

博士論文

弾性波の伝播挙動を利用した膜上のシワの検出

指導教官 横関 智弘准教授

37127054 赤池 祐介

平成 27 年 2 月 13 日

目次

第 1 章	研究背景と弾性波を用いたシワの同定手法の提案	6
1.1	大規模膜構造	6
1.2	従来のシワ検知手法	7
1.2.1	ドットプロジェクション法	7
1.2.2	サンプリングモアレ法	7
1.3	弾性波を用いたシワの検知手法	7
1.4	本論文の構成	9
第 2 章	シワを伝播する弾性波	11
2.1	はじめに	11
2.2	シェルの式を用いた弾性波の式	11
2.3	円周方向に伝播する弾性波	14
2.3.1	せん断波の波数	16
2.3.2	曲げ波の波数	17
2.3.3	縦波の波数	18
2.3.4	縦波の位相速度の比較	19
2.4	板を伝播する Lamb 波	21
2.5	シェルの方程式を用いた透過率の解析手法	25
2.5.1	透過率の定義	25
2.5.2	x 方向の波数の連続性	27
2.5.3	各要素内部での振動	28
2.5.4	応力と変位の連続性	29
2.5.5	漸化式の解き方	31
2.5.6	正弦波形状のシワに対する透過率	33
2.6	まとめ	34
第 3 章	シワが弾性波の伝播に与える影響	36
3.1	はじめに	36
3.2	簡略化シワ形状モデル	36
3.3	簡略化モデルの形状パラメータの影響	37
3.3.1	曲率の大きさの影響	38
3.3.2	円筒部中心角の影響	39
3.3.3	平坦部長さの影響	40
3.3.4	シワの数の影響	44
3.3.5	弾性波の入射角の影響	44
3.4	連続的に曲率が変化する場合の透過率	48
3.4.1	正弦波形状の場合	48
3.5	まとめ	53

第 4 章	有限要素法による解析との比較	54
4.1	はじめに	54
4.2	弾性波入射角が 0 の場合の解析	54
4.2.1	モデル端での反射を防ぐダッシュポット	55
4.2.2	解析結果	57
4.3	弾性波入射角が 0 ではない場合の解析	57
4.3.1	透過した縦波の評価	58
4.3.2	解析結果	61
4.4	まとめ	61
第 5 章	弾性波透過率からのシワ形状の推定	63
5.1	はじめに	63
5.2	形状推定問題の定式化	63
5.2.1	透過率算出の簡略化	65
5.2.2	初期条件の決定と最適化手法	65
5.3	形状推定結果とその考察	67
5.3.1	正弦波形状のシワに対する推定	67
5.3.2	メキシカンハット形状のシワに対する推定	69
5.3.3	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の推定	72
5.4	まとめ	76
第 6 章	非接触振動計による弾性波伝播計測実験	78
6.1	はじめに	78
6.2	非接触多軸振動計	78
6.3	弾性波伝播計測実験	80
6.3.1	実験の概要	80
6.3.2	実験に用いる膜の密度・剛性の計測	86
6.3.3	弾性波透過率の取得	86
6.3.4	結果の考察	93
6.4	まとめ	99
第 7 章	結言	100

目 次

1.1	ソーラーセイルを展開した IKAROS 出典) http://www.jspec.jaxa.jp/activity/ikaros.html	6
1.2	光点を投影された膜 出典) 参考文献 [18]	8
1.3	弾性波と Wrinkle の位置関係	9
1.4	膜上に配置されたアクチュエータとセンサ	10
2.1	円筒殻と座標系	11
2.2	円筒部と平坦部での縦波の位相速度の比較	14
2.3	円筒部と平坦部でのせん断波の位相速度の比較	15
2.4	円筒部と平坦部での曲げ波の位相速度の比較	15
2.5	平面波の進行方向	16
2.6	平面波の進行方向が θ 方向に沿った場合の縦波の位相速度の比較	19
2.7	円筒の半径方向への伸縮	20
2.8	θ 方向の応力	20
2.9	円筒板を伝播する Lamb 波の位相速度	24
2.10	Lamb 波とシェルによる波の比較	25
2.11	両側を長さ無限大の平坦な部分に挟まれたシワ	26
2.12	シワの一定曲率微小要素への分割	26
2.13	x 方向の波長の連続性	27
2.14	x 方向波数 k と θ 方向波数 s	28
2.15	シワに対する透過率の計算例	34
2.16	シワに対する透過率の厚みによる変化	35
3.1	平坦な領域とシワ	36
3.2	簡略化シワモデル	37
3.3	弾性波の入射角	37
3.4	曲率の影響を考察するモデル	38
3.5	円筒部曲率の変化の透過率に対する影響	39
3.6	円筒部中心角の変化の透過率に対する影響	40
3.7	平坦部長さの影響を考察するモデル	41
3.8	平坦部長さの変化の透過率に対する影響	41
3.9	ピーク位置を考察するモデル	42
3.10	ピーク位置の推定結果	45
3.11	シワの数の透過率に対する影響	46
3.12	弾性波入射角の透過率に対する影響	47
3.13	正弦波形状のシワ	49
3.14	頂点間距離	49
3.15	正弦波形状 1 と 2 に対する透過率の比較	50
3.16	正弦波形状 1 と 3 に対する透過率の比較	50

3.17	正弦波形状 1 と 4 に対する透過率の比較	51
3.18	正弦波形状 1 と 5 に対する透過率の比較	51
3.19	縦波のみが入射した場合の入射波の縦波と透過波の曲げ波成分の振幅の比	52
3.20	正弦波形状に対する曲げ波の透過率	53
4.1	二次元有限要素法モデル	54
4.2	有限要素法モデルの左端と入力される振動	56
4.3	有限要素法モデルの右端とダッシュポット	56
4.4	周波数 90kHz の場合の振動の形状	57
4.5	有限要素法とシェルモデルでの解析による結果の比較	58
4.6	三次元の有限要素法モデル	59
4.7	入射波と斜めに伝播する反射波	60
4.8	透過した縦波の進行方向と誘起されたせん断波の進行方向	60
4.9	3次元有限要素法モデルとシェルモデルによる透過率の解析結果の比較	61
5.1	簡略化シワモデル	63
5.2	正弦波形状と簡略化モデルの比較	64
5.3	正弦波形状と簡略化モデルの透過率の比較	64
5.4	曲げ波・減衰モードを考慮した場合としていない場合の透過率の比較	66
5.5	正弦波形状と簡略化モデル初期形状の透過率の比較	67
5.6	正弦波形状 1 に対する推定結果の透過率	68
5.7	正弦波形状 1 に対する推定結果	68
5.8	正弦波形状 2 に対する推定結果の透過率	70
5.9	正弦波形状 2 に対する推定結果	70
5.10	正弦波形状 3 に対する推定結果の透過率	71
5.11	正弦波形状 3 に対する推定結果	71
5.12	メキシカンハット形状	73
5.13	メキシカンハット形状に対する推定結果の透過率	73
5.14	メキシカンハット形状に対する推定結果	73
5.15	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状	74
5.16	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の曲率の分布	75
5.17	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状に対する透過率	75
5.18	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状に対する推定結果	76
5.19	最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の透過率の比較	77
6.1	多軸振動非接触自動計測システム MaVES	79
6.2	MaVES レーザードップラーセンサ	79
6.3	カプトン膜に照射された MaVES のレーザー	80
6.4	実験に用いられた膜の概略図	80
6.5	シワ形成の為のジグ	81
6.6	曲率半径 3mm のシワを与えるジグ	82
6.7	曲率半径 15mm のシワを与えるジグ	82
6.8	弾性波のシワに対する入射角が 0 の場合	83
6.9	弾性波のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合	83
6.10	曲率半径 3mm のシワが入射角 0 となるよう形成された膜	84

6.11	曲率半径 3mm のシワが入射角 $\pi/6$ となるよう形成された膜	84
6.12	MFC アクチュエータ	85
6.13	MFC アクチュエータ 出典) http://www.smart-material.com/MFC-product-main.html	85
6.14	膜のヤング率測定のための引張試験	87
6.15	引張試験試験片形状	88
6.16	膜の引張試験の荷重-変位曲線	88
6.17	MFC アクチュエータへの印加電圧	89
6.18	シワがない場合の計測点での y 方向変位 加振周波数 30kHz	89
6.19	シワがない場合の計測点での y 方向変位 加振周波数 100kHz	91
6.20	シワがない場合のフーリエ係数の変化 加振周波数 30kHz	91
6.21	入射側での振幅の比較	92
6.22	透過側での振幅の比較	92
6.23	曲率半径 3mm のシワに対する入射角が 0 の場合の透過率の比較	93
6.24	曲率半径 3mm のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合の透過率の比較	93
6.25	曲率半径 3mm、入射角 0 度の場合の実験結果に対する形状推定の結果	94
6.26	曲率半径 3mm の場合に作成されたシワの形状	95
6.27	曲率半径 15mm のシワに対する入射角が 0 の場合の透過率の比較	95
6.28	曲率半径 15mm のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合の透過率の比較	96
6.29	入射角 0 の場合の曲率半径 3mm と 15mm での透過率の実験結果の比較	96
6.30	入射角 $\pi/6$ の場合の曲率半径 3mm と 15mm での透過率の実験結果の比較	97
6.31	膜に残った曲げグセ	97
6.32	加振周波数 30kHz の場合の入射波の比較 曲率半径 3mm・入射角 0	98
6.33	加振周波数 30kHz の場合の入射波の比較 曲率半径 3mm・入射角 $\pi/6$	98
6.34	フーリエ係数の差分	99

第1章 研究背景と弾性波を用いたシワの同定手法の提案

1.1 大規模膜構造

宇宙開発の歴史の中で人工衛星の大きさは大規模化の一途をたどってきた。望遠鏡やアンテナはそのサイズが性能と直結し、人工衛星の性能向上とともに太陽電池の面積も大型化している。さらに近年では無重力であるという宇宙空間の利点を活かし、直径が100m オーダーの超大規模構造の構築も様々に検討されている。しかし現在宇宙への物資輸送の主流な手段はロケットが担っている。ロケットによる宇宙輸送ではそのペイロードの重量は打ち上げコストに大きく影響を与えるなど厳しい制約を受けてしまう。さらに H- A の場合でロケットのフェアリング外径は4m 程度であり、どのような大規模構造であっても打ち上げ時にはこのサイズに収まらねばならない [1]。

この宇宙構造物の軽量化・収納性の向上という要求を満たすために Gossamer 構造と呼ばれる紐・網などの柔軟な構成要素を用いた構造が多数研究されている [2]。膜構造はその代表的な例の一つであり、ケブラーなどの高強度の材料によって構成された非常に薄い膜を使用している。この膜の厚みは μm オーダーで巨大な面積を持つ構造物をごく軽量に構築可能な上に、打ち上げなどの輸送の際には折りたたむことで小さな体積に収められるため高強度で収納性の高い構造を実現可能である。通常の剛な構造と比較した場合、構造自体の剛性ではなく遠心力などで構造を保持することで構造の重量が低減されておりソーラーセイルや望遠鏡の鏡面としての利用が期待されている [3, 4, 5]。

ソーラーセイルは太陽光の輻射圧を推進力に変換するための装置である [6, 7]。推進剤を消費せずに推進力を得られるという利点がある一方で、単位面積当たりの輻射圧は非常に小さいため大規模な膜面が必要とされる。このため膜の大規模化と軽量化という要求を非常に強く受ける構造である。図 1.1 に示した JAXA の IKAROS によってソーラーセイルによる光子加速は実証されており、セイルとしては一辺 14m、厚さ $7.5\mu\text{m}$ の正方形形状のカプトン膜が使用されている [8]。

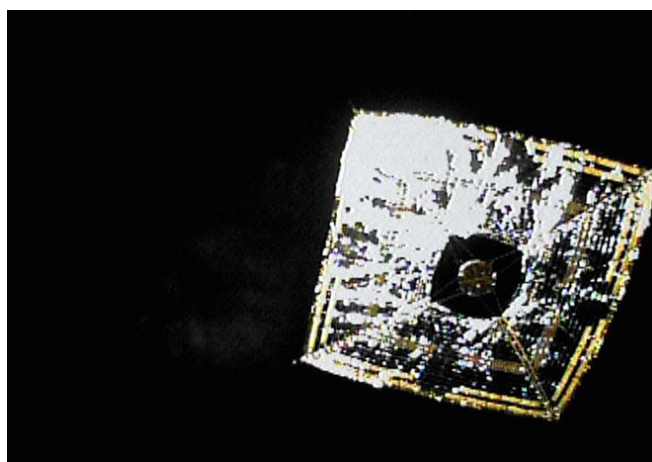


図 1.1: ソーラーセイルを展開した IKAROS (出典) <http://www.jspec.jaxa.jp/activity/ikaros.html>

膜構造の高い軽量性・収納性という長所の一方で膜構造特有の問題としてシワが生じやすいという難点も抱えている。膜構造は通常の運用では平坦な面であることが期待されている。大きな面外変形を発生させるシワは望遠鏡の場合は鏡面精度の低下を招き、ソーラセルの場合でも予期せぬトルクの発生や反射効率の低下など膜構造の性能低下の要因となる。このようなシワの発生の原因は非常に薄く曲げ剛性の低い構造に圧縮応力が加えられてしまうことにより発生する座屈であり、設計の段階で膜構造には引っ張り応力のみがかかるように設計される。しかしながら、そのような状況を常に再現し続けることは困難であり、実用上の構造には部分的であれ圧縮応力により生じたシワが発生してしまう可能性がある。このため膜構造のシワを発見・修復する為の技術が必要となっている。

1.2 従来のシワ検知手法

膜構造においてシワの発生は避けることの出来ない問題である。このため、シワが発生することにより膜に与えられる影響や、その発見・修復の為の研究は多く行われてきた。[10, 11, 12, 13, 14] シワは形状の変形であり基本的な物性が大きく変化するものではない、一方で形状の変形は大きく目視で容易に判別することが可能である。そのためか、過去のシワ検知の研究としてはカメラを用いて得られた画像を利用した光学的な手法が多い[15, 16, 17]。ここでは光学的な処理手法としてドットプロジェクションとサンプリングモアレ法について述べる。

1.2.1 ドットプロジェクション法

ドットプロジェクションでは文字通り膜面上に点を投影する[18, 19, 20, 21]。図(1.2)この投影された点を光軸から離れた地点から観測すると、物体に面外方向の変形が生じた場合に光点が移動して見える。この光点の移動を解析して、非接触で面の形状の情報を得ることができる。

1.2.2 サンプリングモアレ法

モアレとは間隔の異なる2つの格子を重ねた場合に生ずる縞模様であり、波のうなりと類似した現象である。従って2つの等間隔の格子を用意すれば、片方の格子の変形をモアレの発生として捉えることができる。サンプリングモアレ法はこの2つの格子の片方としてデジタルカメラの画素を使用している。デジタルカメラの画素を一定間隔に間引いて計測することで、物体の変形や形状を計測することができる。

これらの手法は柔軟で外力で容易に変形してしまう膜の変形・シワの発生を、非接触で良い精度で計測することが可能である一方で今後膜構造が大規模化していく中で、膜面全体をカメラで捉える事は難しくなると考えられる。IKAROSでは運用中のソーラーセイル全体の写真を撮影することに成功しそれを用いた膜面の形状推定も行われているが[9]、画像の取得のためにカメラを子機に載せて放出しており恒常的に画像を得られた訳ではない。また、宇宙空間での利用においては太陽の存在から画像を得るための光源の管理も必要となる。

したがって、軌道上での大規模膜構造の運用のためにはカメラでは捉えられない部分に適用し、従来手法を補完・補助できる光学的でない手法が必要となる。

1.3 弾性波を用いたシワの検知手法

光学的な手法とは異なる新たな軌道上での膜面上のしわ検知手法として、弾性波の伝播を利用した手法を提案する。弾性波を用いて媒質の情報を得ることは広く行われており、超音波探傷はその代

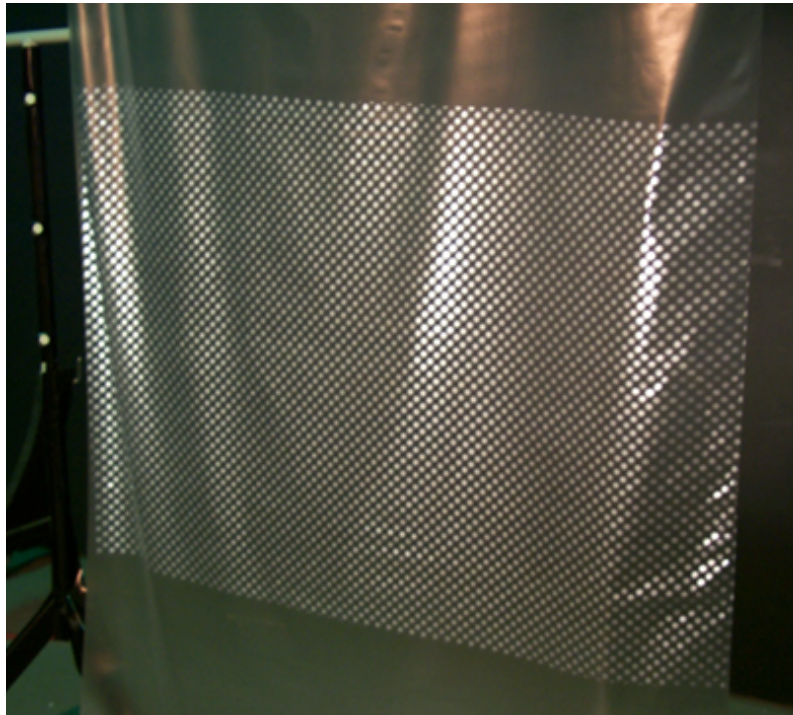


図 1.2: 光点を投影された膜 出典) 参考文献 [18]

表例である [22][23][24][25]。超音波探傷では剛性の違いなどによる弾性波の伝播の変化から生じた反射波や透過率の変化を観測することで異物の検知などを行うことができる。逆に媒質中に積極的に異物・不連続性を導入することで弾性波の伝播をコントロールする手法に対しても研究が行われており、周期的不連続性を持つことで弾性波に対し特定の周波数を遮断するフィルタの能力を持たせる事ができる。[26]

また、板などの媒質中の弾性波の伝播は密度・剛性が同じであっても厚み・曲率・周波数などによる影響を受け変化する。同じ材料から作られた物体中の形状などの変化に対する弾性波の周波数応答に関する研究も多くなされている。岡部らは CFRP 積層板の層間のはく離によって板の厚みが変化し、積層板を伝播する弾性波のモードが変化することを利用して、弾性波の周波数ごとの応答を観測することではく離の検知を行った [27]。また、Wu らは一定曲率を有する棒に対して半直線部分を入射部分とし同様の透過側を持った場合について弾性波の伝播を考察し、弾性波の周波数と曲率・曲がった部分を越えて伝播する弾性波のエネルギーの関係について導いた [28, 29]。Soe-Knudsen らは曲がったパイプを伝播する弾性波について計算を行い、曲率を持つパイプを複数組み合わせることで弾性波に対するフィルタとしての機能を発揮させられることを示し、最適化手法を用いてその設計を行った。[30, 31, 32]

シワと弾性波の伝播方向の関係を考えた場合、図 1.3 の様に大きく分けてシワの存在する方向と平行方向に弾性波が入射するものと、シワに対して垂直方向から入射するものがある。平行側から入射させる場合に関しては宮岡 [33] のシワの存在による膜の断面二次モーメントの変化とそれによる弾性波の伝播速度の変化を利用した研究がある。しかし、本研究においては垂直方向から弾性波が入射した場合にシワが波に対して与える影響を利用した。

シワに対して垂直な方向から弾性波が入射した場合、平坦な部分とシワのある部分を波が伝播するがこの両者の間では構成する材料が同じであるため物性値に違いはない。一方で平坦な部分では

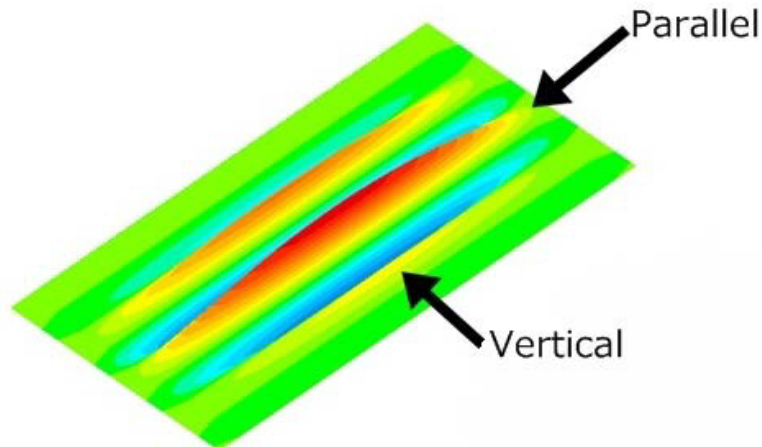


図 1.3: 弾性波と Wrinkle の位置関係

曲率が無いのに対してシワはそれと比較して大きな曲率を持つ。曲率を有する曲がった梁に対する弾性波の伝播に関する研究は多くなされており [34, 35, 36, 37]、曲率が存在することにより平坦な場合と弾性波の伝播の仕方が異なる事が示されている。膜の場合であってもこの曲率の存在により両者の間で弾性波の伝播に違いが生じ、その境界で反射が生じシワが弾性波に影響を与える。またシワの持つ曲率・形状や入射する弾性波の周波数により弾性波の伝播に変化が生じるため、シワの与える影響もそれにともなって変化する。

図 1.4 のように膜上に振動発生用のアクチュエータと計測用のセンサを配置する場合を考えると、アクチュエータとセンサの間にシワが発生した時、シワによって弾性波の一部が反射されセンサに到達する弾性波の強度が変化する。この強度の変化を周波数を変更させつつ観測することでシワの形状を推定できると考えられる。また、反射された波からはシワの位置が推定できると考えられる。

1.4 本論文の構成

本論文では軌道上において従来の膜面の形状計測を補助・補完するために、シワの形状を膜内部を伝播する弾性波の伝播から推算する手法の確立を目指す。まず第 2 章においてある一定の曲率を持つ膜での弾性波の方程式を導出する。シワの影響の検出においては同じ曲率であっても、より平坦な場合と異なる伝播の様相を見せる弾性波が有用である。ここではそのような波の種類と特に影響を受けやすい周波数帯について論じる。第 3 章では、第 2 章で得られた弾性波の方程式を元にシワが弾性波に与える影響について検討する。シワの形状と弾性波への影響の関係を明確化するためにシワの形状を簡略化したモデルを作成し、そのモデルが持つパラメータと弾性波が受ける影響の関係について考察した。第 4 章では有限要素法による計算を行い、その結果と第 3 章における計算結果との比較を行った。第 5 章では第 3 章でも用いた簡略したモデルのパラメータの最適化を通じて弾性波が受けた影響からのシワの形状の推定を行った。最後に第 6 章で結論をまとめている。

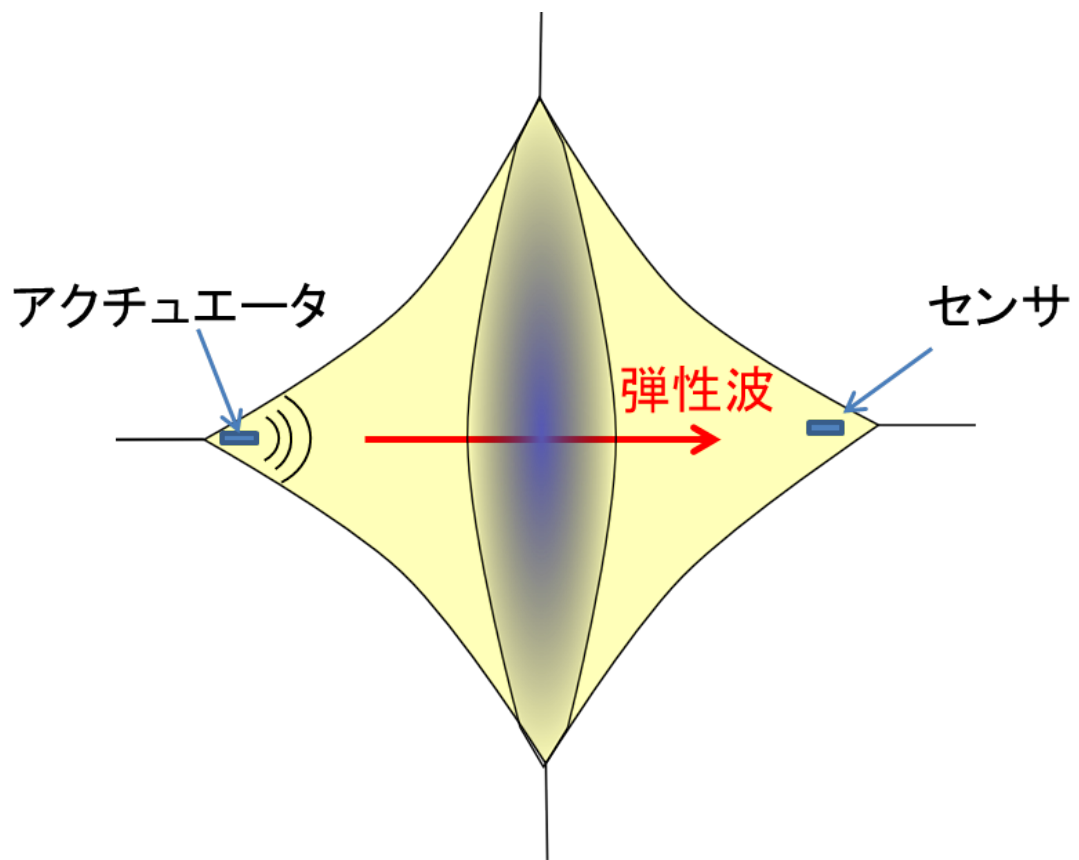


図 1.4: 膜上に配置されたアクチュエータとセンサ

第2章 シワを伝播する弾性波

2.1 はじめに

弾性波を用いたシワの検知においては、膜面を伝播する弾性波の方程式を導くことが必要不可欠である。ここでは微小振幅の平面波を仮定して平坦な場合と曲率のある場合のそれぞれに対して計算を行う。曲率が存在する場合に平坦な場合と大きく異なる伝播の様相を見せる波があれば、それはシワがある部分とない部分でも違いを示しシワの同定に役立てられると考えられる。

ここではまずはじめに、シェルの方程式を用いて膜を伝播する平面波の導き方を示す。また、その特別な場合として二次元問題として扱える場合について表し、材料定数や曲率の寄与について議論するとともに、板を伝播する弾性波の代表的な形態である Lamb 波との比較を行う。

その後、シワを曲率の異なる複数の要素に分割することを考え、それら全体を伝播した波が受ける影響の計算方法について述べる。

2.2 シェルの式を用いた弾性波の式

ここでは膜に発生するシワの一部を一方向にのみ曲率をもった円筒殻として取り出し、円筒からの基礎方程式を用いてそこに伝播する弾性波の式について計算を行う。図 (2.1) のような円筒殻の一部とその座標系を考える。ここで T, Q, S は合応力、 M は合モーメントであるとして、この円筒殻に関する基礎方程式は式 (2.2.1) ~ (2.2.13) のように表される [38]。

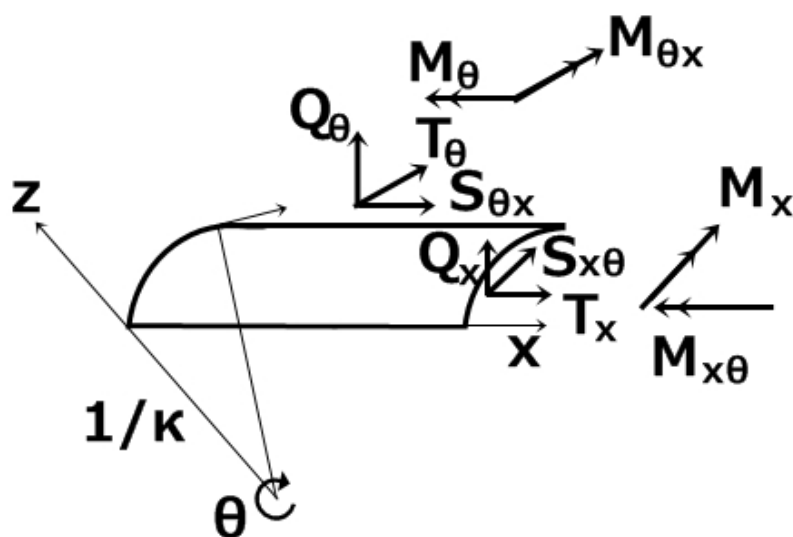


図 2.1: 円筒殻と座標系

x, θ, z 方向の平衡方程式

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \kappa \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial S_{x\theta}}{\partial x} + \kappa \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \kappa Q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \kappa \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \kappa T_\theta = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2.3)$$

θ, x 軸周りのモーメントの平衡方程式

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \kappa \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \kappa \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta = 0 \quad (2.2.5)$$

合応力の変位表示式

$$T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \kappa \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right\} - \kappa I_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2.6)$$

$$T_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right\} + \kappa^3 I_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \quad (2.2.7)$$

$$S_{x\theta} = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1-\nu}{2} \kappa^2 I_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (2.2.8)$$

$$S_{\theta x} = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1-\nu}{2} \kappa^2 I_p \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (2.2.9)$$

$$M_x = -I_p \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (2.2.10)$$

$$M_\theta = -I_p \left\{ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (2.2.11)$$

$$M_{x\theta} = -(1-\nu) \kappa I_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.2.12)$$

$$M_{\theta x} = -\frac{(1-\nu)\kappa}{2} I_p \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \kappa \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.2.13)$$

また、 $x - \theta$ 面内を伝播する平面波の式は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \cdot \exp(i\omega t - ikx - is\theta/\kappa) \quad (2.2.14)$$

で表される。

これを式 (2.2.1) ~ (2.2.13) に代入することで、平衡方程式の変位表示式 (2.2.15) が得られる。

$$D(k, s) \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = 0 \quad (2.2.15)$$

D(k,s) の (i, j) 要素を $D(k, s)_{ij}$ とすると

$$\begin{aligned}
D(k, s)_{11} &= I_p s^2 \kappa^2 (1 - \nu)^2 (1 + \nu) + h(2k^2 E + (1 - \nu)(s^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2)) \\
D(k, s)_{12} &= hksE(1 + \nu) \\
D(k, s)_{13} &= -ik\kappa(2hE\nu + I_p(1 - \nu^2)(2k^2 - s^2(1 - \nu))) \\
D(k, s)_{21} &= hksE(1 + \nu) \\
D(k, s)_{22} &= 3I_p k^2 \kappa^2 (1 - \nu)^2 (1 + \nu) + h(k^2 E(1 - \nu) + 2(s^2 E - (1 - \nu^2)\rho\omega^2)) \\
D(k, s)_{23} &= -is\kappa(2hE + I_p k^2(3 - \nu - 3\nu^2 + \nu^3)) \\
D(k, s)_{31} &= ik\kappa(2hE\nu + I_p(1 - \nu^2)(2k^2 - s^2(1 - \nu))) \\
D(k, s)_{32} &= is\kappa(2hE + I_p k^2(3 - \nu - 3\nu^2 + \nu^3)) \\
D(k, s)_{33} &= 2(I_p(k^4 + 2k^2 s^2 + (s^2 - \kappa^2)^2)(1 - \nu^2) + h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2))
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

となる。自明でない解を得るためには D(k,s) の行列式が 0 でなければならないので、平面波の x 方向の波数 k と θ 方向の波数 s の関係式 (2.2.17) が得られる。

$$Det(D(k, s)) = 0 \tag{2.2.17}$$

式 (2.2.17) は s^2 と k^2 の 4 次方程式となっており、片方を定めることで縦波・せん断波・曲げ波・減衰モードのそれぞれに対して、進行波と反射波のそれぞれの波数が得られる。式 (2.2.15) から、この波数を行列 $D(k, s)$ に代入して固有値 0 の固有ベクトルを求めることで、各振動モードの振動方向のベクトル $(U \ V \ W)^T$ が得られる。

特に平坦な場合を考えれば、D(k,s) は

$$\begin{aligned}
D(k, s)_{11} &= h(2k^2 E + (1 - \nu)(s^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2)) \\
D(k, s)_{12} &= D(k, s)_{21} = hksE(1 + \nu) \\
D(k, s)_{22} &= h(k^2 E(1 - \nu) + 2(s^2 E - (1 - \nu^2)\rho\omega^2)) \\
D(k, s)_{13} &= D(k, s)_{23} = D(k, s)_{31} = D(k, s)_{32} = 0 \\
D(k, s)_{33} &= 2(1 - \nu^2)(I_p(k^2 + s^2)^2 + h\rho\omega^2)
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

と簡略化され、式 (2.2.17) は

$$4(1 - \nu)(1 - \nu^2)\{E(k^2 + s^2) - (1 - \nu^2)\rho\omega^2\}\{E(k^2 + s^2) - 2(1 + \nu)\rho\omega^2\}\{I_p(k^2 + s^2)^2 + h\rho\omega^2\} = 0 \tag{2.2.19}$$

となる。これを解いて平坦な場合の波数はそれぞれ

$$k_l^2 + s_l^2 = (1 - \nu^2)\rho\omega^2 / E \quad (\text{縦波}) \tag{2.2.20}$$

$$k_s^2 + s_s^2 = 2(1 + \nu)\rho\omega^2 / E \quad (\text{せん断波}) \tag{2.2.21}$$

$$k_b^2 + s_b^2 = \sqrt{h\rho\omega^2 / I_p} \quad (\text{曲げ波}) \tag{2.2.22}$$

$$k_d^2 + s_d^2 = -\sqrt{h\rho\omega^2 / I_p} \quad (\text{減衰モード}) \tag{2.2.23}$$

$$\tag{2.2.24}$$

として得られる。

しかし、曲率 κ が 0 でない場合は式 (2.2.17) の解析解は複雑な形になるため、数式処理ソフト Mathematica を用いて解を求めた。表 2.1 に示すカプトン膜の物性値を用いて計算された、曲率 $\kappa = 10^3$ の円筒部を伝播する縦波・曲げ波・せん断波の円筒の位相速度と平坦な場合の比較を図 2.2・2.3・2.4 に示す。ただし、図 2.5 に示すように平面波が θ 方向から $\psi = \pi/6$ だけ傾いた方向に進むように、

$$k = s \cdot \tan \pi/6 \tag{2.2.25}$$

とし、位相速度 V_p は

$$V_p = \omega / \sqrt{k^2 + s^2} \quad (2.2.26)$$

で計算される。

表 2.1: カプトン膜の物性値

ヤング率 E	3.4GPa
ポアソン比 ν	0.3
密度 ρ	1450kg/m ³
厚み h	12.5 μ m

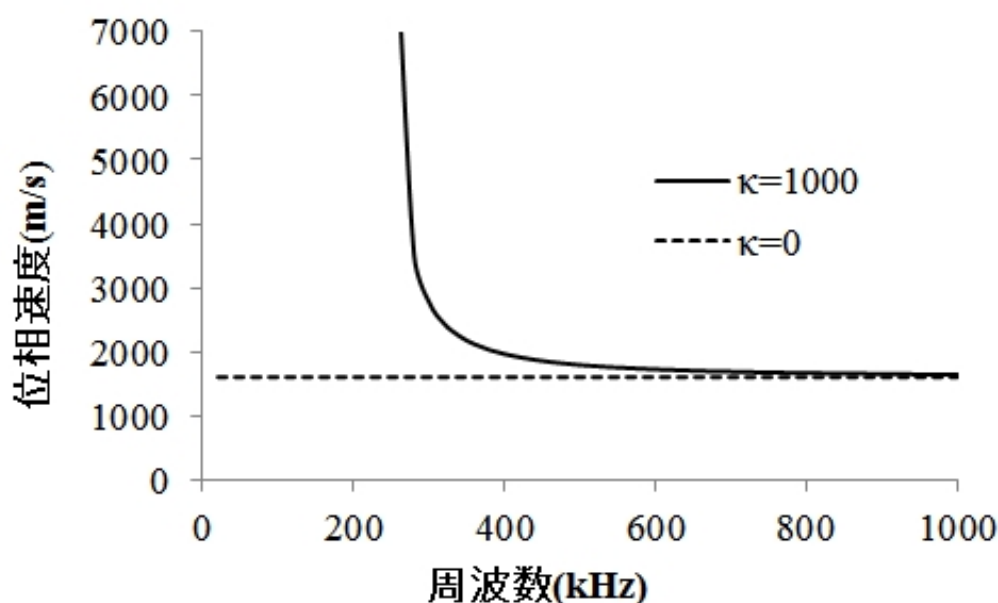


図 2.2: 円筒部と平坦部での縦波の位相速度の比較

特に縦波の周波数が低い領域で平坦な場合と大きく差が生じている様子がわかる。平坦な部分との差が大きい弾性波ほど、曲率の有るシワによる影響を強く受けるため検知のための有用性は高いと考えられる。

2.3 円周方向に伝播する弾性波

前項で低周波の縦波が平坦な場合と曲率のある場合で大きく差を見せることが示されたが、平面波の進行方向が任意の場合は式 (2.2.17) の解析解は複雑であり、特に顕著な差を見せる周波数帯と形状のパラメータなどとの関係性を具体的に示すことは出来なかった。ここでは平面波の進行方向が θ 方向に沿った場合について考察を行い、曲率とそれが弾性波に与える影響に関して具体的な関係を導出する。

図 2.5 から、平面波が θ 方向にそって進み $\psi = 0$ である場合

$$k = 0 \quad (2.3.1)$$

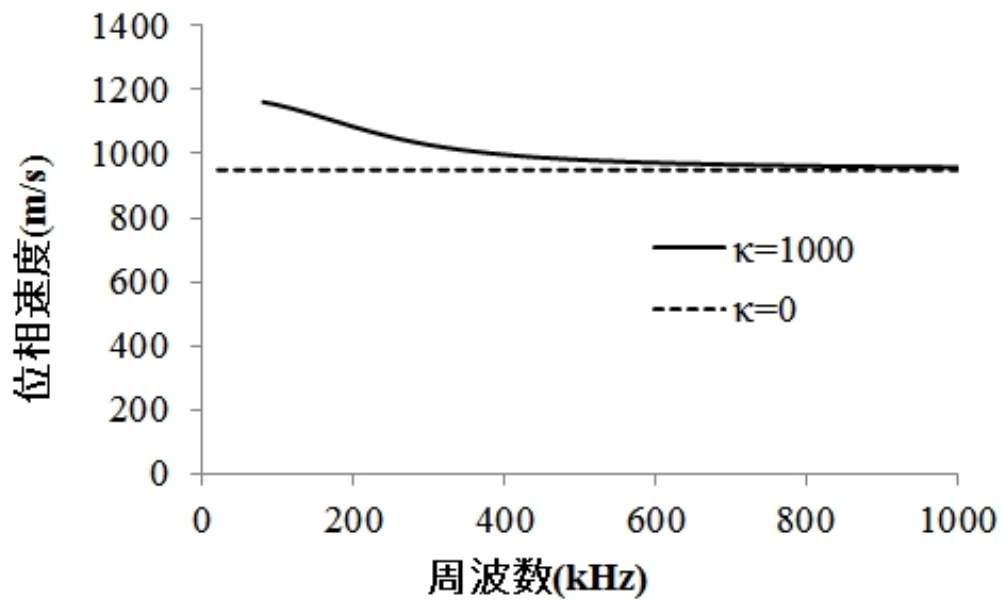


図 2.3: 円筒部と平坦部でのせん断波の位相速度の比較

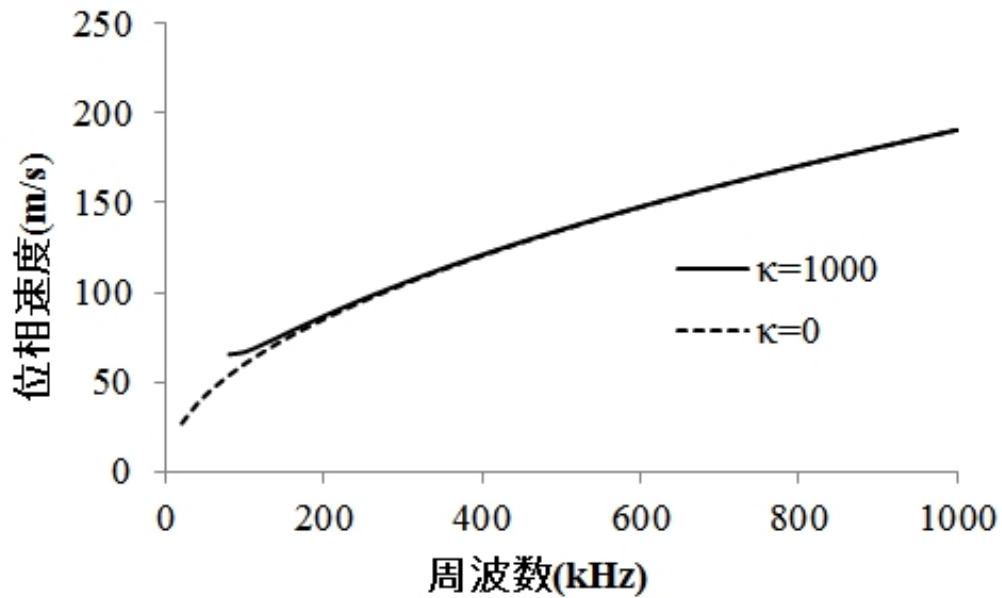


図 2.4: 円筒部と平坦部での曲げ波の位相速度の比較

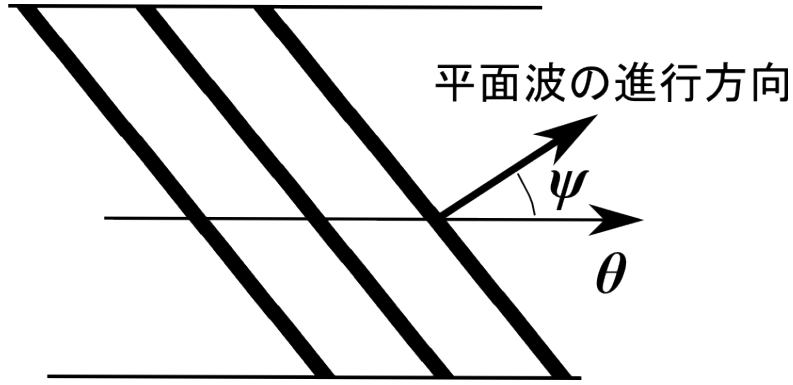


図 2.5: 平面波の進行方向

となる。このとき式 (2.2.16) は $k = 0$ を代入して

$$\begin{aligned}
 D(0, s)_{11} &= I_p s^2 \kappa^2 (1 - \nu)^2 (1 + \nu) + h(1 - \nu)(s^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2) \\
 D(0, s)_{12} &= 0 \\
 D(0, s)_{13} &= 0 \\
 D(0, s)_{21} &= 0 \\
 D(0, s)_{22} &= 2h(s^2 E - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) \\
 D(0, s)_{23} &= -2iskhE \\
 D(0, s)_{31} &= 0 \\
 D(0, s)_{32} &= 2iskhE \\
 D(0, s)_{33} &= 2(I_p(s^2 - \kappa^2)^2(1 - \nu^2) + h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2))
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

と簡略化される。平衡方程式 (2.2.15) と式 (2.3.2) をみると $k = 0$ の時は U と V, W に関する式が独立することが分かる。

$D(0, s)$ の行列式は

$$\begin{aligned}
 &4h \{ I_p s^2 \kappa^2 (1 - \nu)^2 (1 + \nu) + h(1 - \nu)(s^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2) \} \\
 &\left\{ (Es^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) (h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) + I_p(1 - \nu^2)(s^2 - \kappa^2)^2) - E^2 h \kappa^2 s^2 \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

となる。

2.3.1 せん断波の波数

このうち式 (2.3.3) の前半部からせん断波の方程式が導かれる。膜が非常に薄く

$$I_p \ll 1 \tag{2.3.4}$$

であることを考慮すれば I_p の含まれる項を無視して

$$(1 - \nu)(s^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2) = 0 \tag{2.3.5}$$

となり、その波数 s_s は

$$s_s = \pm \sqrt{\frac{2(1 + \nu)\rho\omega^2}{E}} \tag{2.3.6}$$

となる。これを $D(0, s)$ に代入して $I_p \ll 1$ とすれば

$$D(0, s_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h(s_s^2 E - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) & -2is_s\kappa hE \\ 0 & 2is_s\kappa hE & 2h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

が得られ、固有値 0 の固有ベクトルは $(1, 0, 0)^T$ となる。したがってせん断波 $f_s(\theta, t)$ の式は

$$f_s(\theta, t) = C_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{2(1 + \nu)\rho\omega^2}{E}}\frac{\theta}{\kappa} + i\omega t\right) \quad (2.3.8)$$

と書くことができる。ここで C_s はせん断波の振幅を表す定数である。

2.3.2 曲げ波の波数

一方で式 (2.3.3) の後半部は、平坦部の曲げ波と同程度の波数を考えて $s \propto (1/I_p)^{(1/4)}$ であった場合、 $s = \gamma(1/I_p)^{(1/4)}$ とおいて

$$\left(\frac{\gamma^2 E}{\sqrt{I_p}} - (1 - \nu^2)\rho\omega^2\right) \left(h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) + (1 - \nu^2)(\gamma^2 - \sqrt{I_p}\kappa^2)^2\right) - \frac{\gamma^2 E^2 h\kappa^2}{\sqrt{I_p}} = 0 \quad (2.3.9)$$

となる。これに $I_p \ll 1$ を考慮すれば $1/I_p^{-1/4}$ の項のみを考慮して、曲率がある場合の曲げ波・減衰モードの波数 s_b, s_d

$$\frac{\gamma^2 E}{\sqrt{I_p}} (h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) + (1 - \nu^2)\gamma^4) - \frac{\gamma^2 E^2 h\kappa^2}{\sqrt{I_p}} = 0 \quad (2.3.10)$$

$$\Leftrightarrow h\rho\omega^2 - \gamma^4 = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_b = \pm \left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \\ s_d = \pm i \left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

が得られる。式 (2.3.11) より γ は ω に依存しており、 ω が非常に小さな場合には式 (2.3.9) から式 (2.3.10) への省略は適当と言えなくなるが、ここではそのような場合は考えず式 (2.3.9) から式 (2.3.10) への省略が妥当となる周波数帯のみを扱う。

式 (2.3.12) のうち曲げ波に関しては符号が正のものの減衰モードに関しては負のものが進行波となる。曲げ波の進行波の波数を $D(0, s)$ に代入して $I_p \ll 1$ とすると

$$D(0, s_b) = \begin{pmatrix} h(1 - \nu)(s_b^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/2} hE & \mp 2i\left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \kappa hE \\ 0 & \pm 2i\left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \kappa hE & 2\kappa^2 hE \end{pmatrix} \quad (2.3.13)$$

となり、固有値 0 の固有ベクトルは

$$\left(0, \mp i\kappa \left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{-1/4}, 1\right)^T = (0, -i\kappa/s_b, 1)^T \quad (2.3.14)$$

で得られる。また同様に減衰モードについても固有値 0 の固有ベクトルは $(0, -i\kappa/s_d, 1)^T$ で得られる。

したがって曲げ波 $f_b(\theta, t)$ 、減衰モード $f_d(\theta, t)$ の式は

$$f_b(\theta, t) = C_b \begin{pmatrix} 0 \\ -i\kappa/s_b \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{is_b\theta}{\kappa} + i\omega t\right) \quad (2.3.15)$$

$$f_d(\theta, t) = C_d \begin{pmatrix} 0 \\ -i\kappa/s_d \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{is_d\theta}{\kappa} + i\omega t\right) \quad (2.3.16)$$

$$\begin{cases} s_b = \pm \left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \\ s_d = \pm i \left(\frac{h\rho\omega^2}{I_p}\right)^{1/4} \end{cases} \quad (2.3.17)$$

と書くことができる。周方向長さ $\theta\kappa$ に対する波数 s_b, s_d には曲率 κ が含まれておらず、曲げ波の波数は曲率の影響を受けないことが分かる。また、式 (2.3.15), (2.3.16) を見ると $\kappa = 0$ の平坦な部分とは異なり、曲げ波・減衰モードが ν 方向の変位を生じることが分かる。しかし膜に出来たシワのように膜の厚みに対して曲率半径が非常に大きくなる場合、ここで扱う周波数帯では曲げ波の波長も曲率半径と比較して大きくなりこの項も小さな値となる。したがって弾性波の伝播に与える影響も同様に小さくなり、曲げ波が曲率の変化によって受ける影響は小さいといえる。

2.3.3 縦波の波数

逆に平坦部の縦波のように、波数が曲げ波よりもかなり小さい場合を考え $s \ll (1/I_p)^{1/4}$ とすると後半部は $I_p \ll 1$ を考慮して

$$(Es^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) (h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2)) - E^2 h\kappa^2 s^2 = 0 \quad (2.3.18)$$

$$\Leftrightarrow -4h^2(1 - \nu^2)\rho\omega^2(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2 + Es^2) = 0 \quad (2.3.19)$$

となり、曲率がある場合の縦波の波数 s_l は

$$s_l = \pm \sqrt{-\kappa^2 + \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}} \quad (2.3.20)$$

と得られ、符号が正のものが進行波となる。

このとき

$$D(0, s_l) = \begin{pmatrix} h(1 - \nu)(s_l^2 E - 2(1 + \nu)\rho\omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & -2\kappa^2 h E & \mp 2\kappa h E \sqrt{\kappa^2 - \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}} \\ 0 & \pm 2\kappa h E \sqrt{\kappa^2 - \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}} & -2h(E\kappa^2 - (1 - \nu^2)\rho\omega^2) \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

であり、固有値 0 の固有ベクトルは

$$\left(0, 1, \pm \kappa \left(\kappa^2 - \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}\right)^{-1/2}\right)^T = (0, 1, -i\kappa/s_l)^T \quad (2.3.22)$$

で得られる。したがって縦波 $f_l(\theta, t)$ の式は

$$f_l(\theta, t) = C_l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm \kappa \left(\kappa^2 - \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}\right)^{-1/2} \end{pmatrix} \exp\left(\mp i \sqrt{-\kappa^2 + \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E}} \frac{\theta}{\kappa} + i\omega t\right) \quad (2.3.23)$$

と書くことができる。曲率が存在する場合でも式中に曲げ剛性 I_p は含まれておらず、厚みに依存しないことが分かる。

2.3.4 縦波の位相速度の比較

図 2.2 で低周波数で大きな差を示した縦波の位相速度に関して、表 2.1 に示したカプトン膜の物性値を用いて曲率 $\kappa = 1000$ の場合と平坦な場合 $\kappa = 0$ の比較を行った。

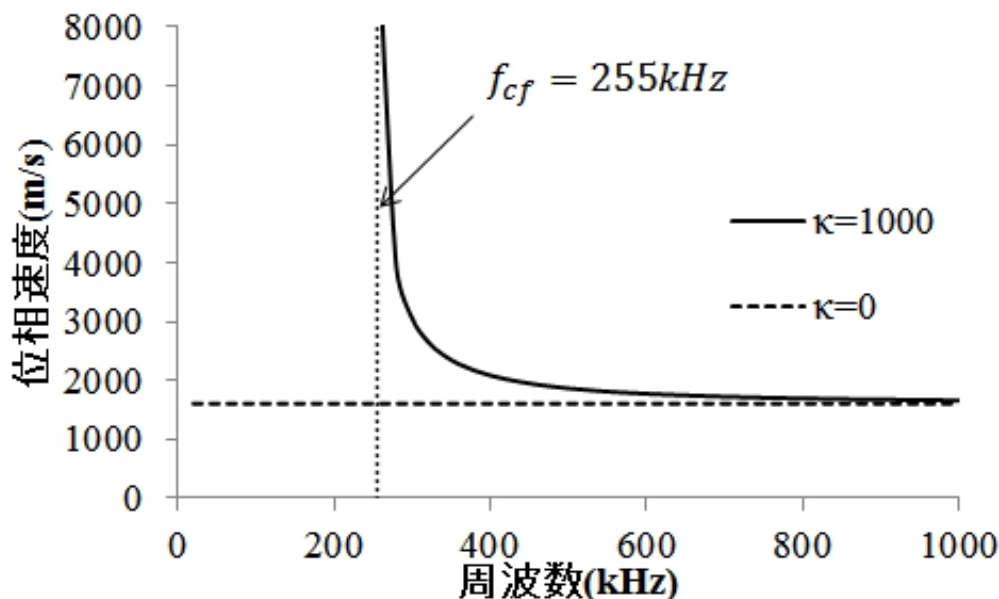


図 2.6: 平面波の進行方向が θ 方向に沿った場合の縦波の位相速度の比較

図 2.6 の結果に示すように、この場合でも周波数が下がるにつれ両者の乖離は大きくなる。曲率がある場合の縦波の位相速度はある周波数で無限大に発散している様子が見られる。位相速度 V_p が $V_p = \omega/s$ で計算されることを考えれば、このとき $s = 0$ となっており式 (2.3.20) からその周波数は

$$f_{cf} = \frac{\omega_{cf}}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} = \frac{\kappa c_{l0}}{2\pi} \quad (2.3.24)$$

と計算される。ここで c_{l0} は平坦な場合の縦波の位相速度

$$c_{l0} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} \quad (2.3.25)$$

である。この周波数近辺やそれよりも小さい周波数の縦波は曲率によって非常に大きな影響を受け、シワの検出の際に注目すべき周波数帯であるといえる。さらに、式 (2.3.24) からこの周波数は曲率に比例することが分かる。従って、より曲率の大きい部分がより高い周波数の縦波にまで影響を与え、影響を受けた周波数帯から曲率を推算できる可能性を示している。また、この周波数は図 2.7 に示すような半径 $1/\kappa$ の円筒が半径方向に伸縮する固有振動のうち最低次のものと一致しており、“circular frequency”とも呼ばれる。

このような大きな位相速度の変化は、力と変位の関係が変化することにより発生すると考えられる。図 2.8 のように $\psi = 0$ のときの縦波により発生する θ 方向の応力を考える。式 (2.3.23) より x 方

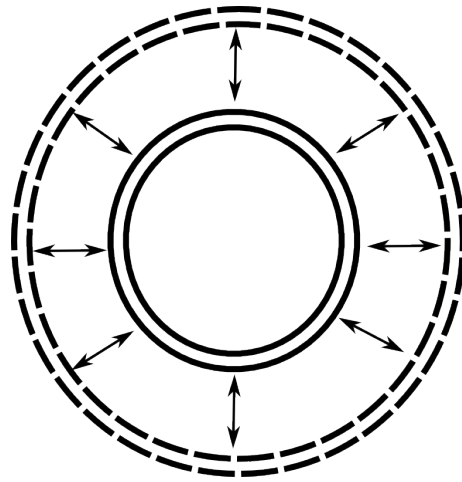


図 2.7: 円筒の半径方向への伸縮

向の変位 u は 0 であり、また $I_p \ll 1$ としているので式 (2.2.7) は以下のように簡略化される。

$$T_\theta = \frac{\kappa E h}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) = \frac{E h}{1 - \nu^2} (s v + \kappa w) \quad (2.3.26)$$

θ 方向の波数が s/κ で表されることを考えれば、第一項 $s v$ は周波数の増大で増加することが分かる。一方、第二項 κw は曲率の増大とともに増加する。したがって曲率の存在しない領域または周波数が高い場合には、 T_θ は主に第一項 $s v$ に依存し θ 方向の変位によって発生する。逆に周波数が低い場合には第二項 κw に依存することになり、 z 方向の変位によって発生すると言える。周波数の違いにより θ 軸方向の応力を発生させる要因が変化しており、これが縦波の伝播状態が大きく変化する原因であると考えられる。

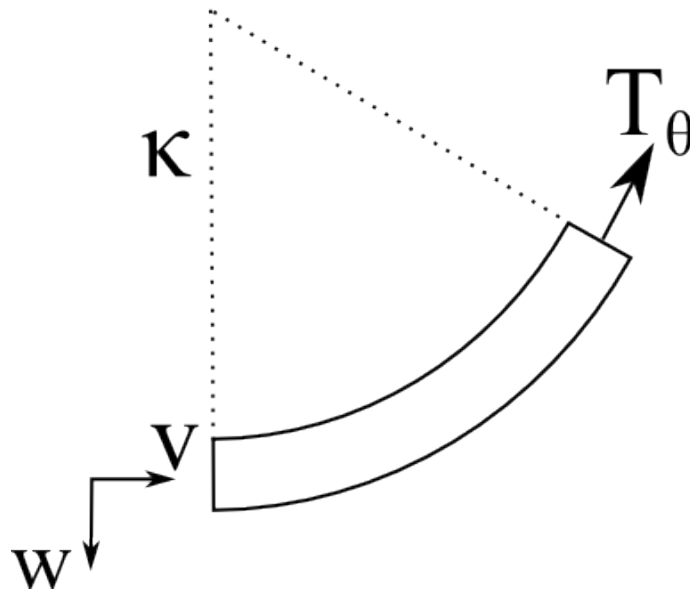


図 2.8: θ 方向の応力

2.4 板を伝播する Lamb 波

2.2、2.3 節では膜を薄いシェルとしてそれを伝播する弾性波の式を導出した。しかし、膜を板としてみなした場合伝播する弾性波は上下面の接近した境界によって反射され連成した Lamb 波となる [39]。Lamb 波は 2 つの近接した平面に挟まれた領域を伝播していくために、無限体中の波動と比較してエネルギー散逸が小さく遠距離まで伝播することが知られている。その一方で Lamb 波は分散性を持ち、シェルの式を用いて計算した場合と違って、板が平坦な場合であっても周波数の変化に伴ってその伝播速度が変化する。ここでは円筒板に対して 2.3 節で扱ったのと同様に周方向に平面波が伝播する場合の弾性波の位相速度を計算し、その結果について比較検討を行う。

図 2.1 に示したものと同一座標系を用いて、内径 a 、外径 b の円筒を伝播する弾性波について考える [40]。

u_x, u_θ, u_z をそれぞれ x, θ, z 方向の変位とすれば、円筒座標系での応力の変位表示式は λ, μ をラーメの定数として

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + 2\mu \left(\frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_\theta}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta x} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{z \partial \theta} \right) \\ \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

運動方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{z\theta}}{z} + \frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta x}}{z \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\sigma_{zx}}{z} \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

となる。 θ 方向に伝播する平面波であるので変位は x 方向に均一であるとして、 $\partial/\partial x = 0$ とすれば

それぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \left(\frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_\theta}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta x} = \mu \frac{\partial u_x}{z \partial \theta} \\ \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{z} + \frac{1}{z} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{z\theta}}{z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta x}}{z \partial \theta} + \frac{\sigma_{xz}}{z} \end{array} \right. \quad (2.4.4)$$

と書きなおされる。式 (2.4.3) を (2.4.4) に代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} u_z + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda + \mu}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu}{z^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} u_\theta \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \left\{ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} u_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\lambda + 3\mu}{z^2} + \frac{\lambda + \mu}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} u_z \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_x \quad (2.4.6)$$

が得られ、 θ, z 方向と x 方向の方程式は分離される。この2つの方程式を膜の上下面が自由面であるという境界条件

$$\sigma_z = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta x} = 0 \quad \text{at} \quad z = a, b \quad (2.4.7)$$

の下で解くことで平板内部を伝播する弾性波 Lamb 波の方程式は得られる。

式 (2.4.5) に関してこの境界値問題を解くために、ポテンシャル関数 ϕ, ψ を用いて u_z, u_θ を以下のように表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \exp(i\omega t) \\ u_\theta = \left\{ \frac{1}{z} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \exp(i\omega t) \end{array} \right. \quad (2.4.8)$$

これを (2.4.5) に代入して、以下のポテンシャル表示された運動方程式を得る。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \right) \phi + \frac{\mu}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right) \psi = 0 \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \right) \phi - \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right) \psi = 0 \quad (2.4.10)$$

これを満たすためには C_1, C_2 を定数として ϕ, ψ が以下の式を満たせば良い。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \phi = C_1 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \psi = C_2 \end{array} \right. \quad (2.4.11)$$

θ 方向に伝播する波を位相角速度は一定で、位相速度は周方向位置 z に比例すると仮定して変数分離する。

$$\begin{cases} \phi = \Phi(z) \exp(ikb\theta) + \frac{\lambda+2\mu}{\rho\omega^2} C_1 \\ \psi = \Psi(z) \exp(ikb\theta) + \frac{\mu}{\rho\omega^2} C_2 \end{cases} \quad (2.4.12)$$

(2.4.12) を (2.4.11) に代入して

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{1}{z}\Phi' + \left[\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} - \left(\frac{kb}{z}\right)^2 \right] \Phi = 0 \\ \Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left[\frac{\rho\omega^2}{\mu} - \left(\frac{kb}{z}\right)^2 \right] \Psi = 0 \end{cases} \quad (2.4.13)$$

を得る。(2.4.13) はベッセル方程式であり、 $c_T = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$, $c_L = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}$ とおいて

$$\begin{cases} \bar{z} = \frac{z}{b} \\ \bar{k} = kb \\ \bar{\omega} = \frac{\omega b}{c_T} \\ h = b - a \end{cases} \quad (2.4.14)$$

$$\begin{cases} \hat{k} = \frac{\bar{k}}{1-\eta} = kb \\ \hat{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{1-\eta} = \frac{\omega b}{c_T} \\ \eta = \frac{a}{b} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.4.15a) \\ (2.4.15b) \\ (2.4.15c) \end{array}$$

なる無次元係数を定義すれば、解は

$$\begin{cases} \Phi(\bar{z}) = A_1 J_{\hat{k}}\left(\frac{\hat{\omega}\bar{z}}{\bar{c}}\right) + A_2 Y_{\hat{k}}\left(\frac{\hat{\omega}\bar{z}}{\bar{c}}\right) \\ \Psi(\bar{z}) = A_3 J_{\hat{k}}(\hat{\omega}\bar{z}) + A_4 Y_{\hat{k}}(\hat{\omega}\bar{z}) \end{cases} \quad (2.4.16)$$

と書ける。ここで $J_{\hat{k}}(x)$, $Y_{\hat{k}}(x)$ は一種、二種の \hat{k} 次のベッセル関数である。

また、

$$\bar{c} = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (2.4.17)$$

であり、 ν はポアソン比である。

このポテンシャルから応力を求めると以下ようになる。

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{\mu \exp(ikb\theta)}{z^2} [\bar{c}^2 z^2 \Phi'' + (\bar{c}^2 - 2)z\Phi' - (\bar{c}^2 - 2)k^2 b^2 \Phi + 2ikbz\Psi' - 2ikb\Psi] & (2.4.18a) \\ \sigma_{z\theta} = \frac{\mu \exp(ikb\theta)}{z^2} [-z^2 \Psi^2 + z\Psi' - k^2 b^2 \Psi + 2ikbz\Phi' - 2ikb\Phi] & (2.4.18b) \end{cases}$$

これと境界条件 (2.4.7) から $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)^T$ についての次の連立方程式が導かれる。

$$\mathbf{D}(\hat{k}, \hat{\omega}, \eta) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2.4.19)$$

\mathbf{A} が非自明な解を得るために

$$\text{Det}[\mathbf{D}(\hat{k}, \hat{\omega}, \eta)] = 0 \quad (2.4.20)$$

この式は無次元板厚係数 η が与えられた場合に周波数と波数の関係を与え、これをプロットしたものは周波数分散曲線と呼ばれる。

(2.4.20) 式は \bar{k} の値に対して複数の解 $\bar{\omega}$ を与える。したがって分散曲線も複数描かれる。この一つ一つをブランチと呼び、伝播する波のモードに対応する。

また、(2.4.20) の解を (2.4.19) に代入することで、固有ベクトル A を得ることができる。 A は定数倍の自由度を持ち、一般性を失わずに $\|A\| = 1$ と正規化できる。

既知の \bar{k} に対する n 番目の根を $\bar{\omega}_n$ 、対応する固有ベクトルを A_n とすれば、このモードに対応する変位はポテンシャルの式 (2.4.16), (2.4.12) を変位をポテンシャルで表示した (2.4.8) に代入して

$$\begin{cases} u_z^{(n)} = W_z^{(n)}(\bar{z}) \exp(ikb\theta) \\ u_\theta^{(n)} = W_\theta^{(n)}(\bar{z}) \exp(ikb\theta) \end{cases} \quad (2.4.21)$$

$$W_z^{(n)}(\bar{z}) = \frac{1}{b\bar{z}} \left[A_1^{(n)} \frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} J'_k \left(\frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} \right) + A_2^{(n)} \frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} Y'_k \left(\frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} \right) + i\hat{k} A_3^{(n)} J_k(\hat{\omega}_n \bar{z}) + i\hat{k} A_4^{(n)} Y_k(\hat{\omega}_n \bar{z}) \right] \quad (2.4.22)$$

$$W_\theta^{(n)}(\bar{z}) = \frac{1}{b\bar{z}} \left[i\hat{k} A_1^{(n)} J_k \left(\frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} \right) + i\hat{k} A_2^{(n)} Y_k \left(\frac{\hat{\omega}_n \bar{z}}{c} \right) - A_3^{(n)} \hat{\omega}_n \bar{z} J'_k(\hat{\omega}_n \bar{z}) - A_4^{(n)} \hat{\omega}_n \bar{z} Y'_k(\hat{\omega}_n \bar{z}) \right] \quad (2.4.23)$$

が得られる。

2.3 節図 2.2 と同様に表 2.1 のパラメータを用いて $\kappa = 1000 (b = 1/\kappa = 10^{-3})$ の場合の結果と、シェルの方程式を用いた場合の計算結果の比較を図 2.9, 2.10 に示す。

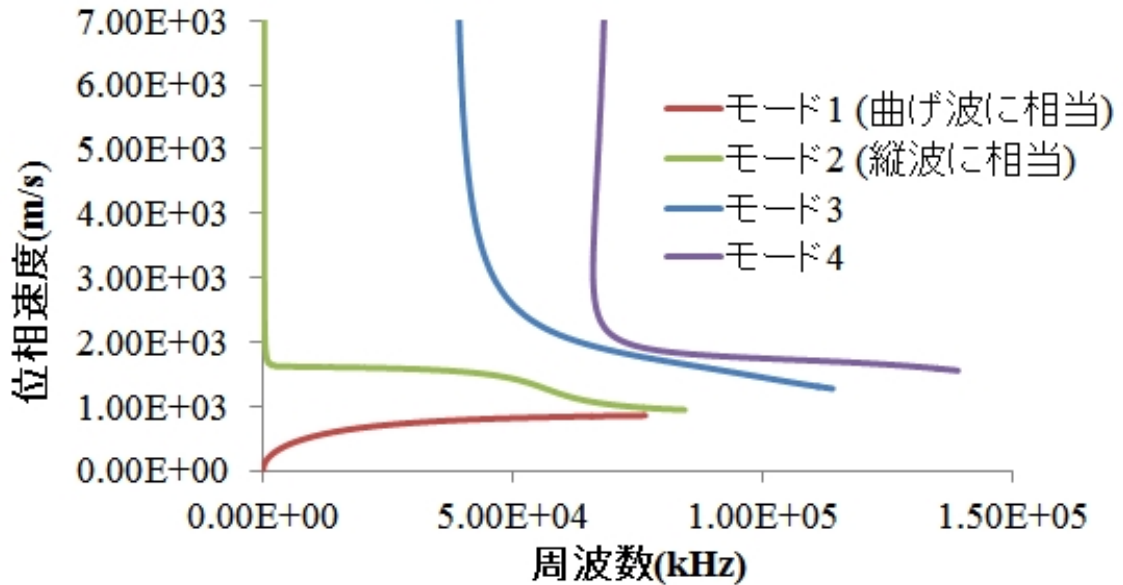


図 2.9: 円筒板を伝播する Lamb 波の位相速度

Lamb 波が高次モードまで現れていることに対し、シェルの式を用いた場合では Lamb 波の低次側から 2 つの波に相当するものしか現れていない。一方で周波数が低い領域では Lamb 波でも低次のモードしか現れず、曲率のある場合とない場合で大きく差が現れる低周波数近辺ではシェルの波が Lamb 波とよく一致している。本論文のシワの検知手法において注目されるのは、この曲率がある場合に縦波の位相速度に立ち上がりが見られる周波数近辺であるので、シェルの式は上下面の自由端を考慮した Lamb 波の十分な近似として用いることができる。

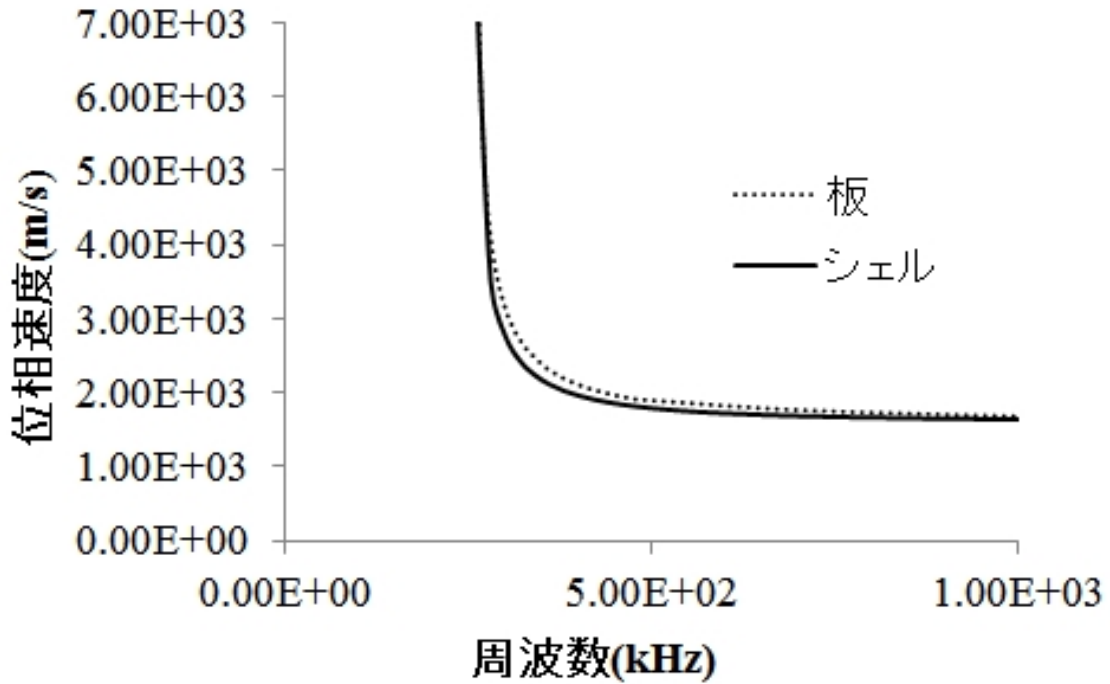


図 2.10: Lamb 波とシェルによる波の比較

2.5 シェルの方程式を用いた透過率の解析手法

ここでは曲率が一定な要素内を伝播するシェルの波の方程式を用いて、曲率が内部で変化するシワに対する弾性波の影響を計算する。図 2.11 に示すように両側を長さ無限大の平坦な部分に挟まれたシワを考える。実際のシワの形状は三次元的でありシワ内部で断面形状一定ではないが、ここでは問題の簡単化のために断面形状は一定であるものとする。シワの稜線方向に x 軸、 x 軸と垂直方向に膜の中央面に沿って y 軸、シワの厚み方向に z 軸を取り、 x 軸方向のモデルの長さは無限大であるとして端の影響は考慮しない。さらに y - z 面での断面を考え、図 2.12 のように各要素が一定曲率であるとみなせる微小な要素に分割する。

また、左側の長さ無限の平坦部要素を $j = 0$ 番目として左側から順に y 軸に沿って第 j 番目の要素と番号を振り右の平坦部要素で $j = n$ とする。各要素における変位や応力は本章で導いた 8 つの弾性波、縦波・せん断波・曲げ波・減衰モードの進行波と反射波のそれぞれの振幅を決定することによって定められる。この振幅を調整し各要素の間で応力などのパラメータが連続するようにすることで、入射波の振幅から透過波の振幅は計算される。

このようにしてシワに対して縦波のみが入射した場合に関して、透過した縦波の振幅を計算し、それらの比から透過率を求める。

2.5.1 透過率の定義

シワに対して片方の平面領域から縦波の平面波が入射した場合のシワを透過した波の大きさの評価方法としては、それぞれの持つ波のエネルギーの比を元にする方法などが有る [41, 42] が、ここでは両者の縦波成分の振幅の比を透過率として定義し、シワの影響の評価に用いる。

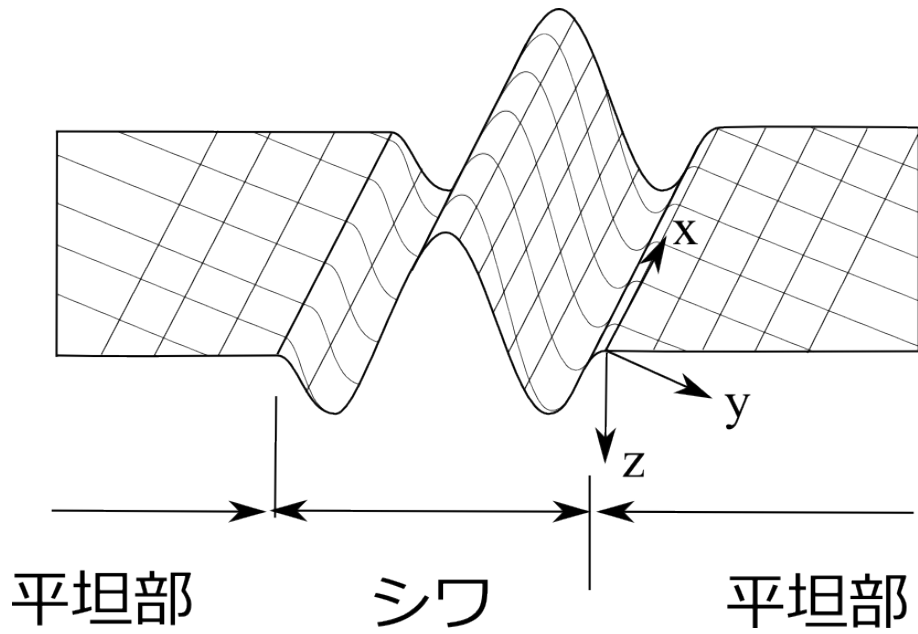


図 2.11: 両側を長さ無限大の平坦な部分に挟まれたシワ

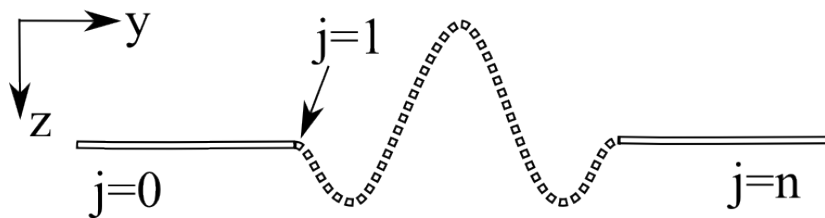
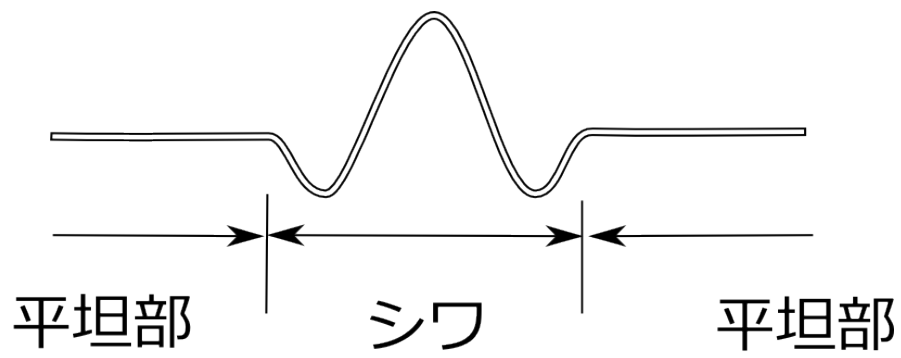


図 2.12: シワの一定曲率微小要素への分割

弾性波が入射する側の平坦部である第 0 要素において縦波以外の進行波が存在せず、透過側の平坦部である第 n 要素においてあらゆる反射波が存在しないと仮定する。この時の入射側の縦波の進行波の振幅を C_{0pl} 、透過側における縦波の進行波の振幅を C_{npl} として透過率 T はこれらの比の絶対値

$$T = \left| \frac{C_{npl}}{C_{0pl}} \right| \quad (2.5.1)$$

で定義される。

2.5.2 x 方向の波数の連続性

弾性波伝播の際の応力・変位の連続性を考えると平面波のみが伝播する場合、図 2.13 に示すように各要素間で x 方向の波長 $2\pi/k$ は同一である必要がある。したがって

$$k_j = k_0 \quad (2.5.2)$$

が成り立つ。添字 j は j 番目の要素における x 方向の波数であることを示している。

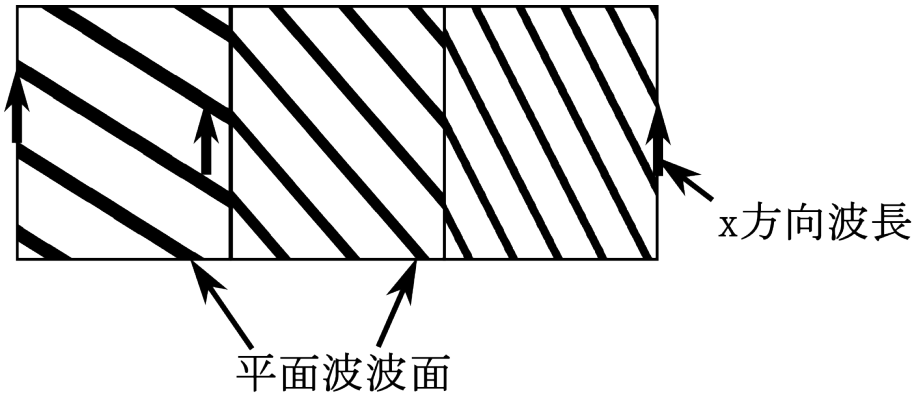


図 2.13: x 方向の波長の連続性

また、今回は単一周波の縦波の平面波のみがシワに入射した場合を考えている。このときの k_0 は第 0 要素が平坦であるため、式 (2.2.20) から

$$k_0^2 = \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E} - s_0^2 \quad (2.5.3)$$

と表される。また、弾性波の入射角が ψ であるため図 2.14 のように

$$\frac{\tan \psi}{k_0} = \frac{1}{s} \quad (2.5.4)$$

が成り立つ。よって式 (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4) から

$$k_j = k_0 = \frac{(1 - \nu^2)\rho\omega^2}{E} \cdot \sin \psi \quad (2.5.5)$$

が得られる。

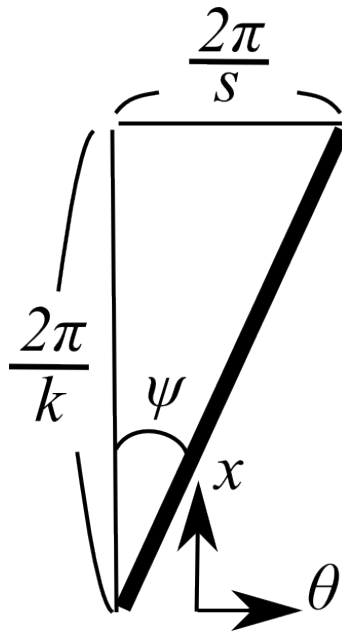


図 2.14: x 方向波数 k と θ 方向波数 s

2.5.3 各要素内部での振動

まず、第 j 番目の要素における弾性波の伝播を表す式を作成する。ヤング率 E ・ポアソン比 ν ・密度 ρ ・厚み h ・ x 方向の波数 k が全体で一定であるので、これらと要素 j での曲率 κ_j を用いて第 2 章の要領で弾性波の式は導出される。

式 (2.2.17) にヤング率 E ・ポアソン比 ν ・密度 ρ ・厚み h ・ x 方向の波数 k と第 j 要素での曲率 κ_j を代入することで第 j 要素内での 8 組の弾性波の y 方向の波数 s が得られ、それを式 (2.2.15) に代入して行列式 0 の固有ベクトルを計算することで振動方向のベクトル $(U \ V \ W)^T$ が求められる。図 3.2 の座標系とモデルの座標系を比較した場合、式 (2.2.14) で

$$y = \theta / \kappa \tag{2.5.6}$$

と置き換えることで各要素内部での弾性波の方程式が得られる。

したがって j 番目と $(j-1)$ 番目の要素の境界の y 座標を y_j とすると、進行波は $y = y_j$ での、反射波は $y = y_{j+1}$ での振幅を C として j 番目の要素内での変位は式 (2.5.7) のように表すことができる。また、ここで添字 l, s, b, d はそれぞれ縦波・せん断波・曲げ波・減衰モードの、 p, r は進行波と反射波に関する係数であることを示している。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} C_{jlp} \begin{pmatrix} U_{jlp} \\ V_{jlp} \\ W_{jlp} \end{pmatrix} e^{-is_{jlp}(y-y_j)} + C_{jsp} \begin{pmatrix} U_{jsp} \\ V_{jsp} \\ W_{jsp} \end{pmatrix} e^{-is_{jsp}(y-y_j)} + C_{jbp} \begin{pmatrix} U_{jbp} \\ V_{jbp} \\ W_{jbp} \end{pmatrix} e^{-is_{jbp}(y-y_j)} \\
& + C_{jdp} \begin{pmatrix} U_{jdp} \\ V_{jdp} \\ W_{jdp} \end{pmatrix} e^{-is_{jdp}(y-y_j)} + C_{jlr} \begin{pmatrix} U_{jlr} \\ V_{jlr} \\ W_{jlr} \end{pmatrix} e^{-is_{jlr}(y-y_{j+1})} + C_{jsr} \begin{pmatrix} U_{jsr} \\ V_{jsr} \\ W_{jsr} \end{pmatrix} e^{-is_{jsr}(y-y_{j+1})} \\
& + C_{jbr} \begin{pmatrix} U_{jbr} \\ V_{jbr} \\ W_{jbr} \end{pmatrix} e^{-is_{jbr}(y-y_{j+1})} + C_{jdr} \begin{pmatrix} U_{jdr} \\ V_{jdr} \\ W_{jdr} \end{pmatrix} e^{-is_{jdr}(y-y_{j+1})} \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_0 x} \quad (2.5.7)
\end{aligned}$$

2.5.4 応力と変位の連続性

弾性波が伝播する際の要素間の連続性を考えると図 2.1 に示される応力のうち、 x, y, z 方向の変位 (u, v, w) の他に $T_\theta, Q_\theta, S_{\theta x}, M_\theta$ と x 軸周りの断面の回転角 ϕ

$$\phi = -\kappa v + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5.8)$$

が連続である必要がある。

式 (2.5.8) と合応力の変位表示式 (2.2.6) (2.2.13) に弾性波の方程式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \cdot \exp(i\omega t - ik_0 x - isy) \quad (2.5.9)$$

と $y = \theta/\kappa$ を代入することで変位 (u, v, w) から応力などへの変換行列がそれぞれの振動モードに対して y 方向への波数 s の関数

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ Q_\theta \\ T_\theta \\ S_{\theta x} \\ M_\theta \\ \phi \end{pmatrix}_{l,s,b,d} = G(s) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{l,s,b,d} \quad (2.5.10) \\
G(s) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_y k_0^2 \kappa (\nu - 1) & i I_y s^3 - i I_y \kappa^2 s - i I_y k_0^2 (\nu - 1) s + i I_y k_0^2 \nu s \\ \frac{j h k_0 E \nu}{1 - \nu^2} & \frac{i h s E}{1 - \nu^2} & I_y \kappa^3 - I_y s^2 \kappa + \frac{h E \kappa}{1 - \nu^2} \\ \frac{1}{2} i I_y s (1 - \nu) \kappa^2 + \frac{h i s E}{2(\nu + 1)} & \frac{i h k_0 E}{2(\nu + 1)} & -\frac{1}{2} I_y k_0 s \kappa (1 - \nu) \\ 0 & 0 & I_y \nu k_0^2 + I_y s^2 - I_y \kappa^2 \\ 0 & -\kappa & i s \end{pmatrix} \quad (2.5.11)
\end{aligned}$$

として得られる。これを式 (2.5.7) に代入することで、第 i 要素での各モードの振幅からの 8×8 の変換行列 H_j が得られる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ Q_\theta \\ T_\theta \\ S_{\theta x} \\ M_\theta \\ \phi \end{pmatrix} = H_j \begin{pmatrix} C_{jlp} e^{-is_{jp}(y-y_j)} \\ C_{jsp} e^{-is_{jsp}(y-y_j)} \\ C_{jbp} e^{-is_{jbp}(y-y_j)} \\ C_{jdp} e^{-is_{jdp}(y-y_j)} \\ C_{jlr} e^{-is_{jlr}(y-y_{j+1})} \\ C_{jsr} e^{-is_{jsr}(y-y_{j+1})} \\ C_{jbr} e^{-is_{jbr}(y-y_{j+1})} \\ C_{jdr} e^{-is_{jdr}(y-y_{j+1})} \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

$$H_j = (H_{j1}, H_{j2}, H_{j3}, H_{j4}, H_{j5}, H_{j6}, H_{j7}, H_{j8}) \quad (2.5.13)$$

$$\begin{aligned} H_{j1} &= G(s_{jlp}) \begin{pmatrix} U_{jlp} \\ V_{jlp} \\ W_{jlp} \end{pmatrix}, H_{j2} = G(s_{jsp}) \begin{pmatrix} U_{jsp} \\ V_{jsp} \\ W_{jsp} \end{pmatrix} \\ H_{j3} &= G(s_{jbp}) \begin{pmatrix} U_{jbp} \\ V_{jbp} \\ W_{jbp} \end{pmatrix}, H_{j4} = G(s_{jdp}) \begin{pmatrix} U_{jdp} \\ V_{jdp} \\ W_{jdp} \end{pmatrix} \\ H_{j5} &= G(s_{jlr}) \begin{pmatrix} U_{jlr} \\ V_{jlr} \\ W_{jlr} \end{pmatrix}, H_{j6} = G(s_{jsr}) \begin{pmatrix} U_{jsr} \\ V_{jsr} \\ W_{jsr} \end{pmatrix} \\ H_{j7} &= G(s_{jbr}) \begin{pmatrix} U_{jbr} \\ V_{jbr} \\ W_{jbr} \end{pmatrix}, H_{j8} = G(s_{jdr}) \begin{pmatrix} U_{jdr} \\ V_{jdr} \\ W_{jdr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって j 番目と $(j-1)$ 番目の要素の間の連続性から c_j に対する漸化式 (2.5.14) が得られる。

$$\begin{aligned} H_{(j-1)} &\begin{pmatrix} e^{-is_{(j-1)lp}(y_j-y_{j-1})} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & e^{-is_{(j-1)dp}(y_j-y_{j-1})} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{(j-1)lp} \\ C_{(j-1)sp} \\ C_{(j-1)bp} \\ C_{(j-1)dp} \\ C_{(j-1)lr} \\ C_{(j-1)sr} \\ C_{(j-1)br} \\ C_{(j-1)dr} \end{pmatrix} \\ &= H_j \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & e^{-is_{jlr}(y_j-y_{j+1})} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & e^{-is_{jdr}(y_j-y_{j+1})} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{jlp} \\ C_{jsp} \\ C_{jbp} \\ C_{jdp} \\ C_{jlr} \\ C_{jsr} \\ C_{jbr} \\ C_{jdr} \end{pmatrix} \quad (2.5.14) \end{aligned}$$

これを順次計算していくことでシワを透過した弾性波の振幅 c_n が導かれる。縦波の透過率 T はこの漸化式を境界条件

$$(C_{0lp}, C_{0sp}, C_{0bp}, C_{0dp}) = (1, 0, 0, 0) \quad (2.5.15)$$

$$(C_{nlr}, C_{nsr}, C_{nbr}, C_{ndr}) = (0, 0, 0, 0) \quad (2.5.16)$$

で解いた場合に導かれる C_{nlp} と C_{0lp} の比の絶対値

$$T = |C_{nlp}/c_{0lp}| = |C_{nlp}| \quad (2.5.17)$$

として導かれる。

2.5.5 漸化式の解き方

式 (2.5.14) は

$$\begin{pmatrix} C_{jlp} \\ C_{jsp} \\ C_{jbp} \\ C_{jdp} \\ C_{jlr} \\ C_{jsr} \\ C_{jbr} \\ C_{jdr} \end{pmatrix} = H_j^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & e^{is_{jlr}(y_j - y_{j+1})} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & e^{js_{jdr}(y_j - y_{j+1})} & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \\ \times H_{(j-1)} \begin{pmatrix} e^{-is_{(j-1)lp}(y_j - y_{j-1})} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{-is_{(j-1)dp}(y_j - y_{j-1})} & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{(j-1)lp} \\ C_{(j-1)sp} \\ C_{(j-1)bp} \\ C_{(j-1)dp} \\ C_{(j-1)lr} \\ C_{(j-1)sr} \\ C_{(j-1)br} \\ C_{(j-1)dr} \end{pmatrix} \quad (2.5.18)$$

として解くこともできる。しかし、式 (2.3.12) を見ても分かるように減衰モードの波数は虚数値を取り、高周波数の場合や曲げ剛性が小さい場合には非常に大きな値となる。さらに少なくとも平坦な場合に限っても

$$\frac{s_{jdr}}{j} < 0 \quad (2.5.19)$$

$$y_j - y_{j+1} < 0 \quad (2.5.20)$$

であるので、減衰モードのに関する項 $e^{js_{jdr}(y_j - y_{j+1})}$ はときに非常に大きくなり、数値計算を行うと誤差が拡大され計算が破綻してしまう危険性が有る。そこで以下の様に計算式を変換し、誤差の増幅を回避する。

式 (2.5.14) において

$$T_{pj-1} = \begin{pmatrix} e^{-is_{(j-1)lp}(y_j - y_{j-1})} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-is_{(j-1)dp}(y_j - y_{j-1})} \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

$$T_{rj} = \begin{pmatrix} e^{-is_{jlr}(y_j - y_{j+1})} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-js_{jdr}(y_j - y_{j+1})} \end{pmatrix} \quad (2.5.22)$$

$$\mathbf{C}_{pj} = \begin{pmatrix} C_{jlp} \\ C_{jsp} \\ C_{jbp} \\ C_{jdp} \end{pmatrix} \quad (2.5.23)$$

$$\mathbf{C}_{rj} = \begin{pmatrix} C_{jlr} \\ C_{jsr} \\ C_{jbr} \\ C_{jdr} \end{pmatrix} \quad (2.5.24)$$

と置き換えると

$$H_{(j-1)} \begin{pmatrix} T_{pj-1} \mathbf{C}_{pj-1} \\ \mathbf{C}_{rj-1} \end{pmatrix} = H_j \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{pj} \\ T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \end{pmatrix} \quad (2.5.25)$$

が得られる。8 × 8 の行列 H_j を 4 つの 4 × 4 の行列 $H_{j11}, H_{j12}, H_{j21}, H_{j22}$ に

$$\begin{pmatrix} H_{(j-1)11} & H_{(j-1)12} \\ H_{(j-1)21} & H_{(j-1)22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{pj-1} \mathbf{C}_{pj-1} \\ \mathbf{C}_{rj-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{j11} & H_{j12} \\ H_{j21} & H_{j22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{pj} \\ T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \end{pmatrix} \quad (2.5.26)$$

のように分解する。これを展開して

$$H_{(j-1)11} T_{pj-1} \mathbf{C}_{pj-1} + H_{(j-1)12} \mathbf{C}_{rj-1} = H_{j11} \mathbf{C}_{pj} + H_{j12} T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \quad (2.5.27)$$

$$H_{(j-1)21} T_{pj-1} \mathbf{C}_{pj-1} + H_{(j-1)22} \mathbf{C}_{rj-1} = H_{j21} \mathbf{C}_{pj} + H_{j22} T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \quad (2.5.28)$$

が得られる。ここに \mathbf{C}_{rj-1} と \mathbf{C}_{pj-1} の関係式を

$$\mathbf{C}_{pj-1} = X_{j-1} \mathbf{C}_{rj-1} + Y_{j-1} \quad (2.5.29)$$

のように定めて代入すると

$$(H_{(j-1)11} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)12}) \mathbf{C}_{rj-1} + H_{(j-1)11} T_{pj-1} Y_{j-1} = H_{j11} \mathbf{C}_{pj} + H_{j12} T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \quad (2.5.30)$$

$$(H_{(j-1)21} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)22}) \mathbf{C}_{rj-1} + H_{(j-1)21} T_{pj-1} Y_{j-1} = H_{j21} \mathbf{C}_{pj} + H_{j22} T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \quad (2.5.31)$$

となる。これから \mathbf{C}_{rj-1} を消去して

$$(D_1 H_{(j-1)11} - D_2 H_{(j-1)21}) T_{pj-1} Y_{j-1} = (D_1 H_{j11} - D_2 H_{j21}) \mathbf{C}_{pj} + (D_1 H_{j12} - D_2 H_{j22}) T_{rj} \mathbf{C}_{rj} \quad (2.5.32)$$

$$D_1 = (H_{(j-1)11} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)12})^{-1} \quad (2.5.33)$$

$$D_2 = (H_{(j-1)21} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)22})^{-1} \quad (2.5.34)$$

C_{pj} に関して解いて

$$\begin{aligned} C_{pj} = & -(D_1 H_{j11} - D_2 H_{j21})^{-1} (D_1 H_{j12} - D_2 H_{j22}) T_{rj} C_{rj} \\ & + (D_1 H_{j11} - D_2 H_{j21})^{-1} (D_1 H_{(j-1)11} - D_2 H_{(j-1)21}) T_{pj-1} Y_{j-1} \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

$$D_1 = (H_{(j-1)11} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)12})^{-1} \quad (2.5.36)$$

$$D_2 = (H_{(j-1)21} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)22})^{-1} \quad (2.5.37)$$

となり、式 (2.5.29) と比較して X_j, Y_j が求められる。

$$X_j = -(D_1 H_{j11} - D_2 H_{j21})^{-1} (D_1 H_{j12} - D_2 H_{j22}) T_{rj} \quad (2.5.38)$$

$$Y_j = (D_1 H_{j11} - D_2 H_{j21})^{-1} (D_1 H_{(j-1)11} - D_2 H_{(j-1)21}) T_{pj-1} Y_{j-1} \quad (2.5.39)$$

$$D_1 = (H_{(j-1)11} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)12})^{-1} \quad (2.5.40)$$

$$D_2 = (H_{(j-1)21} T_{pj-1} X_{j-1} + H_{(j-1)22})^{-1} \quad (2.5.41)$$

式 (2.5.18) では T_{rj}^{-1} に相当する部分が計算されたために誤差の増幅が起きていたが、計算方法を変換したことでこれが現れず誤差の増大を抑えることができる。

初期条件として $j = 0$ では入射波は縦波のみが存在するので

$$\begin{cases} X_0 = \mathbf{0} \\ Y_0 = (1, 0, 0, 0)^T \end{cases} \quad (2.5.42)$$

また、透過側の平坦部である $j = n$ では反射波は存在しないとして

$$C_{rn} = \mathbf{0} \quad (2.5.43)$$

が得られる。また、このため

$$C_{pn} = X_n C_{rn} + Y_n = Y_n \quad (2.5.44)$$

であり、式 (2.5.42) の下で Y_j を求めることで透過波の振幅 C_{pn} は計算される。

2.5.6 正弦波形状のシワに対する透過率

透過率の解析手法の例として正弦波形状に対する縦波の透過率を計算する。ここで、シワの断面形状は直交直線座標 XY を用いて式 (2.5.45) で表されるものの 1 波長分であり、波長 2.0mm・振幅 0.5mm となる。

$$Y = 5.0 \times 10^{-4} (\sin 10^3 \pi X + 1) \quad (2.5.45)$$

X 方向に等間隔にシワを分割することで微小要素を作成した。また、曲線 $Y = f(X)$ の $X = X_0$ における曲率 $\kappa(X)$ と微小区間 $X_0 < X < X_0 + \Delta X$ の間の曲線の長さ $\delta s(X)$ は

$$\kappa(X) = \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}}{\left(1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.5.46)$$

$$\delta s(X) = \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX \quad (2.5.47)$$

であり、これを用いてそれぞれの微小要素の曲率・長さは求められる。膜の物性値のパラメータは表 2.1 に示したカプトン膜の値を使用した。

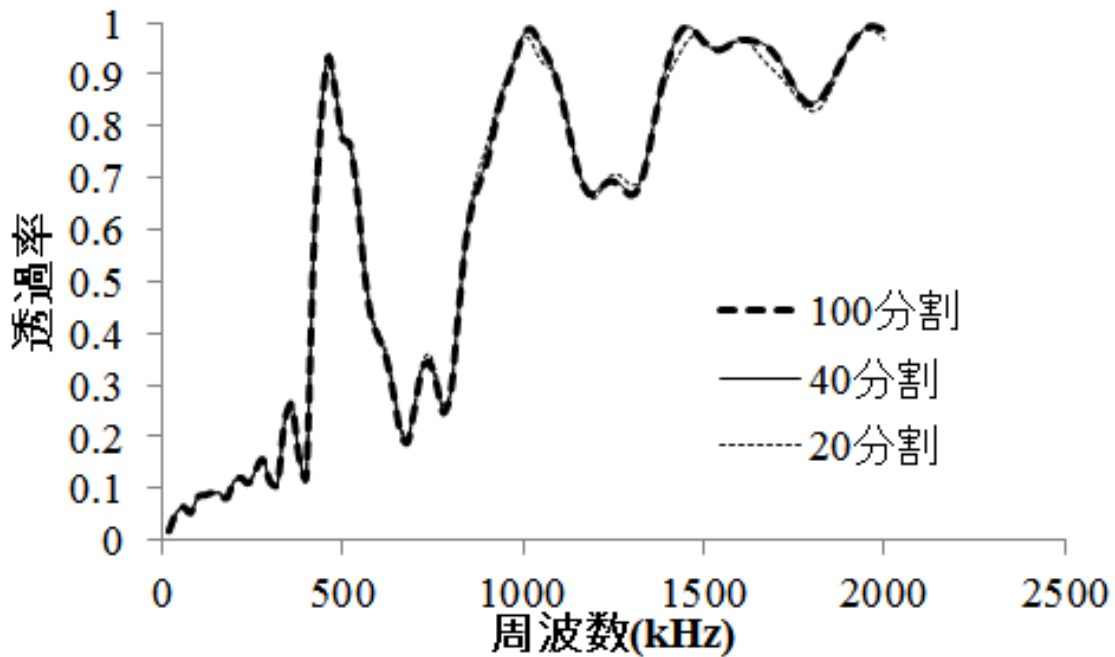


図 2.15: シワに対する透過率の計算例

このシワに対して弾性波が垂直に入射し、2.3 で扱ったようにシワの幅方向の波数 $k = 0$ になる場合に関して、本章の方法を用いて周波数と透過率のグラフを計算した。微小要素作成のにシワを 100, 40, 20 分割した場合のそれぞれについて、結果を図 2.15 に示す。

低周波数の領域で透過率が低下しており、ピークを挟みながら上昇する様子が見られる。500, 1000, 1500kHz 近辺に見られるピーク以外の傾向は、低周波域で縦波の伝播に曲率が大きな影響を与え透過率が変化するという予想とよく一致する。

また、図 2.15 は膜の厚みが $12.5\mu\text{m}$ で計算されているが、これを $25.0\mu\text{m}$ とした場合との比較を図 2.16 に示す。いずれの場合でも分割数は 40 としている。

膜の厚みは縦波の伝播に影響を与えず、主に曲げ波に影響することが 2.3 での議論から示される。しかし曲げ波がシワによって受ける影響は小さく、膜の厚み h が透過率のグラフに与える影響も小さいと考えられる。図 2.16 でも、両者のグラフはピークの高さがやや異なる以外に大きな違いはない。

2.6 まとめ

曲率がある場合とない場合に伝播の仕方が大きく変化する弾性波があった場合、その波は曲率のある部分と平坦な部分の境界で反射されることが予想される。したがってシワの検知に活用できるとも考えられる。このような弾性波を発見するために微小振動の平面波を仮定して、シェルの方程式を用いて円筒状に一方方向に曲率を持った物体上での弾性波の伝播を計算した。

弾性波の伝播方向を指定しなかった場合の計算に関して、周波数が低い領域において特に縦波が曲率の影響を強く受けていることが示された。しかし、計算式がやや複雑であり形状と影響を受ける周波数帯との具体的な関係式を導くことが出来なかった。そこで、弾性波の伝播方向を円筒の周方向に限定し、問題を二次元問題として簡略化することでこの関係式を導き、影響を受ける周波数帯を曲

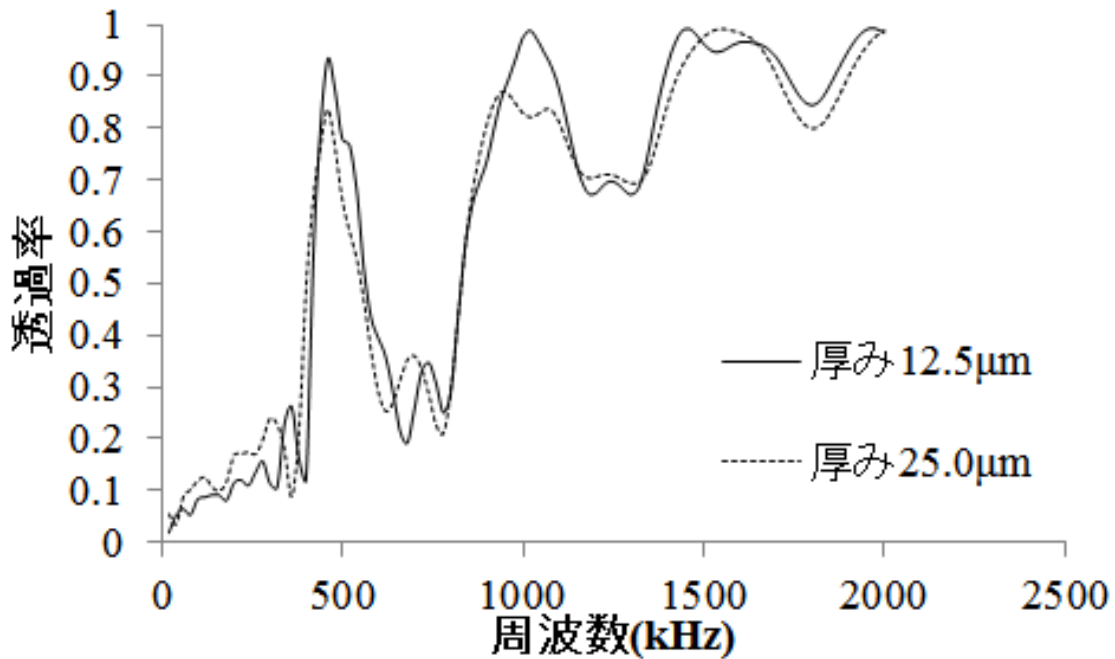


図 2.16: シワに対する透過率の厚みによる変化

率と平坦な場合での位相速度の関数として導いた。曲率の大きな部分が弾性波により高い周波数まで影響をあたえることが示されている。

また、シェルの方程式から導かれた波と Lamb 波と呼ばれる膜の上下面の自由面の影響で構成される波を比較した。Lamb 波は平坦な場合であっても周波数とともに位相速度が変化する弾性波であり、高周波帯ではシェルでは見られない高次モードが発生し低次モードもその領域ではシェルのものとはずれを示す。しかし、今回の検知手法で注目される低周波帯では両者に大きな違いは見られず、シェルの波は Lamb 波の十分な近似として用いることが出来る。

さらにこの一定曲率の部分で伝播する弾性波の方程式を用いて、曲率が変化するシワを伝播する弾性波の振幅の変化を計算する手法について示した。示された透過率のグラフは、縦波の伝播が曲率が大きな影響を受ける低周波域で大きく低下した。さらに厚みが異なる膜でもグラフの形状に大きな変化はなく、膜厚に依存する曲げ波による影響が小さいことも示された。

次章ではここで示した手法を用いてシワに対する弾性波の透過率に対するシワの形状が与える影響について議論する。

第3章 シワが弾性波の伝播に与える影響

3.1 はじめに

2章ではシェルの方程式を用いてシワ内部の曲率のある部分と、シワ外部の平坦な部分での弾性波の伝播の違いに関して計算を行い、結果として低周波数で縦波が大きな違いを示すことが示された。本章ではこの違いによりもたらされる弾性波の透過率の変化に対してシワの形状が与える影響について求める。

図 3.1 の様に 2 つの平坦な領域とそれらに挟まれたシワについて考える。透過率をシワの形状に関して簡略化したモデルを元にして計算し、シワの持つ曲率などの形状のパラメータと透過率の間にある関係を導き、透過率からの形状推定の手がかりを得る。

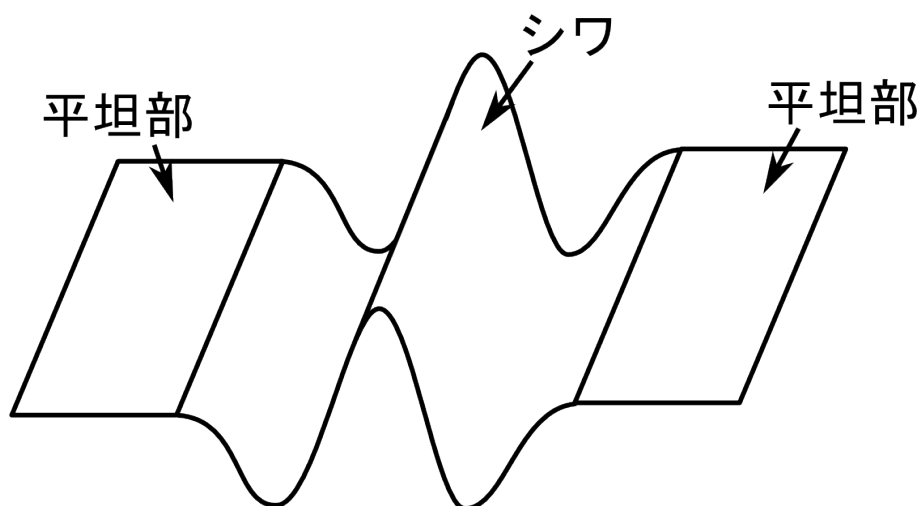


図 3.1: 平坦な領域とシワ

3.2 簡略化シワ形状モデル

ここでは計算を簡略化し弾性波の透過率とシワの個々の形状パラメータとの関連性を明確にするために、シワ形状を簡略化したモデルを作成する。

このモデルではシワの断面形状は一定であるとし、図 3.2 に示すようにシワの 1 波分を 3 つの円筒部要素と 2 つの平坦部要素から構成する。さらに、シワ部分は長さ無限の 2 つの平坦部要素によって挟まれており、前章と同様に左側の長さ無限の平坦部要素を $j = 0$ 番目として左側から順に y 軸に沿って第 j 番目の要素と番号を振り右の平坦部要素で $j = n$ とする。また紙面垂直奥向きに x 軸、モデルの中心軸右向きに沿って y 軸、モデル各部の厚み方向に z 軸を取り、 x 軸方向のモデルの長さは無限大であるとして端の影響は考慮しない。

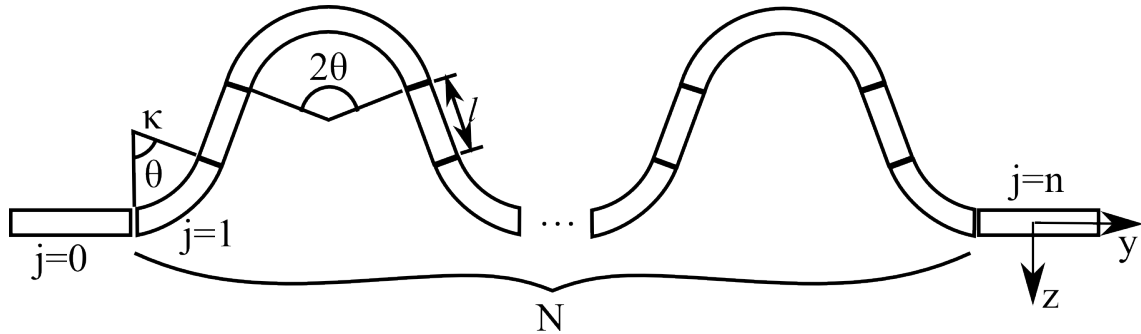


図 3.2: 簡略化シワモデル

円筒部の曲率はそれぞれ $\kappa, -\kappa, \kappa$ であり、その中心角はそれぞれ $\theta, 2\theta, \theta$ とする。2つの直線部の長さ l も同一であり、シワの波数を N とする。さらに図 3.3 のように膜面を上方絡みした場合に、 x 軸方向と入射する弾性波の波面の角度を ψ として定義し弾性波の入射角とする。

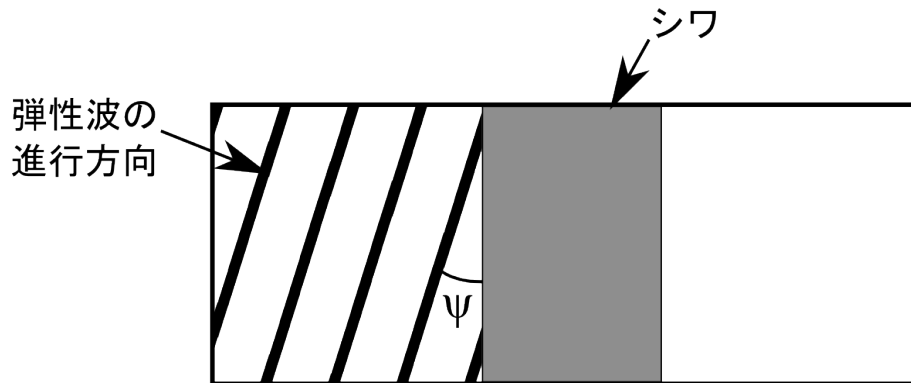


図 3.3: 弾性波の入射角

また、全体でヤング率 E ・ポアソン比 ν ・密度 ρ ・厚み h は一定であるとすれば、このモデルは表 3.1 に示す 5 つの形状に関するパラメータと 4 つの膜の物性に関するパラメータを持つことになる。図 2.16 で示されたように膜厚の変化によるピーク位置などの変動は見られなかったため、ここでは厚み h は形状パラメータではなく膜の物性パラメータとして取り扱っている。

以降の節ではこのモデルを用いて、左側の平坦部要素 $j = 0$ から入射する弾性波のシワに対する弾性波の透過率を求めていく。

また、曲げ波・せん断波の透過率も同様に定義される。

3.3 簡略化モデルの形状パラメータの影響

簡略化モデルは表 3.1 に示すように円弧部の曲率 κ 、円弧部の中心角 θ 、平坦部分の長さ l 、シワの数 N 、弾性波の入射角 ψ の 5 つの形状パラメータを持っている。ここではそれらのパラメータを変化させ、透過率への影響を調査する。

表 3.1: モデルのパラメータ

円筒部曲率	κ
円筒部中心角	θ
直線部長さ	l
シワ波数	N
弾性波の入射角	ψ
ヤング率	E
ポアソン比	ν
密度	ρ
厚み	h

また、いずれの場合においても物性値のパラメータは前節と同様に表 2.1 に示したカプトン膜の値を使用した。

3.3.1 曲率の大きさの影響

図 3.4 に示すような円筒部の中心角 $\theta = \pi/2$ 、平坦部分の長さ $l = 0(m)$ 、シワの数 $N = 1$ のモデルを作成し、弾性波の入射角 $\psi = 0$ として円筒部の曲率 κ を変化させて透過率に対する影響を観察する。

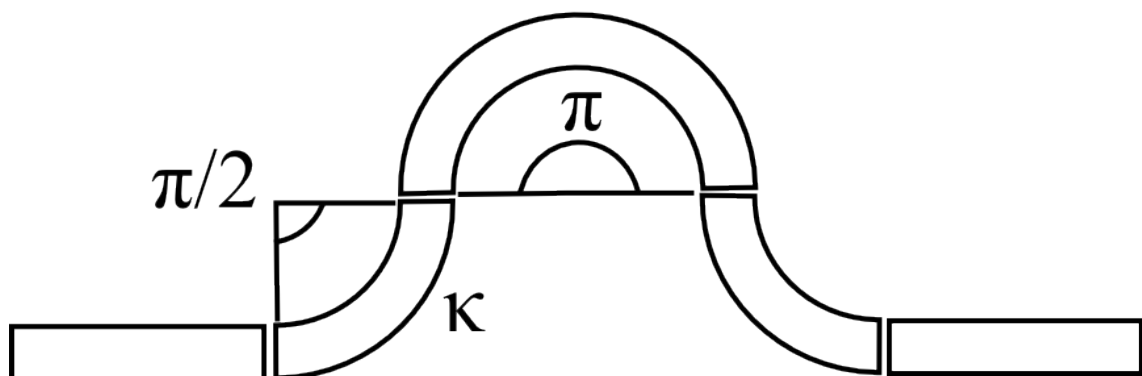


図 3.4: 曲率の影響を考察するモデル

$\kappa = 500, 1000, 1500(1/m)$ の場合に関して計算した結果と式 (2.3.24) から導かれる周波数 f_{cf} を図

3.5 に示す。周波数が f_{cf} 以下では曲率がある部分とない部分での縦波の伝播の様相が非常に大きく、両者の境界で縦波が反射され透過率が低下することが予想される。

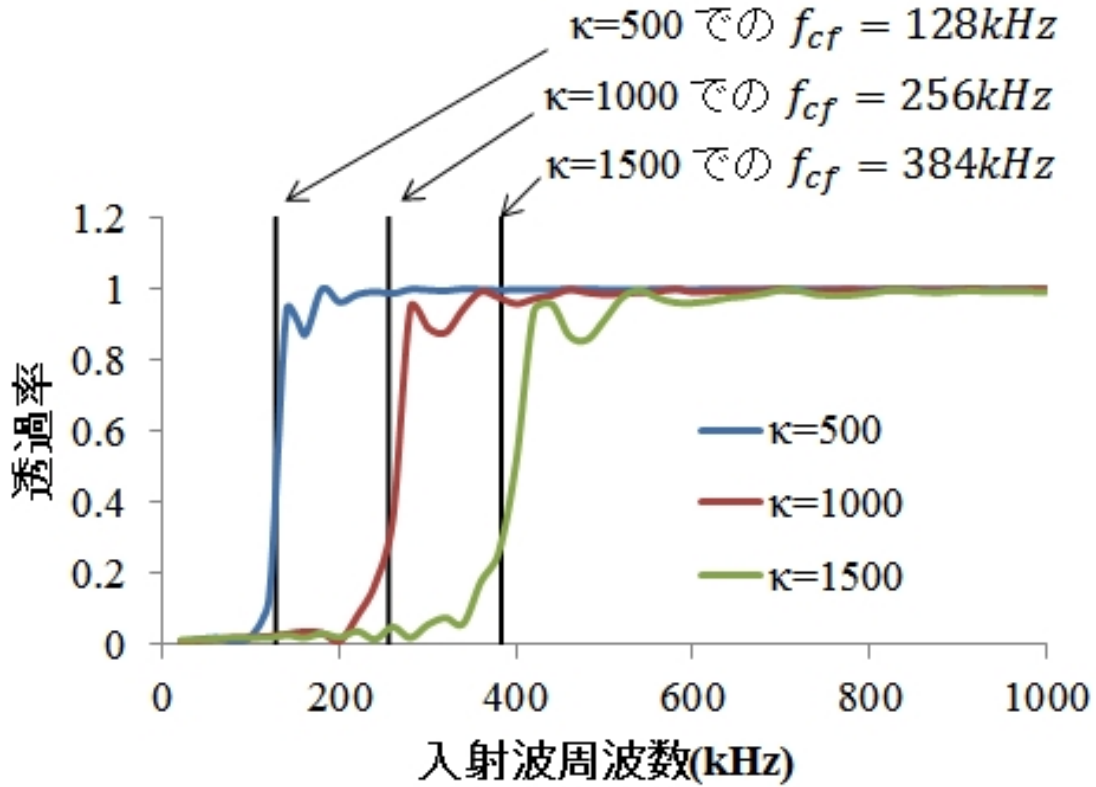


図 3.5: 円筒部曲率の変化の透過率に対する影響

いずれの場合もある周波数まで透過率が低く、 f_{cf} 近辺から急激に周波数が増大し 1 に近づいていく様子が見られる。また、 f_{cf} は曲率に比例するために曲率の大きな場合ほど高周波の弾性波まで反射され、透過率が低くなっている様子も示されている。つまり、内部に大きな曲率を持つシワの場合ほど縦波の透過率は高周波まで低下し、逆に縦波の透過率が高周波まで影響を受けているならばそのシワの持つ曲率が大きいといえる。

f_{cf} で表されるよりも低い周波数では、図 (2.6) でも示されたように曲率のある部分を伝播する縦波の伝播の仕方が曲率の無い平坦な部分と非常に大きな違いを示す。したがって曲率の有無により両者の境界で弾性波の伝播に強い不連続性が発生し、ここで見られる透過率の低下はこの不連続性によって引き起こされているものと考えられる。

3.3.2 円筒部中心角の影響

前節では円筒部の曲率による影響を観察したが、ここではその曲率は固定しその中心角 θ を変化させて計算を行った。

円筒部の曲率 $\kappa = 1000(1/m)$ 、平坦部分の長さ $l = 0(m)$ 、シワの数 $N = 1$ 、弾性波の入射角 $\psi = 0$ のモデルを作成し、円筒部中心角 $\theta = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ の三例に関して計算結果を図 3.6 に示した。

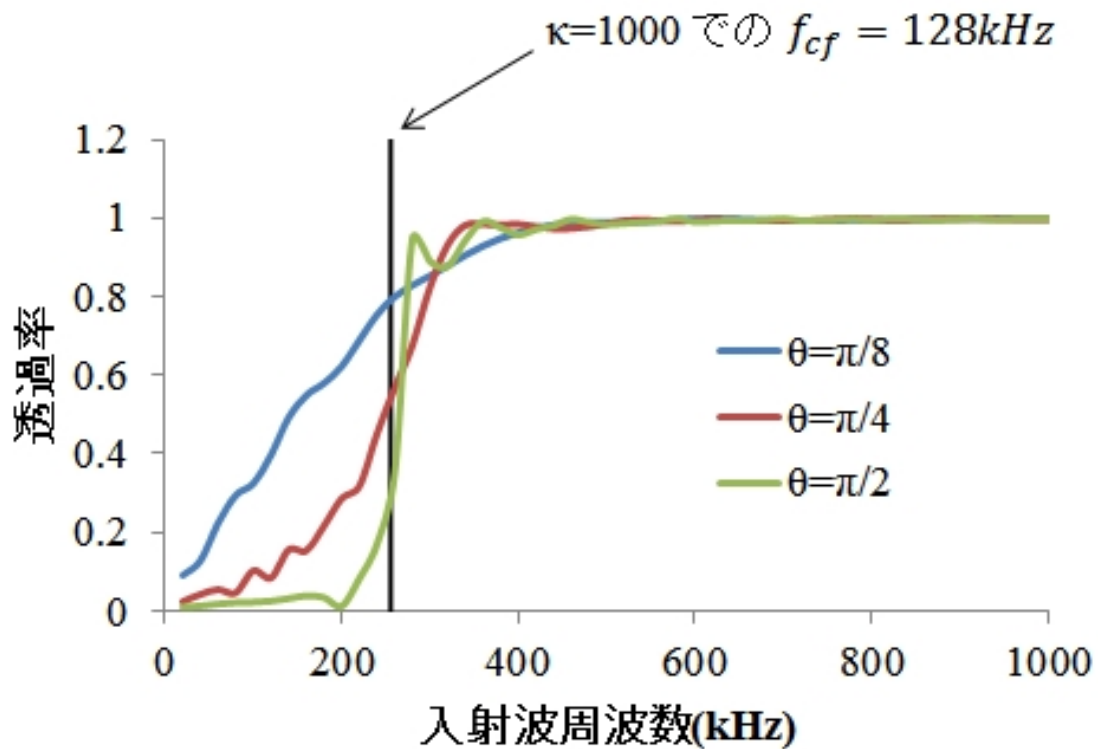


図 3.6: 円筒部中心角の変化の透過率に対する影響

中心角 θ が減少するにつれ低周波帯での透過率が上昇している。中心角 θ が減少したことでシワの内部で曲率のある領域が短くなり、縦波に与える影響が小さくなったと考えられる。また、透過率が低くなっている領域は図 3.6 に示されている f_{cf} 近辺よりも低い領域で中心角が変化しても共通しており、中心角が影響を与えていない様子が見られる。

3.3.3 平坦部長さの影響

図 3.7 に示すような円筒部の曲率 $\kappa = 1000(1/m)$ 、円筒部中心角 $\theta = \pi/3$ 、シワの数 $N = 1$ 、弾性波の入射角 $\psi = 0$ のモデルを作成し、平坦部分の長さ $l = 1.0 \times 10^{-3}, 2.0 \times 10^{-3}, 4.0 \times 10^{-3}(m)$ の三例に関して計算結果を図 3.8 に示した。

平坦部が加わると $l = 0$ の場合と異なり、 f_{cf} 以前にも透過率が 1 に近づくピークが見られる。またこのピークの位置はほぼ等間隔であるが、その最低次のものの周波数は平坦部長さ l が大きくなるにつれて低下していく。

一方で、ピーク以外の部分を見てみると 3 つのグラフでおおよそ同じ周波数で透過率が 1 に到達しており、平坦部分の長さは主にピーク周波数のみに影響を与えることが分かる。

透過率ピークの位置と形状パラメータ

弾性波は曲率の大きい部分で反射されることや、ピークの位置が等間隔に存在し、平坦部長さの増大に伴って最低次のピーク位置が低周波側に移ることから、このピークは 2 つの円筒部で弾性波が反射されることによって間の平坦部において共振が発生しているためと予想される。

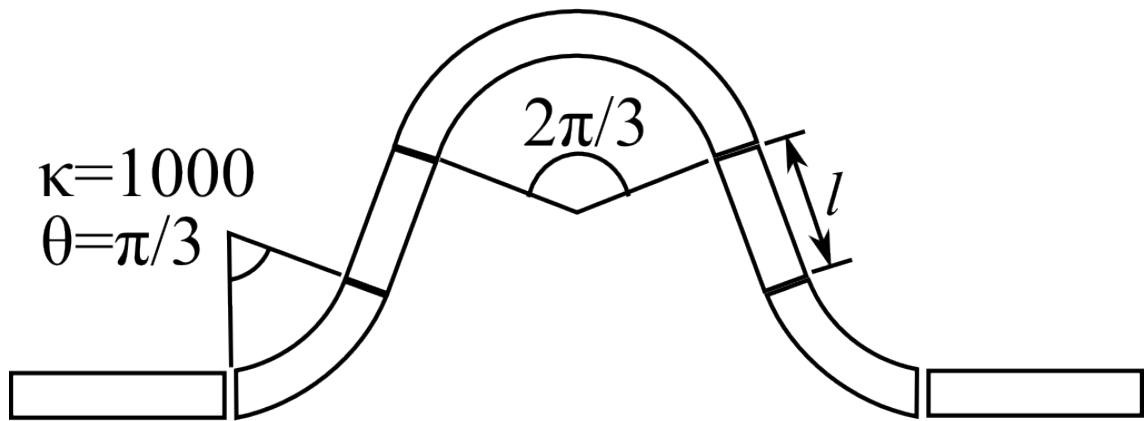


図 3.7: 平坦部長さの影響を考察するモデル

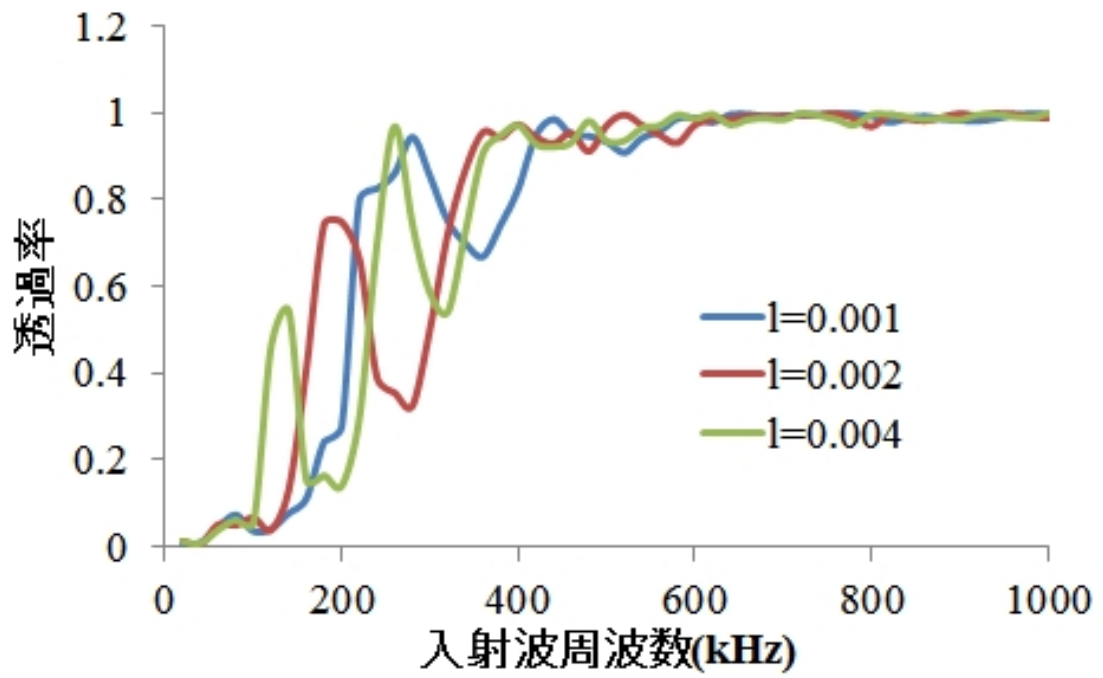


図 3.8: 平坦部長さの変化の透過率に対する影響

これを確認するために図 3.9 に示すようなシワ半波分のモデルを作成し、各々の要素をそれぞれ左から要素 1・2・3 と呼ぶ。要素 1 の曲率を κ 、要素 3 の曲率を $-\kappa$ 、間の平坦部 (要素 2) の長さを l とする。また、モデル全体の端の影響は考えない。弾性波の入射角は $\psi = 0$ とすると式 (2.3.2) に示したようにせん断波は独立して考えることができ、さらに膜厚が非常に小さい場合には曲げ波と減衰モードの影響は小さくなると考えられるため、これらを見捨て縦波のみについて考え、 y 方向の変位 v と応力 T_θ の連続性のみを考える。

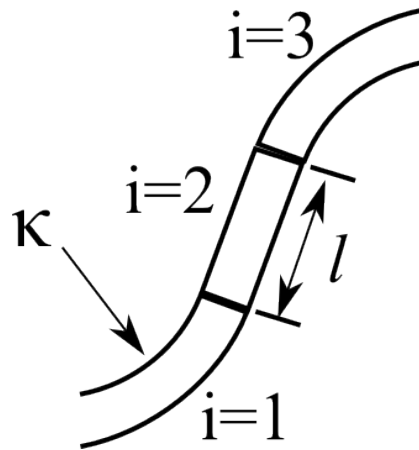


図 3.9: ピーク位置を考察するモデル

弾性波の入射角は $\psi = 0$ の場合は式 (2.3.23) から縦波の進行波反射波の式が得られるので、各要素を伝播する弾性波の縦波の方程式はそれぞれ $c_{l0} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho\omega^2}}$ として

$$\begin{cases} v_{1l}(y, t) = C_{1lp} \exp\left(-i\sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}}y + i\omega t\right) + C_{1lr} \exp\left(i\sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}}y + i\omega t\right) \\ v_{2l}(y, t) = C_{2lp} \exp\left(-i\frac{\omega}{c_{l0}}y + i\omega t\right) + C_{2lr} \exp\left(i\frac{\omega}{c_{l0}}y + i\omega t\right) \\ v_{3l}(y, t) = C_{3lp} \exp\left(-i\sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}}y + i\omega t\right) + C_{3lr} \exp\left(i\sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}}y + i\omega t\right) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

で導かれる。ここで添字 1・2・3 は要素名を、p,r は進行波と反射波を示している。 $k = 0$ 、 $I_y \ll 1$ として y 方向の変位 v と応力 T_θ のみを考えたと変位から応力などへの変換行列式 (2.5.10) は以下のように簡略化される。

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix} = G(s)v \quad (3.3.2)$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ih s E}{1 - \nu^2} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

これに式 (3.3.1) を代入して振幅 C から v 、 T_θ への変換行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ih s_1 E}{1-\nu^2} & -\frac{ih s_1 E}{1-\nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1lp} \exp(-is_1 y + i\omega t) \\ C_{1lr} \exp(is_1 y + i\omega t) \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ih s_2 E}{1-\nu^2} & -\frac{ih s_2 E}{1-\nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2lp} \exp(-is_2 y + i\omega t) \\ C_{2lr} \exp(is_2 y + i\omega t) \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ih s_3 E}{1-\nu^2} & -\frac{ih s_3 E}{1-\nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{3lp} \exp(-is_3 y + i\omega t) \\ C_{3lr} \exp(is_3 y + i\omega t) \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{cases} s_1 = s_3 = \sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}} \\ s_2 = \frac{\omega}{c_{l0}} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

各要素の境界で v, T_θ の連続性のみを考える。要素 1 と 2 の境界を $y = 0$ とすると要素 2 の長さは l であるため、要素 2 と 3 の境界では $y = l$ になるので

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_1 \Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_2 \Big|_{y=0} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_2 \Big|_{y=l} = \begin{pmatrix} v \\ T_\theta \end{pmatrix}_3 \Big|_{y=l} \quad (3.3.9)$$

が得られる。また、要素 3 には反射波が存在しないため

$$C_{3r} = 0 \quad (3.3.10)$$

となる。これと式 (3.3.4) ~ (3.3.7) を (3.3.8), (3.3.9) に代入して整理することで

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ihE(s_1^2 - \kappa^2)}{(1-\nu^2)s_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_{1lp} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{ihEs_1^2}{(1-\nu^2)s_1} & \frac{ih s_2 E}{1-\nu^2} & -\frac{ih s_2 E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & \exp(-is_2 l) & \exp(is_2 l) & -\exp(-is_3 l) \\ 0 & \frac{ih s_2 E \exp(-is_2 l)}{1-\nu^2} & -\frac{ih s_2 E \exp(is_2 l)}{1-\nu^2} & -\frac{ihEs_3^2 \exp(-is_3 l)}{(1-\nu^2)s_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1lr} \\ C_{2lp} \\ C_{2lr} \\ C_{3lp} \end{pmatrix} \quad (3.3.11)$$

が導かれる。右辺の行列式が 0 のときに共振状態となるので、

$$-(s_1^2 - s_1 s_2)^2 + (s_1^2 + s_1 s_2)^2 \exp(2ils_2) = 0 \quad (3.3.12)$$

が得られる。ピークの発生位置は周波数が $f_{cf} = c_{l0}\kappa/2\pi$ より小さい領域であることから、

$$\omega < 2\pi f_{cf} = c_{l0}\kappa \Leftrightarrow s_1^2 = -\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2} < 0 \quad (3.3.13)$$

であり s_1 は純虚数となことから s_1^2 は実数、 $-s_1 s_2$ は純虚数となり

$$|s_1^2 - s_1 s_2| = |s_1^2 + s_1 s_2| \quad (3.3.14)$$

が成り立つ。また

$$|\exp(2ils_2)| = 1 \quad (3.3.15)$$

である。このため

$$|(s_1^2 - s_1 s_2)^2| = |(s_1^2 + s_1 s_2)^2 \exp(2ils_2)| \quad (3.3.16)$$

となり、

$$\text{Arg}[(s_1^2 - s_1 s_2)^2] = \text{Arg}[(s_1^2 + s_1 s_2)^2 \exp(2ils_2)] + 2n\pi \quad n \text{ は任意の整数} \quad (3.3.17)$$

のときに式 (3.3.12) は成り立つ。

s_1 が純虚数であることから

$$-\text{Arg}[s_1^2 - s_1 s_2] = \text{Arg}[s_1^2 + s_1 s_2] + 2n\pi \quad (3.3.18)$$

が成り立つ。したがって式 (3.3.17) は

$$\begin{aligned} 2\text{Arg}[\exp(ils_2)] + 2\text{Arg}[s_1^2 + s_1 s_2] &= 2\text{Arg}[s_1^2 - s_1 s_2] + 2n\pi \\ ls_2 &= 2\text{Arg}[s_1^2 - s_1 s_2] + n\pi \\ \frac{\omega l}{c_{l0}} &= n\pi + 2\text{Arg} \left[-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2} - \frac{\omega}{c_{l0}} \sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

となる。

特に最低次のピークを仮定して ω/c_{l0} が κ よりも十分小さいとすると

$$\text{Arg} \left[-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2} - \frac{\omega}{c_{l0}} \sqrt{-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_{l0}^2}} \right] \simeq \frac{\omega}{\kappa c_{l0}} \quad (3.3.20)$$

が得られる。これを式 (3.3.19) に代入して $f > 0$ である最小のピーク周波数 f_{pmin} を計算すると

$$f_{pmin} = \frac{c_{l0}}{2l + 4/\kappa} \quad (3.3.21)$$

となる。この周波数に最低次のピークが発生すると考えられる。この結果と図 3.8 でのピーク位置の比較を図 3.10 に示す。

それぞれよく一致しており、ピーク発生の原因は曲率の低い部分が曲率の大きな部分に挟まれていることによって発生している事が示された。また、逆にピーク周波数が分かればそこから式 (3.3.21) を用いて形状パラメータの一部を推測することができる。

3.3.4 シワの数の影響

円筒部の曲率 $\kappa = 1000(1/m)$ 、円筒部中心角 $\theta = \pi/3$ 、直線部分の長さ $l = 4.0 \times 10^{-3}(m)$ 、弾性波の入射角 $\psi = 0$ のモデルを作成し、シワの数 $N = 1, 2, 3$ の 3 例に関して計算結果を図 3.11 に示した。

いずれの場合もピークの位置や透過率が 1 に到達する周波数は一定であるが、それ以外の部分での透過率はシワの数が増すにつれて減少していく。円弧部分の中心角の影響と同様に、弾性波に対して影響をあたえる部分の長さが増加したためであると考えられる。

3.3.5 弾性波の入射角の影響

円筒部の曲率 $\kappa = 1000(1/m)$ 、円筒部中心角 $\theta = \pi/3$ 、直線部分の長さ $l = 4.0 \times 10^{-3}(m)$ 、シワの数 $N = 1$ のモデルを作成し、弾性波の入射角 $\psi = 0, \pi/6, \pi/3$ の 3 例に関して計算結果を図 3.12 に示した。

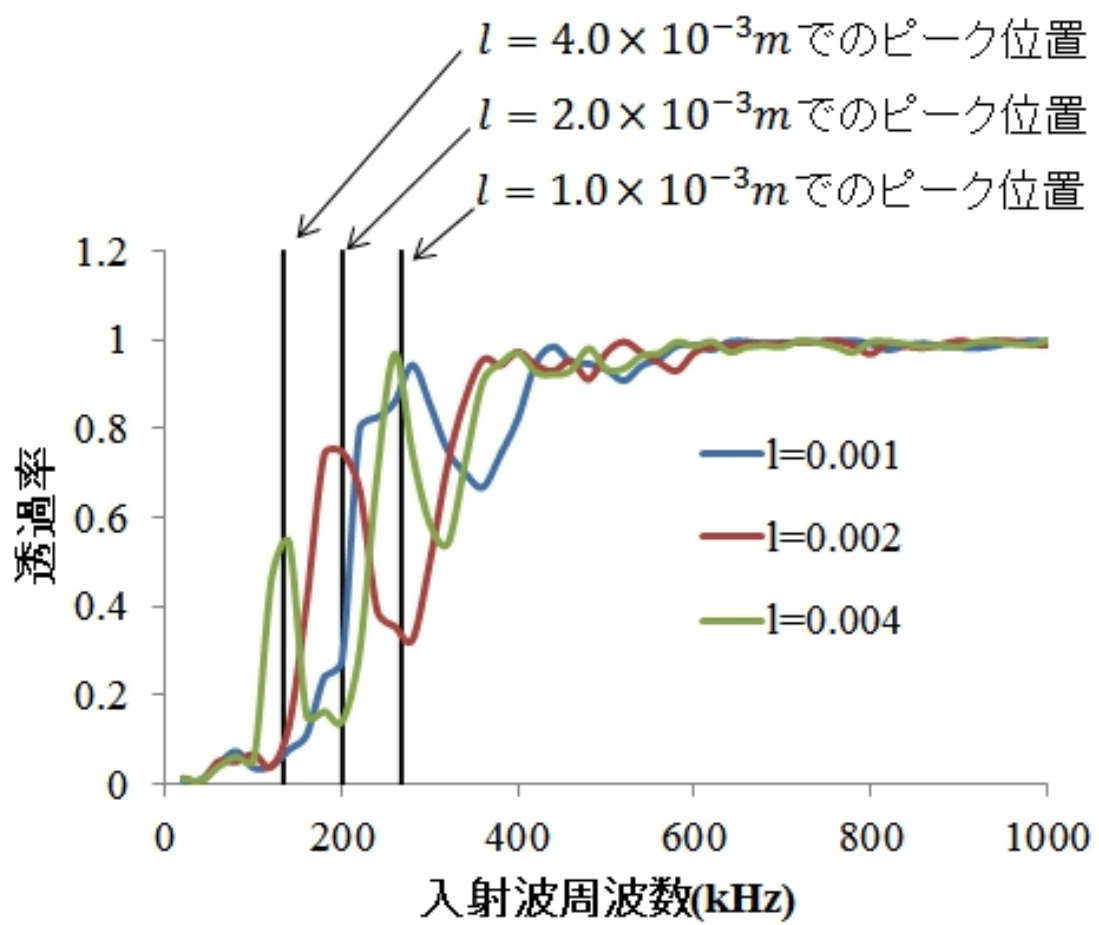


図 3.10: ピーク位置の推定結果

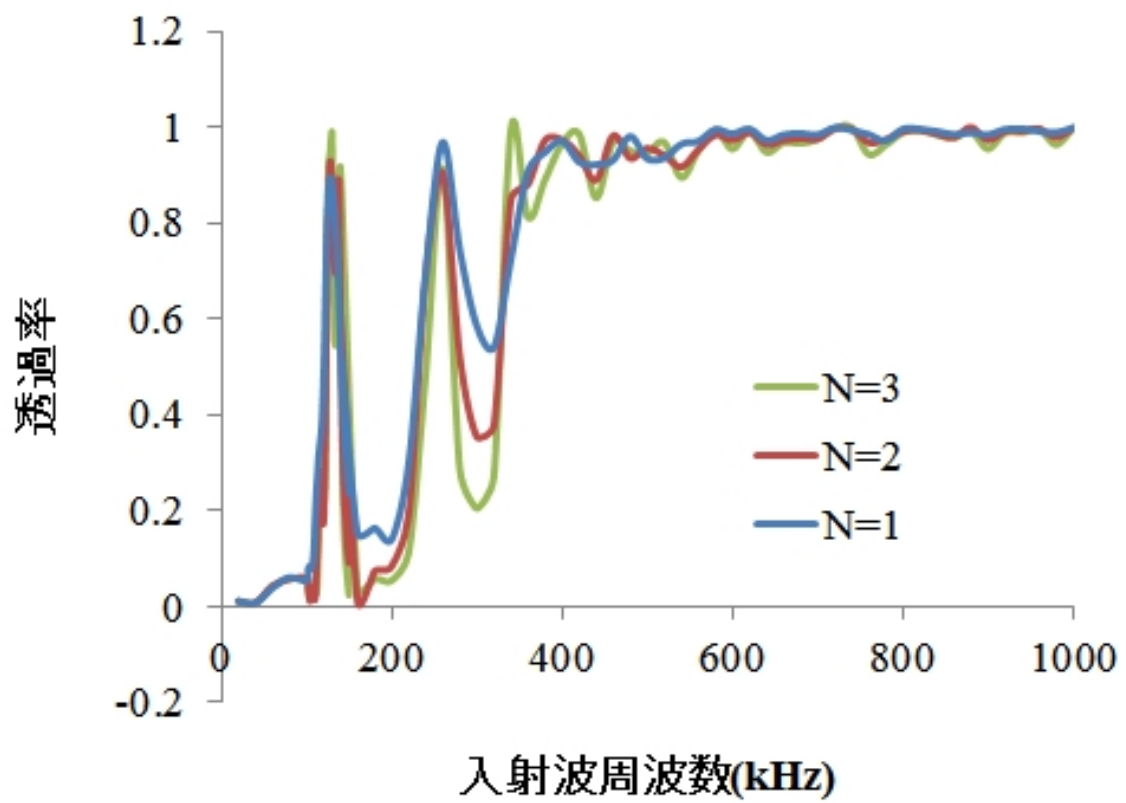


図 3.11: シワの数の透過率に対する影響

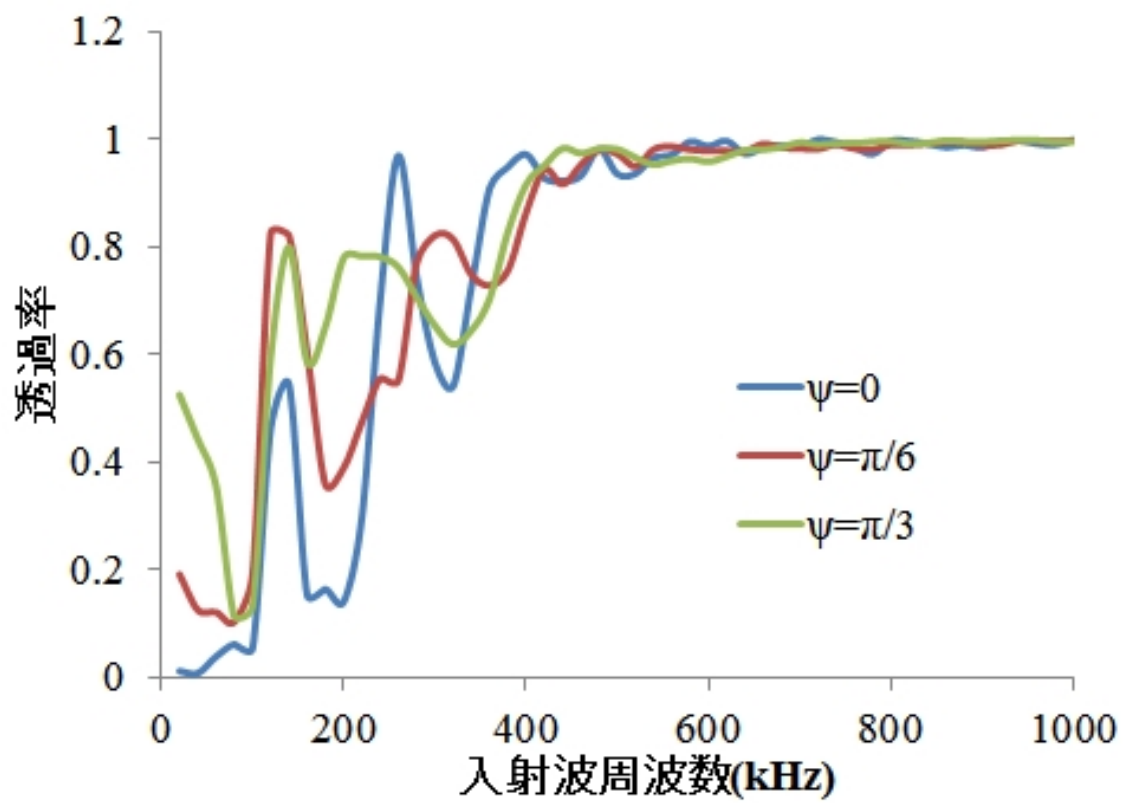


図 3.12: 弾性波入射角の透過率に対する影響

入射角が変化しても最低次のピーク位置や透過率が低下している範囲などに大きな違いはない。一方で周波数が特に低い領域では入射角が増すにつれ、透過率が上昇している様子が見られる。

入射角が0である場合は2章3節で示したように縦波とせん断波の式は独立し、互いに影響を与えることはなかった。一方で入射角が0でない場合はこのカップリングが発生し、図3.12で見られている低周波領域での透過率の上昇はこれが原因であると考えられる。

3.4 連続的に曲率が変化する場合の透過率

前節では簡略化モデルを用いて形状パラメータの透過率への影響を確認したが、実際のシワにおいては膜面の曲率は連続的に変化する。ここでは正弦波形状などをしたシワに関して計算を行い、透過率の変化を観察する。

しかし、基本的な計算手法は前節の簡略化モデルの場合と変化はない。簡略化モデルでは一つのシワを5つの要素に分割していたが、これの分割数を増しそのそれぞれの微小要素に対して長さや曲率を求めてやれば良い。

また、以下のいずれの場合においても物性値のパラメータは前節と同様に表2.1に示したカプトン膜の値を使用した。

3.4.1 正弦波形状の場合

図3.13に示すような平坦部分の間に断面形状が波長 λ 、振幅 A 、波数 N の正弦波が挟まれた場合について考える。弾性波の入射角は $\psi = 0$ として、表3.2の5つの形状に対してシェルの式を用いて透過率の計算を行った。ここで用いる形状は2.5.6で計算を行った形状と類似している。図(2.15)ではシワの数1の場合で微小要素作成のためのシワの分割数は40で良い収束が得られており、ここでの計算でもシワの数1につき40分割して計算を行っている。

また、式(2.5.46)から求められる正弦波形状における曲率の最大値

$$\kappa_{max} = \frac{4\pi^2 A}{\lambda^2} \quad (3.4.1)$$

と図3.14の部分にあたる正弦波の頂点間の直線距離

$$l_{p-p} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 4A^2} \quad (3.4.2)$$

も合わせて示す。

表 3.2: 正弦波形状のパラメータ

	シワの数 N	波長 λ	振幅 A	入射角 ψ	最大曲率 κ	l_{p-p}
正弦波形状 1	1	$2.0 \times 10^{-3}m$	$5.0 \times 10^{-4}m$	$0rad$	4934.8 /m	$1.41 \times 10^{-3}m$
正弦波形状 2	3	$2.0 \times 10^{-3}m$	$5.0 \times 10^{-4}m$	$0rad$	4934.8 /m	$1.41 \times 10^{-3}m$
正弦波形状 3	1	$2.0 \times 10^{-3}m$	$5.0 \times 10^{-4}m$	$\pi/6rad$	4934.8 /m	$1.41 \times 10^{-3}m$
正弦波形状 4	1	$1.5 \times 10^{-3}m$	$6.0 \times 10^{-4}m$	$0rad$	10518.4 /m	$1.41 \times 10^{-3}m$
正弦波形状 5	1	$3.0 \times 10^{-3}m$	$1.125 \times 10^{-3}m$	$0rad$	4934.8 /m	$3.35 \times 10^{-3}m$

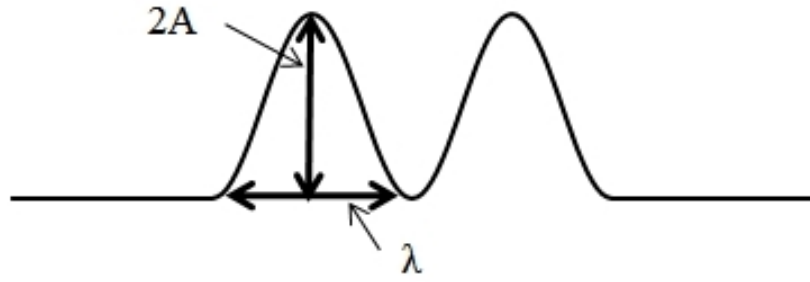


図 3.13: 正弦波形状のシワ

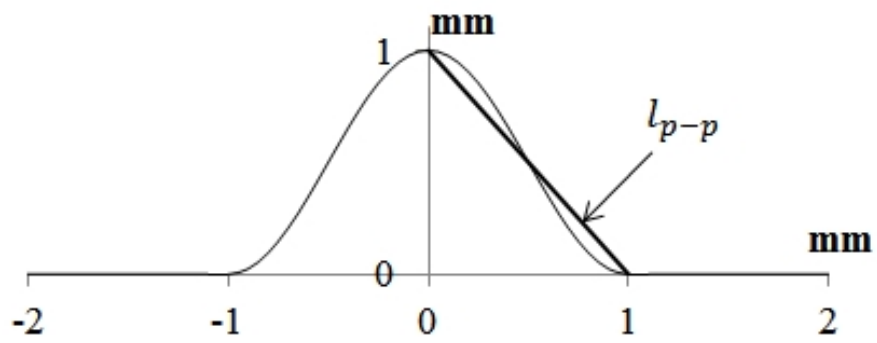


図 3.14: 頂点間距離

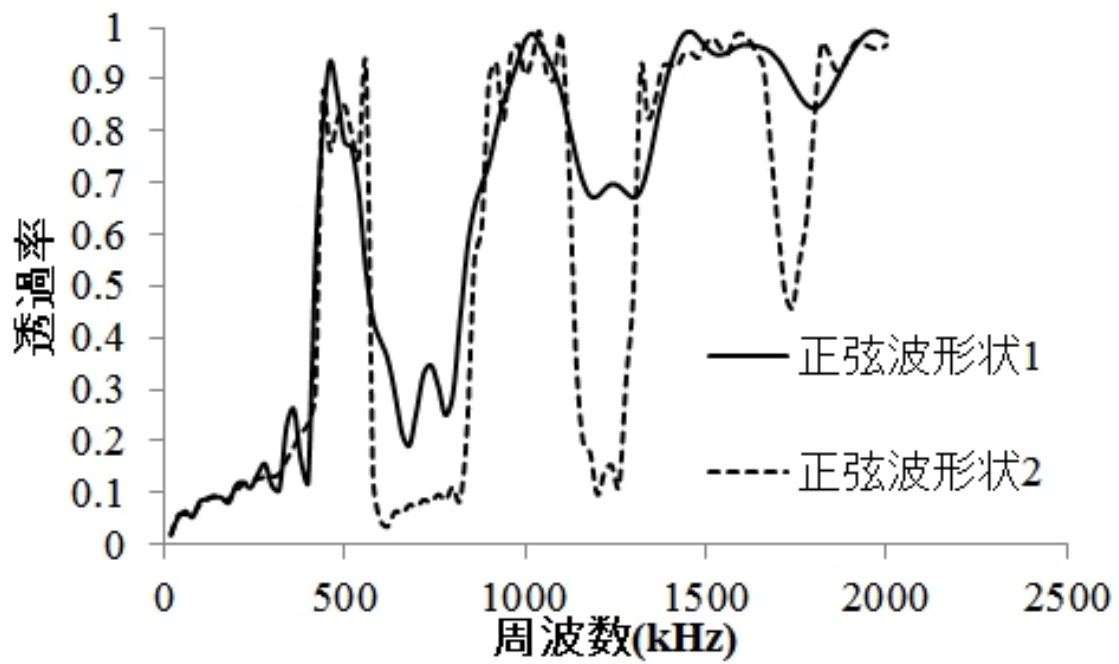


図 3.15: 正弦波形状 1 と 2 に対する透過率の比較

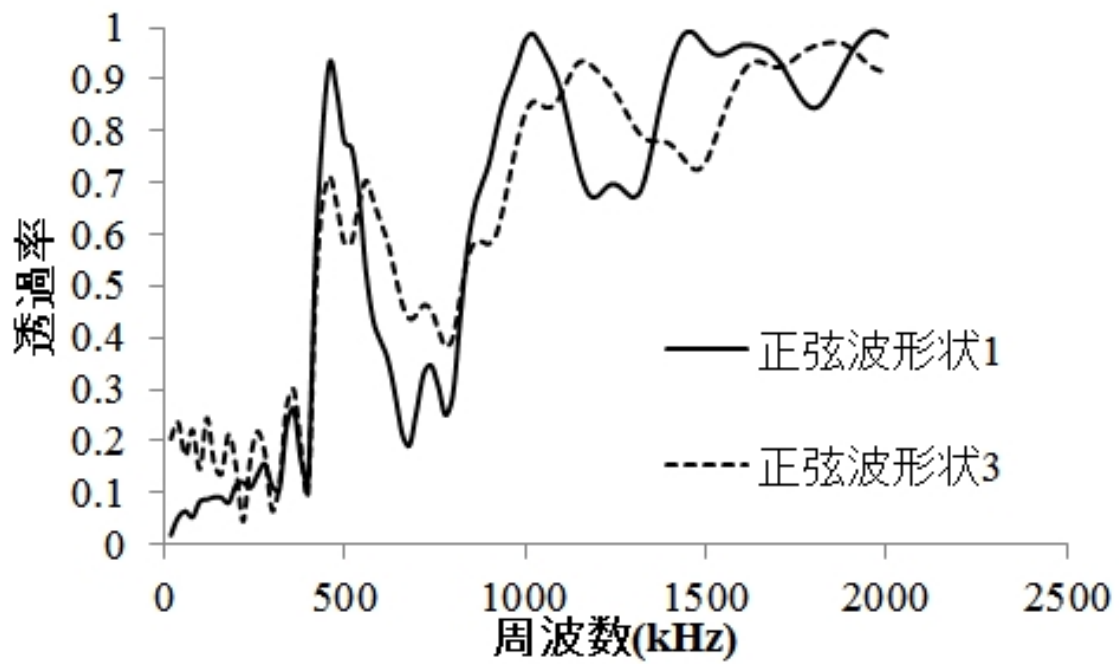


図 3.16: 正弦波形状 1 と 3 に対する透過率の比較

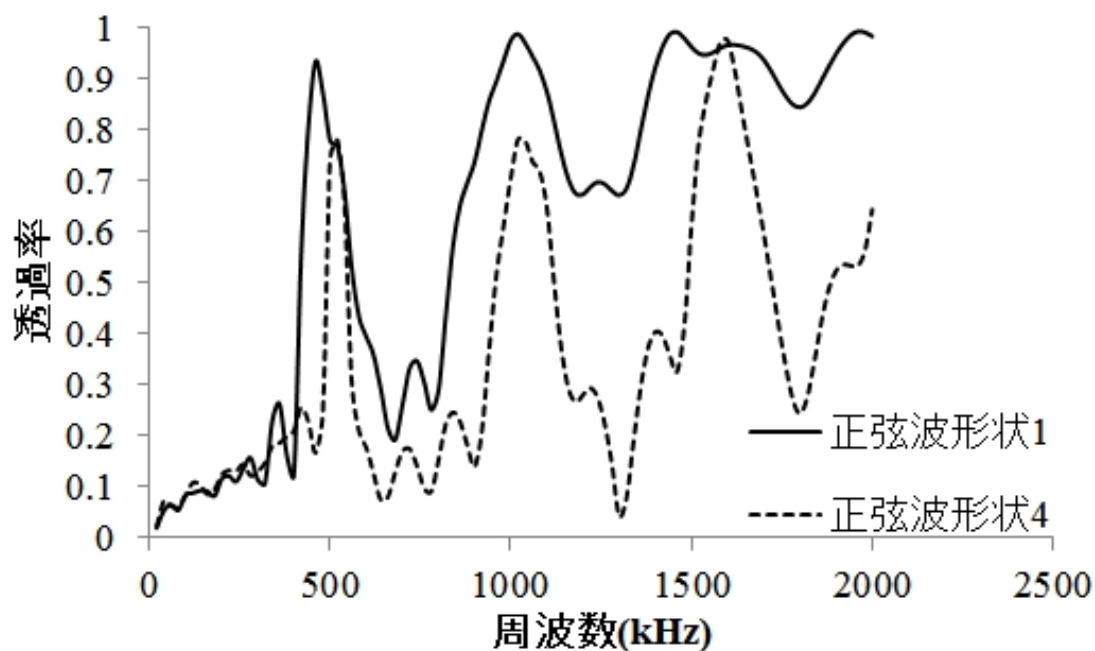


図 3.17: 正弦波形状 1 と 4 に対する透過率の比較

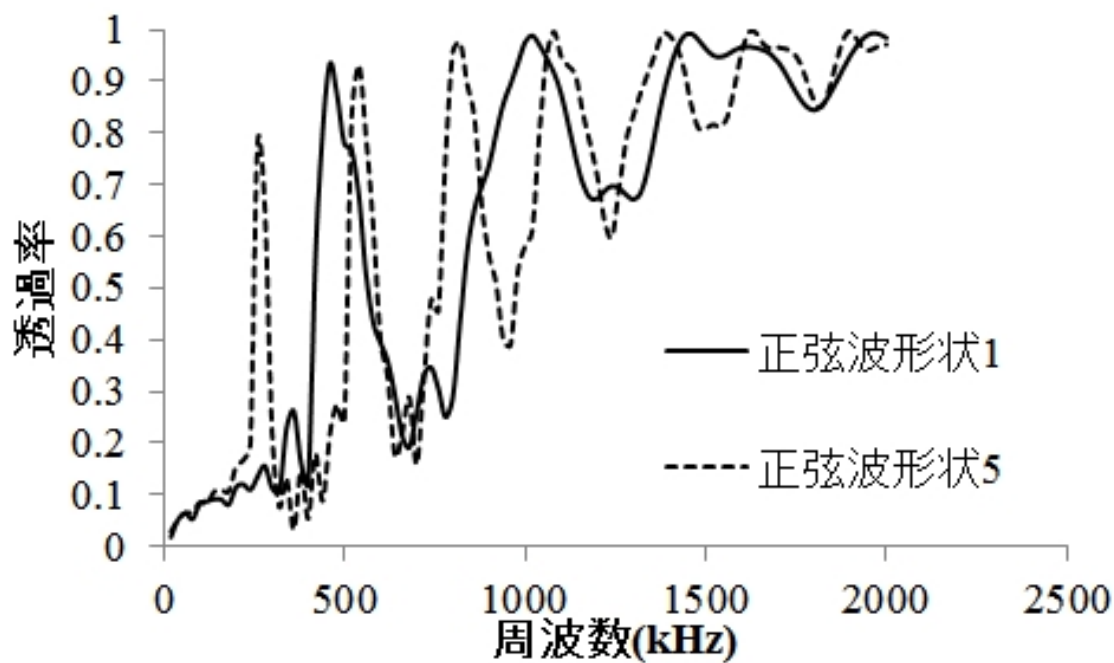


図 3.18: 正弦波形状 1 と 5 に対する透過率の比較

図 3.15 ~ 3.18 にそれぞれの透過率の計算結果の比較を示すが、いずれの場合でも簡略化モデルで計算した場合と同様にピークを持ちながら周波数上昇とともに透過率も上昇する形のグラフになっている。正弦波形状 1 と 2 の比較では、波長・振幅が一定でシワの波数のみが増しているがピーク位置などは変わらずに透過率が低下している。正弦波形状 1 と 3 の比較では、波長・振幅・シワの数は一定で弾性は入射角のみが変化している。最低次のピークを見るとピークの高さは落ちているが発生する周波数はほぼ同じである。また、簡略化モデルでも見られたように最低次のピーク以下の周波数では入射角が大きいほうが透過率が上がっている様子が見られる。正弦波形状 1 と 4 の比較では最大曲率が大きいほうが大きいほうが高周波まで透過率が低下しており、簡略化モデルと同様の傾向が見られている。

また、正弦波形状 1 と 5 の比較では最大曲率・シワの数は同じであるが頂点間距離 l_{p-p} が異なっている。透過率のグラフを見ると透過率が 1 に達している周波数はほぼ同等であるが、ピークの周波数は異なっておりより長い頂点間距離 l_{p-p} を持つ正弦波形状 5 がより低いピークを持っている。これは簡略化モデルではピーク位置が円筒部分の曲率半径 $1/\kappa$ とそれに挟まれた平坦部の長さ l から式 (3.3.21) で求められた関係と類似している。

これらから簡略化モデルで見られたシワの数の影響は曲率が連続的に変化しようになった正弦波形状のシワでも同様の傾向をみせていることが確認できる。

また縦波の透過率を求めたのと同様の手法を用いて、シワに縦波のみが入射した場合の入射波の縦波と透過波の曲げ波成分の振幅の比と、入射波を曲げ波のみとした場合の入射波の曲げ波と透過波の曲げ波成分の振幅の比 (曲げ波の透過率) をシワの波長 $2mm$ 、振幅 $0.5mm$ 、シワの数 1 がの場合について求めた。結果を図 3.19, 3.20 に示す。

図 3.19 から、縦波の透過率が低い領域では曲げ波が誘起されている事がわかる。また、曲げ波は図 2.4 にも示されていたとおり、曲率がある場合とない場合で位相速度の差が小さくシワによる影響を受けにくいと予想された。透過率の計算結果からも透過率は 1 に近く、影響をあまり受けていないことが分かる。

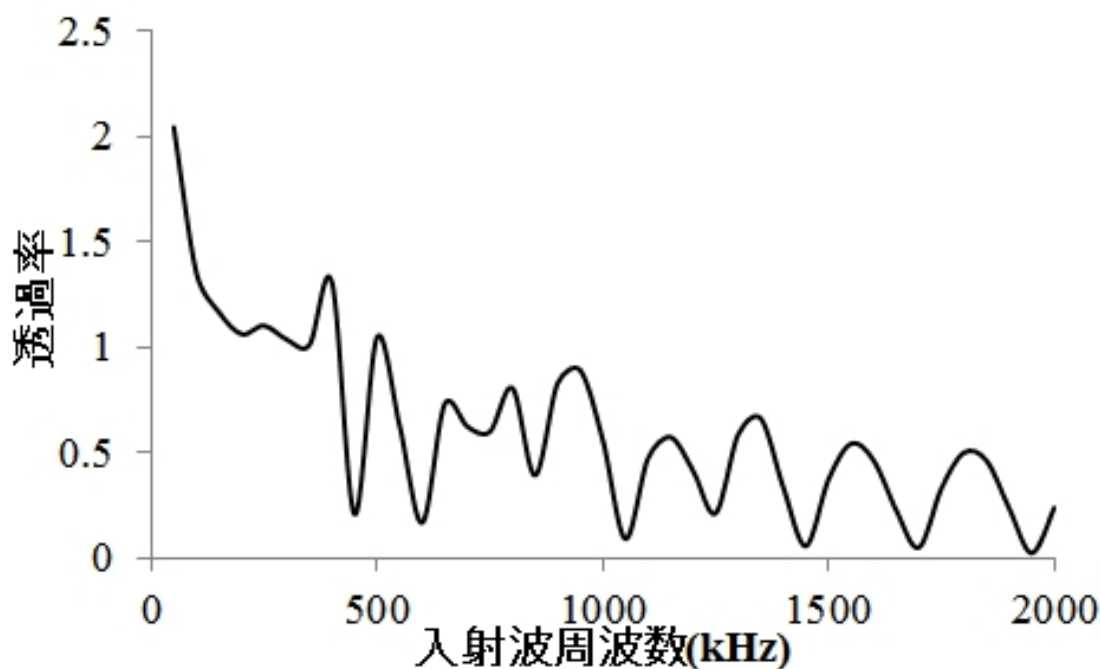


図 3.19: 縦波のみが入射した場合の入射波の縦波と透過波の曲げ波成分の振幅の比

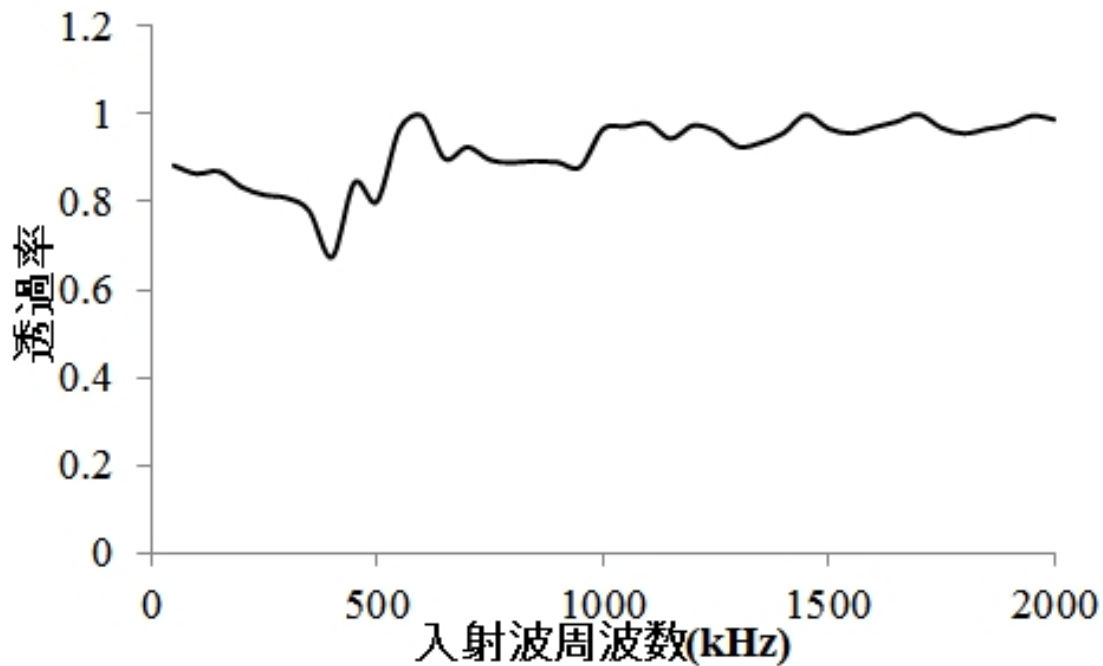


図 3.20: 正弦波形状に対する曲げ波の透過率

3.5 まとめ

シワの形状が透過率に与える影響について考察するために、円筒部と直線部から構成される簡略化モデルを作成し曲率などの形状パラメータとの関係について調べた。2章において円筒部の曲率が大きければより高周波の縦波にまで影響を及ぼすことが波の式として示されたが、簡略化モデルの計算値からも曲率が大きいほうが高周波まで透過率を低下させることが示された。さらに、曲率のある部分の中心角が大きい場合やシワの数が多い方がより透過率は低下する。

また、円筒部分で弾性波が反射されるために簡略化モデル内部で円筒部に挟まれた平坦部に共振が発生し、透過率のグラフにピークとして現れる。このピーク位置は平坦部長さと円筒部の曲率半径に応じて変化し、この関係は式 3.3.21 で示された。

モデルの分割数が少なかった簡略化モデルと同様の計算手法を用いて、分割数を増加させた内部で連続して曲率が変化する正弦波形状のシワに対しても透過率を算出した。この場合でも最大曲率や正弦波の頂点間の直線距離に対して整理すると、最大曲率が大きい物がより高い周波数まで透過率が低下し、頂点間の距離とピーク位置周波数が反比例の関係にあるなど簡略化モデルと同様の傾向が見られた。

第4章 有限要素法による解析との比較

4.1 はじめに

前章において解析的手法を用いてシワの弾性波に対する影響は透過率の形で計算された。ここではその結果を確認するために有限要素法解析ソフト MSC.Marc を用いて透過率の計算を行い、前章の結果と比較を行う。

弾性波入射角が0の場合は、2章3節でも述べたようにせん断波とx方向の変位は縦波・曲げ波やy,z方向の変位に影響を与えないため二次元の問題として解くことができる。したがってその場合有限要素法のモデルも二次元で十分であり、まず2次元モデルを用いて導出された結果について述べる。

しかし弾性波入射角が0ではない場合、3次元のモデルが必要となる。3節では3次元のモデルを用いて導いた結果を示す。

4.2 弾性波入射角が0の場合の解析

先述したように弾性波入射角が0の場合は解析は二次元に簡略化される。そこで、シワの断面形状が正弦波形状になるシワについて図4.1のようなモデルを作成し解析を行った。

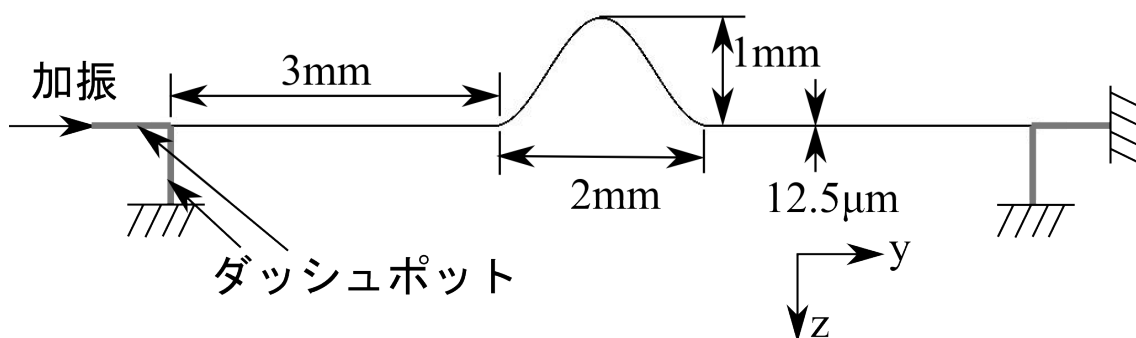


図 4.1: 二次元有限要素法モデル

シェルによる解析モデルと同様に2つの平坦部に正弦波1波長分が挟まれた形状をしている。中央の正弦波形状の部分の高さは0.5mm、波長は2mmであり、その両側に長さ3mmの平坦部分が接続されている。全体の膜厚などの物性値は表2.1に示したカプトン膜と同じ値を使用しており、シェルによる解析と同等である。要素は4節点四辺形要素を使用し、平面歪の条件の下で解析を行った。シワ部分は厚み方向に等間隔に4分割、曲線にそって800分割されている。平坦部分も厚み方向に4分割・長さ方向に960分割されている。

この有限要素法モデルとシェル解析モデルの大きな違いとして、両端の平坦部分の長さが有限であるか無限であるかという点が挙げられる。シェル解析モデルでは両端での反射を考慮する必要はな

いが、有限要素法モデルではこのままでは反射が生じてしまい解析結果にズレが生じる。モデル端での反射を抑制する無反射境界条件 [43, 44, 45] としては境界要素法の場合における perfectly matched layer [46, 47] などが存在する。ここでの有限要素法モデルの端は梁状であることから、反射抑制の為の手段としてモデルの両端にダッシュポットを接続した。右側の端に接続されたダッシュポットの先を固定端とし、左のダッシュポットの先から正弦波振動を入力している。

4.2.1 モデル端での反射を防ぐダッシュポット

力 F と速度 $\frac{\partial v}{\partial t}$ の比

$$Z_{ac} = F / \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.2.1)$$

を入力インピーダンスと呼び、物体間でこれに齟齬がある場合その境界で反射波が発生する。したがって、モデルの端に対象とする波に対する入力インピーダンスが同じになるようにバネやダッシュポットを取り付けることで、そこでの反射波を抑制することができる。[48, 49] また、この入力インピーダンスは力と変位の関係から導かれており、波の種類や物体の形状に依存する。ここではモデルの端に到達した縦波の反射を抑制することを目的として、入力インピーダンスを計算し適切なバネ係数・減衰係数を計算する。

このモデルの場合、端では平坦であるため端に入射する縦波による速度 $\frac{\partial v}{\partial t}$ と力 F は端での断面積を A として

$$v = \frac{\partial}{\partial t} C_1 \exp \left(-i \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} \omega y + i \omega t \right) \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i \omega C_1 \exp \left(-i \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} \omega y + i \omega t \right) = i \omega v \quad (4.2.3)$$

$$F = AE \frac{\partial v}{\partial y} = -i AE \omega \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} u = -A \sqrt{(1-\nu^2)\rho E} v \quad (4.2.4)$$

となり、入力インピーダンス Z_{ac} は

$$Z_{ac} = -A \sqrt{(1-\nu^2)\rho E} \quad (4.2.5)$$

となる。

また、バネ定数 k ・減衰係数 c のダッシュポットの入力インピーダンスはそれぞれ

$$\text{バネ } F_k / \frac{\partial v}{\partial t} = -k v / (i \omega v) = ik / \omega \text{ ダッシュポット } F_c / \frac{\partial v}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial v}{\partial t} / \frac{\partial v}{\partial t} = -c \quad (4.2.6)$$

となる。これと式 (4.2.5) を比較すると

$$c = -Z_{ac} = A \sqrt{(1-\nu^2)\rho E} \quad (4.2.7)$$

の場合に入力インピーダンスが揃い、反射が起きなくなることが分かる。

また、図 4.2 のようにこのダッシュポットの端に y 軸方向に正弦波振動 $v_1 = C_1 \exp(i \omega t)$ を加えた場合、平坦部を伝播していく縦波 $v_2 = C_2 \exp(-i \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} \omega y + i \omega t)$ は梁の端を $y = 0$ として力の

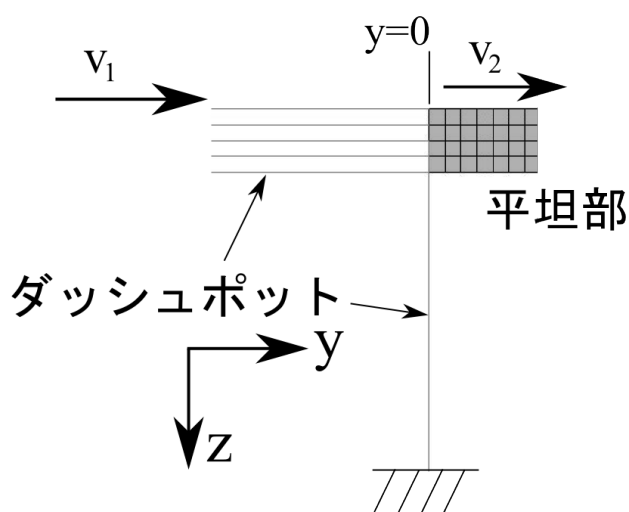


図 4.2: 有限要素法モデルの左端と入力される振動

釣り合いを考えて

$$c \frac{\partial}{\partial t} (v_2 - v_1) \Big|_{y=0} = \frac{AE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial v_2}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (4.2.8)$$

$$\Leftrightarrow c \cdot i\omega (C_2 - C_1) = -i\omega c C_2 \quad (4.2.9)$$

$$\Leftrightarrow C_2 = C_1/2 \quad (4.2.10)$$

となり、ダッシュポットの端に与えられた振幅の半分になる。

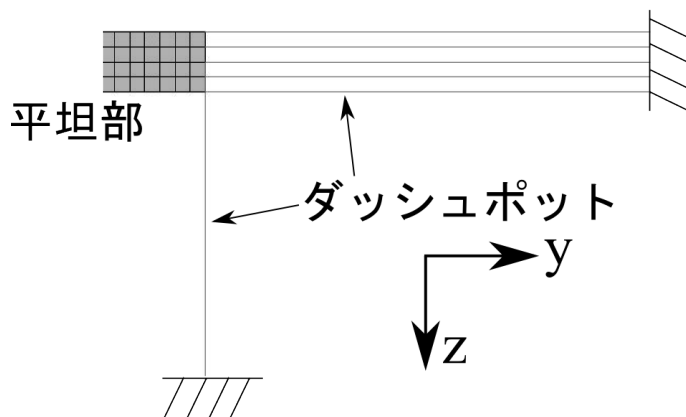


図 4.3: 有限要素法モデルの右端とダッシュポット

このモデルでは端は図 4.3 に示したように厚さ方向に等間隔に 4 分割されており片方の端に y 軸方向には 5 本のダンパが並列に接続される。二次元モデルなので単位幅当たりの入力インピーダンスを計算し、一番上と下のダッシュポットは 0.5 本分として数えれば 1 本あたりの減衰係数は

$$-Z_{ac}/4 = A\sqrt{(1-\nu^2)\rho E} = 5.82Ns/m \quad (4.2.11)$$

となる。

ただしこのダッシュポットは z 方向に振動する曲げ波には影響を与えず、曲げ波は端で反射されてしまう。曲げ波がシワから受ける影響は図 3.20 にも示したように小さなものではあるが、図 3.19 に示したように縦波がシワに入射することによって曲げ波が誘起される。これによるモデル全体の共振を抑えるために z 方向に減衰係数 $1Ns/m$ のダンパを付加した。

4.2.2 解析結果

縦波の入力として左側のダッシュポットの先に y 軸方向に振幅 $2\mu m$ 、周波数 f の正弦波振動

$$y = 2 \times 10^{-6} \exp(2i\pi f) \quad (4.2.12)$$

を与え、周波数 $10kHz \sim 2MHz$ で調和振動解析を行った。式 (4.2.10) より、実際に平坦部に入力される振動の振幅は $1\mu m$ になる。図 4.4 に周波数 $90kHz$ の時の振動の形状を示した。曲げ波はシワによって影響を受けにくいため全体で曲げ波による振幅が一定になっている様子が見られる。

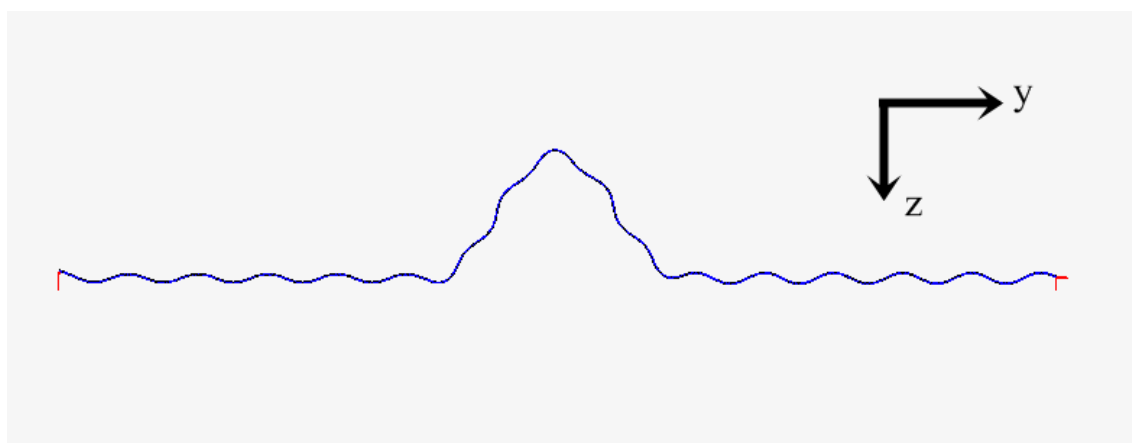


図 4.4: 周波数 $90kHz$ の場合の振動の形状

線形の計算の範囲内では平坦部の縦波は y 方向変位のみを、曲げ波は z 方向変位のみを起こすため、縦波の透過率はこの平坦部に入力された振幅と反対側の端での y 方向の振幅の比で計算される。透過率の周波数ごとの変化の有限要素法による結果と、シェルモデルによるものの比較を図 4.5 に示した。

両方で透過率はよく一致しており、シェルモデルの妥当性が示されている。

4.3 弾性波入射角が 0 ではない場合の解析

弾性波がの入射角が 0 でありシワに対して垂直に入射している場合は、有限要素モデルを二次元に簡略化することが可能であった。しかし、入射角が 0 でなく弾性波がシワに斜めから入射する場合は 3 次元のモデルを作成する必要がある。ここではそのような 3 次元モデルを作成し、入射角の影響をシェルモデルの結果と比較して確認する。

3次元の有限要素法モデルとして図 4.6 のようなモデルを作成した。2つの平坦部の間にシワ部分が斜めに入っており、シワ断面は半径 $1mm$ 、中心角がそれぞれ $\pi/2, \pi, \pi/2$ の円弧を組み合わせた形状になっている。上下の端はそれぞれに $y-z$ 平面に対する対象条件を与えている。この x 軸方向の幅が無限大でないという点はシェルによる解析モデルと大きく異なる点であり、この幅は十分に広く取る

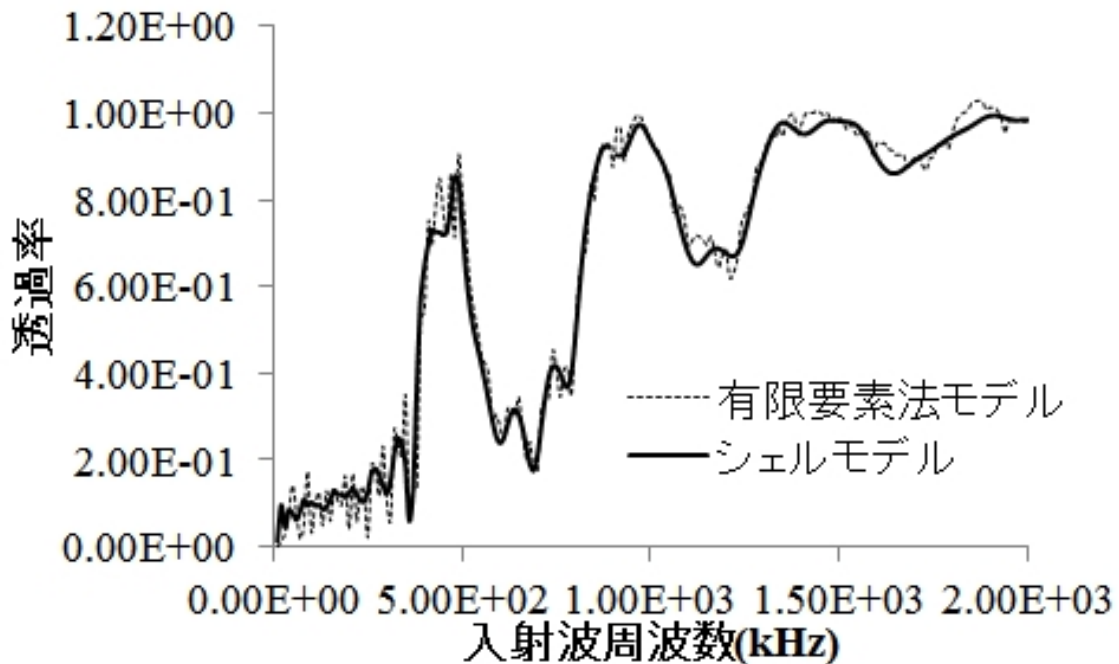


図 4.5: 有限要素法とシェルモデルでの解析による結果の比較

必要がある。また、要素は 8 節点六面体要素を使用しており、二次元の場合と同様に全体の膜厚などの物性値は表 2.1 に示したカプトン膜と同じ値を使用している。シワに入射する平面波はモデル左端から y 軸方向に伝播し、 x 軸に対して ψ だけ傾いて形成されたシワに入射することで入射角 ψ の条件を作成している。

二次元モデルでは左右両端にダッシュポットを付加しモデル端での反射波を低減することで調和振動解析を行い、計算時間を節約することが出来た。三次元モデルでも同様にダッシュポットが付加され、端に対して垂直に入射する縦波は反射しなくなる。しかし、三次元モデルでは図 4.7 に示すようなシワに反射されることによって生じる斜め方向に伝播する縦波は入力インピーダンスが異なるため二次元モデルと同様なダッシュポットでは全ての縦波の反射波を消去することは出来ない。したがって 3 次元モデルでは入射波の周波数を変化させつつ過渡応答解析を行った。

4.3.1 透過した縦波の評価

図 2.13 でも示したように、シワに沿った方向への弾性波の波数は平坦部・シワ内部の各部分で一定となる。このためシワを透過した弾性波の進行方向は入射波と同じ図 4.6 の y 軸方向となる。しかし、図 4.7 のように縦波がシワに入射することによって誘起されたせん断波は弾性波自体の波数が縦波と同じにもかかわらず、シワに沿った方向への弾性波の波数は縦波と同じであるため図 4.6 の y 軸から斜め方向に進行する。

このためせん断波は図 4.6 の x, y 軸双方の変位を起し、一点のみの変位のデータからでは透過した縦波の振幅を正確に評価することが出来ない。このせん断波の影響を除去するため、3 次元モデルの解析では図 4.6 に示したように幅 1.6mm に 20 点の計測点を取り、 y 方向変位を計測した。 y 軸方向に伝播する透過した縦波の変位はこの各計測点の間で同位相であるのに対し、 y 軸から斜めに伝播するそれ以外の波は測定点間で位相差が生まれる。したがってこれらの測定点の平均値を取ることで

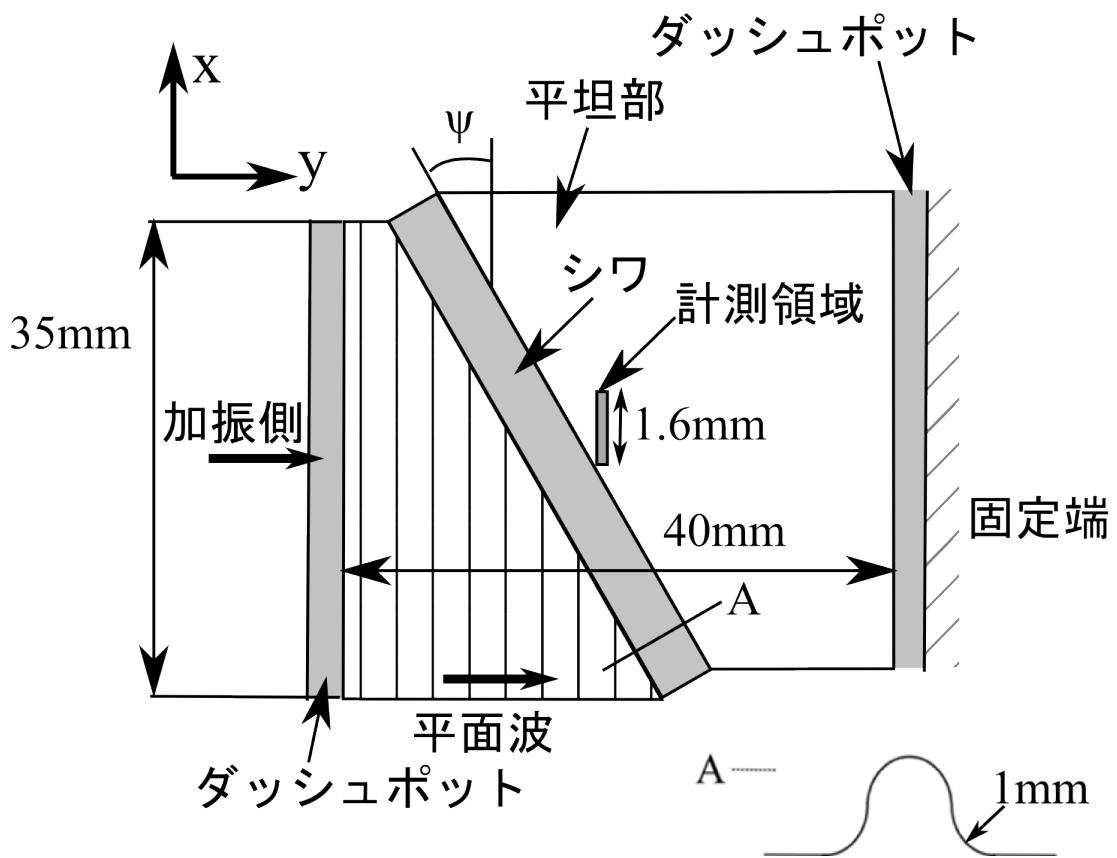


図 4.6: 三次元の有限要素法モデル

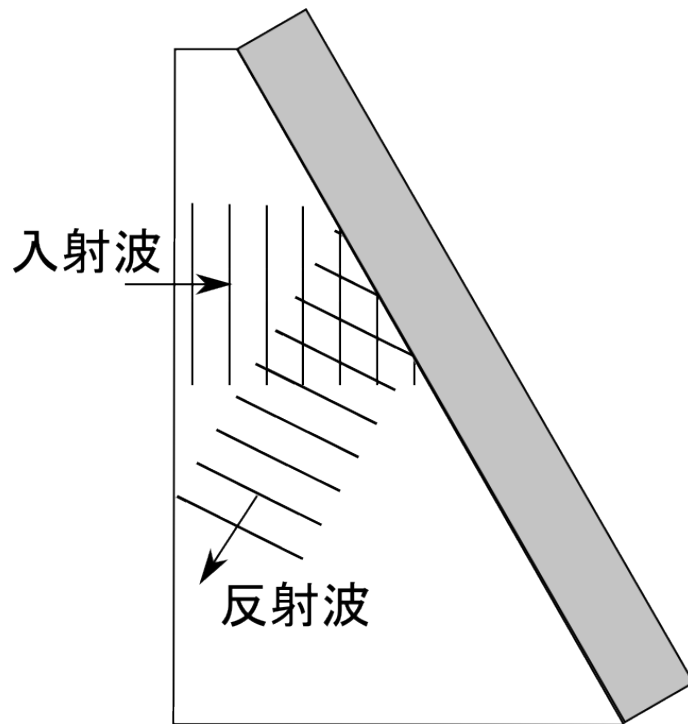


図 4.7: 入射波と斜めに伝播する反射波

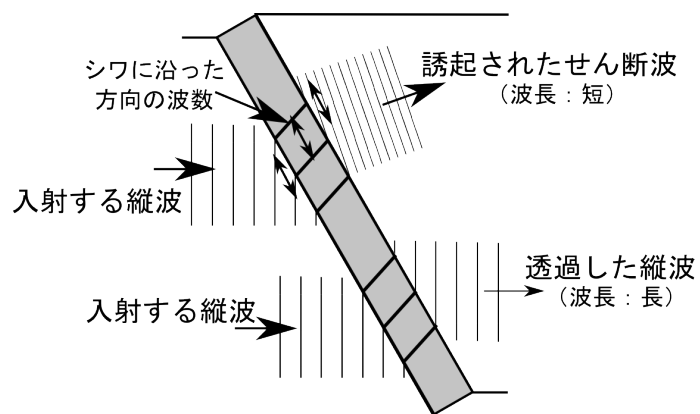


図 4.8: 透過した縦波の進行方向と誘起されたせん断波の進行方向

せん断波などの影響を除去することができる。

4.3.2 解析結果

縦波の入力として左側のダッシュポットの先に振幅 $2\mu m$ 、周波数 f 周波数 = $10kHz \sim 2MHz$ の正弦波振動

$$y = 2.0 \times 10^{-6} \exp(2i\pi f) \quad (4.3.1)$$

を与え、 $t = 50\mu s$ までタイムステップ $\Delta t = 0.1\mu s$ で計算を行った。式 (4.2.10) より、実際に平坦部に入力される振動の振幅は $1\mu m$ になる。シワへの弾性波の入射角 $\psi = \pi/12, \pi/6$ の2つの場合について求められた透過率とシェルモデルによる比較を図 4.9 に示す。シェルによる解析と有限要素法で良い一致が見られる。

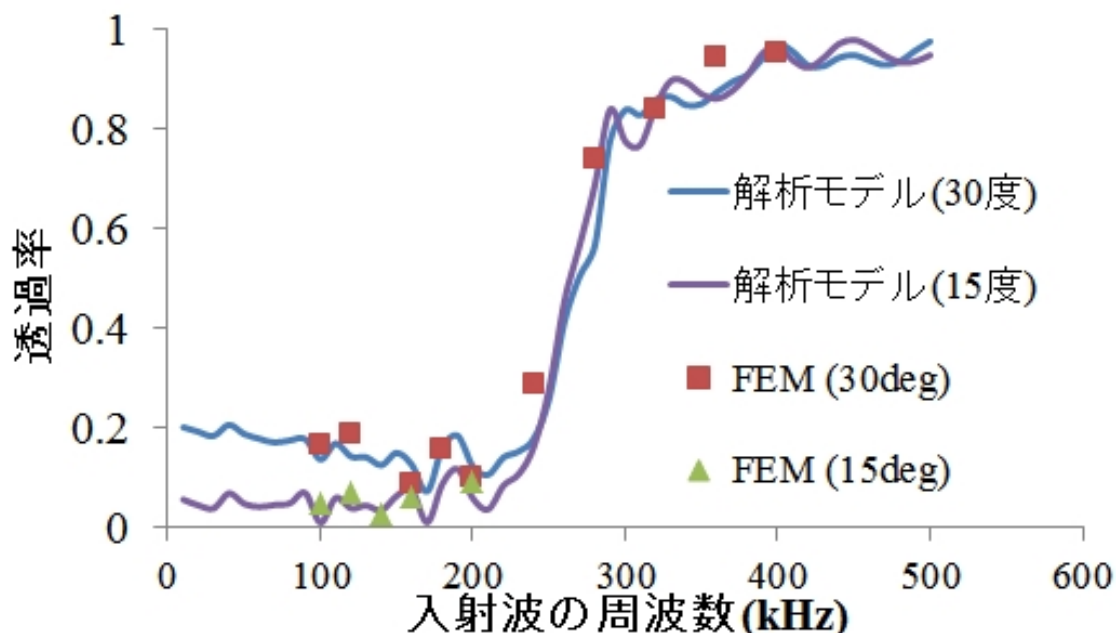


図 4.9: 3次元有限要素法モデルとシェルモデルによる透過率の解析結果の比較

4.4 まとめ

シェルモデルで得られたシワに対する透過率の計算結果の確認を行うために、有限要素モデルを作成し縦波の平面波に対する透過率を比較した。

シワの稜線方向に対して垂直に弾性波が入射する場合、つまりシワに対する弾性波の入射角が0の場合は、シワの形状や変形形状が稜線方向に一定になるため有限要素モデルは二次元で十分になる。また、モデルサイズ削減のためにモデルの両端には縦波の反射を抑制するダッシュポットが入力インピーダンスが一致するように接続された。この条件下で調和振動解析を行い、その面内方向の振幅の比から透過率を計算した。得られた結果はシェルの解析によるものとよく一致した。

一方で弾性波の入射角が0でない場合は三次元の有限要素法モデルを作成する必要がある。しかし、シェルの解析モデルではモデルの幅が無限大であったのに対し、有限要素法のモデルでは有限

の値に収まってしまふ。有限要素法の解析での端の透過率への影響を低減するために、モデルの幅を長く取り、変位を計測する点はモデルの幅方向の中央付近に取られた。また、二次元モデルの場合はダッシュポットにより効果的にモデル端での反射波を低減し調和振動解析を行ったが、三次元モデルでは弾性波の伝播が複雑化するためこのような低減が出来ず過渡応答解析が行われた。また、二次元モデルの場合は面内方向の振動を発生させるのは縦波だけだったのに対し、三次元モデルではせん断波によっても発生する。透過率の評価にはせん断波の影響を除去する必要があるため、変位を計測する点を複数とりその平均値を取ることで縦波のみの影響を取り出した。三次元モデルから得られた値もシェルモデルによる解析値とよく一致しており、透過率をシェルの方程式を用いて導出することの妥当性が示された。

第5章 弾性波透過率からのシワ形状の推定

5.1 はじめに

第3章のシェルモデルによる解析と第4章の有限要素法による解析を通して、シワに対する透過率と周波数の関係をシワの形状から導けることが示された。また、第3章の解析ではその透過率のグラフにおけるピーク位置と形状の関係についても導かれ、透過率のグラフから形状のパラメータの一部を推測することができた。

しかし、推定できた関係も全体の一部でありシワの形状全体を推定するには至っていない。ここでは第3章でも用いたシワ形状の簡略化モデルを用いてその形状パラメータを最適化することで、透過率のグラフから元のシワの形状を推定する手法について述べる。

5.2 形状推定問題の定式化

第3章では図5.1に再掲するシワ形状の簡略化モデルの形状パラメータを変化させることで、シワの形状から透過率のグラフへの影響は示された。その中で図3.11のようにシワの数が増えてもピークの位置に変化が生じないなど、似たような形状のシワからは類似した透過率のグラフが得られている。

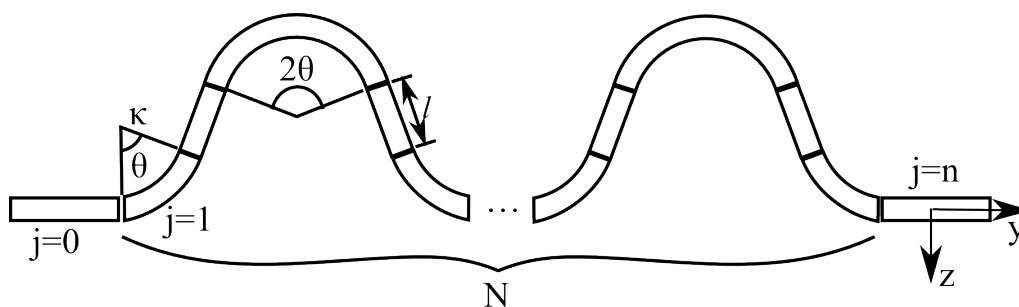


図 5.1: 簡略化シワモデル

また断面が正弦波形状になっているシワと簡略化モデルによって表されるシワを比較した。波長2mm, 振幅0.5mm, 波数1の正弦波形状のシワと曲率 $\kappa = 3000(1/m)$, 中心角 $\theta = 1(rad)$, 直線部長さ $l = 8.0 \times 10^{-4}(m)$, 波数 $N = 1$ とした簡略化モデルの形状を図5.2に、それらから第3章のシェルモデルを用いて導かれた弾性波入射角 $\psi = 0$ の透過率のグラフを図5.3に示した。膜の厚みやヤング率などの物性値は表2.1に示したカプトン膜のものを使用している。これらのシワの形状はよく一致しており、そこから導かれたグラフの形状もまたよく類似している。

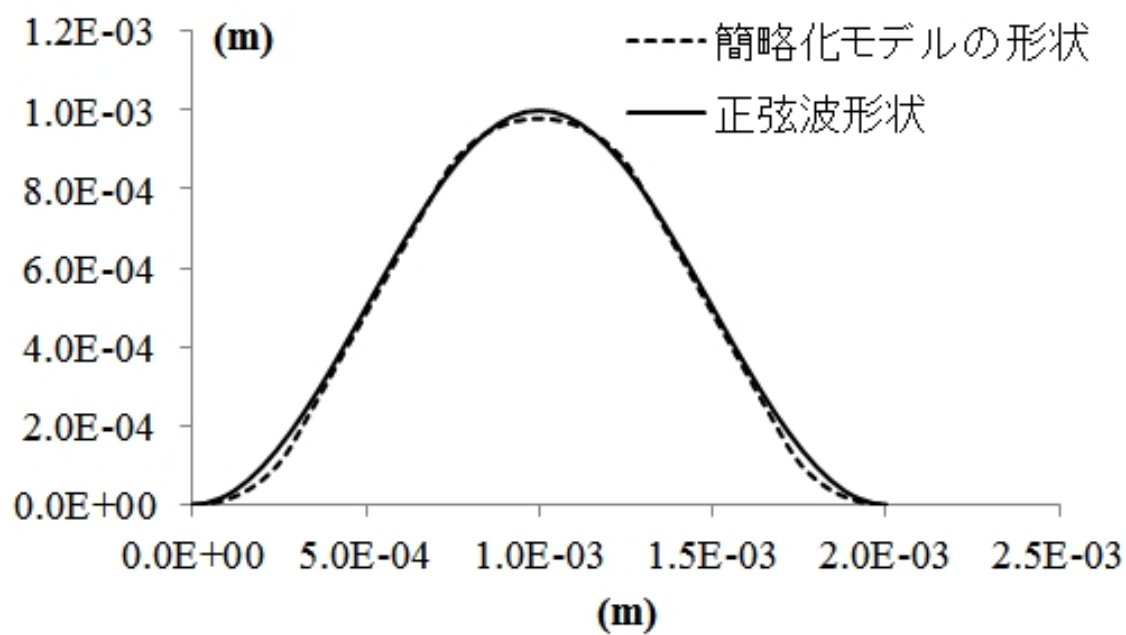


図 5.2: 正弦波形状と簡略化モデルの比較

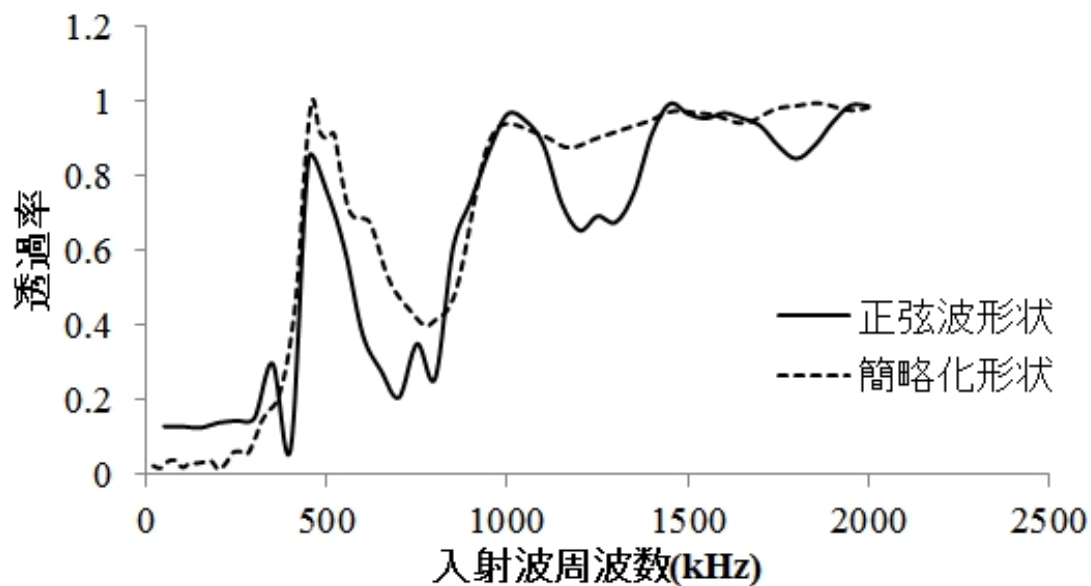


図 5.3: 正弦波形状と簡略化モデルの透過率の比較

したがって図 5.1 に示したシワの簡略化モデルの形状パラメータを調整し、推定対象のシワから得られた透過率のグラフと近づけることでシワの形状が推定できると考えられる。シワの簡略化モデルは形状に依存するパラメータとして曲率 κ 、円筒部中心角 θ 、直線部長さ l 、シワ波数 N 、弾性波の入射角 ψ の 5 つを持っており、これに膜の物性値から知ることのできるパラメータ、ヤング率 E 、ポアソン比 ν 、密度 ρ 、厚み h を合わせることで各周波数での透過率を得ることができる。つまり、推定対象となるシワから得られる縦波の透過率のグラフを $T_{target}(\omega)$ 、簡略化モデルから得られる縦波の透過率のグラフを $T_{model}(\omega, \kappa, \theta, l, N, \psi)$ とすれば、この 2 つの誤差の二乗和 E_{norm}

$$E_{norm}(\kappa, \theta, l, N, \psi) = \sum (T_{target}(\omega) - T_{model}(\omega, \kappa, \theta, l, N, \psi))^2 \quad (5.2.1)$$

を最小化する変数 $(\kappa, \theta, l, N, \psi)$ を探索する問題となる。

5.2.1 透過率算出の簡略化

簡略化モデルを用いた透過率の計算手法は第 3 章で示したが、この手法では縦波・せん断波・曲げ波・減衰モードの 4 つを考慮している。しかし、この手法では簡略化モデルの各要素間の連続性の計算において扱う行列が大きくなり、一回の計算に時間がかかってしまう。そこでこの形状推定では比較的縦波の透過率への影響が小さいと予想される曲げ波と減衰モードの影響を、簡略化モデルの要素間の連続性の計算の際に無視して透過率 T_{model} の計算を行った。

式 (2.2.17) から縦波とせん断波の波数が、式 (2.2.15) にそれらを代入して固有ベクトルを求めることで各振動モードの振動方向のベクトル $(U \ V \ W)^T$ が得られる。これを元に式 (2.5.10) から要素間の連続性を考えるが、曲げ波と減衰モードの影響を無視するのでそれらと関係の強い z 方向の変位 w 、 z 方向の剪断応力 Q_θ 、 x 軸まわりのモーメント M_θ 、断面の回転角 ψ の連続性は無視する。したがって、式 (2.5.10) は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ T_\theta \\ S_{\theta x} \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (5.2.2)$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{jhk_0 E \nu}{1-\nu^2} & \frac{jhsE}{1-\nu^2} & I_y \kappa^3 - I_y s^2 \kappa + \frac{hE\kappa}{1-\nu^2} \\ \frac{1}{2} i I_y s (1-\nu) \kappa^2 + \frac{hisE}{2(\nu+1)} & \frac{jhk_0 E}{2(\nu+1)} & -\frac{1}{2} I_y k_0 s \kappa (1-\nu) \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

と簡略化される。これによって各モードの振幅から応力への変換行列 H は式 (2.5.12) に示した曲げ波と減衰モードを考慮した場合の 8×8 から 4×4 に縮小される。

これを用いて図 5.2 の簡略化モデルに対して透過率を計算した結果と曲げ波と減衰モードの影響を考慮した場合の比較を図 5.4 に示す。曲げ波と減衰モードの影響を考慮した場合と比較して全体的に滑らかなグラフになっているが、それ以外ではよく一致しており推算のモデルとしては十分であるといえる。

5.2.2 初期条件の決定と最適化手法

パラメータの最適化問題において解析の初期条件の決定は計算の時間短縮や収束性の向上に影響を与える。第 3 章で透過率のグラフの形状について簡略化モデルのパラメータの与える影響の傾向

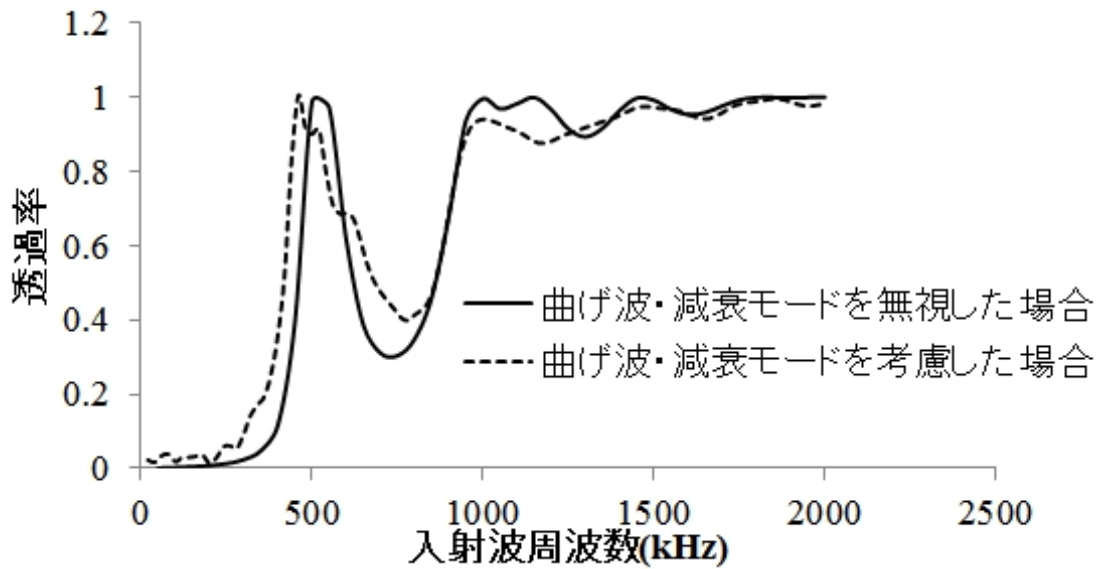


図 5.4: 曲げ波・減衰モードを考慮した場合としていない場合の透過率の比較

は示され、特に最低次のピーク周波数 f_{pmin} からは直線部長さ l と円筒部曲率 κ との関係式 (3.3.21) が得られた。これを用いて最低次のピーク位置が T_{target} と T_{model} で揃うように直線部長さの初期値 l_{ini} は

$$l_{ini} = \frac{c_{l0}}{2f_{pmin}} - 2/\kappa_{ini} \quad (5.2.4)$$

となる。ここで κ_{ini} は円筒部曲率の初期値であり、 l_{ini} が負にならない程度の値とする。

また、直線部長さ l と円筒部曲率 κ 以外のパラメータ、円筒部中心角 θ 、シワ波数 N 、弾性波の入射角 ψ に関しては

$$\begin{cases} \theta_{ini} = \pi/4 \\ N_{ini} = 1 \\ \psi_{ini} = 0 \end{cases} \quad (5.2.5)$$

とした。

図 5.3 の正弦波形状のシワから導かれた透過率のグラフを例とする。このグラフの最低次のピーク周波数 f_{pmin} は約 450kHz であり、表 2.1 の物性値を用いているので $c_{l0} = 1605m/s$ となる。式 (5.2.4) を用いて l_{ini} が負にならないように $\kappa_{ini} = 2000/m$ とすれば、 $l_{ini} = 7.8 \times 10^{-4}(m)$ が得られる。これらと式 (5.2.5) の初期条件を用いて簡略化モデルによる透過率を求め比較を図 5.5 に示した。ピーク位置は概ね揃っている様子が見える。

パラメータの最適化手法としてはニュートン法や最急降下法などが有名である。式 (5.2.1) の最適化問題は非線形な関数の最小自乗問題であるので、その代表的な解法であるレーベンバーグ・マルカート法 [50] を用いる。解から遠い場合は収束に時間は掛かるが局所最小値に陥りにくい一次導関数を用いる最急降下法を利用し、解に近づくとき二次導関数まで用いる収束の速度に優れるニュートン法を使用することで解探索の速度と局所解の回避を両立した探索手法である。数値解析ソフト Scilab には関数 lsqrsolve[51] として実装されており、収束の判定などもこの関数内で行われている。この解析ではこの関数 lsqrsolve を用いて最適化の計算を行っている。また 5 つの変数 $\kappa, \theta, l, N, \psi$ のう

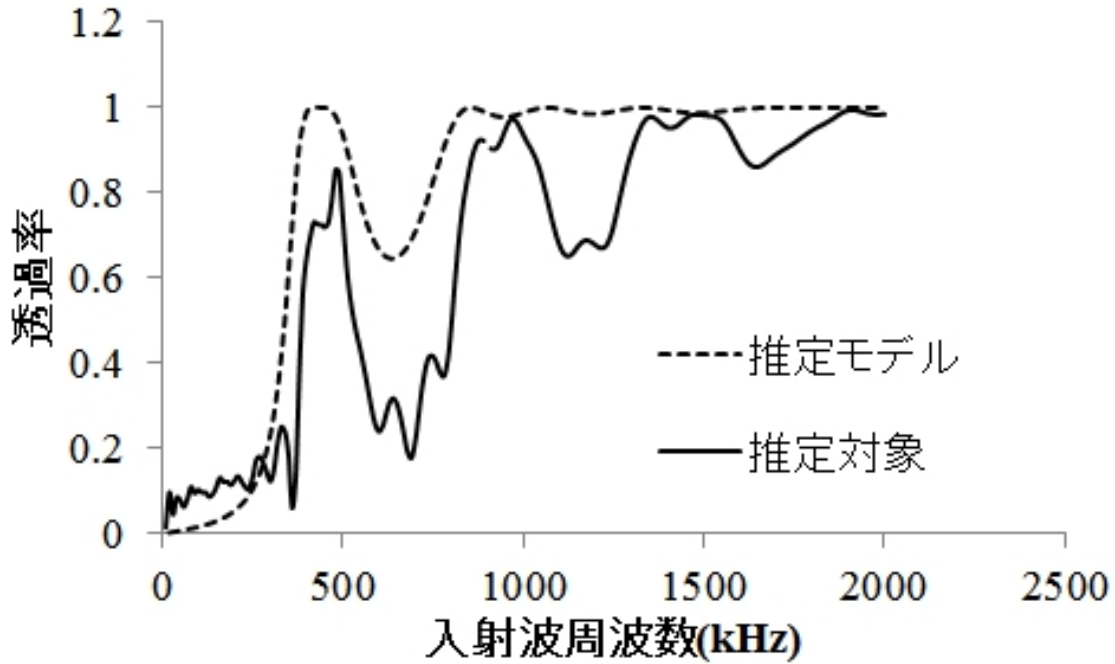


図 5.5: 正弦波形状と簡略化モデル初期形状の透過率の比較

ち、 N 以外には以下の境界条件を与えている。

$$0 < \kappa \quad (1/m) \quad (5.2.6)$$

$$0 < \theta < \pi/2 \quad (rad) \quad (5.2.7)$$

$$0 < l \quad (m) \quad (5.2.8)$$

$$0 < \theta < \pi/2 \quad (rad) \quad (5.2.9)$$

シワの数 N は自然数の離散値を取るため、まず $N = 1, 2, 3$ のそれぞれの場合で残りの 4 つのパラメータの最適化を行った。それぞれの場合で最小化された後の誤差の二乗和 $E_{res,N}$ を比較し、 $N=1$ で最小であればシワの数 N は 2、 $N=2$ で最小であればシワの数 N は 2 とした。また、 $N=3$ で最小になった場合 $N=4$ の場合について残差を計算し、 $E_{res,3} < E_{res,4}$ であればシワの数 N は 3 とした。 $E_{res,3} > E_{res,4}$ の場合は引き続き $N=5$ について計算し、 $E_{res,N} < E_{res,N+1}$ となるまで計算し続けることでシワの数 N を決定した。

5.3 形状推定結果とその考察

5.3.1 正弦波形状のシワに対する推定

正弦波形状のシワに対して表 5.1 に示す 3 つの形状に対して、それぞれの形状に対して第 3 章のシェルモデルを用いて透過率を計算しその透過率のグラフから元の形状の推定を行った。表 5.2 に各形状から得られた透過率のグラフの最低次のピークと、解析の初期条件を示す。

正弦波形状 1 に対して $N=1, 2, 3$ として推定を行った場合の形状パラメータ・最適化後の誤差の二乗和を表 5.3 に示す。 $N=1$ において最適化後の誤差の二乗和となっておりシワの数は 1 つであると推定できる。このときの透過率のグラフと推定されたシワの形状の比較を図 5.6、5.7 に示す。

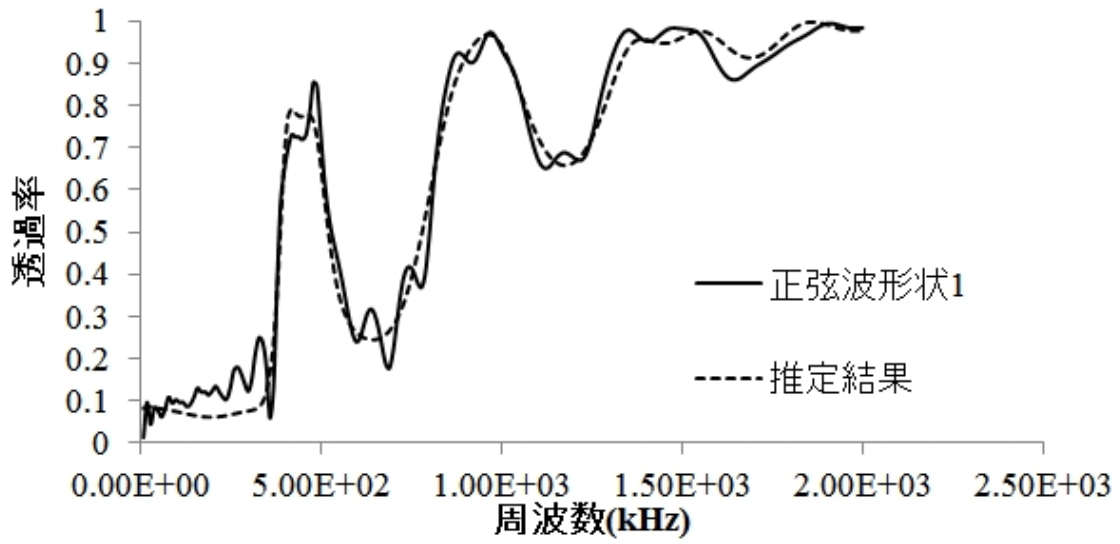


図 5.6: 正弦波形状 1 に対する推定結果の透過率

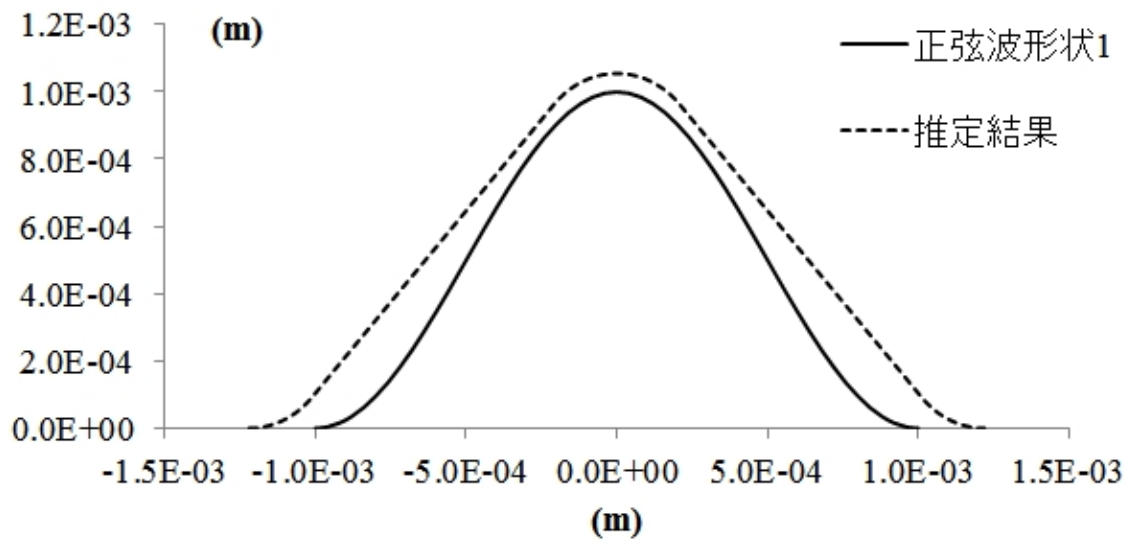


図 5.7: 正弦波形状 1 に対する推定結果

表 5.1: 推定対象となるシワの形状

	波長	振幅	シワの数	弾性波入射角
1	2mm	0.5mm	1	0
2	3mm	0.5mm	3	0
3	20mm	5mm	1	$\pi/6 \text{ rad}$

表 5.2: 透過率のグラフの最低次のピークと解析の初期条件

	ピーク周波数	曲率 κ_{ini}	直線部長さ l_{ini}	中心角 θ_{ini}	シワの数 N_{ini}	入射角 ψ_{ini}
1	450kHz	2000 /m	$7.8 \times 10^{-4}m$	$\pi/4rad$	1	0 rad
2	340kHz	1000 /m	$3.6 \times 10^{-4}m$	$\pi/4rad$	1	0 rad
3	60kHz	1000 /m	$1.1 \times 10^{-2}m$	$\pi/4rad$	1	0 rad

正弦波形状 2 に対して $N=1,2,3,4$ として推定を行った場合の形状パラメータ・最適化後の誤差の二乗和 (残差) を表 5.4 に示す。 $N=3$ において最適化後の誤差の二乗和となっておりシワの数は 3 つであると推定できる。このときの透過率のグラフと推定されたシワ 1 波分の形状の比較を図 5.8、5.9 に示す。

同様に正弦波形状 3 に対しても透過率のグラフと推定されたシワの形状の比較を図 5.10,5.11 に形状のパラメータを表 5.5 に示す。

いずれの形状でも振幅がやや小さく波長がやや長く推定される傾向が見られるが、シワの数や弾性波の入射角などはよく推定できている。

5.3.2 メキシカンハット形状のシワに対する推定

シワの形状が正弦波状である場合はシワ 1 波毎に見ればその振幅・波長は常に一定であった。しかし、実際のシワではそのようなことはなく振幅の大きいシワと小さいものが混合する。この簡略化モデルでは形状のパラメータが 5 つだけであるため、推定された結果に現れるシワの形状の振幅や波長は一種類のみである。したがって大小複数の振幅のシワが混合している場合は、推定の際に誤差が出る。

このようなシワの形状に対しても推定を行った際の結果に対して検討を行うために式 (5.3.1) のように、断面形状が表されるメキシカンハット形状をしたシワに対して正弦波形状の時と同様にして形状推定を行った。図 5.12 にその形状を示す。また、弾性波入射角は $\psi = 0$ とする。

$$f(x) = 4.0 \times 10^{-4} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{4.0 \times 10^{-4}} \right)^2 \right\} \exp \left\{ \left(\frac{x}{4.0 \times 10^{-4}} \right)^2 \right\} \quad (5.3.1)$$

表 5.3: 正弦波形状 1 に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ	残差
1	3546	$1.19 \times 10^{-3}m$	$0.8257rad$	$0.327rad$	0.694
2	3036	$1.08 \times 10^{-3}m$	$0.7645rad$	$0.296rad$	1.586
3	2907	$9.89 \times 10^{-4}m$	$0.8232rad$	$0.21rad$	2.14

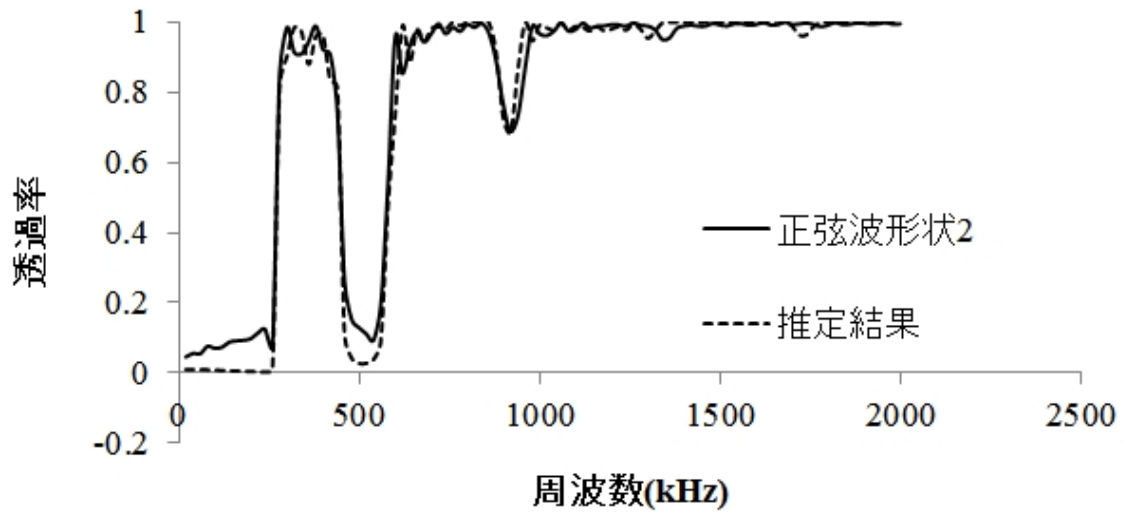


図 5.8: 正弦波形状 2 に対する推定結果の透過率

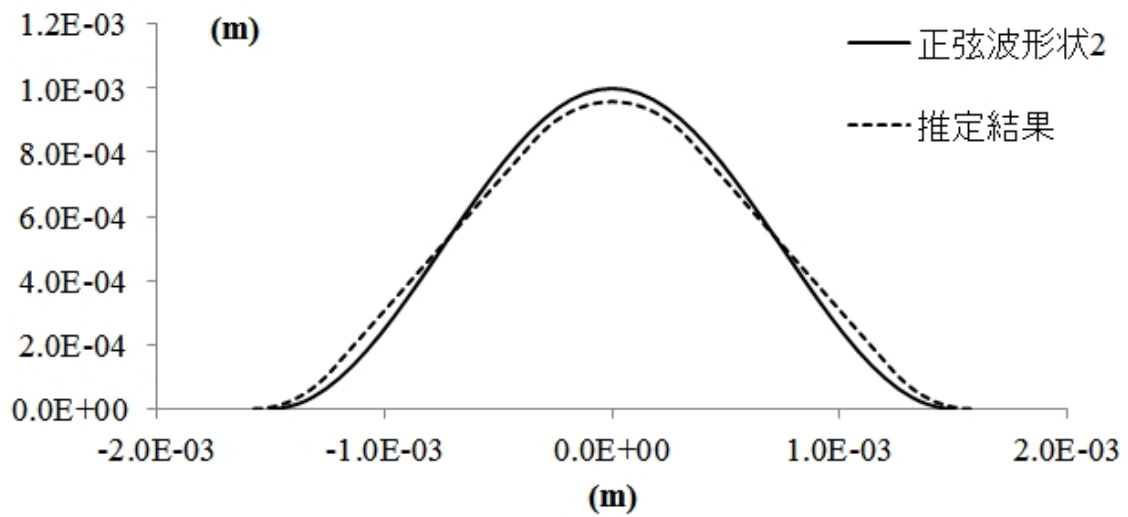


図 5.9: 正弦波形状 2 に対する推定結果

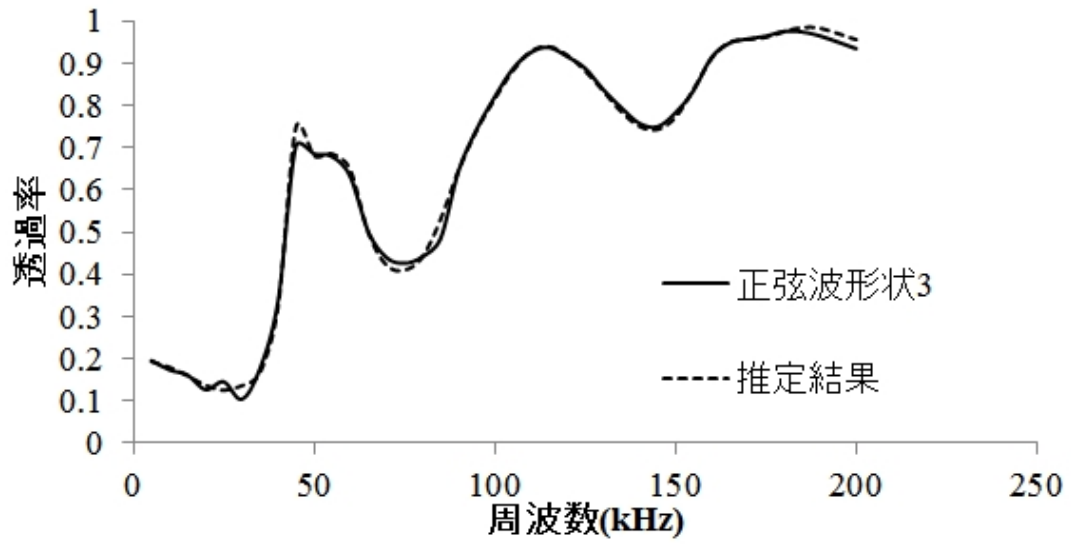


図 5.10: 正弦波形状 3 に対する推定結果の透過率

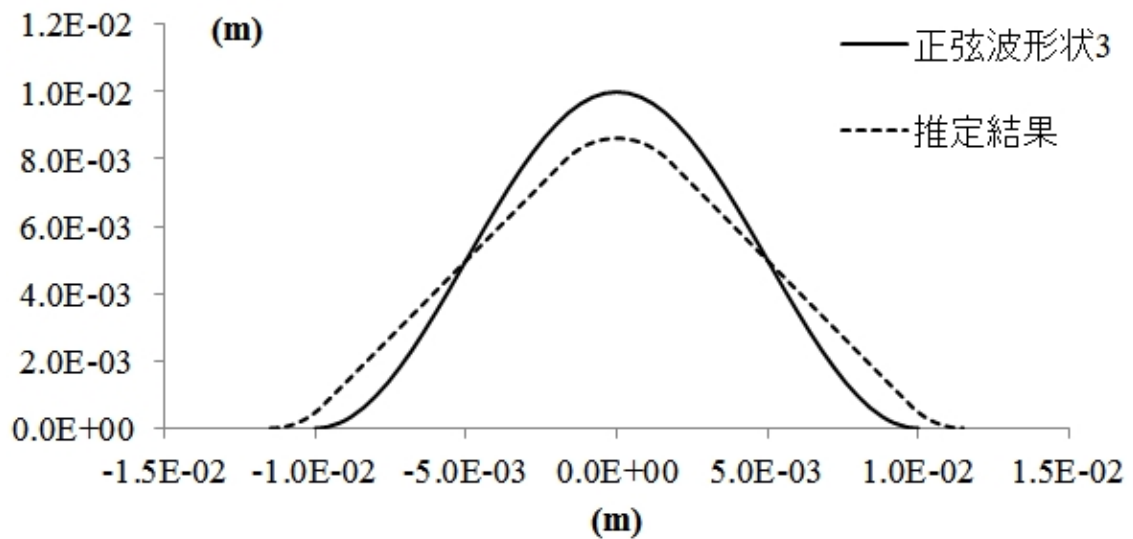


図 5.11: 正弦波形状 3 に対する推定結果

表 5.4: 正弦波形状 2 に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ	残差
1	2485	$1.44 \times 10^{-3}m$	$0.6348rad$	$0.138rad$	1.045
2	1945	$1.25 \times 10^{-3}m$	$0.6449rad$	$0.208rad$	0.552
3	1838	$1.15 \times 10^{-3}m$	$0.6779rad$	$0.148rad$	0.399
4	1813	$1.13 \times 10^{-3}m$	$0.6888rad$	$0.1148rad$	0.553

表 5.5: 正弦波形状 2 に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ
1	389 /m	$1.08 \times 10^{-2}m$	$0.737rad$	$1.052rad = 0.335\pi$

表 5.6 にメキシカンハット形状から得られた透過率のグラフの最低次のピークと、解析の初期条件を示す。正弦波形状と異なり振幅の大きい波一つとその両脇に振幅の小さい部分がある。これに対

表 5.6: メキシカンハット形状に対する解析の初期条件

	ピーク周波数	曲率 κ_{ini}	直線部長さ l_{ini}	中心角 θ_{ini}	シワの数 N_{ini}	入射角 ψ_{ini}
1	700kHz	5000 /m	$7.5 \times 10^{-4}m$	$\pi/4rad$	1	0 rad

して $N=1,2,3$ として推定を行った場合の形状パラメータ・最適化後の誤差の二乗和を表 5.7 に示す。 $N=1$ において最適化後の誤差の二乗和となっておりシワの数は 1 つであると推定される。

このときの透過率のグラフと推定されたシワの形状の比較を図 5.13、5.14 に示す。ただし、モデルの平行移動は推定結果に影響を及ぼさないため、推定結果は元の形状と比較がしやすいように移動している。簡略化モデルを用いてメキシカンハット形状の中央部分の振幅が最も大きい部分が再現されている様子が見られる。しかし、この簡略化モデルでは曲率などのパラメータを 1 つずつしか持たないために振幅の大きい部分の両脇に有る部分は表現されていない。

5.3.3 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の推定

正弦波形状のシワに関してはやや振幅が小さく波長が長く推定される傾向があったものの、シワの数などについても簡略化形状モデルを用いてよく再現することが出来た。しかし、簡略化形状モデルを用いて行われる本論文の推定方法では表現されるシワの振幅・波長は一種類だけであるため、複数の波長・振幅のシワが混在するような形状は表現し切ることが出来ない。5.3.2 でのメキシカンハット形状に対する推定では、複数あるシワの中で最大の振幅を持つものに合致するように推定結果の形状は得られ、シワの数は振幅が小さい部分を無視したような形で得られた。5.3.2 で示したメキシカンハット形状に対する推定では良い一致が見られたが、これは最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が一致していたために、単一形状のシワしか表現できない簡略化モデルであっても、推定対象のシワの形状と一致が取れていたと考えられる。

そこで曲率が大きく振幅が小さいシワと、振幅が大きく曲率の大きいシワを持つ式 (5.3.2) を用いて表される形状について推定を行う。この形状と曲率の分布、透過率の変化のグラフを図 5.15, 5.16, 5.17 に示す。表 5.8 に複数の振幅のシワが混ざった形状から得られた透過率のグラフの最低次のピークと、解析の初期条件を示す。

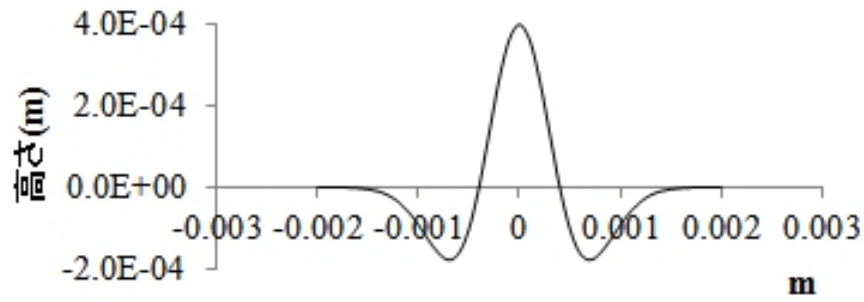


図 5.12: メキシカンハット形状

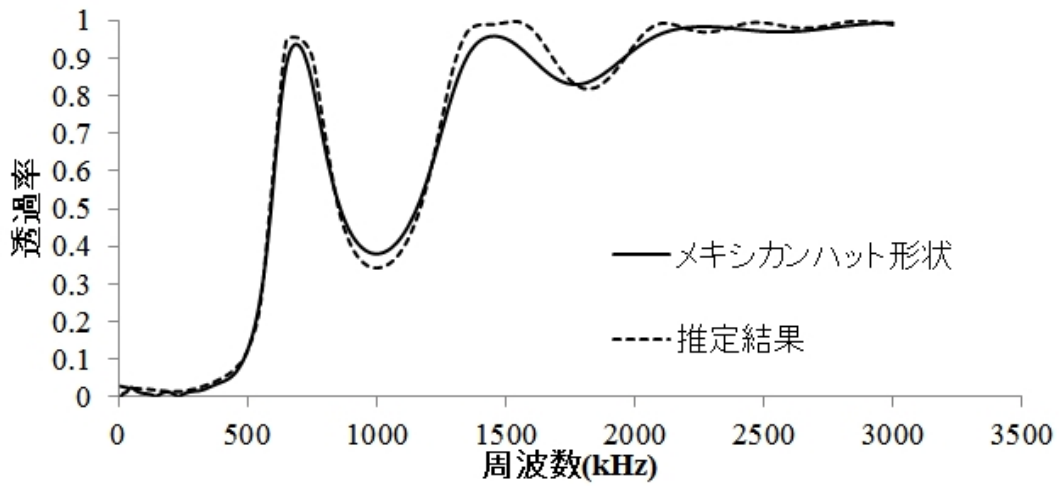


図 5.13: メキシカンハット形状に対する推定結果の透過率

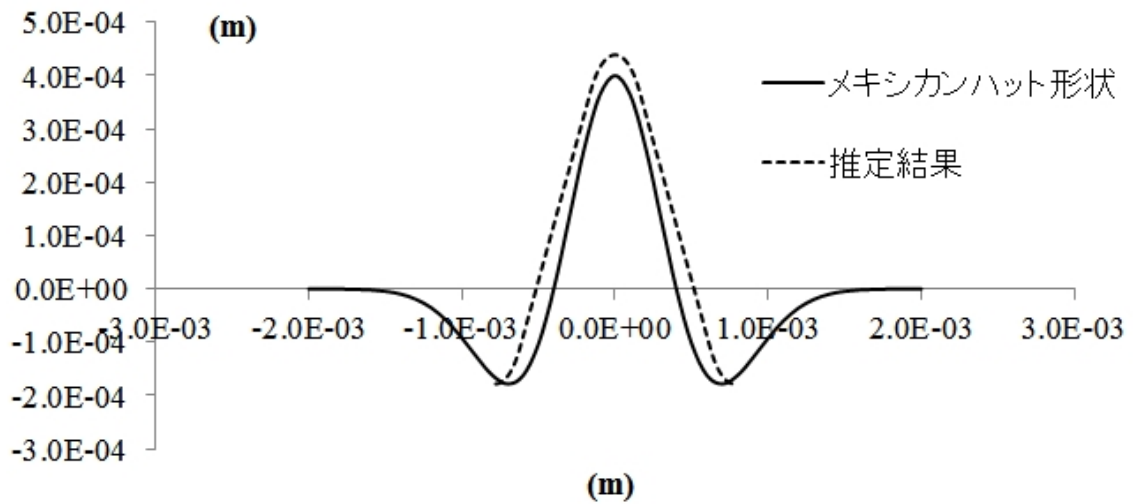


図 5.14: メキシカンハット形状に対する推定結果

表 5.7: メキシカンハット形状に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ	残差
1	4545 /m	$6.68 \times 10^{-4}m$	0.806rad	0.173rad	0.2384
2	4547 /m	$6.89 \times 10^{-4}m$	0.597rad	0.252rad	0.8935
3	4546 /m	$7.46 \times 10^{-4}m$	0.378rad	0.292rad	1.512

$$f(x) = \begin{cases} 1.0 \times 10^{-3} \times (1 + \cos(10^3\pi \cdot (x + 1.5 \times 10^{-3}))) & -2.5 \times 10^{-3}(m) < x < -0.5 \times 10^{-3}(m) \\ 0.45 \times 10^{-3} \times (1 + \cos(2 \times 10^3\pi \cdot (x))) & -0.5 \times 10^{-3}(m) < x < 0.5 \times 10^{-3}(m) \\ 1.0 \times 10^{-3} \times (1 + \cos(10^3\pi \cdot (x - 1.5 \times 10^{-3}))) & 0.5 \times 10^{-3}(m) < x < 2.5 \times 10^{-3}(m) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

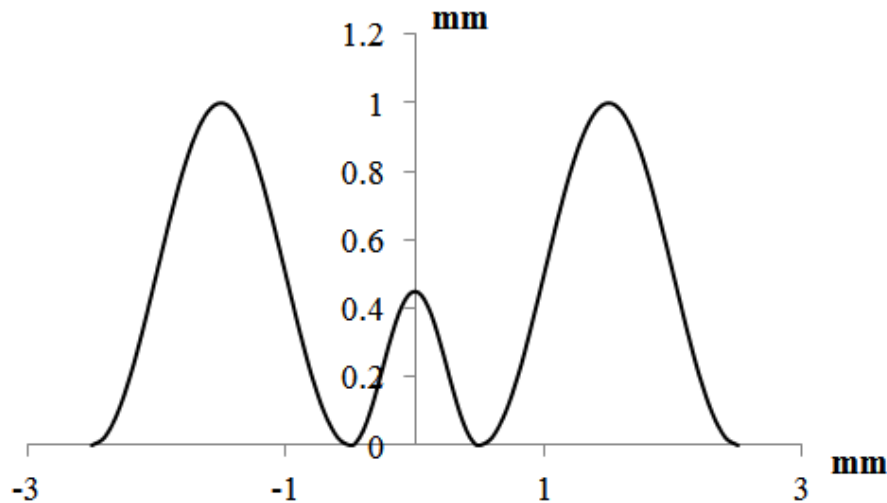


図 5.15: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状

表 5.8: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状に対する解析の初期条件

	ピーク周波数	曲率 κ_{ini}	直線部長さ l_{ini}	中心角 θ_{ini}	シワの数 N_{ini}	入射角 ψ_{ini}
1	1000kHz	7000 /m	$5.4 \times 10^{-4}m$	$\pi/4rad$	1	0 rad

$N=1,2,3$ として推定を行った場合の形状パラメータ・最適化後の誤差の二乗和を表 5.9 に示す。 $N=1$ において最適化後の誤差の二乗和となっておりシワの数は 1 つであると推定される。このときの推定されたシワの形状の比較を 5.18 に示す。ただし、メキシカンハット形状の場合と同様に推定結果は元の形状と比較がしやすいように移動している。

推定された結果では曲率はシワ内部での最大値に近いものが得られる一方で、振幅は曲率の大きく振幅の小さいシワに近い物が得られた。この推定手法で得られる振幅の大きさは直線部の長さ l に大きく依存し、 l の大きさは最低次のピーク周波数と強い相関を持つ。初期値の推定の項でも示したように、最低次のピーク周波数から l の推定の初期値は決定されている。振幅が大きく平坦な部分が

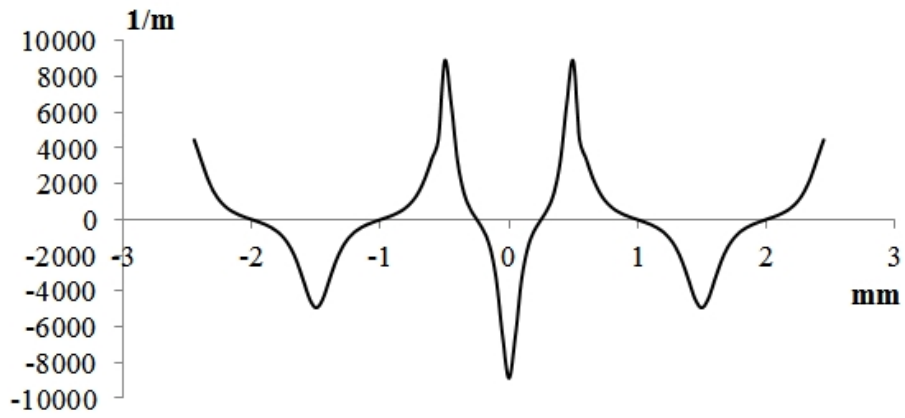


図 5.16: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の曲率の分布

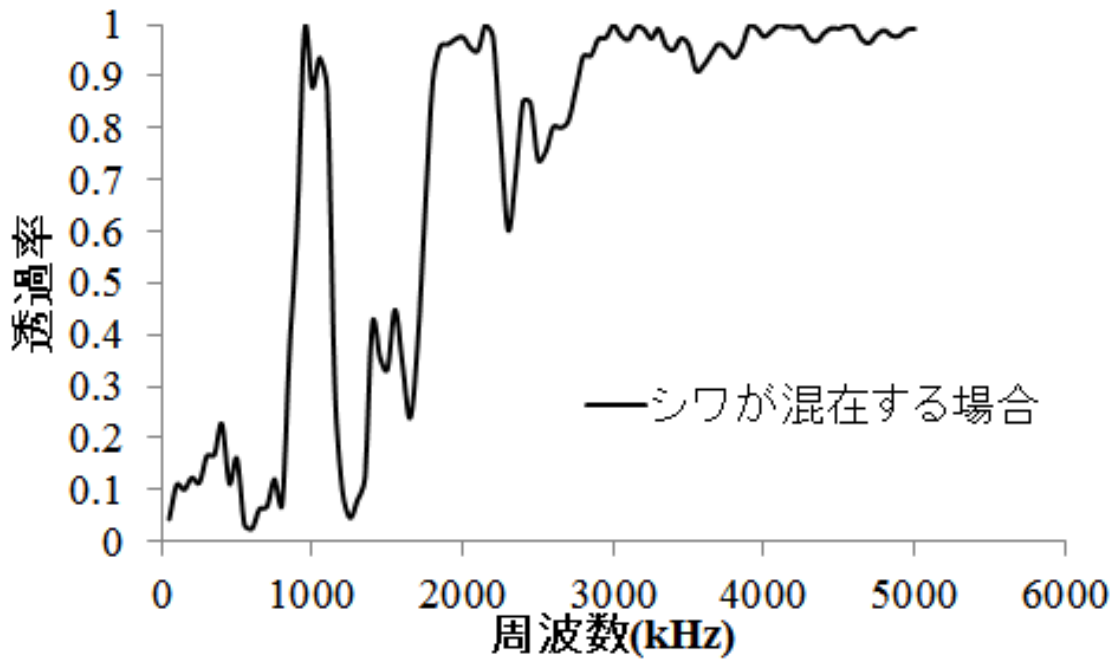


図 5.17: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状に対する透過率

表 5.9: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ	残差
1	6999 /m	$4.94 \times 10^{-4}m$	$0.925rad$	$1.32 \times 10^{-4}rad$	0.8525
2	6993 /m	$5.00 \times 10^{-4}m$	$0.757rad$	$0.014rad$	1.2985
3	6355 /m	$4.85 \times 10^{-4}m$	$0.870rad$	$0.103rad$	1.4474

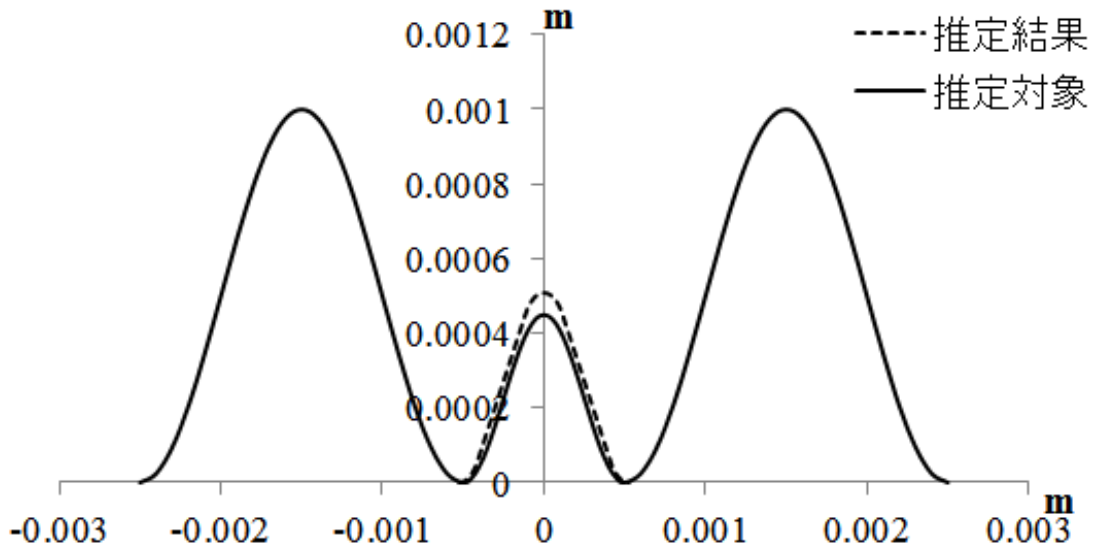


図 5.18: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の形状に対する推定結果

長いシワほどそれによって発生する共振の周波数は低くなるため、最低次のピーク周波数が低いほどにシワの振幅も大きく推定されることになる。

図 5.15 のシワの振幅が最大である部分はそれ単独では 500kHz 近辺にピークを持つが、図 5.17 のグラフではこれに相当する部分が見られない。このために図 5.17 のグラフの 1000kHz でのピークが反映され、小さな振幅になったと考えられる。また、式 (5.3.2) での振幅の小さいシワと振幅の大きなシワ単独での透過率の変化と、それらが混合した場合の透過率の変化を比較したグラフを図 5.19 に示す。

単独でのピークが一致した場合に混合した場合でもピークが見られていることが分かる。この場合では振幅が大きい部分の 2 番めに低いピークと振幅が小さい部分の最低次のピークが重なっており、推定結果の振幅でも振幅が小さい部分に近い大きさとなった。

5.4 まとめ

縦波の透過率のグラフからの元の形状の推定方法について議論を行った。シワ形状の簡略化モデルを用いてそれから求められる透過率と、推定対象となる透過率のグラフとの誤差の二乗和が最小になるように簡略化モデルのパラメータを最適化することでシワ形状の推定は行われた。

同一の形状が繰り返す正弦波形状のシワに対する推定では、シワの形状・数などを波長が長く、振

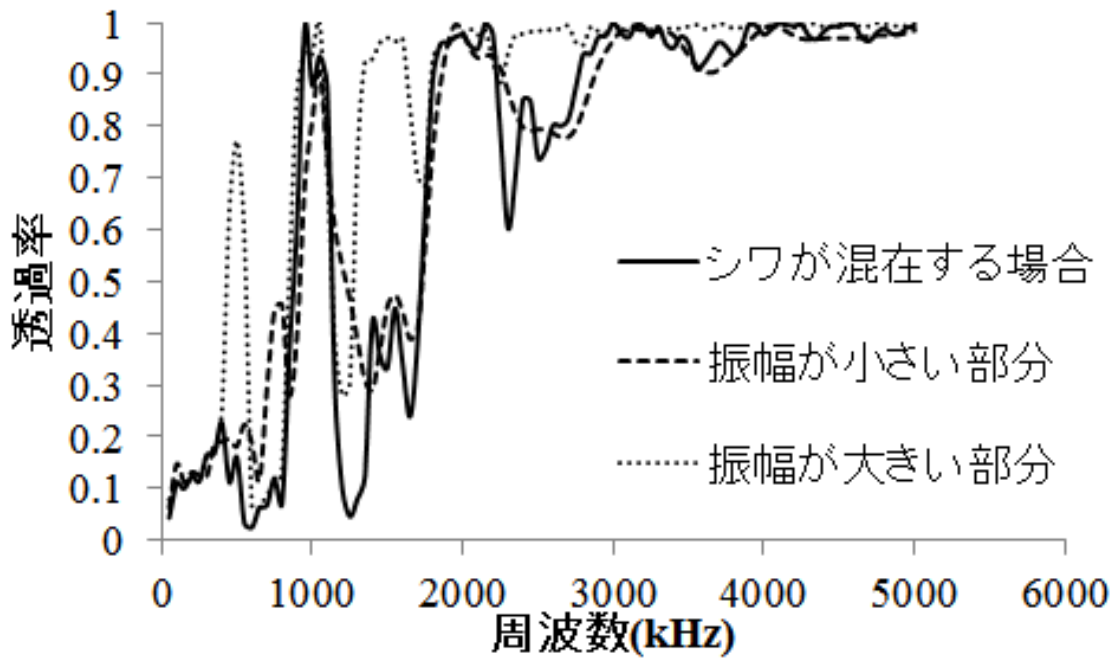


図 5.19: 最大振幅を持つ部分と最大曲率を持つ部分が異なる場合の透過率の比較

幅が小さくなる傾向が見られるものによく推定できた。また、正弦波のように同一の形状のシワが繰り返されて居るのではない場合として、シワ形状がメキシカンハット形状となる場合や、複数の振幅のシワが混ざった形状に対しても推定を行った。このような形状が一定でない場合に対する推定では、推定結果から導かれる曲率は対象の内の最も大きい部分に良く一致した。一方で振幅は透過率のグラフの最低次のピークに強く影響されるために、必ずしも最大の部分が得られるとは限らない。このような場合に対して推定を行うのであれば、本章の簡略化モデルのような全てのシワで形状パラメータを共通にするのではなく、個々のシワ毎に形状パラメータを変換させたモデルが必要になると考えられる。

第6章 非接触振動計による弾性波伝播計測 実験

6.1 はじめに

第3章・第4章を通じてシェルモデルによる解析や有限要素法を用いてシワの形状が弾性波に与える影響について考察してきた。ここでは実験によって弾性波の伝播を計測することで、これらの計算の確認を行う。

実験では膜の上に圧電素子を付加し振動を発生させるとともに、非接触式の振動計を用いて膜の各所の振動を計測した。これにより得られた振動の様子をシワが存在しない場合と存在する場合で比較することで、透過率の大きさは計算された。

6.2 非接触多軸振動計

弾性波の電波状態の計測のためには膜の変位を測定する必要がある。しかし、計測対象となる膜は非常に薄く計測用のセンサが膜とそこを伝播する弾性波に与える影響を無視することは出来ない。したがって弾性波伝播の状態を確認するという本実験の目的としては、非接触で振動を計測可能であるほうが望ましいといえる。そこで振動の計測を行うために宇宙航空研究開発機構 (JAXA) の協力の下、非接触振動計 MaVES を使用した。図 6.1 はその写真である。

MaVES とは多軸振動非接触自動計測システム (Multi-axis Vibration Evaluating System) の略称であり、図 6.2 のようにセンサヘッドに三機のレーザードップラー変位計を装備している。レーザードップラーセンサはその名の通りレーザー光のドップラー効果により計測点の速度が計測可能なセンサである。これらのセンサを用いることで非接触で物体のある一点の運動の速度を計測し、三次元に分解することが可能である。さらに、各々のセンサは内部にミラーを搭載しておりこれによるレーザー光軸方向の変更とロボットアームによるセンサヘッドの移動によって広範囲に存在する点の計測が自動的に行える。

しかし、計測にレーザードップラーセンサを使用している関係上被測定物からの散乱反射光が計測に必須であり、反射率の低い物体や透明な物質の計測に用いるのにはやや不向きである。厚さ $50\mu\text{m}$ のカプトン膜に対して MaVES での計測を試みた際にカプトン膜上に照射された測定用レーザーの様子が図 6.3 に示されている。反射率を上昇させるための微粒子がスプレーにより塗布されているが、レーザー光が透過してしまい定盤上に反射している様子が見られる。このように透過率が高い物体に対しては計測には十分な反射光を得ることができず、測定値が非常に不安定になり信頼に足る結果を得ることは出来なくなってしまう。



図 6.1: 多軸振動非接触自動計測システム MaVES

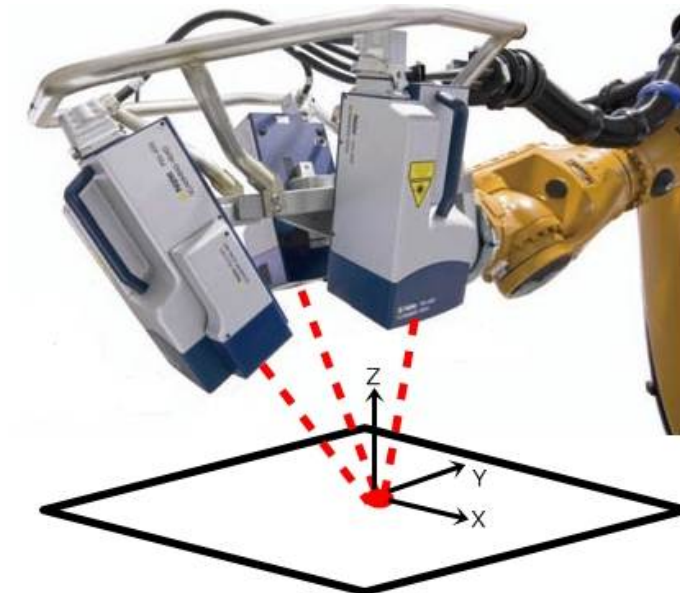


図 6.2: MaVES レーザードップラーセンサ



図 6.3: カプトン膜に照射された MaVES のレーザー

6.3 弾性波伝播計測実験

6.3.1 実験の概要

第3・4章の計算では実際にソーラーセイルとしても使用されたカプトン膜の物性値を用いていた。しかし上記のような理由で実験にはカプトン膜は使用することが出来ない。そこで、代替品として不透明白色のオリカTMP 白PETフィルムを用いた。図6.4にこの実験に用いられた膜の概略図を示す。幅は約600mm、長さは1200mm、膜の厚みは $120\mu\text{m}$ となっている。

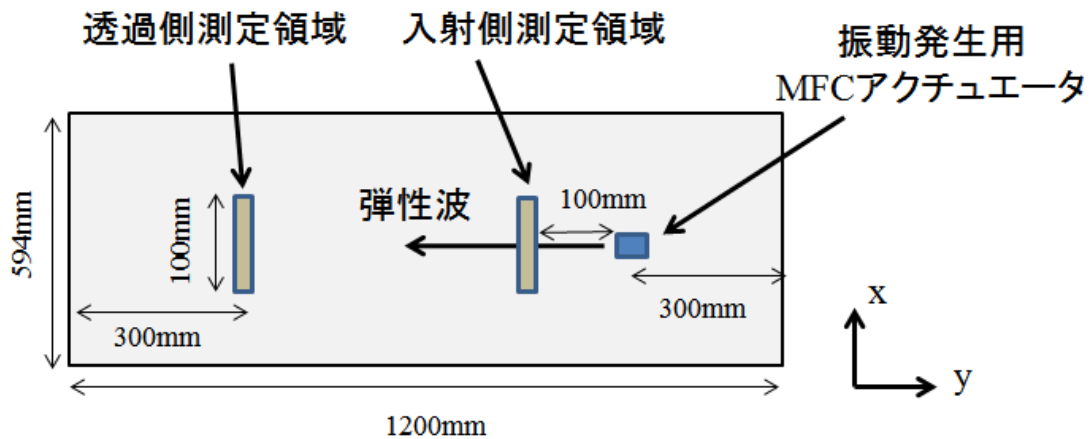


図 6.4: 実験に用いられた膜の概略図

この膜に対して膜の両サイドを図6.5のようなジグで挟みこむことにより、曲率を与えシワ領域を作成した。ジグの形状は図6.6に示す曲率半径3mmのシワを与えるジグと6.7に示す曲率半径15mmのシワを与えるジグの二種類を用いてそれぞれ異なる曲率を膜に与えている。曲率に応じて影響が

与えられる周波数帯が変化することが予想され、図 6.6 に示したものでは円弧部分の間に直線部があることで透過率のピークが発生することも予想される。さらにジグで挟みこむ位置を変更することにより、弾性波のシワに対する入射角が 0 の場合 (図 6.8) と入射角が $\pi/6$ の場合 (図 6.9) についてそれぞれ計測を行った。

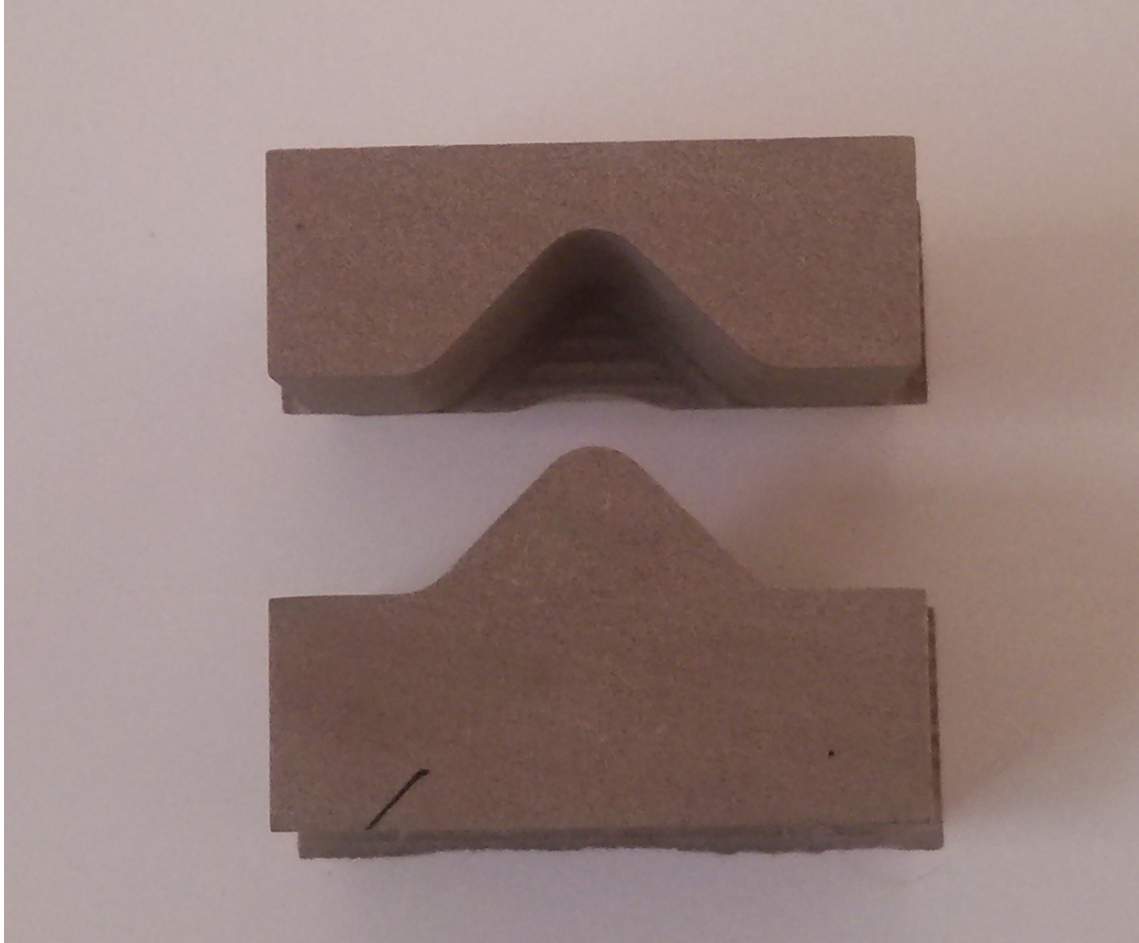


図 6.5: シワ形成の為のジグ

シワが形成された状態の膜の様子を図 6.10 に示す。

この膜の上に弾性波発生源となる MFC アクチュエータ (図 6.12) を貼り付け、面内に伸縮する波を発生させる。MFC とは Macro Fiber Composite の略であり、圧電素子として電圧を印加することで面内方向への伸縮を発生させることができる。図 6.13 のように繊維状の圧電素子とそれに直交するように配置された電極から構成されており、従来の圧電素子に比較して高い柔軟性と大きな変形量を得ることができる。

振動の振幅は図 6.4 に示すようにシワに対して MFC と同じ側と反対側に取りられた 2 つの計測領域内で MaVES を用いて非接触で計測された。測定点はそれぞれの計測領域内において膜の x 軸方向に 10mm 毎に 11 箇所取られている。また、それぞれ MFC に近い側の測定領域を入射側、シワに対して反対側にある物を透過側と呼ぶ。入射側の計測領域では MFC アクチュエータにより発生された弾性波とシワによって反射された弾性波が、透過側ではシワを透過した弾性波の振幅が観測される。

この測定領域に対し周波数は 10 ~ 100kHz 程度まで 5kHz 刻みで計測を行い、周波数ごとの振幅が

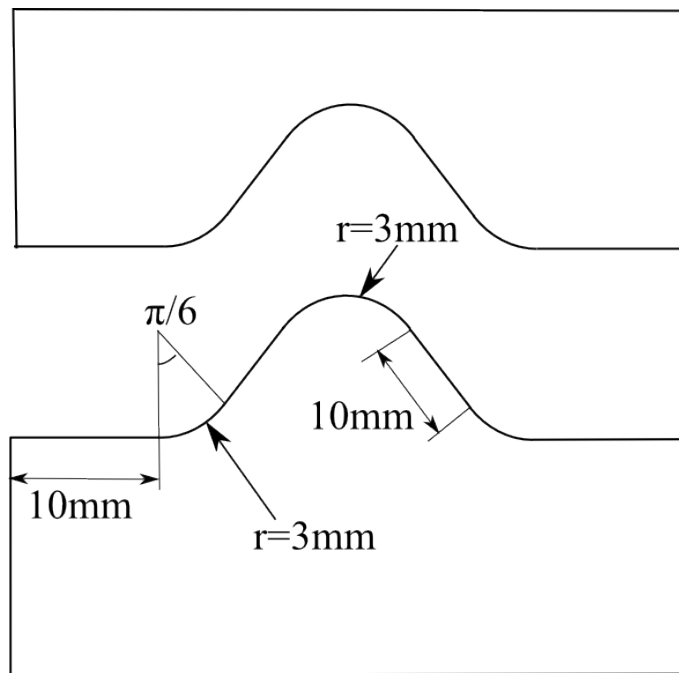


図 6.6: 曲率半径 3mm のシワを与えるジグ

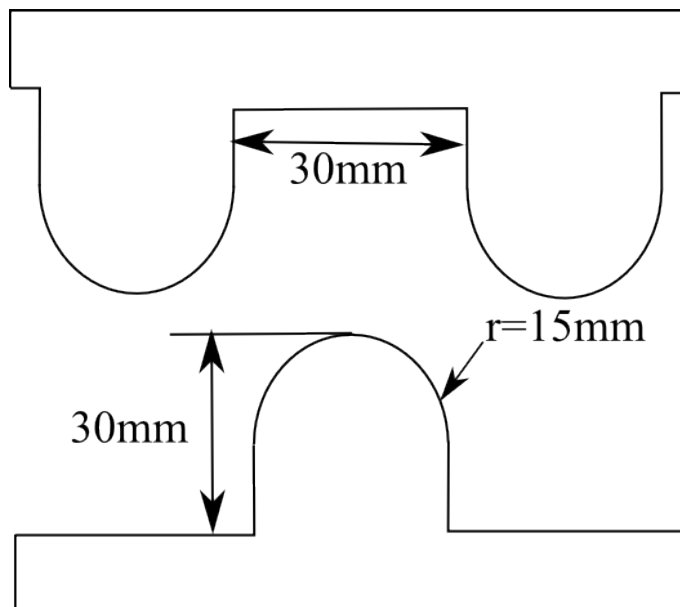


図 6.7: 曲率半径 15mm のシワを与えるジグ

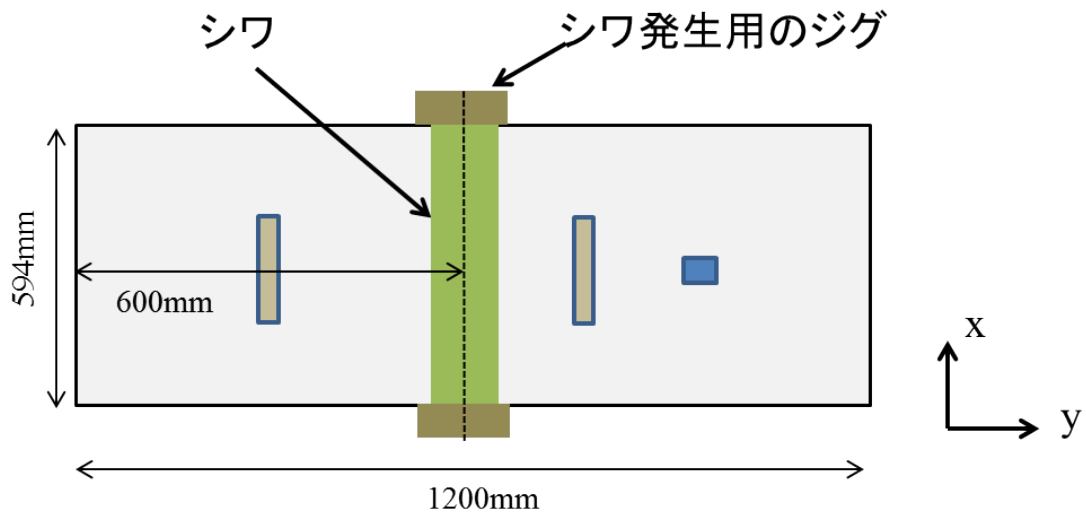


図 6.8: 弾性波のシワに対する入射角が 0 の場合

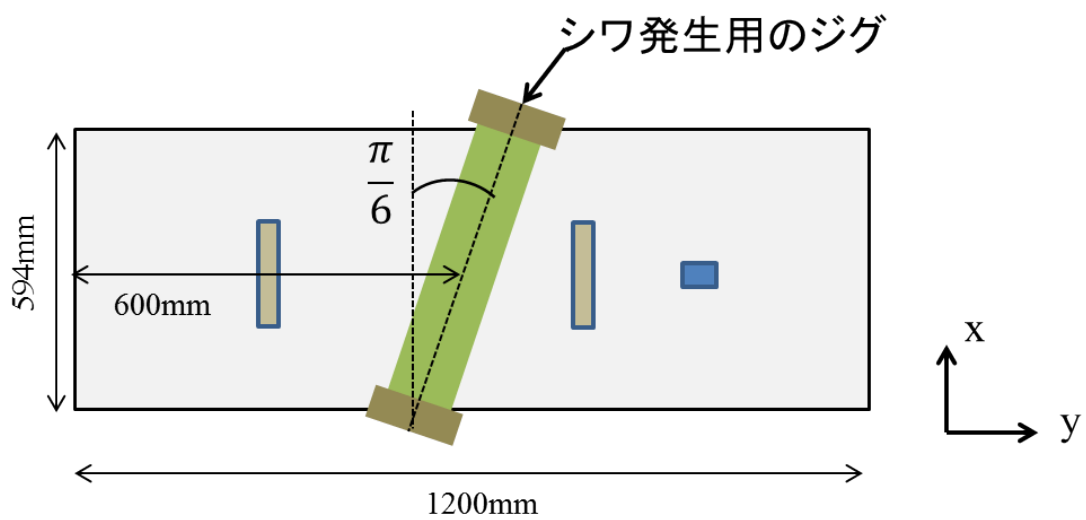


図 6.9: 弾性波のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合

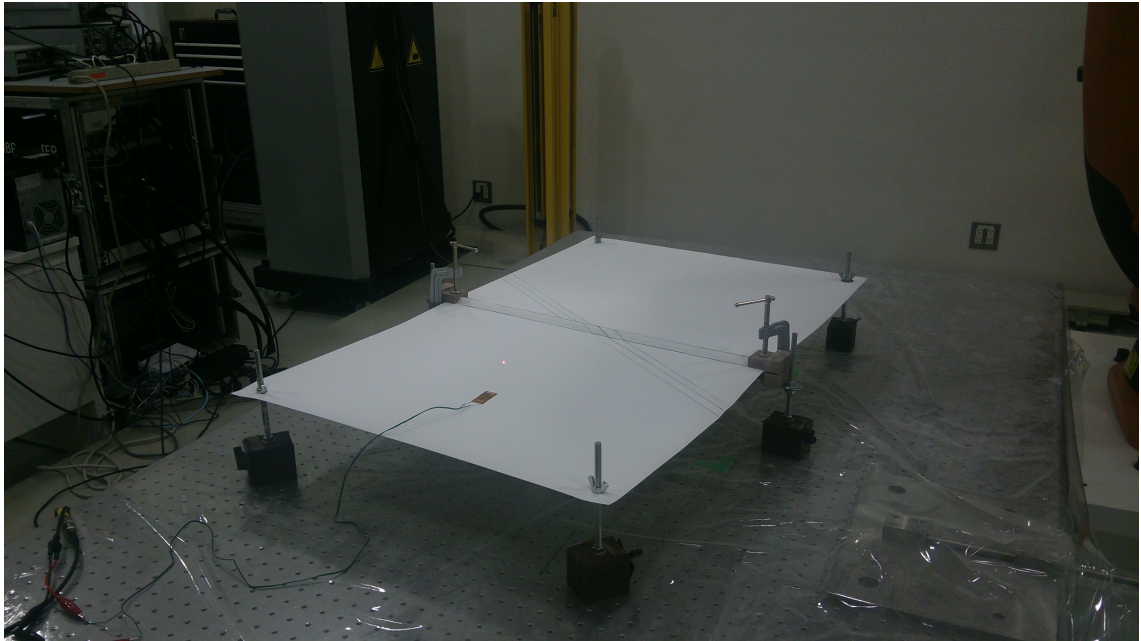


図 6.10: 曲率半径 3mm のシワが入射角 0 となるよう形成された膜

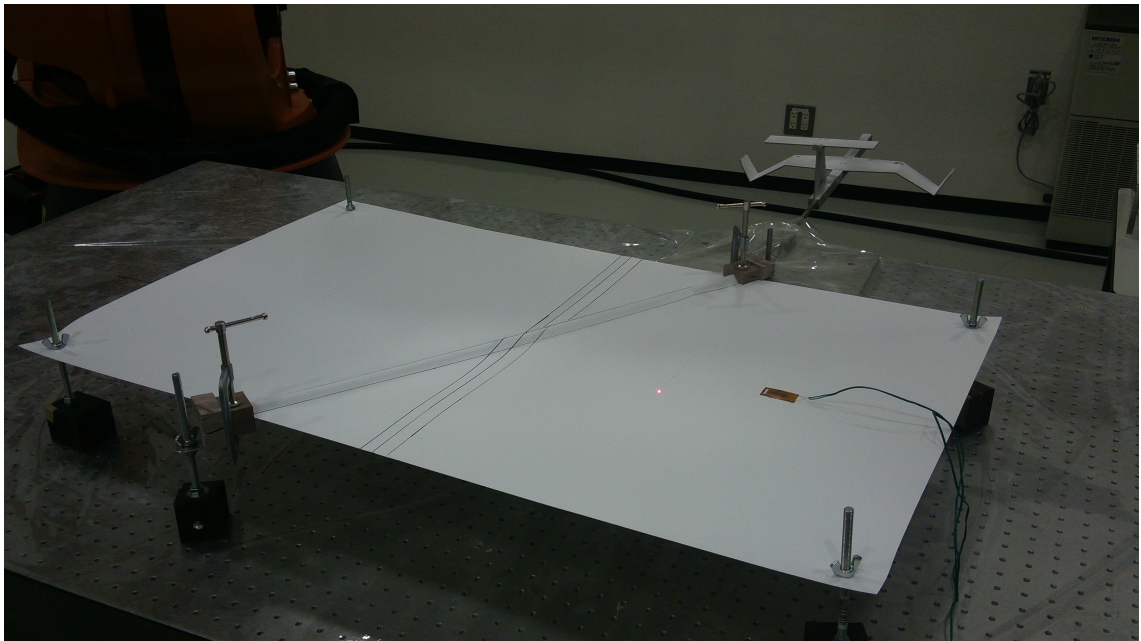


図 6.11: 曲率半径 3mm のシワが入射角 $\pi/6$ となるよう形成された膜



図 6.12: MFC アクチュエータ

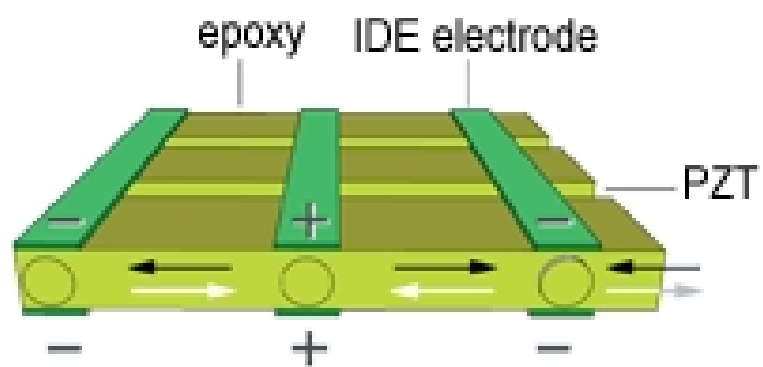


図 6.13: MFC アクチュエータ 出典) <http://www.smart-material.com/MFC-product-main.html>

シワの有無・角度によってどのように変化するか観察する。

6.3.2 実験に用いる膜の密度・剛性の計測

シワの弾性波に対する影響を計算するためには、膜に与えられたシワの形状以外にもその膜のヤング率・密度を知る必要がある。

この内ヤング率を計測するために図 6.14 のように単軸引張試験を行った。図 6.15 に示すように幅 30mm、長さ 200mm の試験片を 5 本作成した。両端から 30mm はチャック部となっておりゲージ長は 140mm である。試験で得られた荷重-変位曲線を図 6.16 に示す。膜の厚みは $120\mu\text{m}$ であるのでこの曲線の傾きから膜のヤング率が得られ、5 本の平均を取ると 2.1GPa となった。

また、幅 210mm、長さ 600mm の膜の重量を計測すると 14.92g であった。したがって密度は $987\text{kg}/\text{m}^3$ となる。

密度とヤング率が求められたことで平坦な場合の縦波の位相速度も計算することができる。この膜の場合のヤング率 $E = 2.1\text{GPa}$ 、密度 $\rho = 987\text{kg}/\text{m}^3$ からポアソン比を 0.3 としてその速度は

$$\sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} = 1529\text{m}/\text{s} \quad (6.3.1)$$

となる。

6.3.3 弾性波透過率の取得

MFC アクチュエータに電圧を与えることで振動を発生させ、発生した振動の図 6.4 た 2 つの領域における振幅を MaVES を用いて測定した。加振の為の電圧は図 6.17 のような正弦波に矩形窓がかけられた形であり、波形に含まれている正弦波の波数を加振サイクル数と呼ぶ。印加された電圧の振幅は全ての計測で 100V である。またデータのノイズ低減のために、個々の周波数ごとに 200 回の計測を行いアベレーシングを行った。それぞれの加振の間には発生した弾性波が次の計測に影響を与えないように、0.1 秒間の間隔を与えている。計測を行った各周波数ごとの加振サイクル数やデータのサンプリング周波数の条件を表 6.1 に示す。

いずれの場合での加振時間は 0.3ms 程度となっている。透過側の計測点から長手方向の端までは 0.3m の距離があり式 6.3.1 で求められた弾性波の伝播速度 $1529\text{m}/\text{s}$ から、透過側の計測点を弾性波が通過してから端からの反射波が到達するまで

$$0.3(\text{m}) \times 2/1529(\text{m}/\text{s}) \simeq 4\text{ms} \quad (6.3.2)$$

と 0.4ms 程度かかり、長さが 0.3ms である透過波の波束と端からの反射波の波束は干渉しないと考えられる。

さて、各周波数での計測から得られた各計測点での y 方向の振動のデータには、ここで透過率を算出すべき y 方向に伝播する縦波の他にもせん断波の影響などが現れてしまう。これらの影響を取り除くために入射側と透過側のそれぞれで第 4 章の有限要素解析の場合と同様に平均をとった。

図 6.18 にシワが無い膜に対して 30kHz で加振を行った場合の y 方向の変位の計測結果の平均を示す。 y 方向は膜の長手方向であり、加振用のアクチュエータに近い入射側の計測結果から与えられた電圧によって y 軸方向に伸縮する波が発生し、透過側のデータからそれが伝播して到達している様子がわかる。

しかし、膜がシワを持たない場合でも周波数が高くなると減衰が大きくなり、加振点から遠い透過側で十分な振幅を得ることができなかった。図 6.19 に加振周波数が 100kHz の場合のシワの無い膜に対

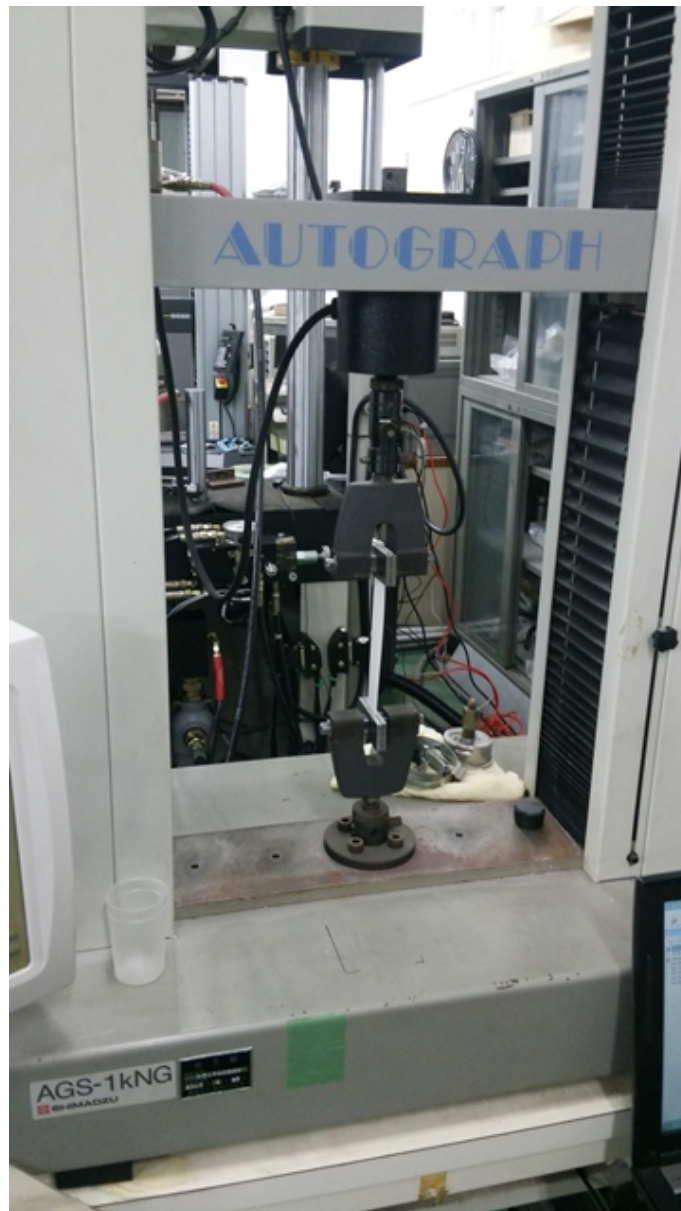


図 6.14: 膜のヤング率測定のための引張試験

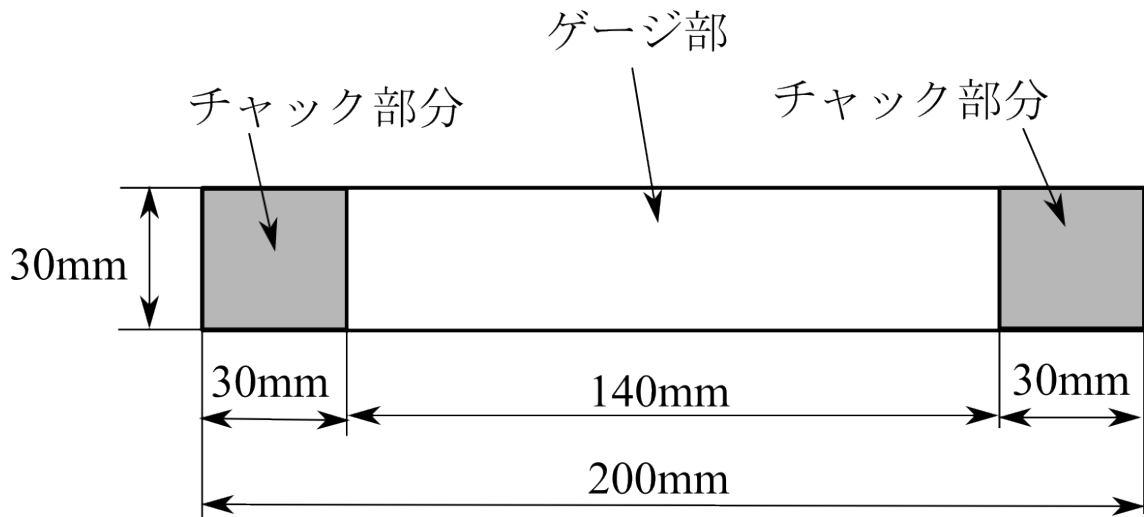


図 6.15: 引張試験試験片形状

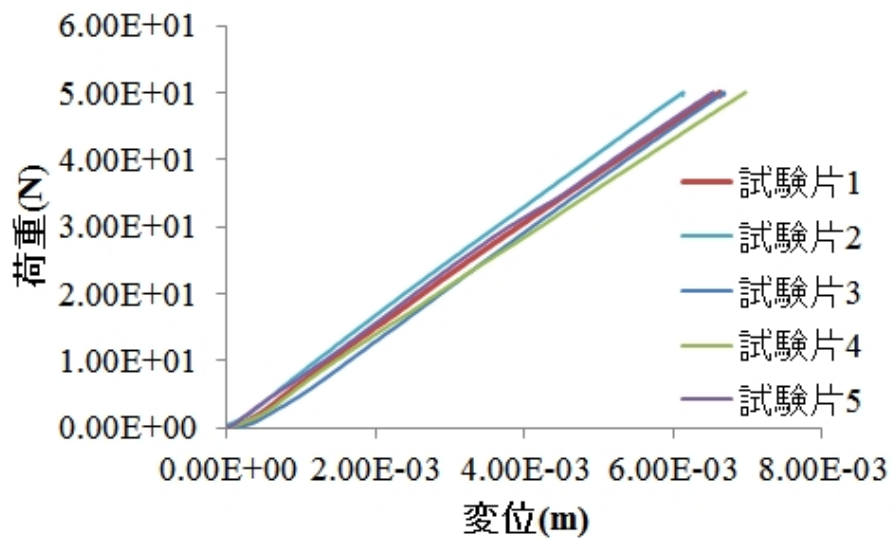


図 6.16: 膜の引張試験の荷重-変位曲線

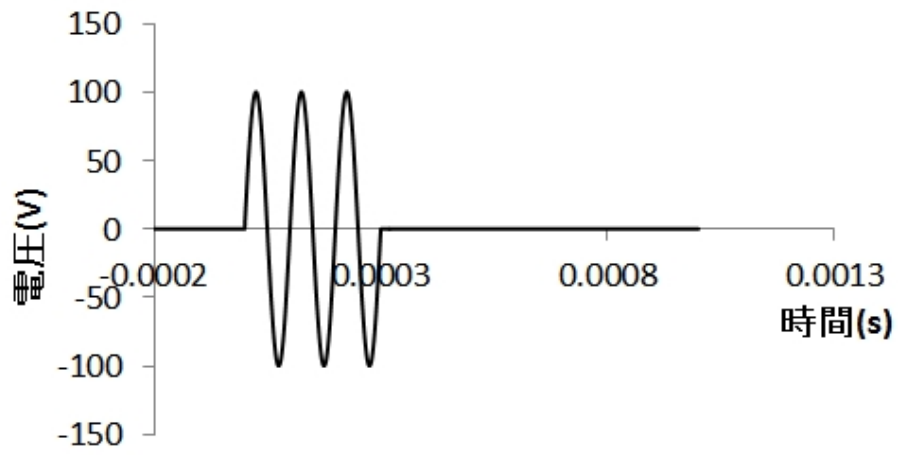


図 6.17: MFC アクチュエータへの印加電圧

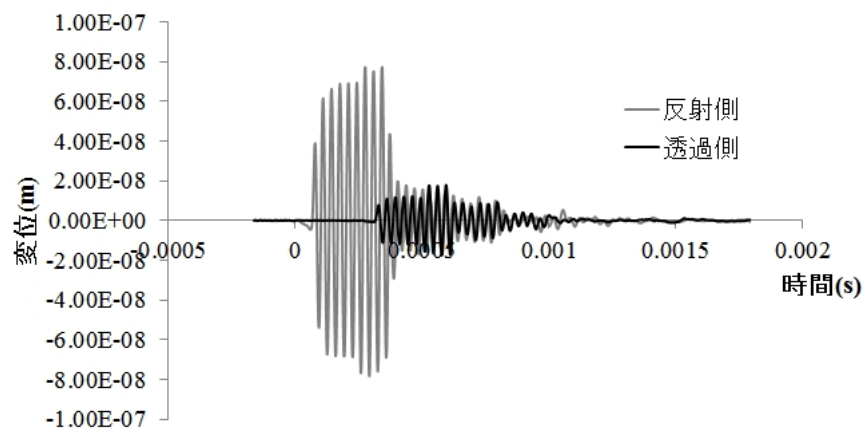


図 6.18: シワがない場合の計測点での y 方向変位 加振周波数 30kHz

表 6.1: 実験の計測条件

加振周波数 (kHz)	加振サイクル数	サンプリング周波数 (kHz)	サンプル数
10	3	256	2048
15	5	256	2048
20	6	512	2048
25	8	512	2048
30	9	512	2048
35	11	512	2048
40	12	512	2048
45	14	512	2048
50	15	1280	2048
55	17	1280	2048
60	18	1280	2048
65	20	1280	2048
70	21	1280	2048
75	23	1280	2048
80	24	1280	2048
85	26	1280	2048
90	27	1280	2048
95	29	1280	2048
100	30	1280	2048

する、透過側の計測点と入射側の計測点での y 方向変位を示すが、透過側ではノイズに埋もれてしまい到達した弾性波を確認することは出来ない。従って、実験結果からの透過率の算出は 10 ~ 70kHz までの周波数帯で行った。

ノイズの影響を排除しつつ計測された弾性波の振幅を評価するために短区間フーリエ変換を用いた。加振周波数 ω の場合の計測データを $f(t)$ とした場合に、区間 $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ での $\exp(-i\omega t)$ に対する複素フーリエ係数の絶対値 $|c(\omega, t_0)|$ は式 6.3.3 を用いて求められる。

$$|c(\omega, t_0)| = \left| \frac{2}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right| \quad (6.3.3)$$

また、フーリエ級数を求める区間の長さは加振時間とほぼ同じになるように $\Delta t = 0.3ms$ とした。

図 6.18 に振幅のデータを示したシワの無い膜に加振周波数 30kHz で振動を与えた場合に関して、フーリエ係数の変化の様子を図 6.20 に示す。

フーリエ変換される区間が弾性波の波束と重なるに連れてフーリエ係数が増加していく様子が見られる。こうして得られたデータの最大値をその観測領域での弾性波の振幅とした。シワのない場合と図 6.6 に示す曲率半径 3mm のシワを与えるジグ、図 6.7 に示す曲率半径 15mm のシワを与えるジグをそれぞれ用いて弾性波の入射角 ψ が $0, \pi/6$ になるようにシワを作成した場合の入射側と反射側での周波数ごとの振幅を図 6.21, 6.22 に示す。

入射側ではどの場合においても同等の振幅が周波数ごとに得られており、各場合で加振の強度が一定であることが分かる。一方、透過側ではシワの存在のためにシワの無い場合に対してシワのある場合の振幅が低下している様子が見られる。

シワのある場合に関して、この透過側の振幅をシワのない場合の振幅で正規化することで透過率

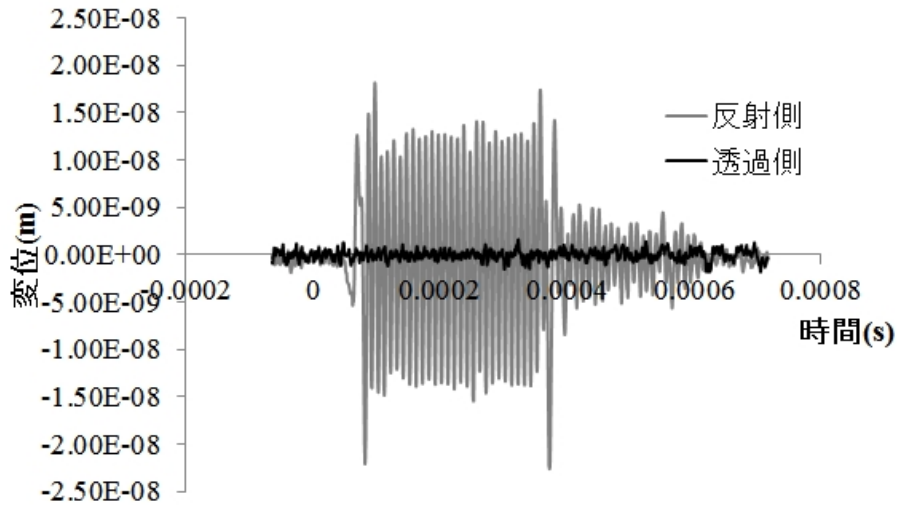


図 6.19: シワがない場合の計測点での y 方向変位 加振周波数 100kHz

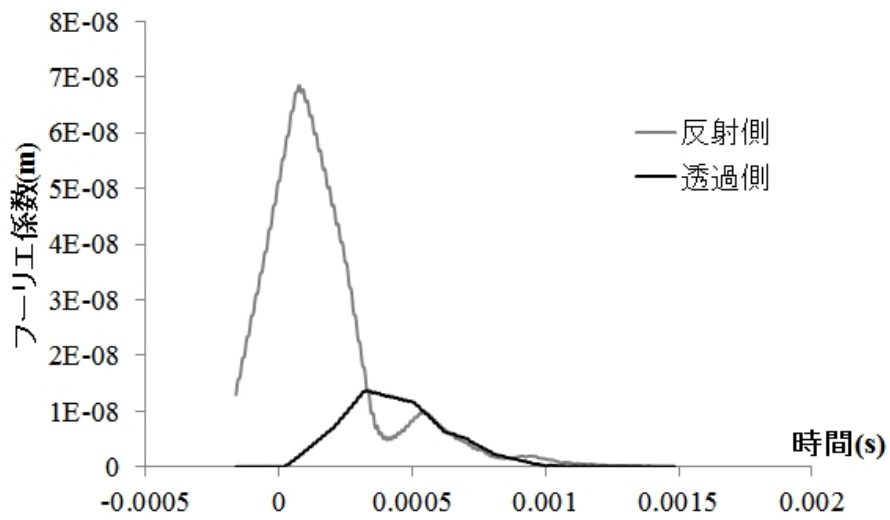


図 6.20: シワがない場合のフーリエ係数の変化 加振周波数 30kHz

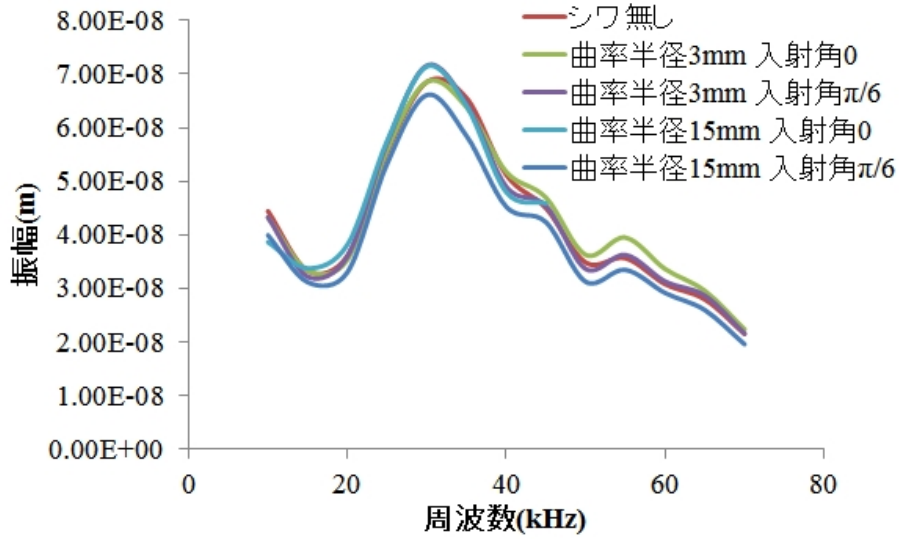


図 6.21: 入射側での振幅の比較

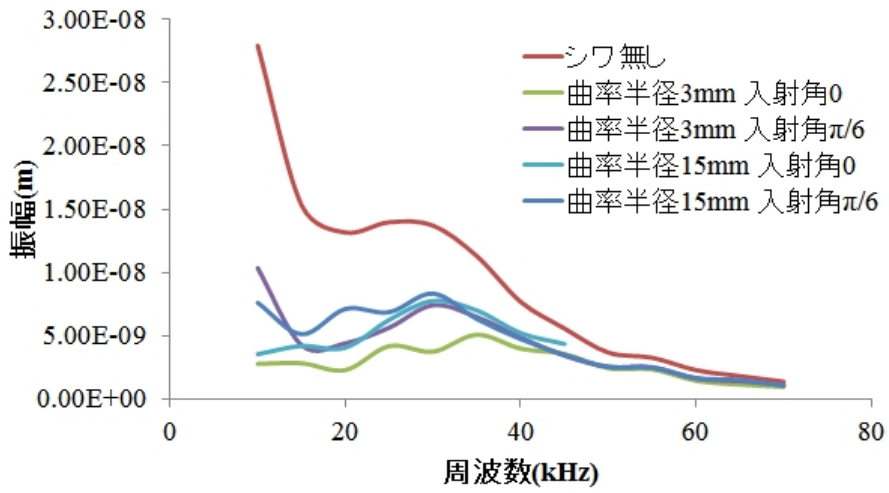


図 6.22: 透過側での振幅の比較

は算出される。

6.3.4 結果の考察

曲率半径 3mm のシワを作成した場合に関して、実験から求められた縦波の透過率と 3 章で示した解析手法との比較を行った。解析では膜のヤング率と密度はそれぞれ 6.3.2 での実験から求められた $E = 2.1\text{GPa}$, $\rho = 987\text{kg/m}^3$ を用い、ポアソン比は 0.3 とした。入射角が 0 の場合と $\pi/6$ の場合の比較をそれぞれ図 6.23, 6.24 に示す。

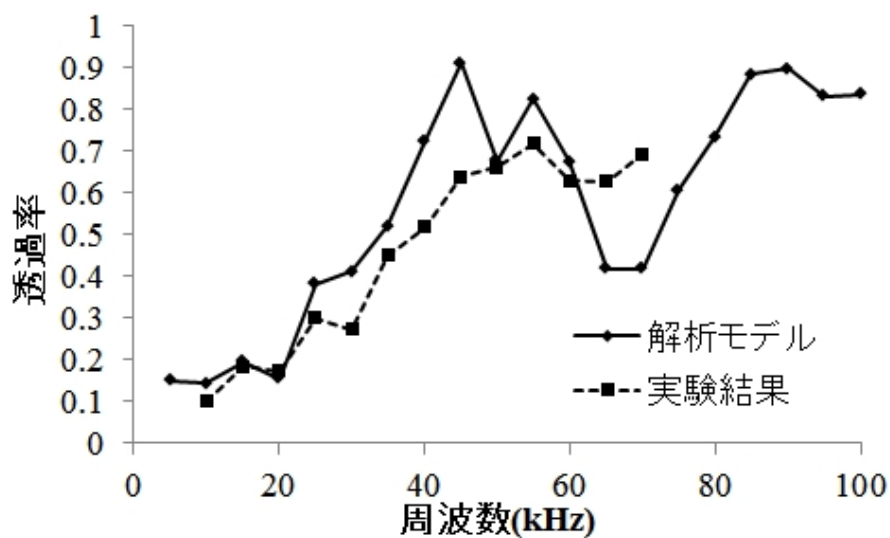


図 6.23: 曲率半径 3mm のシワに対する入射角が 0 の場合の透過率の比較

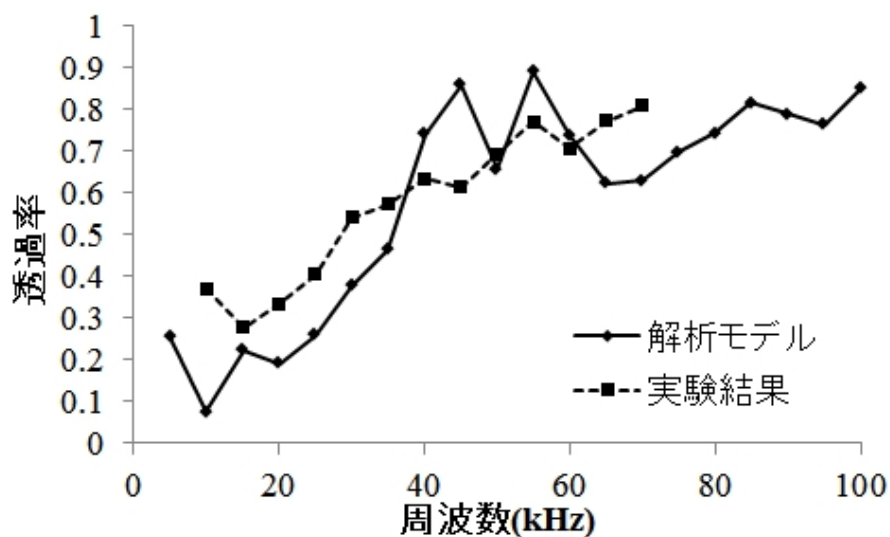


図 6.24: 曲率半径 3mm のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合の透過率の比較

入射角が 0 の場合は解析による結果と比較して、周波数 $40kHz$ 近辺での鋭いピークは見られなかったものの傾向は一致している。

入射角が $\pi/6$ の場合においても同様の周波数帯でのピークは見られないが、解析解でも見られた入射角が増大した場合に低い周波数での透過率が向上する減少が見られている。一方で傾向としては一致しているものの、全体に実験結果が高い透過率を示してしまっている。

この原因としてシワの形状がジグを作成したとおりに現れていなかったということが考えられる。図 6.26 に実験中のシワの形状を示すが、膜の持っている曲げ剛性のために全体に膜の曲り方が緩やかになっている。このためにシワの曲率が低下し実験における透過率が上昇したと考えられる。また、鋭いピークが現れていない点に関しても膜面全体で形成されたシワの形状が一定でなく、個々の箇所ごとにピークの位置が分散したために総体では現れていないと考えられる。

図 6.23 の実験結果に対して、5 章で示した形状推定を行った結果を図 6.25・表 6.2 に示す。推定された形状はジグ形状よりも振幅・波長共にやや大きいのが、概ね同程度の結果が得られている。

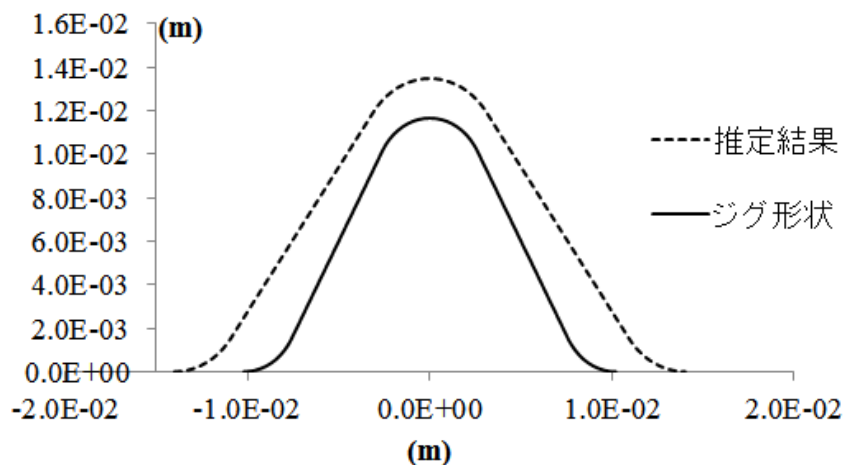


図 6.25: 曲率半径 3mm、入射角 0 度の場合の実験結果に対する形状推定の結果

表 6.2: 曲率半径 3mm、入射角 0 度の場合に対する形状パラメータ・最適化後の誤差

シワの数 N	曲率 κ	直線部長さ l	中心角 θ	入射角 ψ	残差
1	258	$1.34 \times 10^{-2}m$	$0.9262rad$	$0.760rad$	0.3263

曲率半径 3mm のジグによる試験を行った後に、同じ膜を用いて曲率半径 15mm のジグを用いて試験を行った。同様に入射角が 0 の場合と $\pi/6$ の場合の解析結果との比較をそれぞれ図 6.27,6.28 に示す。

図 6.23,6.24 の場合と比較して、透過率の傾向が合致しているとは言いがたい結果が得られた。透過率の値を曲率半径 3mm のものの場合と比較してみると、図 6.29,6.30 に示すようになりに近い傾向を示しており、測定後の膜に対しても図 6.31 に見られるような曲げぐせが残っていた。このことから直前の曲率半径の小さなシワに対する実験の影響が残ってしまったものと考えられる。

最後に反射波による距離の推算を行う。透過率が低い周波数帯の弾性波はシワによって反射されており、その反射波の到達時間を用いてシワまでの距離が推定できると考えられる。図 6.32,6.33 に加振周波数 30kHz の場合のシワの無い膜の場合と曲率半径 3mm のシワを作成したときの、入射側のフーリエ係数の変化の比較を図 6.34 にシワがある場合のフーリエ係数からシワがない場合のものを

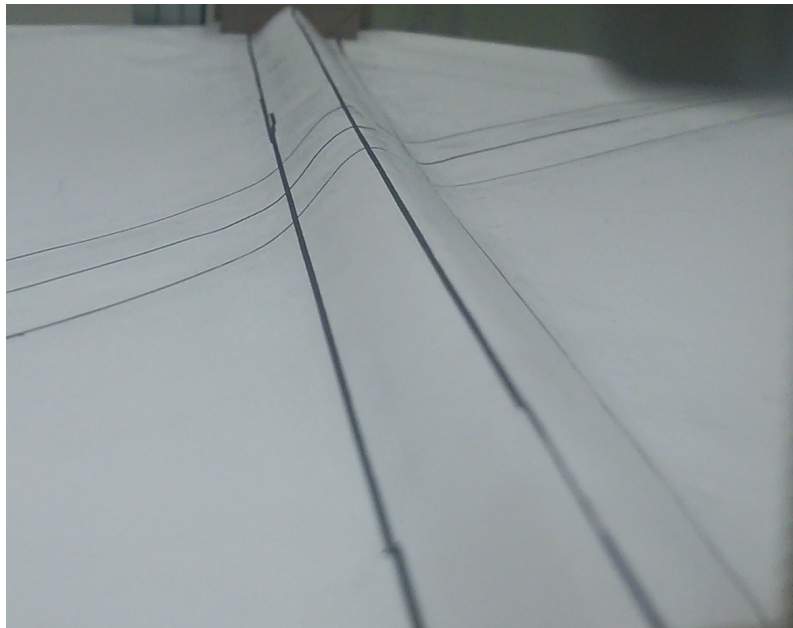


図 6.26: 曲率半径 3mm の場合に作成されたシワの形状

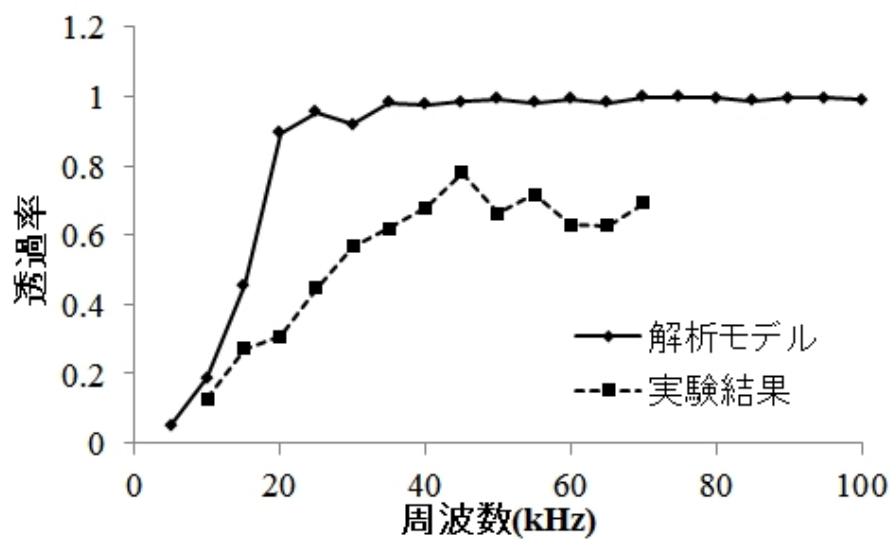


図 6.27: 曲率半径 15mm のシワに対する入射角が 0 の場合の透過率の比較

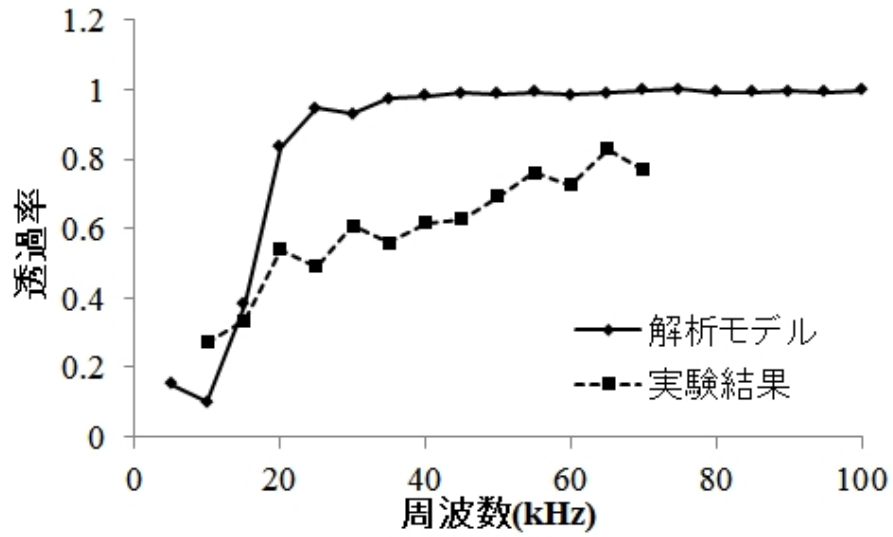


図 6.28: 曲率半径 15mm のシワに対する入射角が $\pi/6$ の場合の透過率の比較

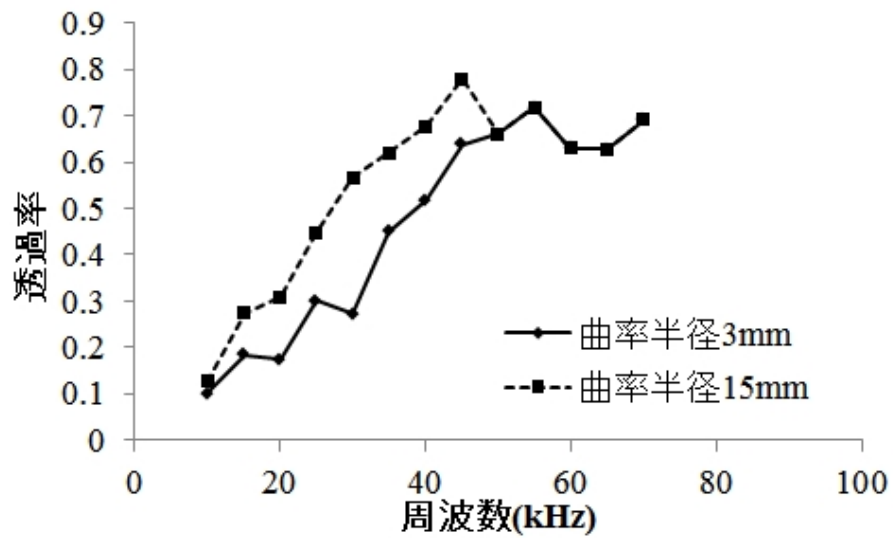


図 6.29: 入射角 0 の場合の曲率半径 3mm と 15mm での透過率の実験結果の比較

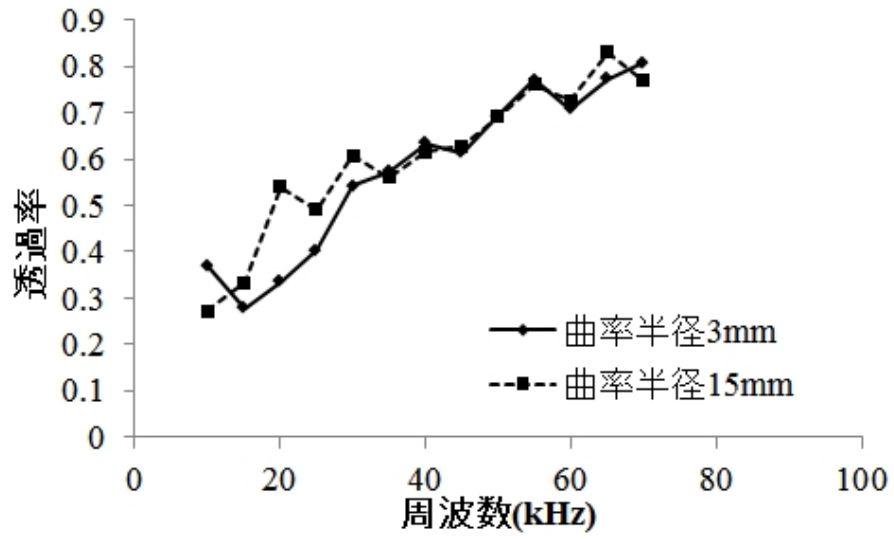


図 6.30: 入射角 $\pi/6$ の場合の曲率半径 3mm と 15mm での透過率の実験結果の比較

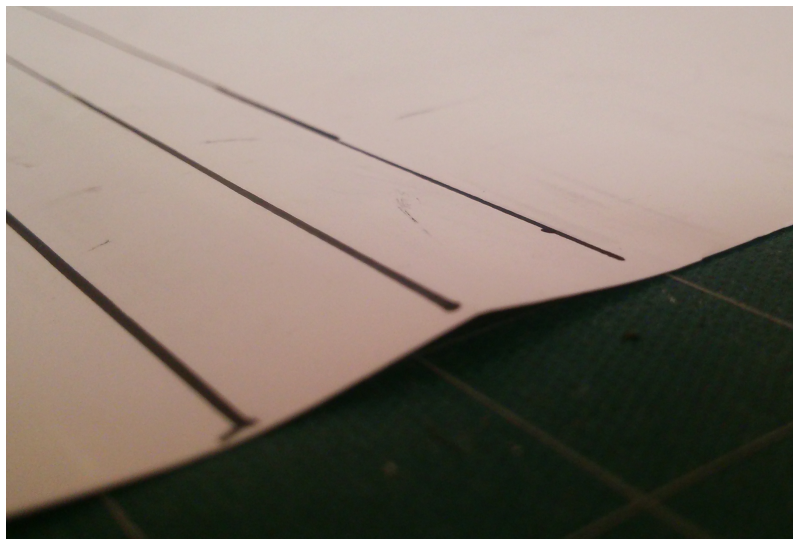


図 6.31: 膜に残った曲げグセ

引いた差分を示す。

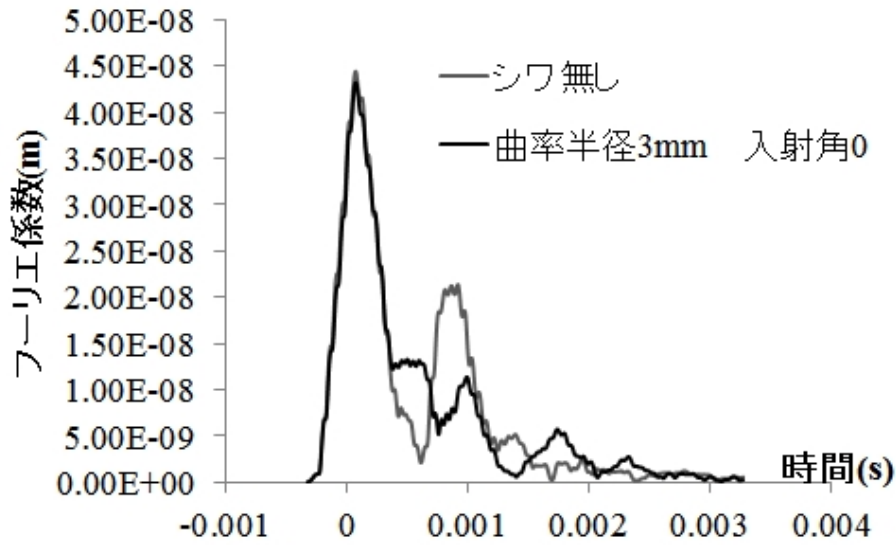


図 6.32: 加振周波数 30kHz の場合の入射波の比較 曲率半径 3mm・入射角 0

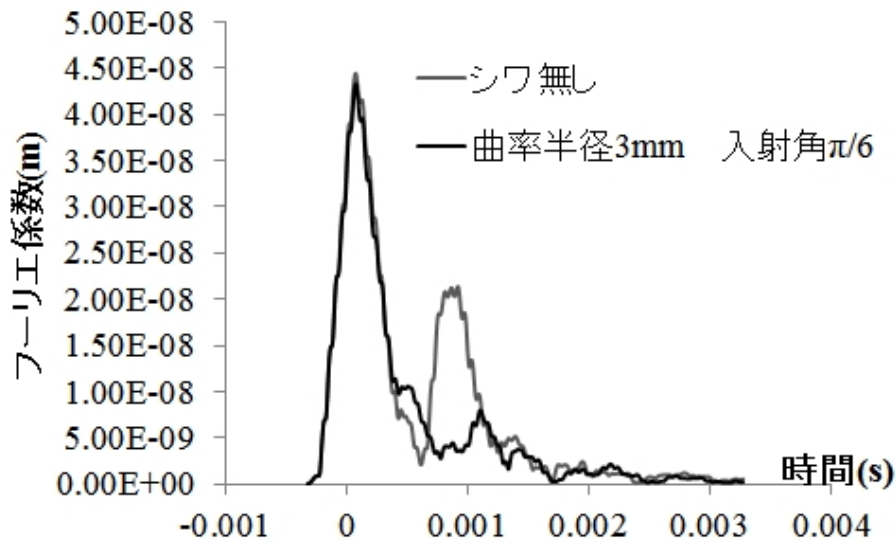


図 6.33: 加振周波数 30kHz の場合の入射波の比較 曲率半径 3mm・入射角 $\pi/6$

図 6.32,6.33 のフーリエ係数のピークから、弾性波の入射側への計測領域への到達時刻は $t = 7.8 \times 10^{-5} s$ となる。また、図 6.34 のフーリエ係数の差分に見られる $t = 1 \times 10^{-4} s$ 頃でのピークは、加振強度の差によるものと考えられるため、その次のピークを反射波の計測領域への到達時刻とすると $t = 3.3 \times 10^{-4} s$ となる。

したがってこの 2 つの時刻と、縦波の伝播速度 1520m/s からシワへの距離はその伝播距離の 1/2 として導かれ、

$$(7.8 \times 10^{-5} - 3.3 \times 10^{-4}) \times 1520 \times 1/2 = 0.19(m) \quad (6.3.4)$$

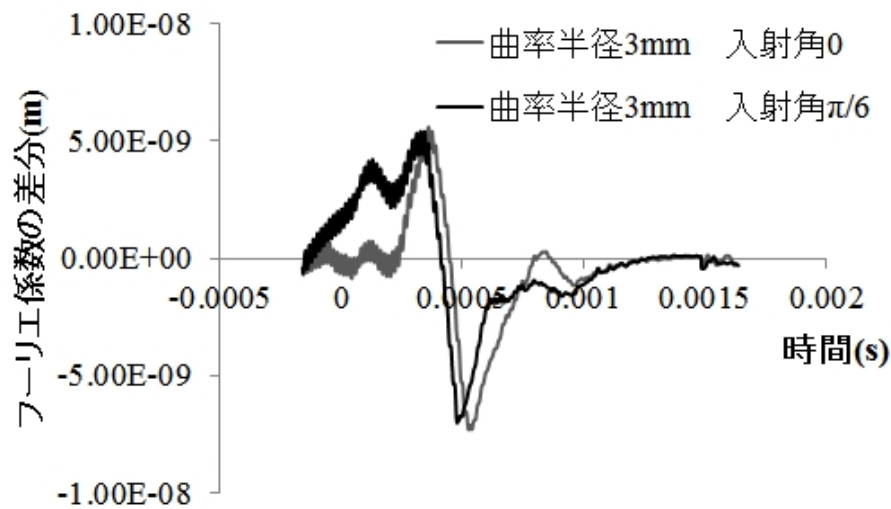


図 6.34: フーリエ係数の差分

となる。これは計測点からシワへの距離 0.2m とよく一致しており、反射波からシワへの距離の推定が可能であることが示された。

6.4 まとめ

非接触多軸振動計 MaVES を用いて PET フィルム上の弾性波の伝播を計測し、シワの無い場合での振幅とシワをジグにより発生させた場合の物を比較することでシワに対する透過率を算出した。シワは曲率の大きい曲率半径 3mm のものと曲率の小さい曲率半径 15mm の二種類、そのそれぞれに対して弾性波の入射角は 0 と $\pi/6$ の場合の合計 4 つの条件に関する計測を行った。

曲率半径 3mm のシワの場合に関しては透過率の傾向は 3 章での解析計算のものと一致した。予想された透過率のピークは見られなかったが、これはシワの形状が均一に形成されなかったためと考えられる。曲率半径 15mm のシワの場合に関しては透過率の傾向が合致しているとは言いがたい結果が得られた。計測後の膜には曲率半径 3mm のシワを作成した際の曲げぐせが残っており、これによる影響を受けたものと考えられる。

また、反射波を用いて計測領域からシワへの距離の推定を行った。計測領域への入射波と反射波の到達時刻と弾性波の伝播速度からシワへの距離は推定され、実験の条件に合致した結果が得られた。

第7章 結言

本研究では今後宇宙大規模構造において利用の拡大が期待される膜構造に生じるシワの検知手法について検討を行った。従来の検知手法はカメラとそれから得られる画像を用いた手法が多く、カメラの死角となる部分や影となる部分が軌道上の利用では発生すると考えられる。これを補助・補完するために弾性波の伝播を用いた手法を提案した。

シワの存在は膜の持つ曲率に大きな違いを及ぼし、特に面内に伸縮する縦波はその曲率に伝播の状態を大きく左右されることがシェルの式を用いた弾性波の伝播の計算から導かれた。その影響は曲率 κ と曲率がない場合での縦波の位相速度 c_{l0} から導かれる周波数

$$f_{cf} = \frac{\kappa c_{l0}}{2\pi}$$

よりも低い領域で顕著であり、曲率が大きいほど高い周波数まで影響が及ぼされることが示された。

さらに、求められた弾性波の方程式を用いてシワに対する透過率の計算が行われ、以下のようなシワの形状と透過率の関係が得られた。

- シワの持つ曲率が大きいほど高周波の弾性波まで透過率が低下する。特にシワの内部で曲率が一定の場合、周波数が f_{cf} 以上で透過率は大きく上昇する。
- シワの内部で曲率が変動する場合、2つの曲率の大きい部分の間で弾性波が反射されることで共振状態が発生し、透過率にピークが発生する。このピークの周波数は曲率が大きい部分の間の距離に依存する。
- 同一形状のシワが複数ある場合、単一の場合と比較してピークの位置や透過率が1に達する周波数は大きく変動しないまま全体での透過率は低下する。
- シワに対する弾性波の入射角が上昇すると低周波での透過率が向上する。

また、有限要素法を用いて透過率の比較を解析解と比較して良い合致を得た。

これらの特徴を元にシワの形状を簡略化したモデルを用いて、推定対象の透過率のグラフと簡略化したモデルから得られた透過率のグラフが一致するようにすることで透過率からシワの形状の推定を行った。推定対象と簡略化したモデルの透過率の誤差の最小化はレーベンバーグ・マルカート法を用いて行われ、シワの数が一つの場合や同一形状のシワが繰り返される場合では良い推定を行うことができた。

最後に非接触多軸振動計 MaVES を用いて弾性波の伝播状態を計測する実験を行った。ジグを用いてシワを発生させその状態で得られた弾性波の振幅をシワのない場合のものと比較することで透過率を算出した。はじめに行った曲率半径 3mm のシワの場合に関しては解析値と概ね似通った結果が得られたが、その後に行った曲率半径 15mm の場合では曲率半径 3mm のシワを作成した影響が曲げグセとなって残ってしまい良い結果は得られなかった。実験としてはシワの形状を正確に与えることや発生したシワの形状の計測、曲げグセの残らない膜の選定などは今後の課題といえる。

最後に本研究の今後の展望に関して述べる。この研究では膜上の弾性波を発生させる手法として圧電素子を利用している。圧電素子は歪みと電圧を相互に変換し、交流電圧を付加することで伸縮させ弾性波を発生させることが、振動を与えることで交流電圧を発生させることができる。したがって弾性波の発生と検知においては圧電素子はアクチュエータとセンサの両方の役割を果たすことができるものであり、Shan は膜上に貼った素子をアクチュエータとして用いることにより張力を発生させシワを低減させられることを示した [53]。また、宮崎らは膜に生じた折り目の近辺に貼った圧電素子の変形により折り目の変形量を抑える研究を行っている [54]。Renno, Orszulik らによっても圧電素子による膜の制御が研究されており [55, 56, 57]、将来的にはこれらの膜の形状制御に用いるアクチュエータと部品を共有することが期待される。

参考文献

- [1] 前村孝志, 後藤智彦, 秋山勝彦, 二村幸基, 渡邊篤太郎. "H-IIA ロケットの新技术と初号機打上げ結果. New H-IIA Launch Vehicle Technology and Maiden Flight Results", 三菱重工技報 (2002): 8-11.
- [2] Wang, C. G., Du, X. W., Tan, H. F., & He, X. D., "A new computational method for wrinkling analysis of gossamer space structures." *International Journal of Solids and Structures* 46.6 (2009): 1516-1526.
- [3] Nakano, T., Mori, O. & Kawaguchi, J., "Stability of Spinning Solar Sail-craft Containing A Huge Membrane." *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. 2005.
- [4] Gorinevsky, D., & Hyde, T. T., "Adaptive membrane for large lightweight space telescopes." *Astronomical Telescopes and Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics, 2002.
- [5] Stamper, B. L., Angel, J. R. P., Burge, J. H., & Woolf, N. J., "Flat membrane mirrors for space telescopes." *International Symposium on Optical Science and Technology*. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [6] Johnson, L., Young, R., Montgomery, E., & Alhorn, D., "Status of solar sail technology within NASA." *Advances in Space Research* 48.11 (2011): 1687-1694.
- [7] Gaspar, J., Mann, T., Behun, V., Wilkie, W. K., & Pappa, R., "Development of modal test techniques for validation of a solar sail design." *AIAA 1665* (2004): 45.
- [8] 梅里 真弘, 岡橋 隆一. "小型ソーラー電力セイル「IKAROS」の開発." *NEC 技報* 64.1 (2011): 47.
- [9] 知識 柔一, 森 治, 澤田 弘崇, 白澤 洋次. "分離カメラ画像の陰影による IKAROS の膜面形状推定." *JOURNAL OF THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES* 60.4 (2012): 167-172.
- [10] Hossain, N. M. A., Jenkins, C. H., Woo, K., & Igawa, H., "Transverse vibration analysis for partly wrinkled membranes." *Journal of spacecraft and rockets* 43.3 (2006): 626-637.
- [11] Miyazaki, Y. "Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66.7 (2006): 1179-1209.
- [12] Ding, H., & Yang, B., "The modeling and numerical analysis of wrinkled membranes." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58.12 (2003): 1785-1801.
- [13] Sakamoto, H., Park, K. C., & Miyazaki, Y., "Dynamic wrinkle reduction strategies for cable-suspended membrane structures." *Journal of spacecraft and rockets* 42.5 (2005): 850-858.

- [14] 小木曾 望, 平城 大典, 秋田 剛. "膜面のリンクル最小化のための NURBS 曲線を用いた形状最適設計." JOURNAL OF THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES 56.649 (2008): 72-79.
- [15] 松尾 雄太郎, 古谷 寛. "照度差ステレオ法を用いた膜の形状計測の検討" 第 53 回構造強度に関する講演会 (2011): 100-102.
- [16] 白木 優. "膜面の画像情報に対するウェーブレット変換を用いた損傷同定" 第 53 回構造強度に関する講演会 (2011): 103-105.
- [17] Peng, F., Hu, Y. R., & Ng, A., "Testing of membrane space structure shape control using genetic algorithm." Journal of spacecraft and rockets 43.4 (2006): 788-793.
- [18] Pappa, R. S., "Dot-Projection Photogrammetry and Videogrammetry" NASA/TM-2003-212146 (2003).
- [19] Pappa, R. S., Jones, T. W., Black, J. T., Walford, A., Robson, S., & Shortis, M. R., "Photogrammetry methodology for gossamer spacecraft structures." Sound and Vibration 36.8 (2002): 12-21.
- [20] Dorrington, A. A., Jones, T. W., Danehy, P. M., & Pappa, R. S., "Laser-induced fluorescence photogrammetry for dynamic characterization of membrane structures." AIAA journal 42.10 (2004): 2124-2129.
- [21] Pappa, R., Black, J. T., Blandino, J. R., Jones, T. W., Danehy, P. M., & Dorrington, A. A., "Dot-projection photogrammetry and videogrammetry of gossamer space structures." Journal of Spacecraft and Rockets 40.6 (2003): 858-867.
- [22] 谷口 龍太, 三田 彰. "波動伝播特性を用いた損傷検知手法に関する基礎的研究." 応用力学論文集 5 (2002): 873-880.
- [23] 玉上 久雄, 桑原 淳一郎, 岡部 洋二, 武田 展雄, 小島 正嗣. "FBG 光ファイバセンサを用いた Lamb 波受振による CFRP 積層板中の剥離検出." JOURNAL OF THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES 53.615 (2005): 166-173.
- [24] Kessler, S. S., Spearing, S. M., & Soutis, C., "Damage detection in composite materials using Lamb wave methods." Smart Materials and Structures 11.2 (2002): 269.
- [25] Alleyne, D. N., & Cawley, P., "Optimization of Lamb wave inspection techniques." Ndt & E International 25.1 (1992): 11-22.
- [26] Jensen, J. S. "Phononic band gaps and vibrations in one-and two-dimensional mass-spring structures." Journal of Sound and Vibration 266.5 (2003): 1053-1078.
- [27] 岡部洋二, 中山文博. "複合材料中の損傷検知のための広帯域超音波送受振システム." 生産研究 60.4 (2008): 89-92.
- [28] Wu, C. M., & Lundberg, B., "Reflection and transmission of the energy of harmonic elastic waves in a bent bar." Journal of Sound and Vibration 190.4 (1996): 645-659.
- [29] Beccu, R., Wu, C. M., & Lundberg, B., "Reflection and transmission of the energy of transient elastic extensional waves in a bent bar." Journal of sound and vibration 191.2 (1996): 261-272.

- [30] Soe-Knudsen, A. "Design of stop-band filter by use of curved pipe segments and shape optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 44.6 (2011): 863-874.
- [31] Soe-Knudsen, A., & Sorokin, S. V., "Modelling of linear wave propagation in spatial fluid filled pipe systems consisting of elastic curved and straight elements." *Journal of Sound and Vibration* 329.24 (2010): 5116-5146.
- [32] Soe-Knudsen, A., & Sorokin, S. V., "Analysis of linear elastic wave propagation in piping systems by a combination of the boundary integral equations method and the finite element method." *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 22.6-8 (2010): 647-662.
- [33] 宮岡陽介. "弾性波伝播特性を利用した膜の wrinkle 状態の同定に関する研究" (2010).
- [34] Hongxing, H., Yu, W., & Zhipeng, D., "Research on Wave Mode Conversion of Curved Beam Structures by the Wave Approach." *Journal of Vibration and Acoustics* 135.3 (2013): 031014.
- [35] Kang, B., Riedel, C. H., & Tan, C. A., "Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation." *Journal of Sound and Vibration* 260.1 (2003): 19-44.
- [36] Lee, S. K., Mace, B. R., & Brennan, M. J., "Wave propagation, reflection and transmission in curved beams." *Journal of Sound and Vibration* 306.3 (2007): 636-656.
- [37] Zhou, W. J., & Ichchou, M. N., "Wave propagation in mechanical waveguide with curved members using wave finite element solution." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.33 (2010): 2099-2109.
- [38] 小林繁夫, 近藤恭平. "弾性力学" 培風館 (1987): 177-180
- [39] Lamb, H., "On waves in an elastic plate." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character* (1917): 114-128.
- [40] Liu, G., & Qu, J., "Guided circumferential waves in a circular annulus." *Journal of Applied Mechanics* 65.2 (1998): 424-430.
- [41] Miller, D. W., & Von Flotow, A., "A travelling wave approach to power flow in structural networks." *Journal of Sound and Vibration* 128.1 (1989): 145-162.
- [42] Horner, J. L., & White, R. G., "Prediction of vibrational power transmission through bends and joints in beam-like structures." *Journal of Sound and Vibration* 147.1 (1991): 87-103.
- [43] Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., & Reshef, M., "A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations." *Geophysics* 50.4 (1985): 705-708.
- [44] Higdon, R. L., "Absorbing boundary conditions for elastic waves." *Geophysics* 56.2 (1991): 231-241.
- [45] Givoli, D., "Non-reflecting boundary conditions." *Journal of Computational Physics* 94.1 (1991): 1-29.
- [46] Chew, W. C., & Liu, Q. H., "Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition." *Journal of Computational Acoustics* 4.04 (1996): 341-359.

- [47] Hastings, F. D., Schneider, J. B., & Broschat, S. L., "Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation." *The Journal of the Acoustical Society of America* 100.5 (1996): 3061-3069.
- [48] Wang, C., & Lai, J. C. S., "Modelling the vibration behaviour of infinite structures by FEM." *Journal of sound and vibration* 229.3 (2000): 453-466.
- [49] Ross, M., "Modeling methods for silent boundaries in infinite media." *Fluid-Structure Interaction, Aerospace Engineering Sciences-University of Colorado at Boulder* (2004): 5519-006.
- [50] More, J. J., "The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory." *Numerical analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1978. 105-116.
- [51] http://help.scilab.org/docs/5.5.1/en_US/lsqlsolve.html
- [52] 神田 淳, "多軸振動非接触自動計測システム (MaVES) の開発" ISSN 1349-1121 JAXA-RM-10-010.
- [53] Shan, J., Orszulik, R., Girin, M., & Sinnathamby, G., "Flatness measurement and active control for a membrane structure." *Mechatronics and Automation (ICMA), 2012 International Conference on*. IEEE, 2012.
- [54] 宮崎 陽子, 古谷 寛. "折り目のついた一次元展開膜面の圧電フィルムによる形状制御 (宇宙構造物・飛翔体の制御 II)(OS 宇宙構造物・飛翔体の制御)." 「振動と運動の制御」シンポジウム講演論文集 2001.7 (2001): 277-278.
- [55] Renno, J. M., & Inman, D. J., "Experimentally validated model of a membrane strip with multiple actuators." *Journal of Spacecraft and Rockets* 44.5 (2007): 1140-1152.
- [56] Orszulik, R., & Shan, J., "Finite Element Analysis of a Wrinkled Rectangular Membrane with Elliptical Boundary Cuts." 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA. 2012.
- [57] Kornbluh, R. D., Flamm, D. S., Prahlad, H., Nashold, K. M., Chhokar, S., Pelrine, R., Huestis, D.L., Simons, J., Cooper, T., & Watters, D. G. "Shape control of large lightweight mirrors with dielectric elastomer actuation." *Smart Structures and Materials*. International Society for Optics and Photonics, 2003.

謝辞

本論文の作成に当たり指導教官の横関智弘准教授には5年間に渡る適切なお指導と助言を頂きました。ここに謹んで感謝の意を申し上げます。

また、青木隆平教授には普段の研究室での活動を通じてさまざまなお指導をいただきました。横関先生と共に研究室の輪講等での鋭い意見・着想は大いに勉強になりました。この場を借りて感謝申し上げます。

東京大学大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻の武田展雄教授、東京大学生産技術研究所の岡部洋二准教授、東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻の石村康生准教授には本論文を査読いただき、多数のご助言を頂きました。小林やよいさまには、実験器具の発注・機材の使用方法のご指導などお世話になりました。宇宙航空研究開発機構(JAXA)の神田淳さまには、非接触振動計 MaVES の実験におきましてお忙しい中多大なお協力をいただきました。膜面全体での振動の可視化と、振動の高精度な計測はこのご協力なしでは成し得ないものでした。ここに感謝申し上げます。