

## 論文審査の結果の要旨

氏名 胡 国荣

本提出論文は、いくつかの条件をみたす距離測度空間上の非負自己共役作用素から定義される Besov 空間, 及び Triebel-Lizorkin 空間に関する研究を行ったものである。これらの関数空間は、古典的にはユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  上に導入されたもので、斉次、非斉次とあり、その違いを考慮したうえで、Besov 空間は Hölder-Zygmund 空間を特別な場合を含み、また Triebel-Lizorkin 空間は  $L^p$  空間, Hardy 空間,  $L^p$ -Sobolev 空間, BMO 空間などを統一的に扱える枠組みとなっている。いずれも、偏微分方程式論などではしばしば使われている関数空間であり、実解析学的観点からも研究が深められてきた。

古典的な場合、Besov 空間も、Triebel-Lizorkin 空間もその定義には、本質的にフーリエ変換が使われているため、それを一般化することは容易ではなく、これまでにさまざまな研究がされてきた。たとえば Kerkyacharian と Petrushev は緩増加超関数のある種の距離測度空間に導入して、Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間の研究を行った。彼らは距離測度空間を考え、その上の非負自己共役作用素で、熱核が Gaussian upper bound, 及び Hölder 連続性をみたすものをもとに解析を行った。古典的な場合は、ユークリッド空間上のラプラシアンがその一例である。本提出論文は、Kerkyacharian らの研究をさらに発展させたものになっている。

本提出論文による新しい貢献は次のものである。まず、Kerkyacharian らが最初から仮定していた非負自己共役作用素に関する条件のうち、熱核の Hölder 連続性の条件を落として、Besov 空間論, Triebel-Lizorkin 空間論を構築した。これにより理論の適用範囲が広がることが期待できる。さらに、それだけでなく、Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間のアトム分解を得た。古典的な場合、アトムの定義にはモーメント条件という、ある次数までの多項式と直交するという条件が含まれている。しかし、距離測度空間には一般には多項式が定義されているとは限らない。本提出論文では、多項式が定義されているとは限らない上記の一般的な設定において、モーメント条件ではなく、もっと別の作用素論的な条件に置き換えたアトムに基づくアトム分解を証明した。アトム分解は、近年の関数空間論では基本的な考え方の一つになっており、これによ

りいろいろな関数空間の研究が進められてきた。本提出論文により本論文の設定下でアトム分解が証明されたことの意義は大きい。また、本提出論文では、本論文の一般的な設定のもとで Peetre 最大関数による特徴づけができることも証明された。これらの効用は大きく、本論文では Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間のさまざまな実解析的な性質を本論文の設定のもとで証明し、さらに Hardy 空間の Littlewood-Paley 型の特徴づけ、面積積分による特徴づけなどの結果を得た。

さらに、本提出論文では stratified Lie 群上の実解析への応用も得ている。この Lie 群はハイゼンベルク群などを特別な場合に含んでいるものである。ハイゼンベルク群はタイプ II の Siegel 上半空間の境界として現れることから、調和解析では古くから研究され、特に Folland と Stein による多変数複素解析で重要な対象である接 Cauchy-Riemann 方程式への応用は有名である。その研究における実解析学的側面での本質的な結果の一つは stratified Lie 群上のあるクラスの特異積分作用素の  $L^p$  有界性に関する結果である。本論文では、Folland と Stein の特異積分の  $L^p$  有界性に関する結果を、この論文で整備した Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間の理論を用いて、これらの関数空間に適切な一般化を与えた。そのほかにも、いくつかの条件をみたすリーマン多様体の場合にハーディ空間の Triebel-Lizorkin 空間による特徴づけを一般化している。

本提出論文の成果は基盤的なものであり、古典的な場合において Besov 空間や Triebel-Lizorkin 空間が調和解析学、偏微分方程式論で果たしている大きな役割を考えれば、今後の応用も期待できる。

本提出論文は以上のように、基盤的研究として高く評価できるものである。よって、論文提出者 胡国荣は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。