論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　吉安　徹

シンプレクティク多様体は、シンプレクティク形式と呼ばれる非退化閉2形式 ω が与えられた偶数次元多様体である。そのラグランジュ部分多様体とは、ω の制限が自明となるような中間次元の部分多様体である。シンプレクティク多様体上の幾何学を展開するうえで、どのようなラグランジュ部分多様体が存在するかを知ることは極めて重要な問題である。

Gromov は、彼のホモトピー原理を適用して、中間次元多様体からの写像に対し、それを被覆する接束の間の写像で各ファイバーの像がラグランジュ部分空間になるものが存在すれば、その写像はラグランジュはめ込みにホモトピックであることを示している。

しかし、このはめ込みの2重点をラグランジュ正則ホモトピーで解消して、ラグランジュ埋め込みに変形することができるとは限らない。このことは、フビニ・ストゥディ形式を持つ複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ においては、そのラグランジュ部分多様体の位相についての Seidel, Biran 達の結果からわかる。

向きづけ可能3次元閉多様体の6次元シンプレクティク多様体へのラグランジュはめ込みについては、前述の Gromov の結果により、任意の向きづけ可能3次元閉多様体 L は、標準シンプレクティク空間にはめ込まれる。ある条件を満たすラグランジュはめ込みに対する Eliashberg-Murphy のラグランジュ自己交叉の解消理論を用いて、Ekholm-Eliashberg-Murphy-Smith は、任意の向きづけ可能3次元閉多様体 L に対し、連結和 $L\sharp(S^1 \times S^2)$ は標準シンプレクティク空間に埋め込まれることを示した。

論文提出者 吉安 徹 は、次の定理を示した。

定理。 X を $\mathbf{C}P^3$（あるいは $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^2$）にフビニ・ストゥディ形式（の和）を与えたものとする。任意の向きづけ可能3次元閉多様体 L に対し、連結和 $L\sharp(S^1 \times S^2)$ の任意のラグランジュはめ込み f に対し、f と連続写像としてホモトピックなラグランジュ埋め込み g が存在する。

この定理は、連続写像 $L\sharp(S^1 \times S^2) \longrightarrow X$ が、ラグランジュはめ込みとホモトピックであるとき、L からのラグランジュはめ込みが定まること、さらに自己交叉を1点にすることができることを示し、その自己交叉を、Polterovich のラグランジュ手術により、$S^1 \times S^2$ との連結和の埋め込みとして解消できる

ことを用いて示される。$\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^2$ の場合は、L からのラグランジュはめ込みのホモトピー類は（連続写像のホモトピー類と同じ）$\pi_3(\mathbf{C}P^1)$ の自由度をもつことを用いる。

論文提出者 吉安 徹 は、この証明で、Eliashberg-Murphy のラグランジュ自己交叉の解消理論が 6 次元コンパクトシンプレクティク多様体でも有効であること、すなわち、次の結果を証明して用いている。

定理。 X を 6 次元コンパクトシンプレクティク多様体、3 次元閉多様体 L からのラグランジュはめ込みはハミルトン正則ホモトピーにより、代数的交叉数が $1 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ならば幾何的自己交叉数 1 の、代数的交叉数が $0 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ならば幾何的自己交叉数 2 のラグランジュはめ込みに変形できる。

このような自己交叉の解消のためには、作用が等しい自己交叉の対を作る必要がある。Eliashberg-Murphy は、与えられた自己交叉を、作用が十分小さい多数の自己交叉に置き換え、それらから対を作って解消している。作用を小さくしていく時の自己交叉の個数の増大度が問題となるが、論文提出者 吉安 徹 は、ここに自己交叉の個数の増大度をおさえる新しい構成法を用い、Ekholm-Eliashberg-Murphy-Smith においては、8 次元以上のコンパクトシンプレクティク多様体に対して示されていた、ラグランジュはめ込みの自己交叉をハミルトン正則ホモトピーにより、幾何的交叉数が代数的交叉数の絶対値あるいはそれに 2 を加えた個数まで解消する手法が、6 次元にも適用できることを示した。

これらの論文提出者 吉安 徹 の結果は、難しいと考えられていた 6 次元コンパクトシンプレクティク多様体におけるラグランジュ自己交叉の解消が、実際に可能であることを示し、それを具体的なラグランジュ埋め込みにホモトピックとなる 3 次元多様体からのラグランジュはめ込みの存在の証明に応用したもので、この分野のこれからの研究の基礎となる重要なものである。

よって論文提出者 吉安 徹 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。