimura, S. A large scale finite element analysis using domain decomposition method on a parallel computer. *Computers and Structures*, vol. 38, no. 5–6, pp. 615–625, 1991.
- [64] Yagawa, G., Yoshioka, A., Yoshimura, S., and Soneda, N. A parallel finite element method with a supercomputer network. *Computers and Structures*, vol. 47, no. 3, pp. 407–418, 1993.
- [65] Yagawa, G. and Shioya, R. Parallel finite elements on a massively parallel computer with domain decomposition. *Computing Systems in Engineering*, vol. 4, no. 4–6, pp. 495–503, 1993.
- [66] Yoshimura, S., Shioya, R., Noguchi, H., and Miyamura, T. Advanced general-purpose computational mechanics system for large-scale analysis and design. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 149, no. 1, pp. 279–296, 2002.
- [67] ADVENTURE Project. <http://adventure.sys.t.u-tokyo.ac.jp/>.
- [68] Ogino, M., Shioya, R., and Kanayama, H. An inexact balancing preconditioner for large-scale structural analysis. *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 150–161, 2008.
- [69] Ogino, M., Shioya, R., Kawai, H., and Yoshimura, S. Seismic response analysis of nuclear pressure vessel model with ADVENTURE System on the Earth Simulator. *Journal of the Earth Simulator*, vol. 2, pp. 41–54, 2005.
- [70] 吉村忍, 小林敬, 秋葉博, 鈴木智, 荻野正雄. 3次元有限要素法による沸騰水型原子炉のフルスケール地震応答解析. *日本原子力学会和文論文誌*, vol. 11, no. 3, pp. 203–221, 2012.
- [71] Miyamura, T., Noguchi, H., Shioya, R., Yoshimura, S., and Yagawa, G. Elastic–plastic analysis of nuclear structures with millions of DOFs using

- the hierarchical domain decomposition method. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 212, no. 1–3, pp. 335–355, 2002.
- [72] 社団法人土木学会応用力学委員会計算力学小委員会編. いまさら聞けない計算力学の常識. 丸善, 2008.
- [73] Zhang, Q. and Hisada, T. Analysis of fluid–structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 48, pp. 6341–6357, 2001.
- [74] Ishihara, D. and Yoshimura, S. A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, no. 2, pp. 167–203, 2005.
- [75] Minami, S., Kawai, H., and Yoshimura, S. A monolithic approach based on the balancing domain decomposition method for acoustic fluid–structure interaction. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 79, no. 010906, pp. 1–8, 2012.
- [76] Minami, S., Kawai, H., and Yoshimura, S. Parallel BDD-based monolithic approach for acoustic fluid–structure interaction. *Computational Mechanics*, vol. 50, no. 6, pp. 707–718, 2012.
- [77] Farhat, C., Lesoinne, M., and Maman, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 21, no. 10, pp. 807–835, 1995.
- [78] Farhat, C., Lesoinne, M., Stern, P., and Lantéri, S. High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms: methodology and preliminary results. *Advances in Engineering Software*, vol. 28, no. 1, pp. 43–61, 1997.
- [79] Mitsume, N., Yoshimura, S., Murotani, K., and Yamada, T. MPS–FEM partitioned coupling approach for fluid–structure interaction with free surface flow. *International Journal of Computational Methods*, vol. 11, no. 4 (1350101), pp. 1–16, 2014.

-
- [80] Matthies, H. G. and Steindorf, J. Partitioned strong coupling algorithms for fluid–structure interaction. *Computers and Structures*, vol. 81, no. 8–11, pp. 805–812, 2003.
- [81] 吉村忍, 岡本真史, 山田知典. 流体構造連成問題の分離反復型解法における安定性と効率. 日本機械学会論文集 B 編, vol. 72, no. 716, pp. 869–876, 2006.
- [82] Yamada, T. and Yoshimura, S. Line search partitioned approach for fluid–structure interaction analysis of flapping wing. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 24, no. 1, pp. 51–60, 2008.
- [83] Minami, S. and Yoshimura, S. Practical performances of non-linear algorithms for partitioned iterative method of fluid-structure interaction problems. *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 3, no. 1, pp. 396–407, 2009.
- [84] Minami, S. and Yoshimura, S. Performance evaluation of nonlinear algorithms with line-search for partitioned coupling techniques for fluid–structure interactions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 64, no. 10–12, pp. 1129–1147, 2010.
- [85] Kataoka, S., Minami, S., Kawai, H., Yamada, T., and Yoshimura, S. A parallel iterative partitioned coupling analysis system for large-scale acoustic fluid–structure interactions. *Computational Mechanics*, vol. 53, no. 6, pp. 1299–1310, 2014.
- [86] 遊佐泰紀, 片岡俊二, 河合浩志, 吉村忍. 分離反復連成解法による大規模破壊力学解析. 日本機械学会論文集 A 編, vol. 78, no. 791, pp. 966–975, 2012.
- [87] Yusa, Y. and Yoshimura, S. Mixed-mode fracture mechanics analysis of large-scale cracked structures using partitioned iterative coupling method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 91, no. 6, pp. 445–461, 2013.
- [88] Yusa, Y. and Yoshimura, S. Speedup of elastic–plastic analysis of large-scale model with crack using partitioned coupling method with subcycling technique. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 99, no. 1, pp. 87–104, 2014.

- [89] Kelley, C. T. *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [90] Knoll, D. A. and Keyes, D. E. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, vol. 193, no. 2, pp. 357–397, 2004.
- [91] SciPy Community. *SciPy Reference Guide, Release 0.14.0*, 2014. <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>.
- [92] 矢部博. 工学基礎 最適化とその応用. 数理工学社, 2006.
- [93] Davis, T. A. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [94] Kawai, H. ADVENTURE AutoGL: A handy graphics and GUI library for researchers and developers of numerical simulations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 11, no. 3, pp. 111–120, 2006.
- [95] Python Imaging Library (PIL). <http://www.pythonware.com/products/pil/>.
- [96] Rajaram, H., Socrate, S., and Parks, D. M. Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 66, no. 5, pp. 455–482, 2000.
- [97] Okada, H. and Ohata, S. Three-dimensional J-integral evaluation for cracks with arbitrary curvatures and kinks based on domain integral method for quadratic tetrahedral finite element. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 109, pp. 58–77, 2013.
- [98] Daimon, R. and Okada, H. Mixed-mode stress intensity factor evaluation by interaction integral method for quadratic tetrahedral finite element with correction terms. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 115, pp. 22–42, 2014.
- [99] Yoshimura, S., Pyo, C.-R., Yagawa, G., and Kawai, H. Finite element analyses of three dimensional fully plastic solutions using quasi-nonsteady algorithm and tetrahedral elements. *Computational Mechanics*, vol. 14, no. 2, pp. 128–139, 1994.
- [100] Okada, H., Higashi, M., Kikuchi, M., Fukui, Y., and Kumazawa, N. Three

- dimensional virtual crack closure-integral method (VCCM) with skewed and non-symmetric mesh arrangement at the crack front. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, no. 11, pp. 1717–1737, 2005.
- [101] Okada, H. and Kamibeppu, T. A virtual crack closure-integral method (VCCM) for three-dimensional crack problems using linear tetrahedral finite elements. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 10, no. 3, pp. 229–238, 2005.
- [102] Okada, H., Kawai, H., and Araki, K. A virtual crack closure-integral method (VCCM) to compute the energy release rates and stress intensity factors based on quadratic tetrahedral finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, no. 15, pp. 4466–4485, 2008.
- [103] Stein, K., Tezduyar, T., and Benney, R. Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 70, pp. 58–63, 2003.
- [104] 犬塚一徹, 山田知典, 吉村忍. 小型人工飛翔体の羽ばたき運動の多目的設計. 日本機械学会論文集 B 編, vol. 75, no. 754, pp. 1215–1222, 2009.
- [105] Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr. Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 11, no. 4, pp. 817–829, 1979.
- [106] Newman, J. C., Jr. and Raju, I. S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 15, no. 1–2, pp. 185–192, 1981.
- [107] Murakami, Y., Aoki, S., Hasebe, H., Itoh, Y., Miyata, H., Miyazaki, N., Terada, H., Tohgo, K., Toya, M., and Yuuki, R. *Stress Intensity Factor Handbook*. Pergamon Press, 1987.
- [108] 久田俊明, 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善, 1995.
- [109] Dunne, F. and Petrinic, N. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press, 2005.
- [110] de Souza Neto, E. A., Perić, D., Owen, D. R. J., 寺田賢二郎監訳. 非線形有限要素法: 弾塑性解析の理論と実践. 森北出版, 2012.

- [111] 神田誠, 梅田賢治, 三宅修平, 清水建男, 一宮正和, 山下清信, 望月弘保, 与能本泰介, 岡芳明. 原子力プラント工学. オーム社, 2009.
- [112] 日本溶接協会原子力研究委員会 MDF 小委員会. 軽水炉機器・構造物の繰り返し複合荷重下における破壊評価に関する研究, 平成 25 年度報告書 (最終報告書), 2014.

付録 A

メッシュの手切りを支援するツール群 Tegiri Utils

本研究で用いたメッシュの一部は著者が開発した Tegiri Utils を用いて作成されたものである。Tegiri Utils はメッシュの手切りを支援するツール群である。表 A.1 に示すように、本論文執筆時において 54 個の Python スクリプトから成り、各スクリプトは平均約 120 行の小さいコードである。表 A.1 のように以下に示す 8 つのカテゴリから成る。

Converters 要素の変換

Refiners 全体・局所の要素細分割

Reorderers 節点・要素のリオーダーリング

Composers メッシュの分割・結合

BC Appliers 境界条件の付与

Checkers メッシュ妥当性・要素アスペクト比・要素体積などのチェック

Visualizers メッシュ・疎行列の可視化

Misc き裂導入、座標変換、Laplacian スムージングなど

Tegiri Utils を使用してメッシュを作成するときは基本的には以下の手順で行う。

1. 手動もしくは小さな使い捨てスクリプトで四辺形要素の単純なメッシュを作成する。
2. **Converters** や **Refiners** を用いて目的のメッシュを作成する。
3. **BC Appliers** を用いて境界条件を付与する。
4. **Checkers** や **Visualizers** を用いて作成したメッシュをチェックする。

Reorderers、**Composers**、**Misc** は必要に応じて用いる。これらの手順はシェルスクリプトを書いて自動化しても良いし、シェルに直接コマンドを打ち込んでも良い。

Tegiri Utils の使用例を示す。まず、リスト A.1 のようなシェルスクリプトを書き、シェルスクリプトの中から Tegiri Utils のスクリプトを次々と呼ぶ。各スクリプトに対するメッシュの入出力は標準入出力で行うため、リダイレクトやパイプを多用する。つづいて、図 A.1 のような単純なメッシュを本当の手切り、つまりキーボードによる手入力で作成する。メッシュファイルはリスト A.2 のように要素数、要素コネクティビティ、節点数、節点座標の情報を順に記したフォーマットである。なお、このメッシュは CT 試験片の 1/2 モデルである。このメッシュファイルをリスト A.1 のシェ

リスト A.1 CT 試験片メッシュを作成するシェルスクリプト

```
1 #!/bin/sh
2 cat mesh.txt |
3 refine_uniformly.py '(x - 12.7) ** 2 + (y - 18.05) ** 2 - 6.35 ** 2' |
4 convert_quadrangular2triangular.py 'x < 38.1' |
5 convert_triangular2tetrahedral.py 25.4 4 |
6 refine_locally.py '1.2 * abs(x - 38.1) + abs(y) < 1.0001 * 7.625' |
7 refine_locally.py '1.2 * abs(x - 38.1) + abs(y) < 0.5001 * 7.625' |
8 refine_locally.py '1.2 * abs(x - 38.1) + abs(y) < 0.25001 * 7.625' |
9 refine_locally.py '1.2 * abs(x - 38.1) + abs(y) < 0.125001 * 7.625' |
10 cat > mesh.txt.new
```

ルスクリプトに入力すると図 A.2 のメッシュファイルが出力される。具体的にリスト A.1 のシェルスクリプトが行ったことは以下の処理である。

1. 全体の要素細分割
2. 四辺形要素から三角形要素への変換
3. 三角形要素から四面体要素への変換 (押し出し)
4. 局所 (き裂先端近傍) の要素細分割 4 回

これらの処理によって、二次元の粗いメッシュであった図 A.1 を、図 A.2 のような三次元の粗密付きメッシュに変換することができる。なお、これらの図も Tegiri Utils によって可視化されたものである。変換前のメッシュは 14 要素、25 節点であるが、変換後のメッシュは 4,528 要素、1,198 節点である。簡易なメッシュとシェルスクリプトという組み合わせは、メッシュファイルのデータ容量を圧縮するという観点からも有用である。シェルスクリプトを実行すればいつでも同じメッシュが生成される。

表 A.1 Tegiri Utils に含まれる Python スクリプト

<i>Converters</i>	
<code>convert_quadrangular2triangular.py</code>	Convert quadrangular elements to triangular elements
<code>convert_quadrangular2hexahedral.py</code>	Convert quadrangular elements to hexahedral elements
<code>convert_quadrangular2tetrahedral.py</code>	Convert quadrangular elements to tetrahedral elements
<code>convert_triangular2tetrahedral.py</code>	Convert triangular elements to tetrahedral elements
<code>convert_linear2quadratic.py</code>	Convert linear elements to quadratic elements
<code>convert_quadratic2linear.py</code>	Convert quadratic elements to linear elements
<code>convert_subparametric2isoparametric.py</code>	Convert subparametric quadratic elements to isoparametric elements (move midside nodes)
<code>convert_isoparametric2subparametric.py</code>	Convert isoparametric quadratic elements to subparametric elements (move midside nodes)
<i>Refiners</i>	
<code>refine_uniformly.py</code>	Refine elements uniformly
<code>refine_locally.py</code>	Refine tetrahedral/triangular elements locally
<code>refine_quadrangular_edges.py</code>	Refine quadrangular element edges
<code>refine_triangular_edges.py</code>	Refine triangular element edges
<i>Reorderers</i>	
<code>reorder_nodes_naturally.py</code>	Reorder nodes naturally (by natural ordering)
<code>reorder_nodes_by_cm.py</code>	Reorder nodes by Cuthill–McKee (CM) method
<code>reorder_nodes_by_rcm.py</code>	Reorder nodes by reverse Cuthill–McKee (RCM) method
<code>reorder_nodes_by_mc.py</code>	Reorder nodes by greedy multicolor (MC) method
<code>reorder_nodes_by_md.py</code>	Reorder nodes by minimum degree (MD) method
<code>reorder_nodes_by_nd.py</code>	Reorder nodes by nested dissection (ND) method
<code>reorder_elements_for_nodes.py</code>	Reorder elements for nodal IDs
<i>Composers</i>	
<code>compose_meshes.py</code>	Compose two meshes into one mesh
<code>decompose_meshes.py</code>	Decompose one mesh into two meshes
<code>connect_meshes.py</code>	Connect two meshes (generate interface mesh)
<code>merge_meshes.py</code>	Merge meshes into one mesh (do not compose or connect)
<code>remove_interface_dirichlet_bc.py</code>	Remove interface Dirichlet BC
<i>BC Appliers</i>	
<code>apply_surface_dirichlet_bc.py</code>	Apply surface Dirichlet BC
<code>apply_line_dirichlet_bc.py</code>	Apply line Dirichlet BC
<code>apply_point_dirichlet_bc.py</code>	Apply point Dirichlet BC
<code>apply_surface_neumann_bc.py</code>	Apply surface Neumann BC
<code>apply_line_neumann_bc.py</code>	Apply line Neumann BC
<code>apply_point_neumann_bc.py</code>	Apply point Neumann BC
<code>apply_void_bc.py</code>	Apply void BC (convert mesh to mesh with void BC)
<i>Checkers</i>	
<code>check_validity.py</code>	Check mesh validity
<code>check_aspects.py</code>	Check distribution of tetrahedral/triangular element aspect ratios
<code>check_volumes.py</code>	Check distribution of element volumes/areas
<code>check_edge_lengths.py</code>	Check distribution of element edge lengths
<code>check_adjacent_node_degrees.py</code>	Check adjacent node degrees
<i>Visualizers</i>	
<code>visualize_simply.py</code>	Visualize mesh simply
<code>visualize_in_detail.py</code>	Visualize mesh in detail with several options
<code>visualize_matrix.py</code>	Visualize sparse matrix of element connectivity
<code>visualize_factorized_matrix.py</code>	Visualize factorized sparse matrix of element connectivity with fill-in estimated by symbolic factorization
<code>extract_locally.py</code>	Extract mesh locally for visualization
<code>extract_nonlocally.py</code>	Extract mesh non-locally for visualization
<code>extract_surface.py</code>	Extract surface mesh for visualization
<code>extract_crack.py</code>	Extract crack surface mesh for visualization
<i>Misc</i>	
<code>smooth_by_laplacian.py</code>	Smooth mesh by Laplacian method
<code>align_regularly_along_curve.py</code>	Align nodes regularly along curve
<code>double_elements_symmetrically.py</code>	Double elements symmetrically with respect to a plane
<code>transform_coordinates.py</code>	Transform nodal coordinates
<code>fix_negative_elements.py</code>	Fix negative volume/area elements
<code>unify_duplicated_nodes.py</code>	Unify duplicated nodes
<code>introduce_crack.py</code>	Introduce crack (duplicate crack surface nodes)
<code>remove_unreferenced_nodes.py</code>	Remove unreferenced nodes
<code>remove_zero_volume_elements.py</code>	Remove zero-volume elements that have same nodes in a element
<code>evaluate_mesh_file.py</code>	Evaluate mesh file

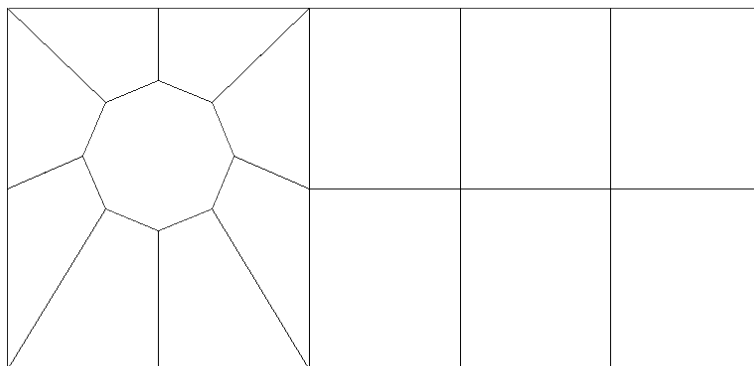


図 A.1 CT 試験片の二次元の粗いメッシュ

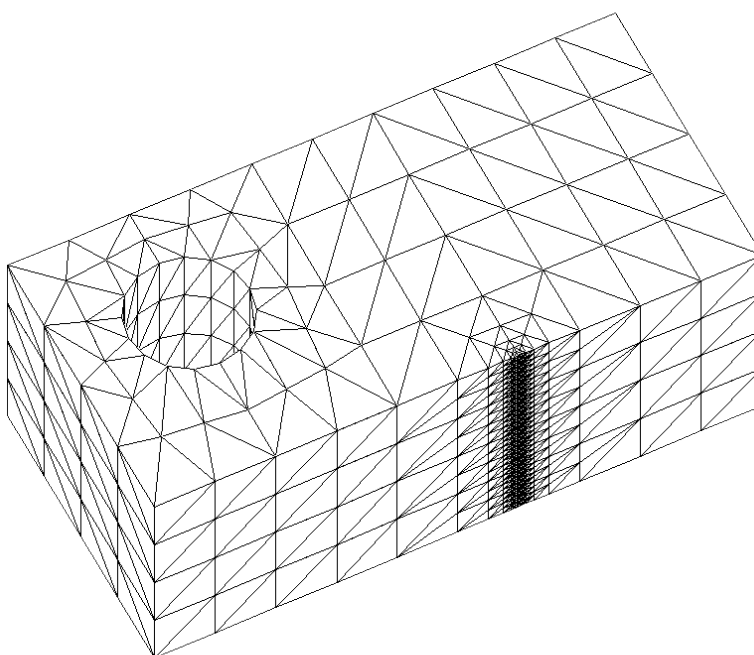


図 A.2 CT 試験片の三次元の粗密付きメッシュ

リスト A.2 CT 試験片の二次元メッシュのメッシュファイル

```
1 14
2 0 7 10 9
3 0 1 6 7
4 1 2 8 6
5 2 12 11 8
6 2 3 13 12
7 3 4 14 13
8 4 5 15 14
9 9 10 16 19
10 16 18 20 19
11 18 17 21 20
12 17 11 12 21
13 12 13 22 21
14 13 14 23 22
15 14 15 24 23
16 25
17 0.0 0.0
18 12.7 0.0
19 25.4 0.0
20 38.1 0.0
21 50.8 0.0
22 63.5 0.0
23 12.7 11.7
24 8.20987193947 13.5598719395
25 17.1901280605 13.5598719395
26 0.0 15.25
27 6.35 18.05
28 19.05 18.05
29 25.4 15.25
30 38.1 15.25
31 50.8 15.25
32 63.5 15.25
33 8.20987193947 22.5401280605
34 17.1901280605 22.5401280605
35 12.7 24.4
36 0.0 30.5
37 12.7 30.5
38 25.4 30.5
39 38.1 30.5
40 50.8 30.5
41 63.5 30.5
```