論文の内容の要旨

論文題目: Stable presentation length of 3-manifold groups (三次元多様体の基本群の安定表示長)

氏名: 吉田 建一

本論文では、有限表示群に対して stable presentation length という不変量を導入し三次元多様体の基本群に対する stable presentation length が単体体積の類似とみなせるような諸性質について調べた。

有限表示群 G の presentation length $T(G)$ が Delzant [Del96] によって

$$T(G) = \min_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{m} \max\{0, |r_i| - 2\}$$

と定義されている。ここでは G の表示 $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n | r_1, \ldots, r_m \rangle$　すべてに関する最小値を考え、$|r_i|$ は語長とする。また、有限表示群 G とその部分群 $C_1, \ldots, C_l$ の組 $(G; C_1, \ldots, C_l)$ に対する相対的な presentation length も Delzant [Del96] によって以下のように定義されている。

定義 1 (Definition 2.2)**.** G を有限表示群、 $C_1, \ldots C_l$ をその部分群とする。以下を満たす二次元複体 P を $(G; C_1, \ldots C_l)$ に対する (relative) presentation complex と呼ぶ。

- P の面は三角形または二角形である。
- P は頂点に $C_1, \ldots C_l$ と対応する isotropy をもつ orbihedron である。
- P の orbihedron としての基本群が G と同型となる。

$(G; C_1, \ldots C_l)$ の (relative) presentation length $T(G; C_1, \ldots C_l)$ を presentation complex に含まれる三角形の最小数と定義する。

Francaviglia と Frigerio と Martelli [FFM12] によって、三次元多様体 M の stable complexity $c_\infty(M)$ が導入されている。これは三次元多様体の complexity $c(M)$ からえられる、有限被覆に対して体積のように振舞う不変量である。三次元双曲多様体 M に対して $c(M)$ は四面体分割における四面体の最小数に一致する。stable complexity と単体体積は定数倍で上下からおさえられる関係にあるが、一致するかどうかは未解決である。

stable complexity と類似の方法によって stable presentation length を導入した。

定義 2 (Definition 3.2)**.** G を有限表示群、 $C_1, \dots C_l$ をその部分群とする。G および $(G; C_1, \dots C_l)$ の stable presentation length を

$$T_\infty(G) = \inf_{H \le G} \frac{T(H)}{[G:H]},$$
$$T_\infty(G; C_1, \dots C_l) = \inf_{H \le G} \frac{T(H; \{gC_ig^{-1} \cap H\}_{1 \le i \le l, g \in G})}{[G:H]}$$

と定義する。ここで下限は G のすべての有限指数部分群 H についてとる。

これにより、 G の有限指数部分群 H に対して体積のように

$$T_\infty(H) = [G:H] \cdot T_\infty(G),$$
$$T_\infty(H; \{gC_ig^{-1} \cap H\}_{1 \le i \le l, g \in G}) = [G:H] \cdot T_\infty(G; C_1, \dots C_l)$$

が成り立つ。

さらに、三次元多様体の基本群に対する stable presentation length $T_\infty(M) = T_\infty(\pi_1(M))$ について考察した。境界をもつ三次元多様体に対しては境界の基本群を相対的部分においた stable presentation length $T_\infty(M; \partial M)$ を考えるのが自然であるが、カスプをもつ三次元双曲多様体に対しては $T_\infty(M; \partial M) = T_\infty(M)$ となることを示した。より一般に、以下の定理を示した。

定理 3 (Theorem 4.2)**.** G を residually finite な有限表示群、 $C_1, \dots, C_l$ を階数 2 以上の自由アーベル群と同型な G の部分群とする。このとき $T_\infty(G; C_1, \dots C_l) = T_\infty(G)$ が成り立つ。

三次元双曲多様体 M に対して $\mathrm{vol}(M) < \pi \cdot T(M)$ という不等式がなりたつことが Cooper [Coo99] によって示されている。逆に presentation length の定数倍で体積を下からおさえることはできないが、stable presentation length を使えば可能であることを示した。

命題 4 (Proposition 4.4)**.** 定数 $K > 0$ が存在して、任意の三次元双曲多様体 M に対して $K \cdot T_\infty(M) \le \mathrm{vol}(M)$ である。

命題 4 の証明には stable presentation length と stable complexity の関係を使った。三次元双曲多様体の四面体分割の二次元骨格が基本群の presentation complex となることから、$T_\infty(M) \le c_\infty(M)$ が従う。よって、三次元双曲多様体の体積が stable complexity の定数倍で下からおさえられることに帰着される。

ここで、三次元双曲多様体の stable presentation length と stable complexity は比例するのではないかと予想した。

予想 5 (Conjecture 4.8)**.** 三次元双曲多様体 M に対して $T_\infty(M) = c_\infty(M)/2$ が成り立つ。

この予想に関して、 $T_\infty(M) \le c_\infty(M)/2$ を支持するような例を Appendix に挙げた。

最後に、stable presentation length に単体体積や stable complexity と同様の加法性があり、Seifert 多様体に対する値が 0 になることを示した。加法性の証明において、 Delzant [Del96] による群の分解における presentation length の評価を使った。この際に分解後の多様体の境界の基本群を相対的部分にもつ presentation length が現れるが、stable presentation length にすれば定理 3 によって相対的部分は無視できる。

定理 6 (Theorem 5.1)**.** $G = G_1 * G_2$ を群の自由積とすると、$T_\infty(G) = T_\infty(G_1) + T_\infty(G_2)$ が成り立つ。

定理 7 (Theorem 5.3)**.** $M = M_1 \cup \cdots \cup M_h$ を既約な三次元多様体の JSJ 分解とすると、$T_\infty(M) = T_\infty(M_1) + \cdots + T_\infty(M_h)$ が成り立つ。

定理 8 (Theorem 5.2)**.** M を Seifert 多様体とすると、$T_\infty(M) = T_\infty(M; \partial M) = 0$ が成り立つ。

これらの性質と幾何化により、閉三次元多様体の stable presentation length は連結和分解および JSJ 分解の後の双曲的部分の stable presentation length の和になり、単体体積の定数倍で上下からおさえられることがわかった。

系 9 (Corollary 5.4)**.** 定数 $K > 0$ が存在して、閉三次元多様体 M に対し

$$K \cdot T_\infty(M) \leq \|M\| \leq \frac{\pi}{V_3} T_\infty(M)$$

が成り立つ。ここで $\|M\|$ は M の単体体積、V_3 は三次元双曲空間内の理想正四面体の体積である。

参考文献

[Coo99] D. Cooper. The volume of a closed hyperbolic 3-manifold is bounded by π times the length of any presentation of its fundamental group. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 127(3):941–942, 1999.

[Del96] T. Delzant. Décomposition d'un groupe en produit libre ou somme amalgamée. *J. Reine Angew. Math.*, 470:153–180, 1996.

[FFM12] S. Francaviglia, R. Frigerio, and B. Martelli. Stable complexity and simplicial volume of manifolds. *J. of Topology*, 5(4):977–1010, 2012.