論文の内容の要旨

論文題目: Fukaya categories and blow-ups
（深谷圏とブローアップ）

氏名: 三田　史彦

1　はじめに

まずはじめにこの論文の目的について述べる。この論文の目的はミラー対称性から予想されるケーラー多様体の深谷圏と連接層の導来圏の関係について調べることである。より具体的には連接層の導来圏が半直交分解をもつときそれに対応する深谷圏の直交分解を構成することである。連接層の導来圏が半直交分解を持つような具体例として部分多様体に沿ったブローアップについて考える（[3]）。この時にブローアップの深谷圏はベースの多様体の深谷圏の変形とブローアップの中心の深谷圏の変形によって直積分解されることが期待される。またその帰結としてブローアップの量子コホモロジーが対応する直積分解を持つことが期待される。この論文の主結果は具体例を調べることによってこのような現象が確かに成り立つことを強く示唆している。以下においてこの論文の内容を各節ごとに要約する。

2　第２節

(X,ω) をコンパクトケーラー多様体とケーラー形式の組とする。また L を $(X,\omega$ のコンパクトで向きづけ可能かつスピン構造を持つラグランジュ部分多様体とする。更に X に含まれる任意の $\mathbb{P}^1$ のチャーン数は 0 以上とし、L に境界を持つ正則円盤のマスロフ数は 2 以上と仮定する。この節ではまずフレアーコホモロジーが定義される普遍ノビコフ体とそれにかかわるいくつかの概念について簡潔にまとめた。その後に上記の条件の下で L に境界を持つ正則円盤を数えることで定義されるポテンシャル関数の性質、及び L のフレアーコホモロジーとの関係についてついて述べた。この節の結果のほとんどはフレアーコホモロジーを定める A 無限代数のカノニカルモデルを考えることにより、Fukaya, Oh, Ohta, Ono に (以下 FOOO) よるトーリック多様体の場合の対応する結果と同様にして示される（[2]）。

3　第３節

この節ではケーラー多様体 X の部分多様体 C に沿ったブローアップ X_C に関するいくつかの基本的な性質を調べた。特にラグランジュ部分多様体 L が C と交わらず、さらに X_C と L の組も 2 節と同じ正値性を満たす場合に (X, L) のポテンシャル関数と (X_C, L) のポテンシャル関数の関係について調べた。更に X_C がいつ上記の正値性を満たすかを調べた。

4　第４節

この節ではまず (X, L) のポテンシャル関数を用いてある多面体を構成した。この構成はトーリック多様体におけるモーメント多面体とポテンシャル関数の関係の類似として得られる。更に適切な条件の下でこの多面体に対応するトーリック多様体のバルク変形されたポテンシャル関数と (X_C, L) のポテンシャル関数を対応させた。この対応は FOOO による特異点の普遍変形定理によって得られが、この時にポテンシャル関数を $\mathbb{C}$ 上ではなくノビコフ体上のある種の収束級数環の元として考えることが本質的である。更にこの主張の条件を満たす具体的な例として X がある種のトーリック多様体であるような場合を考えた。これは Abouzaid-Auroux-Katzarkov により得られていた例のささやかな拡張を与える ([1])。この場合には対応する多面体はブローアップのベースのトーリック多様体のモーメント多面体と一致し、従ってブローアップのポテンシャル関数をベースのポテンシャル関数のバルク変形で書いたことになる。そしてこのことは FOOO によるトーリック多様体のミラー対称性の結果や、第 5 節の内容などからベースのトーリック多様体の深谷圏のバルク変形がブローアップの深谷圏に忠実に埋め込まれることを強く示唆している。

5　第５節

この節の目的はポテンシャル関数の計算からどのようにして量子コホモロジーの情報を得るかを説明することである。まずポテンシャル関数はラグランジュ部分多様体のフレアーコホモロジーを定義する際のある種の障害として解釈できる。この関係によってポテンシャル関数からフレアーコホモロジーの情報を引き出すことができる。更にフレアーコホモロジーと量子コホモロジーの間には通常のコホモロジーの間の制限写像とギジン写像

のある種の量子化として得られる写像がありこれらの写像に関するいくつかの性質を仮定するとフレアーコホモロジーから量子コホモロジーの情報が得られる。なおこれらの性質は一般的な証明はなされていないものの Abouzaid-Fukaya-Oh-Ohta-Ono により予告されている結果に基づくものでありほとんど間違いなく正しいものであることを注意しておく。最後にこの手法の具体的な応用例として $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ をある楕円曲線に沿ってブローアップした例を考え、この場合に量子コホモロジーの環構造を完全に決定した。そしてこの計算は最初に述べた現象と整合的になっている。またこのようにフレアーコホモロジーの情報のみを用いて量子コホモロジーの計算が与えられた例はまだほとんどないため、その点においても興味深いものと思われる。

参考文献

[1] M. Abouzaid, D. Auroux, and L. Katzarkov. Lagrangian fibrations on blowups of toric varieties and mirror symmetry for hypersurfaces. *ArXiv e-prints*, April 2012.

[2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds. *ArXiv e-prints*, September 2010.

[3] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):852–862, 1992.