論文の内容の要旨

論文題目

Numerical analysis of various domain-penalty and boundary-penalty methods
(様々な領域処罰法および境界処罰法の数値解析)

氏名

周　冠宇 (Guanyu Zhou)

有限要素法を偏微分方程式に適用する際, 数値計算を容易に効率的にするため, 様々な処罰手法が提案されている. 例えば, 境界が時間に依存する発展方程式に対して, 移動境界の処理は難しい. そのため, 元の問題を大きい固定領域 (仮想領域という) 上で再定式化する. 再定式化方法は, 仮想領域に対応する処罰項を付け加える. その処罰問題は元の問題を近似する事ができる. 本研究は様々な処罰方法をとりあげて, 適当性と収束性を考察する. 特に, 処罰問題に対して正則性の解析理論も構築する. さらに, 処罰法の誤差評価とその有限要素法の数値解析も行う.

本論文では以下の三つの処罰法を考察する.

第 1 章では, 楕円型方程式に対する仮想領域法 (L^2 処罰法) を考察する. 仮想領域法の原理は, 対象の領域を含む単純な形状の領域 (仮想領域) で偏微分方程式の問題を解くことに基づいている. そして, 仮想領域はもとの境界と独立な一様メッシュによって分割する. そのため, 境界に適合するメッシュを構築する手間を省くことができる. 仮想領域法の中に, 処罰パラメータ ϵ を使用して問題を再定式化する L^2 処罰法がある.

本章では, 次の楕円型方程式の Dirichlet 境界値問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, Ω は滑らかな領域である. 仮想領域法として, Ω を含む長方形 (形状を簡単にするため) 領域 D を取って, $\Omega \subset D$, 次の L^2 処罰問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + 1_{\Omega_1}\dfrac{1}{\epsilon}u_\epsilon = \tilde{f} & \text{in } D, \\ u_\epsilon = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $0 < \epsilon \ll 1$, $\Omega_1 = D \backslash \overline{\Omega}$, 1_ω はある領域 w の特性関数である. $\tilde{f}$ は f のゼロ拡張である.

主結果について述べる. 先ず L^2 処罰問題 (2) に対する, パラメータに依存する拡張定理を示して, H^2 正則性を証明する. 特に, ϵ に関する次のようなノルム評価を得る:

$$\|u_\epsilon\|_{H^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u_\epsilon\|_{H^k(\Omega_1)} \le C\epsilon^{\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

このノルム評価を用いて, 処罰法の誤差評価を示す:

$$\|u - u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C\epsilon^{\frac{1}{4}},$$

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

さらに, 仮想領域 D に対する一様メッシュを与えて, 処罰問題 (2) の $P1$ 要素を近似する. 次の有限要素法の誤差評価を証明する:

$$\|u - u_{\epsilon h}\|_{H^1(\Omega)} \le C(\epsilon^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{1}{2}}),$$

$$\|u - u_{\epsilon h}\|_{H^1(\Omega)} \le C(\epsilon^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{1}{2}})^2.$$

ここで, $u_{\epsilon h}$ は有限要素法の数値解である, h は空間離散パラメータである.

第 2 章では, Stokes/Navier-Stokes 方程式滑り境界条件問題に対する処罰法を考察する. 先ず, 次の定常 Stokes 方程式の境界値問題考える:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u|_D = 0, \quad u_n|_\Gamma = 0, \quad \tau_T(u) = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

ここで, ν, u, p, f はそれぞれ粘性係数・流速・圧力・外力である. Ω は滑らかな領域で, $\partial\Omega = D \cup \Gamma$, $D \cap \Gamma = \emptyset$. n は境界上での外向き単位法線ベクトル

を表し, ベクトル u に対してその法線成分と接線成分をそれぞれ $u_n = u\cdot n$, $u_T = u - u_n n$ と書く. $\sigma(u,p) = -pI + \nu(\nabla u + \nabla^T u)$ は応力テンソルは $\sigma(u,p) = -pI+\nu(\nabla u+\nabla^T u)$ で, $\tau(u,p) = \sigma(u,p)\cdot n$ は応力ベクトルである. $\tau_n(u,p)$, $\tau_T(u,p) = \tau_T(u)$ は応力ベクトルの法線成分と接線成分である. この問題は完全 Dirichlet 境界値問題にと比べると, 数学解析理論はあまり違わないが, 数値計算に対して滑り境界条件の処理は大変難しい. Variational crime を避けるため, テクニカルな実装手法が必要である.

一方で, 処罰法は実装し易い. しかし, 処罰法に対して, 有限要素法の誤差評価と Navier-Stokes 問題に関する解析理論は十分ではなかった. 本研究は Stokes 問題に対する処罰法の誤差評価と有限要素法の誤差解析を行う, さらに, Navier-Stokes 問題に対する処罰法の well-posedness と誤差評価を示す.

先ず, Stokes 問題に対する主結果を述べる. 次の処罰問題を考える:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_\epsilon + \nabla p_\epsilon = f, \quad \nabla\cdot u_\epsilon = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_\epsilon|_D = 0, \quad \tau(u_\epsilon,p_\epsilon) + \dfrac{1}{\epsilon}u_{\epsilon n}n = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{4}$$

Ω は C^{m+2} 級と仮定して, 次の誤差評価が証明する:

$$\|u - u_\epsilon\|_{H^m(\Omega)} \le C\epsilon\|f\|_{H^{m-1}(\Omega)}.$$

さらに, 有限要素法を処罰問題 (4) に応用して, $P1/P1$ 要素および $P1b/P1$ 要素を考えて, 誤差解析を行う. 2 次元の場合, 次の結果を得る:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C(\epsilon + h + \frac{h^2}{\epsilon}), \quad \textit{reduced-order} \text{ scheme},$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C(\epsilon + h + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}), \quad \textit{nonreduced-order} \text{ scheme}.$$

ここで, u_h は有限要素法の近似解である. 3 次元の場合は:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C(\epsilon + h + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}).$$

次に, Navier-Stokes 問題に対する, 以下のような処罰問題を考える:

$$\begin{cases} u'_\epsilon - \nu\Delta u_\epsilon + (u_\epsilon\cdot\nabla)u_\epsilon + \nabla p_\epsilon = f, \quad \nabla\cdot u_\epsilon = 0, & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u_\epsilon|_{D\times(0,T)} = 0, \quad \tau(u_\epsilon,p_\epsilon) + \dfrac{1}{\epsilon}u_{\epsilon n}n = 0, & \text{on } \Gamma\times(0,T), \\ u_\epsilon(0,x) = u_0, & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

そして, (4) の正則性を証明し, 誤差評価を示す:

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \le C\epsilon.$$

第 3 章では, Navier-Stokes 方程式に対する片側境界条件問題を考える:

$$\begin{cases} u' - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla\cdot u = 0, & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u|_{C\times(0,T)} = 0, \quad u|_{S\times(0,T)} = b, & \\ u \geq 0, \quad \tau_n(u,p) \geq 0 & \text{on } \Gamma\times(0,T), \\ \tau_n(u,p)u = 0, \quad \tau_T(u) = 0 & \text{on } \Gamma\times(0,T), \\ u(0,x) = u_0 & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

ここで, $\partial\Omega = C\cup S\cup\Gamma$. (6) は大動脈中の血流のシミュレーション問題に対して提案された新しいモデル問題である. C は血管の壁として, Dirichlet 境界条件を加えて, 血液の流入境界 S は定められた流速 b とする. 現実の場合, 流出境界 Γ は事前に定められないため, 様々な人工境界条件を加える. 本研究は, 解のエネルギー不等式を保証できる Signorini's type の流出境界条件を提案する.

本章の目的は, (6) の解の存在と一意性を示すことである. 一方で, 問題 (6) の弱形式は variational inequality なので, 数値計算に対する処理が簡単ではない. そのため, 処罰法を提案し, variational inequality の弱形式を処罰項付きの variational equation より近似する. 処罰問題の解の存在と一意性も示す.

さらに, 定常 Stokes 問題に対して, 片側境界条件問題と処罰法の well-posedness を考察する. 特に, 処罰法の誤差解析を行う.