論文の内容の要旨

論文題目 Monte Carlo Methods for Non linear Problems in Mathematical Finance (数理ファイナンスにおける非線形問題のモンテカルロ法による数値計算)

氏名: 森本 裕介

本論文では数理ファイナンスに現れる非線形問題に対するモンテカルロ法を用いた数値計算法について論じる．数理ファイナンスに現れる非線形問題として代表的ものとしてアメリカン・オプションやバミューダン・オプションといった早期行使可能なオプションの価格付けが挙げられる．ここで，アメリカン・オプションは満期までの任意の時刻で，バミューダン・オプションは事前に決められた複数の行使判定時刻でそれぞれ早期行使可能なオプションである．そして，アメリカン・オプションはバミューダン・オプションの行使判定の間隔を短くしていくことで近似することができる．バミューダンオプションの価格を求めることはベルマン原理により，行使時点ごとに満期時点から順に継続価値と呼ばれる一時点先のオプション価格の条件付期待値と，行使価値の大きい値を繰り返し求める Daynamic Programming に帰着される．ここで，継続価値と行使価値の大小比較という非線形性があるため，満期から順に後退的に継続価値を計算していく必要があり，ラティス法や偏微分方程式の有限差分法は適用可能であるが，原資産のパスを時間の流れに沿って前進的に発生させるモンテカルロ法を直接用いることはできない．

モンテカルロ法を用いてバミューダン・オプション価格を評価する際には，原資産パスの各状態における条件付期待値を近似計算することになるが，計算効率の面から条件付期待値を状態空間上の関数として近似することが必要になる．このような近似関数の代表的な構成手法として事前に選択したいくつかの関数による回帰を使って近似を行う Least Square Regression 法と，ランダムな関数を構成して近似を行う Stochastic Mesh 法がある．

本論文の第 2 章では， Stochastic Mesh 法によるバミューダン・オプション価格の近似の評価を行った．Stochastic Mesh 法では拡散過程の期待値を表す作用素 $P_{T-t}f$ の近似として，次のようなランダムな作用素を導入する．

$$(Q_{s,t}^{(L)}f)(x) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{p(t-s,x,X_\ell(t))f(X_\ell(t))}{q_{s,t}^{(L)}(X_\ell(t))}, \qquad x \in E,\ f \in m(E).$$

ここで，

$$q_{s,t}^{(L)}(y,\omega) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} p(t-s, X_\ell(s,\omega), y), \qquad y \in E,\ \omega \in \Omega,$$

である．$(Q_{s,t}^{(L)} f)$ は次のような性質を持つ．

$$E^P[(Q_{s,t}^{(L)} f)(x) | \mathcal{F}_s^{(\infty)}] = (P_{t-s} f)(x), \qquad \nu_s - a.e. x \in E.$$

そして，バミューダン・オプションの近似 $c_{t_k,t_{k+1},\ldots,t_n}(x)$ を次のように構成する．
$n \geqq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, に対し $c_{t_k,t_{k+1},\ldots,t_n} : E \to \mathbf{R}$, と $\tilde{c}^{(L)}_{t_k,t_{k+1},\ldots,t_n} : E \times \Omega \to \mathbf{R}$, $k = n, n-1, \ldots, 0$, $L \geqq 1$, をそれぞれ帰納的に次のように定める．
$c_{t_n}(x) = \tilde{c}^{(L)}_{t_n}(x) = g(T,x)$, $x \in E$,

$$c_{t_k,t_{k+1},\ldots,t_n}(x) = \int_E p(t_{k+1}-t_k, x, y)(g(t_{k+1}, y) \vee c_{t_{k+1},\ldots,t_n}(y))dy,$$

$$\tilde{c}^{(L)}_{t_k,t_{k+1},\ldots,t_n}(x) = Q^{(L)}_{t_k,t_{k+1}}(g(t_{k+1}, \cdot) \vee \tilde{c}^{(L)}_{t_{k+1},\ldots,t_n}(\cdot))(x)$$

Theorem 1 $n(L) \geqq 1$, $0 = t_0^{(L)} < t_1^{(L)} < \ldots < t_{n(L)}^{(L)} = T$ とする．また，

$$L^{-(1-\varepsilon)/2} \sum_{k=1}^{n(L)} (t_k^{(L)} - t_{k-1}^{(L)})^{-(N+1)\ell_0/4} \to 0,$$

となる $\varepsilon > 0$ が存在するとする．このとき，次が成り立つ．

$$E[|\tilde{c}^{(L)}_{t_0^{(L)}, t_1^{(L)}, \ldots, t_{n(L)}^{(L)}}(x_0) - c_{t_0^{(L)}, t_1^{(L)}, \ldots, t_{n(L)}^{(L)}}(x_0)|^2] \to 0, \qquad L \to \infty.$$

また， re-simulation と呼ばれる方法に Stochastic Mesh 法を適用して得た近似がの真の価格へ収束する際のオーダーに関する評価を行った．さらに，第 3 章では Least Square Regression 法による近似の誤差を評価し，どのような関数を事前に選択すればよい近似が得られるかについて考察を行った．

数理ファイナンスに現れる非線形問題の中でも近年注目を集めているのが，CVA(Credit Valuation Adjustment）の計算手法である．CVA は OTC(店頭) デリバティブ取引におけるカウンターパーティ・リスクを管理するための概念であり，金融危機以降，大手金融機関を中心に広く活用されている．CVA は取引相手が将来デフォルトした際に受ける損失額の期待値として算出される．損失の大きさはエクスポージャーと呼ばれ，取引相手と結んでいる契約全体の合計価値の正の部分となり，CVA の計算は非線形な問題となる．また，CVA の計算はポートフォリオ単位で行われるため，参照する資産の数が多くなり，高次元の問題となることも CVA の計算を難しくする要因である．CVA をモンテカルロ法で計算する際に，各パス毎にエクスポージャーの計算のため，将来時点のデリバティブの価値を計算する必要があるが，効率的な計算を行うためにはバミューダン・オプションの計算のように，デリバティブの将来価値を状態空間の関数として近似することが必要になる．第 4 章では Stochastic Mesh 法を適用した CVA のモンテカルロ法による 2 つの近似手法を紹介し，それに対する評価をおこなった．

CVA として次のようなものを考える．

$$c_0 = E^\mu[\int_0^T \{g(t, X(t,x^*))E^\mu[\sum_{m=1}^{M} \sum_{k:T_k \geqq t} F_{m,k}(\tilde{X}^{(m)}(T_k, \tilde{x}_m^*))|\mathcal{F}_t] \vee 0\}dt]. \tag{1}$$

Π を分割 $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ で $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ かつ $\{T_k; k = 1, \ldots, K\} \subset \Delta$ となるもの全体の集合とする．また，$|\Delta| = \max_{i=1,\ldots,n}(t_{i+1} - t_i)$ とする．
そして，c_0 の近似 $\hat{c}_i = \hat{c}_i(\varepsilon, \Delta, L) : \Omega \to \mathbf{R}, i = 1, 2$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&\hat{c}_1(\varepsilon, \Delta, L)(\omega) \\
=&\frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)g(t_i, X_\ell(t_i))(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k:T_k \geqq t_{i+1}}(Q_{t_i,T_k,\varepsilon}^{(m,L,\omega)}F_{m,k})(\pi_k(X_\ell(t_i))) \vee 0),
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{c}_2(\varepsilon, \Delta, L)(\omega) \\
=&\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)E^\mu[g(t_i, X(t_i, x^*))(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k:T_k \geqq t_{i+1}}F_{m,k}(\pi_k X(T_k, x^*))) \\
&\qquad \times 1_{\{\sum_{m=1}^{M}\sum_{k:T_k \geqq t_{i+1}}(Q_{t_i,T_k,\varepsilon}^{(m,L,\omega)}F_{m,k})(\pi_k X(t_i, x^*))) \geqq 0\}}].
\end{aligned} \tag{3}
$$

$\hat{c}_1$ は，将来のデリバティブの価値に Stochastic Mesh 法で計算した値そのものを用いる方法で，$\hat{c}_2$ は，将来のデリバティブ価値の正負の判定のみに Stochastic Mesh を使う方法である．
$\hat{c}_1$ の評価に関して，次の定理が成り立つ．

Theorem 2 $\alpha_0 = (1 + \delta)(\tilde{N} + 1)\ell_0/4 \vee 1$ とする．$\{\varepsilon_L\}_{L=1}^\infty \subset (0, \varepsilon_0)$ を $\varepsilon_L \leqq C_0 L^{-\frac{1+\delta}{2(1+\alpha_0)}}$ となる $C_0 > 0$ が存在するような列とする．このとき全ての $L \geqq 1$ と $\Delta \in \Pi$. に対し，次を満たす $C_1 \in (0, \infty)$ が存在する．

$$
E^P[|\hat{c}_1(\varepsilon_L, \Delta, L) - c_0|] \leqq C_1(L^{-\frac{1}{1+\alpha_0}} + |\Delta|)
$$

$\hat{c}_2$ の評価に関して，次の定理が成り立つ．

Theorem 3 $\alpha_1 = (1 + \delta)(\tilde{N} + 1)\ell_0/2 \vee 1$, とする．$\{\varepsilon_L\}_{L=1}^\infty \subset (0, \varepsilon_0)$ を $\varepsilon_L \leqq C_0 L^{-\frac{1+\delta}{2\alpha_1+1}}$ を満たす $C_0 > 0$ が存在するような列とする．さらに，$\gamma \in (0, 1]$ と $C_\gamma > 0$ が存在し，すべての $\theta \in (0, 1]$ に対し，次を満たすとする．

$$
\sup_\Delta \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i))\mu(|\sum_{m=1}^{M}\sum_{k:T_k \geqq t_{i+1}}(P_{T_k - t_i}^{(m)}F_{m,k})(\pi_m X(t_i, x^*)))| \leqq \theta) \leqq C_\gamma \theta^\gamma.
$$

このとき $C_1 \in (0, \infty)$ と $\tilde{\Omega}(L) \in \mathcal{F}$, $L \geqq 1$, が存在し，全ての $L \geqq 1$, と $\Delta \in \Pi$ に対し，次が成り立つ．

$$
P(\tilde{\Omega}(L)) \to 1, \ L \to \infty,
$$

$$
1_{\tilde{\Omega}(L)}|\hat{c}_2(\varepsilon_L, \Delta, L) - c_0| \leqq C_1(L^{-(\frac{1}{2}+\frac{(1-\delta)}{2\alpha_1+1})\frac{1+\gamma}{2+\gamma}} + |\Delta|).
$$