

論文審査の結果の要旨

氏名 周冠宇

偏微分方程式 (PDE) 論の深化やシミュレーション技術の発達によって、非線形 PDE で記述される複雑な問題に対する計算手法は十分に発展し、現実問題のシミュレーションを通じて、自然科学の発展に大きく寄与している。しかし、計算方法を理解してもそれを直ちにコンピュータ上で実行するのは、熟練の研究者でも難しい。一方で、広く範囲の問題を比較的簡単に扱える、汎用ライブラリやソフトウェアも開発されている。したがって、複雑な問題を、ある程度汎用的な技術で扱えるような問題に数学的に再定式化することは重要である。

本学位論文は、この再定式化を行う方法である処罰法についての周氏の一連の研究の成果をまとめたものであり、

第1章 楕円型方程式に対する L^2 処罰法

第2章 Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式の滑り境界値問題に対する処罰法

第3章 Signorini 型片側境界下での Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式とそれに対する処罰法

の三章からなる。

第1章で扱われている仮想領域法とは、複雑形状をした領域上で定義された PDE を、仮想領域と呼ばれる単純な領域で元の領域を含むようなものを導入して、仮想領域上での問題に再定式化する方法であり、工学的には良く応用されている。論文では、楕円型方程式に関して、仮想的な抵抗を導入することに相当する L^2 仮想領域法について、解の正則性と、処罰パラメータに関する解の漸近的な挙動、誤差解析、それから有限要素法による離散化問題に対する誤差解析を行っている。

有限要素法や有限体積法では、空間領域が滑らかな場合、それを、多面体近似して、その多面体上で PDE の近似解を構成する。必然的に、境界条件も近似的に扱うことになる。しかし、ベクトル値の方程式で、さらに境界条件が成分毎に与えられる場合には、このような境界条件の近似の妥当性は明らかではない。第2章で扱われている滑り境界条件は、非圧縮性粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を用いたシミュレーションでは頻繁に使われる条件である。物理的には、流体が容器の壁面から「漏れない」という条件、すなわち、壁面上で流体の速度ベクトルの法線成分が零であるということの意味する。これに対して、標準的な Dirichlet 条件は、壁面に沿って流体が動くことを意味

する。この滑り境界条件は、線形であり、PDE としては、Dirichlet 条件と同じように解析が可能である。しかしながら、数値計算の立場からは、事情が全く異なり、いろいろな問題があることが知られている。というのも、近似問題における境界上の法線方向の意味が、自明ではなくなるのである。周氏は、処罰パラメータを導入して、境界条件を Robin 型境界条件で近似するという手法に着目し、有限要素法による離散化と解析を行い、再定式化と近似方法の数学的正当性を確立した。

第3章では、やはり Navier-Stokes 方程式を用いたシミュレーションにおける人工境界条件として現れる、ある不等式境界条件下での Navier-Stokes 方程式の解の一意存在と安定性を証明している。境界条件が非線形であるから、解析半群を応用した Kato-Fujita の意味での強解 (mild solution) を構成方法は使えない。そのため、このような非標準的な境界条件を考える際には、Leray-Hopf クラスの弱解を構成するに留まることが多い。しかし、それでは後の応用で有限要素近似などを考える際に不足である。そこで、周氏は、Ladyzhenskaya クラスと呼ばれる、妥当な正則性を持った解の構成を試み、それに成功している。その証明の方法として、処罰法を応用している。

論文全体に共通する問題としては、再定式化により、解の正則性に関する性質が変わるので、解析は困難を極める。しかし、周氏は、この正則性を詳細に調べて、部分的には良い正則性が得られるということを見出し、それを効果的に応用して解析に成功している。結果的に、例えば第2章では、定常 Navier-Stokes 方程式を考える限りにおいて、現在広く知られている Robin 型の境界条件よりも、それにある種の対称化に対応する項を導入した方が良いという事実を指摘した。これは、経験からの導出はほぼ不可能な、深い数学解析を行うことではじめて明らかになった、重要な成果である。また、論文を通じて、最適な処罰パラメータの導出までを行っており、数学的な質の高さとともに、工学的な応用の価値も高い。さらに、第3章で報告されている、流れ問題に対する人工境界条件の処罰法を用いた数値計算手法の提案と誤差の収束証明は、数学的に重要な結果を与えているだけでなく、工学などに現れる実現象の数値計算における問題点の数学的側面からのある種の解答を与えている。このことは、周氏の研究成果が応用数学の他分野との協働などの観点からも重要な価値を持っていることを示している。

よって、論文提出者 周冠宇 は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。