論文の内容の要旨

論文題目　The Stokes phenomena of additive linear difference equation
(**加法的線形差分方程式のストークス現象**)

氏名　　**勝島 義史**

差分方程式の解析的な研究の歴史において, 現代的な研究はポアンカレ, ピカール等から始まった. ひと際輝かしい功績を残したのはジョージ・デイビッド・バーコフである. バーコフの差分方程式の研究における問題意識は, 主に接続問題にあった. どのような問題であったかを述べると, 以下のようになる.

問題 1　$A(x)$ を, 成分が多項式である $n \times n$ 行列とする. 以下の差分方程式を考える.

$$Y(x+1) = A(x)Y(x). \tag{1}$$

この差分方程式の形式解 $S(x)$ を一つ定める. $Y^-(x)$, $Y^+(x)$ を, それぞれ $Y^-(x) \sim S(x)$ $(x \to -\infty)$, $Y^+(x) \sim S(x)$ $(x \to +\infty)$ を満たす, 差分方程式の解析的な解とする. このとき, $Y^-(x)$ と $Y^+(x)$ の対応関係 $Y^-(x) = Y^+(x)P(x)$ を求めよ.

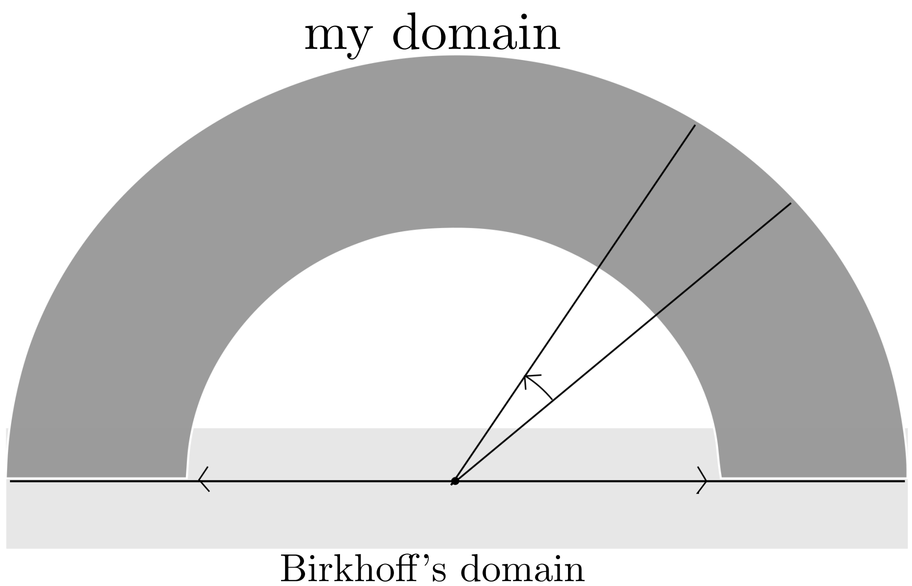
バーコフの有名な論文には, この問題の解法が書かれているが, はっきりとは $P(x)$ の解析的な意味がわからない. 計算するために, 方程式のどのようなパラメータが必要なのか, あるいはそのパラメータたちは本当に必要なものなのか. もっと critical な問題は, 解の接続問題自体にあるように思われる. 関数論的な立場から考えた場合, 正の方向と負の方向の漸近展開のみを考えるのは, 自然ではない. 差分方程式に固有な, 正と負の方向のみを考えるのは, 少し視野が狭く思える. 無限遠点のあらゆる方向において方程式の解の漸近挙動を調べられる方が望ましい (もっとも, 方向のみで良いのか, という問いはあるべきだが). このような問題意識のもとに, この論文では, 差分方程式の解のストークス現象について述べる. 主要結果は以下の通りである.

定理 2　L を線形差分作用素

$$L = \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\sigma^n \tag{2}$$

とする．ここで $a_n(x)$ は x に関する多項式, σ は差分作用素 $s : f(x) \mapsto f(x+1)$ である．L の逆メリン変換 $\mathcal{M}^{-1}L$ が Fuchs 型の微分作用素となると仮定する．このとき, 差分方程式 $Lf(x) = 0$ の解のストークス係数は, 微分方程式 $(\mathcal{M}^{-1}L)(\mathcal{M}^{-1}f)(t) = 0$ の, 特異点間の接続係数を用いて記述される．

ストークス現象がどの角領域で起こるのか, この定理では述べていないが, ボレル平面上の特異点とラプラス積分の積分路が交差する時である．ストークス現象が起こる角領域は無限個あり, 接続することはなかなかの至難の業 (職人芸) であるが, この定理を用いると, ストークス現象の解析から差分方程式の接続問題を解くことが可能だとわかる．つまり, 問題 1 に上げた $P(x)$ の解析的な意味付けを, 微分方程式の接続問題に求めることが可能となった．さらに, バーコフは考えなかった, 正の方向, 負の方向以外の角領域での漸近挙動を知ることができる．



論文の最後に, 具体的な例として, ベータ関数の差分方程式の接続問題, 超幾何関数の満たす差分方程式の接続問題を解き, 古典的に知られる公式の, ストークス現象の見地からの解釈を与える．