論文の内容の要旨

論文題目
On a new geometric construction of a family of Galois representations associated to modular forms

（保型形式に付随するガロア表現の族の新たな幾何的構成について）

氏名：三原 朋樹

私は有限スロープを持つモジュラー形式に付随する Galois 表現の p 進族の新たな幾何的構成を与えた。その構成の概要を述べる。まずレベル $N \geq 5$ と N を割る素数 $p \neq 2$ を固定する。スキーム上の副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層という概念を、有限 p 群に値を持つエタール層の逆系として定義する。レベル $\Gamma_1(N)$ のモジュラー曲線 $Y_1(N)$ 上の副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層を具体的に構成し、そのコホモロジーとして非常に大きな岩澤加群を定義すると、それには普遍 Hecke 環 $\mathscr{T}_N$ と $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続な作用が自然に誘導され、かつ両者の作用は互いに可換となる。コホモロジーを有限スロープの Hecke 固有値の p 進族で切り出すことで Galois 表現の p 進族が得られ、これを適切に係数拡大することで係数環上階数 2 の自由加群を下部構造に持つ $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 加群を得る。

この新たな構成は通常尖点形式に付随する Galois 表現の族に制限した場合にも既存の幾何的構成とは異なるものである。H. Hida による構成は、モジュラー曲線のレベルを固定せずに動かすことで射影系を作り、その上で Jacobian 多様体の Tate 加

群の逆極限を使うもので、この方法は重さ 2 のみの考察に帰着できる点で非常に優れているが、代わりにレベルを固定しないためダイヤモンド作用素の寄与が隠れてしまい、結果として重さに沿った p 進補間が観測しにくい定式化になっている。A. Wiles による構成は、肥田族という曲線に沿って擬表現を貼り合わせ、可換環としての岩澤代数の良い性質により擬表現を表現に持ち上げるというもので、この方法は空間の極限を経由せずに 1 つの曲線上で擬表現の普遍変形を用いて直接構成できる点で非常に優れているが、代わりにコホモロジーとの関係性が捉えにくくなっている。私の構成はレベルを固定した 1 つのモジュラー曲線上で具体的な層を見ているため重さに関する p 進補間は岩澤代数を経由して直接記述でき、かつ抽象的な普遍変形を用いずに具体的にコホモロジーとして実現させている。このことは Coleman と Mazur によって提示された問題にも深く関係する。二人は肥田族を一般化した Coleman 族という曲線を定義し、その上で擬表現を貼り合わせることで A. Wiles と同様の手法により通常モジュラー形式とは限らない有限スロープのモジュラー形式の p 進族に対しても Galois 表現を構成したが、やはりコホモロジーとの関係性が得られなかったため、特にその構成がコホモロジー的に翻訳できるか否かを問題として提示した。その際に具体的な翻訳のさせ方の案まで指定しており、私の構成はそれとは異なるものではあるがコホモロジーを用いて Galois 表現の族を構成したという点で重要である。

第一章　Preliminary（準備）

第一章は三節よりなる。第一節では位相環上の位相（左）加群について復習する。位相加群の重要なクラスとして副有限加群を導入する。これは単に副有限位相が入った加群の意ではない点で注意が必要である。位相加群が副有限加群であるとは、下部構造の位相空間が有限離散集合であるような位相加群の逆極限と同相同型であるということである。本論文では特に位相環が $\mathbb{Z}_p$ か岩澤代数である場合に副有限加群を用いる。第二節では位相モノイド上の位相加群について復習する。単なる位相群ではなく位相モノイドに広げて考えなければならない理由は、行列環の乗法モノイドやその部分モノイドのような位相モノイドを用いて Galois 作用や Hecke 作用の構成を行うからである。位相環上の副有限加群の概念を一般化し、位相モノイド上の副有限加群を同様に定式化する。第三節では p 進体に係数を持つモジュラー形式や $\mathbb{Z}_p$ 代数としての Hecke 環について復習する。Hecke 環はいくつかの種類を扱うが、特に有限のスロープ $< s$ に対応する 2 種類の普遍ヘッケ環 $\mathscr{T}_N^{[<s]}$ と $\mathscr{T}_N^{<s}$ を導入する。これらは $\mathscr{T}_N$ 上の位相代数であり、コンパクト位相 $\mathscr{T}_N$ 加群をこれら 2 つに係数拡大することで有限スロープ成分を切り出すことができる。具体的には第三章で扱うコホモロジーがコンパクト位相 $\mathscr{T}_N$ 加群であり、これの有限スロープ成分を切り出すために用いる。またこれらは有限スロープを持つ尖点形式の p 進族を定式化する際にも役立つ。

第二章　**Actions on Continuous Cohomologies**（連続コホモロジーへの作用）

第二章は三節よりなる。第一節では位相モノイド上の位相加群の連続コホモロジーという概念を定式化する。これは通常の群コホモロジーの拡張であり、かつ特別な場合には同じく群コホモロジーの拡張である連続群コホモロジーと自然な同相同型を持つ。第二節では前述したスキーム上の副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層を導入し、その連続コホモロジーという概念を有限レベルのコホモロジーの逆極限として定式化する。副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層の連続コホモロジーは有限性を持つとは限らない位相 $\mathbb{Z}_p$ 加群の構造を持つため、導来関手として定式化することができない。これは $\mathbb{Z}_p$ 加群の圏や有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群の圏が自然に Abel 圏をなすことに対し、位相 $\mathbb{Z}_p$ 加群の圏は像と余核が同型でないため Abel 圏にならないためである。しかしながら層に有限性が課されている場合は通常の導来関手で与えられるコホモロジーと下部構造の $\mathbb{Z}_p$ 加群が自然に同型であり、また一般の場合にも層の副有限性から連続コホモロジーはいくつかの良い性質を持つことが分かる。例えばスキームの代数的基本群上の副有限加群は関手的に副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層に対応し、この対応は両者の低次連続群コホモロジーを保つ。従って代数的基本群上の副有限加群に良い条件が課されている場合、その連続コホモロジーと連続群コホモロジーとの比較により、対応する副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層の連続コホモロジーは逆極限を用いずに計算できる。第三節ではモジュラー曲線上の副有限 $\mathbb{Z}_p$ 層の連続コホモロジーに Galois 作用や Hecke 作用を定める。これらは互いに可換な作用であり、従って Hecke 固有値で連続コホモロジーを切り出すと Galois 表現を得る。

第三章　**Interpolation of Étale Cohomologies**（エタールコホモロジーの補間）

第三章は三節よりなる。第一節では対称テンソル $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Q}_p^2)$ を重さ k に沿って p 進位相的に補間する方法論を展開する。各々違う次元を持つ表現の族を直接補間することは困難極まるが、この対称テンソルの岩澤型双対は自然に無限次元の拡大を持ち、各拡大は重さによらず互いに下部構造の位相 $\mathbb{Z}_p$ 加群を共有しているため容易に補間される。またこれの拡大は無限次元既約ユニタリー表現の岩澤型双対による拡大であり、それらは更に対称テンソル（反射的であるため自身の岩澤型双対と自然に同型）によって補間されるため、それらによる拡大もまた対称テンソルで補間される。結果として、無限次元の拡大を岩澤代数上に補間した位相加群は重さを走る対称テンソルの直積に単射に埋め込まれ、補間に用いた余分な無限次元分の寄与は無視できる。この岩澤代数に付随する副有限層の連続コホモロジーとして、$\mathscr{T}_N$ と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続な作用が与えられた位相加群を得る。第二節ではそのコホモロジーの有限スロープ成分を切り出し、岩澤代数と $\mathscr{T}_N^{<s}$ の生成するコンパクト位相環上の位相加群としての有限性を示す。更にコホモロジーを Hecke 固有値で切り出すことで尖点形式に付随する Galois 表現が得られることを確認する。第三節では Hecke

固有値の族をパラメータ付けする環として Λ 進代数という概念を定式化する。これは岩澤代数上のコンパクト可換位相環であり、標語的には「$\mathbb{Z}_p$ 値の重さを持つ点を豊富に持ち」「一致の定理が成立する」ような曲線に対応するような概念である。Λ 進代数は自然に $\mathbb{Q}_p$ 上の 1 次元局所コンパクト σ コンパクト分離的解析空間を与える。良い条件の課された $\mathbb{Q}_p$ 上の曲線は Λ 進代数に付随する解析空間によるエタール被覆を持ち、特に Coleman 族は離散集合を取り除くことでその滑らかなオルタレーションの上に Λ 進代数に付随する解析空間によるエタール被覆が取れる。一致の定理から Λ 進代数は整域であることが分かり、Λ 進代数に値を持つモジュラー形式という概念を定式化するとそれら全体のなす空間は生成点上で有限生成になる。特に Λ 進代数が Noether 環である場合は大域的な有限性が従い、普遍 Hecke 環が自然にこの空間に連続作用を持ち、双対性などを満たす。第二節で得た有限スロープ成分の切りだされたコホモロジーを Λ 進代数に値を持つ尖点形式で切り出しそれを適切に係数拡大することで、$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続な作用が与えられた階数 2 の自由加群を得、それの特殊化としてモジュラー形式に付随する Galois 表現を与える。以上によりモジュラー形式に付随する Galois 表現の族の幾何的構成を得る。