論文の内容の要旨

論文題目 On Lagrangian caps and their applications
(ラグランジュキャップとその応用について)

氏名　吉安　徹

1 背景

シンプレクティック多様体 (X, ω) に対し，そのラグランジュ部分多様体 L の位相にはシンプレクティック構造 ω に由来する制限がかかることが知られている．最初の結果は Gromov [4] によるもので，標準シンプレクティック空間における完全な閉ラグランジュ部分多様体の非存在定理である．Gromov は擬正則曲線の理論を構築し，このことを証明した．その後，上記の理論の発展に伴い，類似の結果が多く証明された．その代表例として，Viterbo [8]，Seidel [7]，Biran [1] らの結果が挙げられる．一方で，ラグランジュはめ込みはホモトピー原理 [5] を満たし，ラグランジュ埋め込みと比較して位相的な制限が弱いこと，豊富に存在することが知られている．実際，ラグランジュ正則ホモトピー類であって埋め込みを含まないもの，連続写像のホモトピー類であってラグランジュはめ込みを含むがラグランジュ埋め込みを含まないものの例が容易に構成できる．ラグランジュはめ込みとラグランジュ埋め込みの差を考察することは，シンプレクティックトポロジーにおける重要な問題の一つである．

Eliashberg-Murphy [3] は，ルースなルジャンドル部分多様体の理論 [6] を用いて，ラグランジュ自己交叉の解消理論を構築した．その直後，Ekholm-Eliashberg-Murphy-Smith [2] はこの理論を応用して，ラグランジュ正則ホモトピー類における自己交点数の最小値の上からの評価を与えた．これらの結果により，錘特異点を持つラグランジュ埋め込みはラグランジュはめ込みに近い対象であること，ラグランジュ正則ホモトピー類内における自己交点数の最小値はシンプレクティック構造に由来する制限をほとんど持たないことがわかった．

2 主結果

本論文の目標は，シンプレクティック多様体 $\mathbb{C}P^3$ および $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ に対し，ラグランジュはめ込みとラグランジュ埋め込みの差を調べることである．主結果を述べる．

定理 1　X を複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ または直積 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ とする．向き付け可能 3 次元連結閉多様体 L とラグランジュはめ込み $f\colon L\#(S^1 \times S^2) \to X$ に対し，f にホモトピックなラグランジュ埋め込み $L\#(S^1 \times S^2) \to X$ が存在する．

定理 1 は，次の二段階で示される．ラグランジュはめ込み $L\#(S^1 \times S^2) \to X$ はラグラン

ジュはめ込み $L \to X$ を誘導し，さらにその自己交叉が 1 点であるものを選ぶことができる．Polterovich のラグランジュ手術により，自己交叉は $S^1 \times S^2$ の連結和の埋め込みとして解消することができ，一段階目のホモトピー類をうまく選んでおくことにより求めるホモトピー類を実現することができる．一段階目の証明の中で Eliashberg-Murphy [3] によるラグランジュ自己交叉の解消理論が 6 次元コンパクトシンプレクティック多様体に対して有効であること，つまり次の二つの定理を示して用いる．

定理 2 (X, ω) を 6 次元単連結シンプレクティック多様体，L を 3 次元連結閉多様体とする．ラグランジュはめ込み $f_0\colon L \to X$ はハミルトン正則ホモトピーによって次を満たす自己横断的ラグランジュはめ込み f_1 に変形できる．

$$\mathrm{SI}(f_1) = \begin{cases} 1, & I(f_0) = 1, \\ 2, & I(f_0) = 0. \end{cases}$$

ここに，$\mathrm{SI}(f_1)$ は f_1 の自己交点数，$I(f_0)$ は f_0 の代数的自己交点数を表す．

定理 3 (X, ω) を 6 次元単連結シンプレクティック多様体，L を 3 次元連結閉多様体とする．錐特異点を持つラグランジュはめ込み $f_0\colon L \to X$ であって代数的自己交点数が 0 かつ錐特異点におけるルジャンドル絡み目がルースであるものは，ハミルトン正則ホモトピーによって錐特異点をもつラグランジュ埋め込みに変形できる．

定理 2 と 3 の証明の鍵となる補題は次のものである．

補題 4 n を 3 以上の整数とし，アニュラス $A = [0,1] \times S^{n-1}$ を考える．T^*A のカノニカルなリュウビル形式を λ と書く．10 以上の整数 N に対し，次を満たすラグランジュはめ込み $\Delta\colon A \to T^*A$ が存在する．

1. Δ の像は零切断の $\frac{12}{N}$-近傍に含まれる．
2. Δ は ∂A の近傍で零切断に一致する．
3. Δ と零切断の間のラグランジュ正則ホモトピーであって，∂A を固定し，零切断の $\frac{12}{N}$-近傍に像を持つものが存在する．
4. $\{0\} \times S^{n-1}$ と $\{1\} \times S^{n-1}$ を繋ぐ任意の道に対し，その Δ の像に沿った λ の積分値は 1.
5. Δ の各自己交点における action は $\frac{2}{N}$ 未満．
6. Δ の自己交点数は $4N^2$.

Eliashberg-Murphy [3] によるラグランジュ自己交叉の解消理論は，ホイットニー円板がシンプレクティック面積 0 を持つような自己交叉の組に対して用いることができる．彼らは与えられたラグランジュはめ込みに対し，その自己交叉を作用が小さい多数の自己交叉に置換することで，このような自己交叉の組を作った．自己交叉の組を作る際に交わりを持たないようなダルブー座標を用意する必要があるため，上記の操作における自己交叉の増大度がシンプレクティック多様体のコンパクト性に影響する．補題 4 を用いて増大度をおさえることにより，6 次元コンパクトシンプレクティック多様体に対しても彼らの議論が有効であることを示すことができる．

参考文献

[1] P. Biran, Lagrangian non-intersections, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006) 279–326.

[2] T. Ekholm, Y. Eliashberg, E. Murphy, and I. Smith, Constructing exact Lagrangian immersions with few double points, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013) 1772–1803.

[3] Y. Eliashberg and E. Murphy, Lagrangian caps, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013) 1483–1514.

[4] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985) 307–347.

[5] M. Gromov, Partial Differential Relations, *Springer-Verlag.* (1986).

[6] E. Murphy, Loose Legendrian Embeddings in High Dimensional Contact Manifolds, *Preprint* arXiv:1201.2245.

[7] P. Seidel, Graded lagrangian submanifolds, *Bull. Soc. Math. France*, **128** (2000) 103–149.

[8] C. Viterbo, Functors and computations in Floer homology with applications, I, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999) 985–1033.