論文の内容の要旨

論文題目：
Some results concerning the range of random walk of several types
(複数の種類のランダムウォークの訪問点に関連する結果)

氏名： 岡村 和樹

本論文は５つのパートから成る。以下では、それぞれについて要旨を与える。

1 ある一様性条件をみたすグラフ上のランダムウォークレンジについて

Dvoretzy and Erdös (1951) に始まる $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークレンジの研究には様々なものがあるが、最も基本的なものの一つに大数の法則がある。本論文ではこれを、$\mathbb{Z}^d$ 以外, とくに vertex-transitive とは限らない無限グラフについて考えた。ここでは、出発点によってランダムウォークの分布が異なるため、$\mathbb{Z}^d$ 上での研究で用いられる手法は必ずしも使えるわけではない。無限連結グラフを X と書き（頂点の集合も同じ記号で書く。辺の集合を表す記号は省略する。)、その上の単純ランダムウォークを $(S_n)_n$, X 上のある点 x から出発する $(S_n)_n$ の分布を P_x と書く。R_n で、集合 $\{S_0, \dots, S_n\}$ の個数を表す。$T_x^+ := \inf\{n \geq 1 : S_n = x\}$ とし、$F_1 := \inf_{x \in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$, $F_2 := \sup_{x \in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$ とおく。$R_{\text{eff}}(A, B)$ を A と B の間の有効抵抗とする。距離は通常のグラフ距離について考えるとする。x から、x 中心半径 n の球 $B(x, n)$ の外への有効抵抗 $R_{\text{eff}}(\{x\}, X \setminus B(x, n))$ が、半径 n を無限大にするときに、x について一様収束、もしくは一様に正の無限大に発散するときに、グラフは一様性条件 (U) をみたすということにする。

本論文では、(i) (U) をみたす無限連結グラフ X に対して、大数の弱法則に相当するものを示した。具体的には、任意の $\epsilon > 0, x \in X$ に対して、

$$\lim_{n \to \infty} P_x(R_n/n \geq 1 - F_1 + \epsilon) = 0, \lim_{n \to \infty} P_x(R_n/n \leq 1 - F_2 - \epsilon) = 0. \tag{1}$$

である。(ii) (U) より強い仮定をおくとき、大数の強法則に相当するものを示した。具体的には、ある $\delta > 0$ に対して、$\sup_x P_x(M < T_x^+ < +\infty) = O(M^{-1-\delta}), M \to +\infty,$ であるとき、任意の頂点 x について、

$$1 - F_2 \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} \leq 1 - F_1, \ P_x\text{-a.s.}$$

である。(iii) また、(U) の下では、(1) の収束がある意味あいにおいてそれ以上改善できないことを示した。具体的には、ある無限連結グラフ X で、(U) をみたし、かつ、ある頂点 $o \in X$ について、

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_2,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_1.$$

となるものを構成した。これから、(1) の収束で、F_1 をより大きい実数に、F_2 をより小さい実数に、取り替えることはできないことがわかる。

(U) をみたすグラフの例として、Sierpinski gasket/carpet グラフ, Vicsek ツリーと呼ばれるフラクタルグラフがある。$\mathbb{Z}^d$ は自明に (U) をみたしており、(ii) により高次元の場合には大数の強法則が導ける。これらのグラフと rough isometric なグラフも (U) をみたしている。

(i) の証明は、大まかな方針としては、Benjamini, Izkovsky and Kesten (2007) の定理 1 の証明と類似しているが、細部は、出発点によってランダムウォークの分布が異なるため、彼らのものとは異なる。また、Benjamini, Izkovsky and Kesten (2007) の定理 1 を (U) をみたすグラフに対して拡張した。(iii) を示すために、transient の強さの異なるツリーを 2 種類考え、グラフ自体を、無限遠に行くにしたがって、それらのグラフを交互に並べることによって構成する。これにより $E_o[R_n]/n$ を振動させることができる。

2 1 次分数変換から定義される関数方程式の解の特異性に関する結果

パート 2 ではある種の De Rham の関数方程式 (1957) の解の性質について調べる。この研究の動機は、以下で述べるパート 3 の内容から生じている。具体的には、$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ についての関数方程式

$$f(x) = \begin{cases} F_0(f(2x)) & 0 \le x \le 1/2 \\ F_1(f(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{2}$$

において、$F_i, i = 0, 1,$ が、2 次実正方行列 A_i から定まる 1 次分数変換であるときを考察する。A_0, A_1 にはいくつか条件を課しておく。本論文では、(2) の解を分布関数とするような $[0,1]$ 上の確率測度 $\mu = \mu_{A_0,A_1}$ について、それが Lebesgue 測度に対して絶対連続か特異か、さらに特異の場合はその度合いを調べる。ある特殊な $A_{p,0}, A_{p,1}, p \in (0,1),$ に対し、$A_0 = A_{p,0}, A_1 = A_{p,1},$ の場合の $\mu_p = \mu_{A_0,A_1}$ は、$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度と見なしたときパラメーター p の Bernoulli 測度になっている。μ_p は、$p = 1/2$ で Lebesgue 測度そのもの、$p \ne 1/2$ で Lebesgue 測度に対し特異である。 μ_{A_0,A_1} は、$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度と見なしたとき、μ_p のように Bernoulli 測度になる場合を含むと同時に、積測度ではないものも含むことが特徴である。

本論文では、(i) 測度 μ の Hausdorff 次元 $\dim_H \mu$ の、上からと下からの評価を与えた。この評価は全てではないがある種の (A_0, A_1) に対しては有効である。(ii) A_0, A_1 それぞれの成分についての関係式から、μ が絶対連続か特異かを判定する必要十分条件を記述し、さらに、絶対連続の場合は滑らかな密度関数をもつこと、特異の場合は μ の Hausdorff 次元が 1 より真に小さいこと、

を示した。これらの結果は共に Bernoulli 測度 μ_p の場合に適用できる。　また、解の逆関数を分布関数とする測度は、ある設定の下での定常測度と呼ばれるものになっており、その特異性についても、元の測度 μ についての特異性についての結果を用いて、得られた。結果自体は実解析的であるが、証明は確率論的になされる。(i) の証明は、A_0, A_1 の成分に課された条件を用いて示される。(ii) の証明は、A_0, A_1 のランダム行列の積のある側面を調べることでなされ、自然数のランダムな部分集合を 4 種類考えてそれらの間の関係をみることがポイントである。なお、系として、$p \neq 1/2$ のときの Bernoulli 測度 μ_p の特異性に、異なる 2 種類の方法で証明を与えたことになる。

3　自己相互作用をもつランダムウォークの区間上のレンジについて

Athreya, Sethuraman and Tóth (2011) は、ランダムウォークが区間から脱出するまでの訪問点の個数を nearest-neighbor な Markov 型ランダムウォークに対して考え、区間のサイズを無限大にするときのスケール極限の存在を示した。本論文では、この問題を Hambly, 服部, 服部 (2002) で定義された自己相互作用をもつランダムウォークに対して考えた。自己相互作用をもつランダムウォークの研究は化学におけるポリマー（高分子）の研究を動機の一つにしているものである。数学的な特徴の一つに Markov 性がないことが挙げられる。Hambly, 服部, 服部 (2002) では, $\mathbb{Z}$ と, Sierpinski ガスケットグラフの上に、自己相互作用をもつランダムウォークの 1 変数族 $\{P^u\}_{u \geq 0}$ を定めている。それはある種の指数の意味で、自己回避ランダムウォークと単純ランダムウォークを連続に補間している。単純ランダムウォーク ($u = 1$ の場合) を含んでいると同時に、$u \neq 1$ の場合は Markov 性がないという特徴をもつ。求めたいスケール極限は区間 $[0, 1]$ 上の確率測度とみなせるが、それを Q^u と書く。本論文では、もとのランダムウォークが Markov 型の場合 ($u = 1$) は、Q^u は Lebesgue 測度に対して絶対連続、一方、非 Markov 型の場合 ($u \neq 1$) は、Q^u は特異であることを示した。また、$u > \sqrt{3}$ の場合には Q^u は $(0, 1]$ 内の全ての 2 進有理数上でアトムをもつことが分かった。証明方法は、パスの組み合わせの考察から、ある種の de Rham の関数方程式 (1957) の解の性質を調べることに帰着させることである。そこでは、パート 2 の結果が用いられる。なお、Athreya, Sethuraman and Tóth (2011) の議論は、Markov 性に依存しており、この場合には使えない。

4　２つの１次分数変換から定義される測度についてランダムな列

上で述べたパート 2 で定義した μ_{A_0,A_1} について、それから決まる無限 0,1 列のランダム性の定義がある。本論文では、パート 2 での行列 A_0, A_1 の成分を計算可能実数とするときに、μ_{A_0,A_1} についてランダムな点の構成的 Hausdorff 次元を考察した。具体的には、いくつかの場合にその次元の上からと下からの評価を行った。また、μ_{A_0,A_1} が絶対連続のとき構成的 Hausdorff 次元が丁度 1, 特異のとき次元が 1 より真に小さいことを示した。これらの結果はパート 2 に対応している。パート 2 での議論中にあらわれるいくつかの零集合が構成的であることを示すことが証明のポイントである。Bernoulli 測度を含む積測度のあるクラスに対しては Lutz (2003) による結果がある。

本論文の結果は、Bernoulli 測度の場合を含んでいると同時に、積測度ではないクラスに対するものである。

5 長距離相関をもつパーコレーション上のランダムウォークの大偏差原理

久保田 (2012) は、supercritical な Bernoulli 型パーコレーションにおいて、ほとんど全ての無限クラスターに対し、その上の単純ランダムウォークの大偏差原理を証明した。本論文では、この結果をある種の長距離相関をもつパーコレーションモデルに対して拡張した。具体的には、パーコレーションの分布のシフトについてのエルゴード性と、グラフ距離に関するある仮定の下で、ほとんど全ての無限クラスターに対し、その上の単純ランダムウォークについて大偏差原理を証明した。大まかな方針としては久保田 (2012) と同じであるが、ポイントは Lyapunov 指数と呼ばれるものの劣加法性の証明にある。久保田 (2012) における Lyapunov 指数の劣加法性の証明は、Bernoulli 型のパーコレーションの独立性を用いる。著者は、ある種のエルゴード定理を使うことで、 独立性の条件なしで証明することに成功した。プレプリント (2013) にまとめたが、その後、Lyapunov 指数の劣加法性の証明においてより簡潔な別解の示唆があったため、本論文ではそれを記した。著者のプレプリントでの証明については最後の節で述べられる。なお、この手法を用いて、Garet and Marchand (2004) の、グラフ距離に関する shape theorem を拡張できる。