

論文の内容の要旨

論文題目 Autonomous limit of 4-dimensional Painlevé-type equations and the singular fibers of their spectral curve fibrations

(4次元 Painlevé 型方程式の自励極限とスペクトラル曲線ファイブレーションの特異ファイバー)

氏名 中村あかね

要旨

Painlevé 方程式は、2 階の代数的常微分方程式で動く特異点は高々極のみであるものうち、楕円関数で解ける場合、線形方程式に帰着される場合、求積可能な場合を除いた 6 種類の方程式として発見された。以来、モノドロミー保存変形、退化構造、ハミルトン系の構造、アフィンワイル群の表現、初期値空間、ソリトン方程式からの簡約など様々な側面からの研究がなされ、個々の側面に着目した種々の一般化も考察されてきた。モノドロミー保存変形で特異点の数を増やすことで得られた Garnier 系や表現論的立場から構成された野海-山田系などがその例である。

これらの Painlevé 型高階方程式をモノドロミー保存変形の立場から系統的に分類するという試みがなされた。アクセサリーパラメーターの個数が 4 個の場合の Fuchs 型線形方程式の分類 (大島 [3]) に基づき、まずその分類に現れる 4 種類の線形方程式のモノドロミー保存変形方程式が具体的に導出された (坂井 [4])。これらの 4 個の「親玉」方程式の退化を全て考えることで 40 個の 4 次元 Painlevé 型方程式が分類及び導出された (対応する線形方程式が不分岐型の場合は川上-中村-坂井 [1]、分岐型の場合は川上 [2] による)。野海-山田系などもこの退化図式の中に系統的に位置付けられたことになる。

本論文では、この 40 種類の方程式の自励極限として得られる可積分系を考察した。モノドロミー保存変形の等スペクトラル極限を考えるとという自励化を考えているので、得られる Lax 対に現れる係数行列の固有方程式としてスペクトラル曲線が定まる。4 次元の系の場合、このスペクトラル曲線の係数としてハミルトニアン以外にもう 1 つ独立な保存量が得られ、この系は Liouville の意味で可積分系となる。

微分方程式はその変換によって見た目は変わりうる。以下で述べる本論文での幾何学的考察は、方程式の区別や幾何学的分類に役立つと思われる。また、自励極限という特殊な状況を考えているものの、重要な情報は保持されたままで、一般の場合を復元することが期待される。

$2g$ 次元の自励 Painlevé 方程式のスペクトラル曲線は種数 g の曲線であり、定義方程式の係

数にハミルトニアン H の多項式が入っているが、これをもとに H が \mathbb{P}^1 を動くときのファイブレーションを考えた。 $g = 1, 2$ のときスペクトラル曲線の定義式を Weierstrass の標準形に直したのから Weierstrass モデルを張り合わせで構成し、その最小特異点解消を考える。

定理. 各自励 2 次元 Painlevé 型方程式は一般のファイバーがスペクトラル曲線となる楕円曲面を定める。ハミルトニアンが ∞ となる点での特異ファイバーは以下の表のとおりである。

equation	P_{VI}	P_V	$P_{III(D_6)}$	$P_{III(D_7)}$	$P_{III(D_8)}$	P_{IV}	P_{II}	P_I
Kodaira type	I_0^*	I_1^*	I_2^*	I_3^*	I_4^*	IV^*	III^*	II^*
Dynkin type	$D_4^{(1)}$	$D_5^{(1)}$	$D_6^{(1)}$	$D_7^{(1)}$	$D_8^{(1)}$	$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$

表 1 2次元自励 Painlevé 方程式のスペクトラル曲線ファイブレーションの $H = \infty$ における特異ファイバー

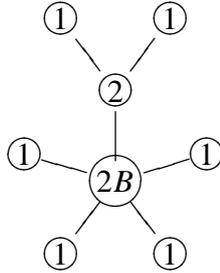
Weierstrass の標準形に直しさえすれば、判別式と j -不変量の $H = \infty$ での零点の位数を調べることで、特異ファイバーの小平タイプは Tate のアルゴリズムから容易に判別できる。現れる特異ファイバーの型は、各 Painlevé 方程式の岡本初期値空間のヴァーティカルリーフと呼ばれるものの配置の型に等しい。

同様なことを 40 個の 4 次元の自励 Painlevé 系に対して考察したのが本論文の主結果である。特異ファイバーの判別には Liu によるアルゴリズムを用いた。Liu のアルゴリズムは、Weierstrass の標準形から計算される判別式、井草不変量などの不変量の $H = \infty$ での零点の位数から、種数 2 の曲線のペンシルの特異ファイバー型（浪川-上野型）を与えるものである。

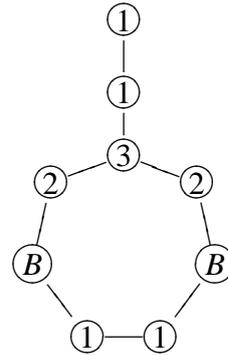
主定理. 各自励 4 次元 Painlevé 型方程式のスペクトラル曲線は、ファイバーが種数 2 の曲線となるファイブレーション $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を定める。ハミルトニアンが ∞ となる点での特異ファイバーは表 2 のとおりである。

表の最左列には 4 次元自励 Painlevé 型方程式（のハミルトニアン）の名前、次の列には対応する線形方程式のスペクトラル型、次の列には $H = \infty$ における特異ファイバーの浪川-上野型がそれぞれ書かれている。この表から、たとえば 4 次元自励行列 Painlevé 系のスペクトラル曲線ファイブレーションは 2 次元の場合の対応する特異ファイバーに種数 1 の成分を付け加えたものになっていることが分かる。もう片方の保存量に関しても同様に曲面を構成でき、その特異ファイバーの型についても本論文で述べた。一部の特異ファイバーの双対グラフを例示すると以下のようなになる。

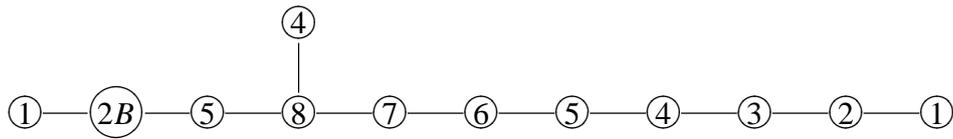
$$I_{1-0-0}^* : H_{Gar}^{1+1+1+1}$$



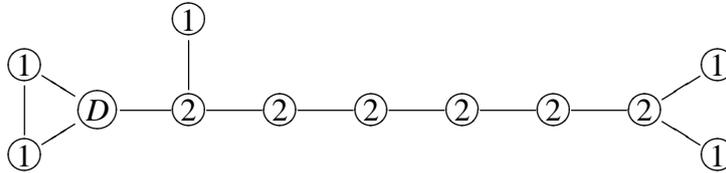
$$IV^* - II_4 : H_{NY}^{A_4}$$



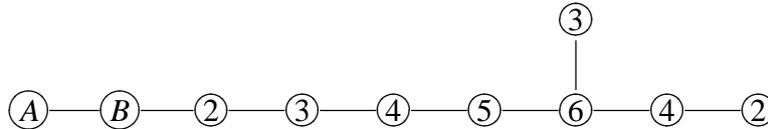
$$VII^* : H_{Gar}^{\frac{9}{2}}$$



$$I_3 - I_5^* - 0 : H_{KSs}^{\frac{5}{4}+2}$$



$$I_0 - II^* - 1 : H_I^{Mat}$$



参考文献

- [1] H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai. Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations. *arXiv preprint arXiv:1209.3836*, 2012, arXiv:1209.3836 [math.CA].
- [2] Hiroshi Kawakami. Four-dimensional Painlevé-type equations associated with ramified linear equations (in preparation).
- [3] Toshio Oshima. *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*. Number v. 28 in MSJ memoirs. Mathematical Society of Japan, 2012.
- [4] Hidetaka Sakai. Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type. *preprint, University of Tokyo, Graduate School of Mathematical Sciences*, 2010.

Hamiltonian	spectral type	N-U type	Dynkin	stable	Φ	Ogg	NU
$H_{Gar}^{1+1+1+1+1}$	11,11,11,11,11	I_{1-0-0}^*	-	II	$(2)^2 \times H_1$	33	par[3]
$H_{Gar}^{2+1+1+1}$	(1)(1),11,11,11	I_{1-1-0}^*	-	III	$H_1 \times H_1$	33	par[4]
$H_{Gar}^{3/2+1+1+1}$	(2)(1),(1)(1)(1)	I_{1-2-0}^*	-	III	$H_1 \times H_2$	33	par[4]
$H_{Gar}^{3/2+2+1}$	(1) ₂ , (1)(1), 11	I_{1-2-0}^*	-	III	$H_1 \times H_2$	33	par[4]
$H_{Gar}^{3/2+3/2+1}$	(1) ₂ , (1) ₂ , 11	I_{2-2-0}^*	-	III	$H_2 \times H_2$	33	par[4]
H_{Gar}^{3+1+1}	((1))(1),11,11	$IV^* - I_1^* - (-1)$	$E_6 - D_5 - (-1)$	VI	$(3) \times H_1$	29a	par[3]
H_{Gar}^{2+2+1}	(1)(1),(1)(1),11	$IV^* - I_1^* - (-1)$	$E_6 - D_5 - (-1)$	VI	$(3) \times H_1$	29a	par[3]
$H_{Gar}^{5/2+1+1}$	((1)(1))((1)(1))	$III^* - I_1^* - (-1)$	$E_7 - D_5 - (-1)$	VI	$(2) \times H_1$	29a	par[3]
H_{Gar}^{4+1}	((1)(1))((1)(1)),11	$III^* - II_1^*$	$E_7 - II_1^*$	II	(8)	23	par[3]
H_{Gar}^{3+2}	((1))(1),(1)(1)	$III^* - II_1^*$	$E_7 - II_1^*$	II	(8)	23	par[3]
$H_{Gar}^{5/2+2}$	((1)(1)) ₂ , (1)(1)	$II^* - II_1^*$	$E_8 - II_1^*$	II	H_2	25	par[3]
$H_{Gar}^{7/2+1}$	$II^* - II_1^*$	$E_8 - II_1^*$	II	H_2	25	par[3]	
$H_{Gar}^{3/2+3}$	(1) ₂ , ((1))(1)	$IV^* - III^* - (-1)$	$E_6 - E_7 - (-1)$	V	(6)	29	ell[2]
$H_{Gar}^{5/2+3/2}$	((1)(1)) ₂ , (1) ₂	$III^* - III^* - (-1)$	$E_7 - E_7 - (-1)$	V	$(2)^2$	29	ell[2]
H_{Gar}^5	((1)(1))((1)(1))	IX-3	-	I	(5)	21	ell[1]
$H_{Gar}^{9/2}$	VII*	-	I	(2)	22	ell[1]	
H_{FS}^A	21,21,111,111	II_{4-0}	-	II	(16)	41	par[3]
H_{FS}^A	(11)(1),21,111	II_{4-1}	-	IV	(17)	41	par[5]
H_{Suz}^{2+2}	(11)(1),(11)(1)	II_{5-2}	-	IV	(22)	41	par[5]
$H_{Suz}^{3/2+2}$	(11)(1), (1) ₂ 1	II_{4-3}	-	IV	(19)	41	par[5]
$H_{KFS}^{3/2+2}$	(1) ₃ , (11)(1)	II_{4-4}	-	IV	(20)	41	par[5]
$H_{KFS}^{4/3+2}$	(1) ₃ , (1) ₂ 1	II_{4-5}	-	IV	(21)	41	par[5]
$H_{KFS}^{4/3+4/3}$	(1) ₃ , (1) ₃	II_{3-6}	-	IV	(18)	41	par[5]
H_{NY}^A	(2)(1),111,111	II_{5-1}	-	III	$(2) \times (2)$	41a	par[4]
H_{NY}^A	((1))(1),111	$IV^* - II_4$	$E_6 - II_4$	II	(13)	41b	par[3]
H_{Ss}^D	31,22,22,1111	$I_3 - I_0^* - 0$	$A_2 - D_4 - 0$	VI	$(3) \times H_0$	2	par[3]
H_{Ss}^D	(111)(1),22,22	$I_3 - I_1^* - 0$	$A_2 - D_5 - 0$	VII	$(3) \times H_1$	2	par[4]
H_{Ss}^D	(2)(2),(111)(1)	$I_3 - I_2^* - 0$	$A_2 - D_6 - 0$	VII	$(3) \times H_2$	2	par[4]
$H_{Kss}^{3/2+2}$	(1) ₂ 11, (2)(2)	$I_3 - I_3^* - 0$	$A_2 - D_7 - 0$	VII	$(3) \times H_3$	2	par[4]
$H_{Kss}^{4/3+2}$	(1) ₃ 1, (2)(2)	$I_3 - I_4^* - 0$	$A_2 - D_8 - 0$	VII	$(3) \times H_4$	2	par[4]
$H_{Kss}^{5/4+2}$	(1) ₄ , (2)(2)	$I_3 - I_5^* - 0$	$A_2 - D_9 - 0$	VI	$(3) \times H_5$	2	par[4]
$H_{Kss}^{3/2+5/4}$	(2) ₂ (1) ₄	$I_2 - I_6^* - 0$	$A_1 - D_{10} - 0$	VI	$(2) \times H_6$	2	par[4]
H_{VI}^{Mat}	22,22,22,211	$I_0 - I_0^* - 1$	$I_0 - D_4 - 1$	V	$(2)^2$	14	ell[2]
H_V^{Mat}	(2)(11),22,22	$I_0 - I_1^* - 1$	$I_0 - D_5 - 1$	VI	H_1	14	par[3]
$H_{III(D_6)}^{Mat}$	(2)(2),(2)(11)	$I_0 - I_2^* - 1$	$I_0 - D_6 - 1$	VI	H_2	14	par[3]
$H_{III(D_7)}^{Mat}$	(2)(2), (11) ₂	$I_0 - I_3^* - 1$	$I_0 - D_7 - 1$	VI	H_3	14	par[3]
$H_{III(D_8)}^{Mat}$	(2) ₂ , (11) ₂	$I_0 - I_4^* - 1$	$I_0 - D_8 - 1$	VI	H_4	14	par[3]
H_{IV}^{Mat}	((2))(11),22,	$I_0 - IV^* - 1$	$I_0 - E_6 - 1$	V	(3)	14	ell[2]
H_{II}^{Mat}	((2)(2))((11))	$I_0 - III^* - 1$	$I_0 - E_7 - 1$	V	(2)	14	ell[2]
H_I^{Mat}	(((((11)))))) ₂	$I_0 - II^* - 1$	$I_0 - E_8 - 1$	V	0	14	ell[2]

表2 4次元自励 Painlevé 型方程式のスペクトラル曲線ファイブレーションの $H = \infty$ における特異ファイバー